עודכן לאחרונה: November 1, 2026

🗺️ מפת דרכים לארבע שנים · שנה 3, אביב

על הקורס

לקורס החינמי הזה יש 10 יחידות ו-6 מעבדות. אלה המספרים האמיתיים, לא תוכנית ארוכה יותר שקוצרה.

בדיקה היא מספר או תוצאת קוד בעמוד קורס שסקריפט מחשב מחדש לפני הפרסום. המספר המודפס והמספר שחושב מחדש חייבים להתאים.

זהו מתווה של קורס חינמי ללימוד עצמי שנכתב על ידי Saving Planets. הוא אינו קורס אוניברסיטאי, אינו מעניק נקודות זכות אקדמיות, ואף מוסד לימודים אינו מעורב בו.

היקפו תואם קורס סמסטריאלי בהסתברות וסטטיסטיקה לשנה השלישית למהנדסים. הוא מבוסס על הנושאים והעומק של MIT 18.05 Introduction to Probability and Statistics ו־MIT 6.041 Probabilistic Systems Analysis (חינמיים ב־MIT OpenCourseWare), ומשתמש בספר החינמי OpenStax Introductory Statistics וב־NIST/SEMATECH e-Handbook of Statistical Methods, שאליהם אנו מקשרים היכן שהם עוזרים. אף אחד מהמחברים, המוסדות או הגופים האלה אינו תומך בדף זה.

מה אנחנו מוסיפים: כל יחידה קשורה לעבודה אמיתית עם מקור ציבורי מצוטט (הסתברויות שיטפונות ורעידות אדמה של USGS, תחזיות הוריקנים וקונוסי תחזית של NOAA, רשומת ה־CO_2 של Mauna Loa וניתוח הטמפרטורות של NASA), כל מספר בדף מחושב מחדש בסקריפט בדיקה לפני הפרסום, ולכל מעבדה יש סימולציה חינמית או גיליון אלקטרוני.

עברו עליו לפי הסדר. בכל יחידה יש מטרות, רעיונות מרכזיים, משוואות, דוגמאות צעד אחר צעד, תרגול עם תשובות מלאות, טעויות נפוצות, כרטיסיות ובוחן. ההתקדמות שלכם נשמרת רק בדפדפן הזה.

איך הקורס הזה עוזר להציל את כדור הארץ

הגנה על אנשים ועל כדור הארץ היא שאלה של סיכויים: מה הסיכוי לשיטפון, לרעידת אדמה או להוריקן, כמה אנו בטוחים שה־CO_2 עולה מהר יותר, וכמה אמינות המערכות שמזהירות אותנו.

הסטטיסטיקה הופכת נתונים לסיכויים האלה ואומרת לנו כמה לסמוך עליהם. כל יחידה מסתיימת בפרק קצר עם מקורות. ערכים שאינם ממקור מסומנים כערכי דוגמה או ערכי ספר לימוד.

למורים

אפשר ללמד את הקורס הזה, או לתת לתלמיד לעבור אותו לבד. הוא חינם. Saving Planets לא נותנת ציון ולא נקודות זכות.

- העמוד הזה הוא כל הקורס: 10 יחידות ו-6 מעבדות (MATH 350).

- תכננו 15 שבועות, בערך 6 עד 9 שעות בשבוע, כולל שבועות המעבדה.
- עקבו אחרי לוח 15 השבועות. קראו את היחידה, פתרו על הנייר, ואז פתחו את התשובה. בשבוע מעבדה עשו את המעבדה או את הגרסה הביתית.
- בדיקה היא מספר או תוצאת קוד בעמוד שסקריפט מחשב מחדש לפני הפרסום. המספר שרואים והמספר שחושב מחדש חייבים להתאים.
- השתמשו בהדפסת העמוד, או הורידו את מדריך הלימוד ב-PDF. דף הנוסחאות נמצא לקראת הסוף.
- שאלו: איך היחידה הזו עוזרת לאנשים ולכוכב? בכל יחידה יש תיבה ירוקה עם עובדה ומקור.
- העתיקו את תבנית המדריך למורה וכתבו את שם הכיתה, הזמן שיש לכם, והשאלות שתשאלו. פתיחת תבנית המדריך למורה

לפני שמתחילים

ידע מוקדם

- חשבון אינפיניטסימלי I ו־II: נגזרות, אינטגרלים וטורים.
- אלגברה ליניארית: וקטורים וריבועים פחותים (מועיל לרגרסיה).
- מבוא לתכנות או מיומנות בגיליון אלקטרוני: נוסחאות, טווחים ותרשימים.
- שיטות נומריות (מועיל, לא חובה).

איך ללמוד

- רשמו את המשתנה המקרי ואת יחידותיו לפני כל חישוב.
- שרטטו קודם את ההתפלגות או דיאגרמת עץ.
- בדקו שההסתברויות בין 0 ל־1 ושסכומן 1.
- הצהירו במפורש על הנחות כמו אי־תלות; רוב הטעויות מתחילות שם.
- כשיש ספק, הריצו סימולציה: גיליון אלקטרוני עם RAND() יכול לבדוק כמעט כל הסתברות.
- פתרו כל תרגיל על נייר לפני שאתם פותחים את התשובה, וחזרו על הבחנים כעבור כמה ימים.

מה צריך

- מחשב או טאבלט לסימולציות החינמיות PhET Center and Variability, Plinko Probability ו־Least-Squares Regression.
- תוכנת גיליון אלקטרוני (כל תוכנה חינמית מתאימה) עם RAND(), NORM.DIST ו־LINEST, או Python.
- קובץ נתוני ה־CO_2 של Mauna Loa מ־NOAA בדפדפן.
- מחשבון; זוג קוביות אופציונלי.

לוח זמנים מוצע ל־15 שבועות

כ־6 עד 9 שעות בשבוע: קריאה, תרגילים, ובשבועות המעבדה גם המעבדה.

שבוע	יחידה	נושאים	קריאה
1	תיאור נתונים: מרכז, פיזור ותרשימים	תיאור נתונים; מעבדה A	OpenStax Intro Stats
2	כללי הסתברות, קומבינטוריקה ואי־תלות	כללי הסתברות וקומבינטוריקה	MIT 18.05

שבוע	יחידה	נושאים	קריאה
3	הסתברות מותנית ומשפט בייס	הסתברות מותנית ובייס	MIT 6.041
4	משתנים מקריים בדידים: בינומי ופואסון	משתנים בדידים וההתפלגות הבינומית; מעבדה B	MIT 18.05
5	משתנים מקריים בדידים: בינומי ופואסון	מודלים פואסוני וגאומטרי	MIT 18.05
6	התפלגויות רציפות: נורמלית, מעריכית וערכי קיצון	התפלגויות רציפות; מעבדה C	USGS 100-year flood
7	דגימה, סימולציה ומשפט הגבול המרכזי	דגימה ומשפט הגבול המרכזי; מעבדה D; תרגול לבוחן אמצע	MIT 18.05
8	רווחי סמך	רווחי סמך לממוצעים	OpenStax Intro Stats
9	רווחי סמך	רווחים לפרופורציות וגודל מדגם	NOAA CPC
10	בדיקת השערות וערכי p	בדיקת השערות וערכי p	MIT 18.05
11	מתאם ורגרסיה ליניארית	מתאם ורגרסיה	OpenStax Intro Stats
12	מתאם ורגרסיה ליניארית	שאריות ובדיקת המודל; מעבדה E	NOAA GML
13	אמינות וסיכון	אמינות ו־MTBF	NIST e-Handbook
14	אמינות וסיכון	אמינות מערכות; מעבדה F	NIST e-Handbook
15	אמינות וסיכון	סיכון וחזרה; תרגול למבחן הסופי	NOAA CPC; USGS

ההתקדמות שלכם

סמנו יחידות ומעבדות כשאתם מסיימים אותן, ועשו את הבחנים. ההתקדמות והציונים נשמרים רק בדפדפן הזה ולעולם לא נשלחים אלינו.

יחידות

תיאור נתונים: מרכז, פיזור ותרשימים

סוגי נתונים, היסטוגרמות ותרשימי קופסה, ממוצע וחציון, טווח, שונות וסטיית תקן, רבעונים וחריגים, ולמה סטיית התקן המדגמית מחלקת ב־n − 1.

מטרות הלמידה

בסוף היחידה הזו תוכלו:

- חשבו ממוצע, חציון, טווח וסטיית תקן מדגמית.
- בחרו בין ממוצע לחציון.
- קראו היסטוגרמה ותרשים קופסה.
- סמנו חריגים לפי כלל 1.5 IQR.

מושגי מפתח

- הממוצע x̄ = Σx/n הוא נקודת האיזון; החציון הוא הערך האמצעי ועמיד בפני חריגים.
- השונות המדגמית s² = Σ(x̄ − x)²/(n − 1) מודדת פיזור; s, השורש שלה, נמדדת ביחידות הנתונים. החלוקה ב־n − 1 מתקנת את השימוש ב־x̄ במקום בממוצע האמיתי.
- הטווח הוא max − min; הטווח הבין־רבעוני IQR = Q3 − Q1 מכיל את המחצית האמצעית של הנתונים.
- נקודות הרחוקות יותר מ־1.5 IQR מעבר לרבעונים מסומנות כחריגים אפשריים: בדקו אותן, אל תמחקו אותן סתם.
- תמיד שרטטו קודם: היסטוגרמה או תרשים קופסה מראים א־סימטריה, פערים וחריגים שמספר בודד מסתיר.

משוואות מפתח

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i$$

x=1n x_i

ממוצע מדגמי

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum (x_i - \bar{x})^2$$

s^2=(1)/(n-1)(x_i- x)^2

שונות מדגמית

$$IQR = Q_3 - Q_1$$

IQR=Q_3-Q_1

טווח בין־רבעוני

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

z=(x- x)/(s)

ציון תקן

דוגמאות פתורות שלב אחר שלב

דוגמה 1.1 הממוצעים השנתיים של NOAA ב־Mauna Loa נותנים עליות שנתיות של CO_2 לשנים 2021–2025 של 2.20, 2.12, 2.55, 3.53 ו־2.74 ppm. מצאו ממוצע וחציון.

1. סכום 13.14 =; חלקו ב־5.
2. מיון: 2.12, 2.20, 2.55, 2.74, 3.53.

תשובה: ממוצע 2.628 ppm/שנה; חציון 2.55 ppm/שנה.

דוגמה 1.2 מצאו את הטווח ואת סטיית התקן המדגמית.

1. טווח 3.53 − 2.12 =.
2. $s = \sqrt{(\Sigma(x - 2.628)^2/4)}$.

תשובה: טווח 1.41 ppm/שנה; $s = 0.564$ ppm/שנה.

דוגמה 1.3 מצאו את ציון ה־z של העלייה של 3.53 ppm (2024).

1. $z = (3.53 - 2.628)/0.564$.

תשובה: $z = 1.60$.

תרגילים

פתרו כל אחד קודם על נייר, ואז בדקו.

1. מה מושפע יותר מהערך 3.53, הממוצע או החציון?

   הממוצע (2.628 לעומת 2.55).

2. למה לחלק ב־$n - 1$?

   הסטיות מ־$\bar{x}$ קטנות מעט מדי; $n - 1$ מתקן את ההטיה.

3. מהן יחידות s לעליות ה־CO_2?

ppm לשנה.

4. מה עושה זנב ימני ארוך לממוצע ולחציון?

ממוצע > חציון.

תפיסות שגויות נפוצות

מיתוס: הממוצע תמיד מייצג.

בפועל: א־סימטריה או חריגים יכולים להרחיק אותו.

מיתוס: חריגים הם טעויות.

בפועל: הם עשויים להיות אירועים אמיתיים; חקרו.

מיתוס: סטיית התקן יכולה להיות שלילית.

בפועל: היא שורש ריבועי, לעולם לא שלילית.

כרטיסיות

ממוצע

Σx/n.

חציון

הערך האמצעי.

סטיית תקן

√(Σ(x̄ − x)²/(n − 1)).

IQR

Q3 − Q1.

כלל החריגים

1.5 IQR מעבר לרבעונים.

ציון z

(x̄ − x)/s.

בוחן לבדיקה עצמית

1. עמיד בפני חריגים...

החציון

הממוצעת

הטווח

השונות

החציון. הערך האמצעי.

2. השונות המדגמית מחלקת ב…

n − 1

n

n + 1

2n

n − 1. תיקון הטיה.

3. IQR הוא…

Q3 − Q1

max − min

ממוצע − חציון

s^2

Q3 − Q1. המחצית האמצעית.

4. שרטטו את הנתונים…

קודם

אף פעם

בסוף

רק אם מבקשים

קודם. כדי לראות את הצורה.

לנסות שוב את הבוחן

איך זה עוזר להציל את כדור הארץ

NOAA מדווחת שרשומת ה־CO_2 של Mauna Loa, שהחל C. David Keeling מ־Scripps במרץ 1958, היא הרשומה הארוכה ביותר של מדידות ישירות של CO_2 באטמוספרה. הממוצעים השנתיים של NOAA עלו מ־414.21 ppm ב־2020 ל־427.35 ppm ב־2025.

הסטטיסטיקה התיאורית של יחידה זו הופכת את הרשומה לקצב: ממוצע חמש העליות השנתיות הוא 2.628 ppm לשנה, עם סטיית תקן של 0.564 ppm לשנה מתנודות בין השנים.

ב־Saving Planets: פתרונות · תצפית על כדור הארץ

מקורות: NOAA Global Monitoring Laboratory: Trends in atmospheric CO_2 (Mauna Loa) (https://gml.noaa.gov/ccgg/trends/) · NOAA GML: Mauna Loa annual mean CO_2 data (https://gml.noaa.gov/webdata/ccgg/trends/co2/co2_annmean_mlo.txt)

מקורות לימוד חינמיים

- OpenStax Introductory Statistics 2e (https://openstax.org/books/introductory-statistics-2e/pages/1-introduction): ספר לימוד חינמי.
- PhET: Center and Variability (https://phet.colorado.edu/en/simulations/center-and-variability): ממוצע, חציון ופיזור באופן אינטראקטיבי.

סיימתי את היחידה הזו

כללי הסתברות, קומבינטוריקה ואי־תלות

מרחבי מדגם ומאורעות, האקסיומות, משלימים, כללי החיבור והכפל, אי־תלות, תמורות וצירופים, ובעיות "לפחות אחד".

מטרות הלמידה

בסוף היחידה הזו תוכלו:

- החילו את כללי המשלים, החיבור והכפל.
- בדקו אי־תלות.
- ספרו בעזרת תמורות וצירופים.
- פתרו בעיות "לפחות אחד".

מושגי מפתח

- הסתברויות הן בין 0 ל־1, ולמרחב המדגם כולו הסתברות 1. P(לא A) = 1 − P(A).
- כלל החיבור: P(A או B) = P(A) + P(B) − P(A וגם B).
- A ו־B בלתי תלויים אם P(A וגם B) = P(A)P(B); אז ידיעת אחד לא אומרת דבר על השני.
- עבור "לפחות אחד" ב־n ניסויים בלתי תלויים, השתמשו במשלים: 1 − (1 − p)ⁿ.
- צירופים C(n, k) = n!/(k!(n − k)!) סופרים בחירות ללא סדר; תמורות סופרות בחירות עם סדר.

משוואות מפתח

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

```
P(A^c)=1-P(A)
```

משלים

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

```
P(A B)=P(A)+P(B)-P(A B)
```

כלל החיבור

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

```
P(A B)=P(A)P(B)
```

אי־תלות

$$P(\geq 1) = 1 - (1 - p)^n$$

```
P(1)=1-(1-p)^n
```

לפחות אחד

דוגמאות פתורות שלב אחר שלב

דוגמה 2.1 לשיטפון של 100 שנה יש סיכוי של 1% בכל שנה. מצאו את הסיכוי לפחות לאחד במהלך משכנתה של 30 שנה.

1. P(אף אחד) = 0.99^{30} = 0.740.
2. P(לפחות אחד) = 1 − 0.740 =.

תשובה: 26.0%.

דוגמה 2.2 מצאו את הסיכוי לפחות לשיטפון 100 שנה אחד ב־100 שנה.

1. $1 - 0.99^{100}$.

תשובה: 63.4%, לא 100%.

דוגמה 2.3 מצאו את הסיכוי לפחות לשיטפון 50 שנה אחד (2% בשנה) ב־30 שנה.

1. $1 - 0.98^{30}$.

תשובה: 45.5%.

תרגילים

פתרו כל אחד קודם על נייר, ואז בדקו.

1. לפחות שיטפון 250 שנה אחד (0.4% בשנה) ב־30 שנה?

   $1 - 0.996^{30}$ = 11.3%.

2. בכמה דרכים אפשר לבחור 6 מתוך 9 פריטים?

   C(9, 6) = 84.

3. האם שני שיטפונות 100 שנה יכולים לקרות בשנים רצופות?

   כן: כל שנה מתחילה עם אותו סיכוי של 1%.

4. האם השיטפונות השנתיים מטופלים כאן כבלתי תלויים?

   כן; USGS מציינת ששיטפון נדיר אינו מקטין את הסיכוי לאחר זמן קצר אחריו.

תפיסות שגויות נפוצות

מיתוס: שיטפון 100 שנה קורה פעם ב־100 שנה.

בפועל: יש לו סיכוי של 1% בכל שנה.

מיתוס: אחרי שיטפון, הבא פחות סביר.

בפועל: כל שנה בלתי תלויה.

מיתוס: P(A או B) = P(A) + P(B) תמיד.

בפועל: רק אם A ו־B אינם יכולים לקרות יחד.

כרטיסיות

משלים

P(A) − 1.

כלל החיבור

החסירו את החיתוך.

אי־תלות

P(A∩B) = P(A)P(B).

לפחות אחד

1 − (1 − p)ⁿ.

צירוף

n!/(k!(n − k)!).

AEP

הסתברות חריגה שנתית.

בוחן לבדיקה עצמית

1. P(לפחות אחד מתוך n)…

1 − (1 − p)ⁿ

np

pⁿ

1 − pⁿ

1 − (1 − p)ⁿ. משלים.

2. בלתי תלוי פירושו…

P (A ∩ B) = P(A)P (B)

זר

שווים

P = 0

P(A)P (B∩A)P =(B). הגדרה.

3. הסיכוי השנתי לשיטפון 100 שנה...

1%

100%

10%

0.1%

.1%. USGS

4. C(n, k) סופר...

בחירות ללא סדר

סידורים

תמיד תוצאות

רק זוגות

בחירות ללא סדר. צירופים.

לנסות שוב את הבוחן

איך זה עוזר להציל את כדור הארץ

USGS מסבירה ש"שיטפון 100 שנה" הוא שיטפון שיש לו סיכוי של 1 אחוז לקרות בכל שנה, ושיטפונות 100 שנה יכולים לקרות שנתיים ברציפות. הטבלה שלה מצמידה לכל תקופת חזרה הסתברות חריגה שנתית: 2 שנים עם 50%, 10 שנים עם 10%, 100 שנה עם 1% ו־500 שנה עם 0.2%.

USGS מציינת שבשנות ה־1960 בחרה ארצות הברית בשיטפון בעל הסתברות חריגה שנתית של 1 אחוז כבסיס ל־National Flood Insurance Program. כלל המשלים ביחידה זו מראה שלבית שמאוכלס 30 שנה באזור זה יש סיכוי של 26% לחוות לפחות שיטפון כזה אחד.

ב־Saving Planets: אוקיינוסים · פתרונות

מקורות: USGS Water Science School: The 100-Year Flood (https://www.usgs.gov/special-topics/water-science-school/science/100-year-flood)

מקורות לימוד חינמיים

- MIT OpenCourseWare 18.05 Introduction to Probability and Statistics (Spring 2022) (https://ocw.mit.edu/courses/18-05-introduction-to-probability-and-statistics-spring-2022/): הרצאות MIT חינמיות.
- OpenStax Introductory Statistics 2e (https://openstax.org/books/introductory-statistics-2e/pages/1-introduction): ספר לימוד חינמי.

סיימתי את היחידה הזו

הסתברות מותנית ומשפט בייס

הסתברות מותנית, כלל הכפל, דיאגרמות עץ, נוסחת ההסתברות השלמה, משפט בייס, שיעורי בסיס, והמרת הסתברות ל־30 שנה לקצב שנתי.

מטרות הלמידה

בסוף היחידה הזו תוכלו:

- חשבו הסתברויות מותנות מטבלה או מעץ.
- החילו את נוסחת ההסתברות השלמה.
- השתמשו במשפט בייס והסבירו את השפעת שיעור הבסיס.
- המירו הסתברויות רב־שנתיות לקצבים שנתיים.

מושגי מפתח

- P(A | B) = P(A וגם B)/P(B) היא ההסתברות ל־A כשידוע ש־B קרה.
- נוסחת ההסתברות השלמה מחברת את ענפי העץ: P(A) = Σ P(A | Bᵢ)P(Bᵢ).
- משפט בייס הופך את ההתניה: P(B | A) = P(A | B)P(B)/P(A).
- אירועים נדירים יוצרים אזעקות שווא רבות: גם לבדיקה טובה יש ערך ניבוי חיובי נמוך כששיעור הבסיס קטן.
- אם אירועים מגיעים בקצב קבוע λ, הסיכוי לפחות לאחד ב־t שנים הוא 1 − e^(−λt), ולכן λ = −ln(1 − P)/t.

משוואות מפתח

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

```
P(A|B)=(P(A B))/(P(B))
```

הסתברות מותנית

$$P(A) = \sum_{i} P(A|B_i)P(B_i)$$

```
P(A)=_i P(A|B_i)P(B_i)
```

הסתברות שלמה

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

```
P(B|A)=(P(A|B)P(B))/(P(A))
```

משפט בייס

$$\lambda = -\frac{\ln(1-P)}{t}$$

```
=-((1-P))/(t)
```

קצב מהסתברות ל־t שנים

דוגמאות פתורות שלב אחר שלב

דוגמה 3.1 חיישן מתריע על תקלה ב־95% מהמקרים כשהיא קיימת ובטעות ב־5% מהמקרים אחרת; ל־2% מהיחידות יש התקלה (ערכי דוגמה). מצאו P(תקלה | התרעה).

1. P(התרעה) = 0.98 × 0.05 + 0.02 × 0.95 = 0.068.
2. בייס: 0.019/0.068.

תשובה: 27.9%: רוב ההתרעות הן אזעקות שווא.

דוגמה 3.2 USGS נותנת סיכוי של 72% לפחות לרעידת אדמה אחת M ≥ 6.7 באזור מפרץ San Francisco ב־30 שנה. מצאו את הקצב השנתי, בהנחת קצב קבוע.

1. λ = −ln(0.28)/30.

תשובה: λ = 0.0424 לשנה.

דוגמה 3.3 מצאו את הסיכוי לפחות לרעידה כזו אחת בשנה בודדת.

1. 1 − e^(−0.0424).

תשובה: 4.15% לשנה.

תרגילים

פתרו כל אחד קודם על נייר, ואז בדקו.

1. הסיכוי לאחת ב־10 השנים הבאות בקצב זה?

   1 − e^(−0.424) = 34.6%.

2. הקצב השנתי עבור 60% ב־30 שנה באזור Los Angeles?

   −ln(0.4)/30 = 0.0305 לשנה.

3. למה P(תקלה | התרעה) נמוכה כל כך?

שיעור הבסיס (2%) קטן.

4. האם P(A | B) שווה ל־P(B | A)?

בדרך כלל לא.

תפיסות שגויות נפוצות

מיתוס: P(A | B) = P(B | A).

בפועל: משפט בייס מקשר ביניהן דרך שיעורי הבסיס.

מיתוס: בדיקה בדיוק של 95% צודקת ב־95% מהפעמים שהיא מתריעה.

בפועל: לא כשהמצב נדיר.

מיתוס: הסתברות ל־30 שנה מתחלקת פשוט ב־30.

בפועל: השתמשו בנוסחת הקצב.

כרטיסיות

מותנית

P(A∩B)/P(B).

הסתברות שלמה

סכום על הענפים.

בייס

P(A)P(B|A)/P(B).

שיעור בסיס

שכיחות מוקדמת.

קצב

λ = −ln(1 − P)/t.

דיאגרמת עץ

לאורך ענפים כופלים, מסלולים מחברים.

בוחן לבדיקה עצמית

1. בייס הופך…

התניה

סכום

ממוצע

מדגם

התניה. P(B|A) מתוך P(A|B).

2. שיעורי בסיס נמוכים גורמים ל…

אזעקות שווא

דיוק רב יותר

כלום

הטיה ב־s

אזעקות שווא. מעט חיוביים אמיתיים.

3. P(A|B) היא…

P (A ∩ B) /P (B)

P(A)P(B)

P(A) + P(B)

P(B)/P(A)

P(A∩B)/P(B). הגדרה.

4. הסיכוי ל־M ≥ 6.7 ב־30 שנה באזור המפרץ…

72%

7%

99%

20%

72%. USGS.

לנסות שוב את הבוחן

איך זה עוזר להציל את כדור הארץ

USGS, בעזרת Uniform California Earthquake Rupture Forecast 3, נותנת הסתברויות ל־30 שנה של 72% לרעידת אדמה בעוצמה 6.7 באזור מפרץ San Francisco ו־60% באזור Los Angeles. היא גם מציינת שבעולם, הסיכוי שאחרי רעידת אדמה תבוא רעידה חזקה יותר בקרבתה בתוך שבוע הוא כ־5%.

המרת המספרים ל־30 שנה לקצב שנתי של כ־4% היא הדרך שבה מהנדסים ומתכנני חירום משווים סיכון רעידות אדמה לסיכונים אחרים.

ב־Saving Planets: פתרונות · תצפית על כדור הארץ

מקורות: USGS FAQ: What is the probability that an earthquake will occur in the Los Angeles area? In the San Francisco Bay area? (https://www.usgs.gov/faqs/what-probability-earthquake-will-occur-los-angeles-area-san-francisco-bay-area)

מקורות לימוד חינמיים

- MIT OpenCourseWare 6.041 Probabilistic Systems Analysis and Applied Probability (Fall 2010) (https://ocw.mit.edu/cours/es/6-041-probabilistic-systems-analysis-and-applied-probability-fall-2010/): קורס MIT חינמי.
- MIT OpenCourseWare 18.05 Introduction to Probability and Statistics (Spring 2022) (https://ocw.mit.edu/courses/18-05-intro/duction-to-probability-and-statistics-spring-2022/): הרצאות MIT חינמיות.

צפו בהרצאה

Lecture 2: Conditioning and Bayes' Rule2 (https://ocw.mit.edu/courses/6-041sc-probabilistic-systems-analysis-and-applied-probability-fall-2013/resources/lecture-2-video-2/) (באנגלית)

MIT 6.041SC Probabilistic Systems Analysis and Applied Probability (Fall 2013), MIT OpenCourseWare. רישיון: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · תנאי שימוש (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). הקישור מיועד ללימוד חינמי בלבד; Saving Planets אינו קשור לאוניברסיטה זו ואינו נתמך על ידה.

סיימתי את היחידה הזו

משתנים מקריים בדידים: בינומי ופואסון

משתנים מקריים, פונקציות הסתברות, תוחלת ושונות, התפלגויות ברנולי ובינומית, התפלגות פואסון לאירועים נדירים, והתפלגות גאומטרית.

מטרות הלמידה

בסוף היחידה הזו תוכלו:

- חשבו תוחלת ושונות.
- החילו את ההתפלגות הבינומית.
- החילו את התפלגות פואסון על אירועים נדירים.
- בחרו את המודל הבדיד המתאים.

מושגי מפתח

- משתנה מקרי מצמיד מספר לכל תוצאה. התוחלת שלו E[X] = Σx p(x) היא הממוצע בטווח הארוך.
- Var(X) = E[(X − μ)²]; סטיית התקן היא השורש שלה.
- בינומית: מספר ההצלחות ב־n ניסויים בלתי תלויים בהסתברות p. P(X = k) = C(n, k)pᵏ(1 − p)ⁿ⁻ᵏ, ממוצע np, שונות np(1 − p).
- פואסון: ספירת אירועים נדירים בקצב λ לכל מרווח. P(X = k) = e^(−λ)λᵏ/k!, הממוצע והשונות שניהם λ.
- גאומטרית: מספר הניסויים עד ההצלחה הראשונה, ממוצע 1/p, ומכאן מגיע המושג "תקופת חזרה".

משוואות מפתח

$$E[X] = \sum x\,p(x)$$

```
E[X]= x p(x)
```

תוחלת

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

```
P(X=k)= nk p^k(1-p)^n-k
```

בינומית

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

```
P(X=k)=^-^kk!
```

פואסון

$$E[T] = 1/p$$

דוגמאות פתורות שלב אחר שלב

דוגמה 4.1 NOAA קובעת את גודל קונוס תחזית ההוריקנים כך ששני שלישים משגיאות המסלול ההיסטוריות נופלים בתוכו. ב־9 תחזיות בלתי תלויות, מצאו את המספר הצפוי בפנים ואת P(כל ה־9 בפנים).

1. $E = 9 \times 2/3$.
2. $P = (2/3)^9$.

תשובה: $E = 6$; P(כל ה־9) $\approx 2.60\%$.

דוגמה 4.2 מצאו P(בדיוק 6 מתוך 9 בפנים).

1. $C(9,6)(2/3)^6(1/3)^3 = 84 \times 0.0878 \times 0.0370$.

תשובה: 27.3%.

דוגמה 4.3 מדלו שיטפונות 100 שנה במשך 100 שנה כפואסון עם $\lambda = 1$. מצאו P(אף אחד) ו־P(2 או יותר).

1. $P(0) = e^{-1}$.
2. $P(\geq 2) = 1 - 2e^{-1}$.

תשובה: $P(0) = 36.8\%$; $P(\geq 2) = 26.4\%$.

תרגילים

פתרו כל אחד קודם על נייר, ואז בדקו.

1. סטיית התקן של המספר בתוך הקונוס, $n = 9$?

   $\sqrt{9 \times 2/3 \times 1/3} = 1.414$.

2. המתנה ממוצעת לאירוע של 1% לשנה (גאומטרית)?

   $1/0.01 = 100$ שנה.

3. P(לפחות אחד) לפי פואסון עם $\lambda = 1$?

   $1 - e^{-1} = 63.2\%$, קרוב ל־63.4% הבינומי.

4. מתי פואסון מקרב היטב את הבינומית?

n גדול, p קטן.

תפיסות שגויות נפוצות

מיתוס: התוחלת היא הערך הסביר ביותר.

בפועל: היא הממוצע בטווח הארוך.

מיתוס: קונוס = היכן שהשפעות הסופה נשארות.

בפועל: הוא מראה רק את המסלול הסביר של המרכז.

מיתוס: פואסון דורש מספר קבוע של ניסויים.

בפועל: הוא סופר אירועים במרווח.

כרטיסיות

משתנה מקרי

מספר לכל תוצאה.

E[X]

ממוצע בטווח הארוך.

בינומית

הצלחות ב־n ניסויים.

פואסון

ספירת אירועים נדירים.

גאומטרית

ניסויים עד ההצלחה הראשונה.

שונות

$E[(X-\mu)^2]$.

בוחן לבדיקה עצמית

1. ממוצע בינומי...

np

n/p

p

n

np. סכום משתני ברנולי.

2. ממוצע ושונות של פואסון…

שניהם λ

λ ו־λ²

1 ו־λ

0

שניהם λ. תכונה.

3. מעגלי הקונוס של NHC מכילים…

שני שלישים מהשגיאות

את כל השגיאות

חצי

95%

שני שלישים מהשגיאות. הגדרת NOAA.

4. המתנה ממוצעת גאומטרית…

1/p

p

np

p²

1/p. תקופת חזרה.

לנסות שוב את הבוחן

איך זה עוזר להציל את כדור הארץ

ה־National Hurricane Center של NOAA בונה את קונוס תחזית המסלול ממעגלים שגודלם נקבע כך ששני שלישים משגיאות התחזית הרשמיות ההיסטוריות במדגם של 5 שנים נופלים בתוכם. לשנת 2026 באוקיינוס האטלנטי, על סמך שגיאות 2021–2025, רדיוס המעגל גדל מ־25 מייל ימי ב־12 שעות ל־95 ב־72 שעות ול־200 ב־120 שעות.

כך שמרכז הסופה יהיה מחוץ לקונוס בערך פעם אחת מכל שלוש, עובדה בינומית שכדאי לדעת לפני שמחליטים שהקונוס פירושו "בטוח" או "לא בטוח".

ב־GOES-19 :Saving Planets · אוקיינוסים

מקורות: NOAA National Hurricane Center: Definition of the NHC Track Forecast Cone (https://www.nhc.noaa.gov/aboutcone.shtml)

מקורות לימוד חינמיים

- MIT OpenCourseWare 18.05 Introduction to Probability and Statistics (Spring 2022) (https://ocw.mit.edu/courses/18-05-intro-duction-to-probability-and-statistics-spring-2022/): הרצאות MIT חינמיות.
- PhET: Plinko Probability (https://phet.colorado.edu/en/simulations/plinko-probability): ההתפלגות הבינומית באופן אינטראקטיבי.

צפו בהרצאה

Lecture 5: Discrete Random Variables; Probability Mass Functions; Expectations Video (https://ocw.mit.edu/courses/6-041sc-probabilistic-systems-analysis-and-applied-probability-fall-2013/resources/lecture-5-video/) (באנגלית)

MIT 6.041SC Probabilistic Systems Analysis and Applied Probability (Fall 2013), MIT OpenCourseWare. רישיון: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · תנאי שימוש (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). הקישור מיועד ללימוד חינמי בלבד; Saving Planets אינו קשור לאוניברסיטה זו ואינו נתמך על ידה.

☐ **סיימתי את היחידה הזו**

התפלגויות רציפות: נורמלית, מעריכית וערכי קיצון

פונקציות צפיפות והתפלגות מצטברת, ההתפלגויות האחידה, הנורמלית והמעריכית, תקנון בעזרת z, תכונת חוסר הזיכרון, ותקופות חזרה של ערכי קיצון.

מטרות הלמידה

בסוף היחידה הזו תוכלו:

- השתמשו בפונקציית צפיפות ובפונקציית התפלגות מצטברת.
- מצאו הסתברויות נורמליות בעזרת ציוני z.
- החילו את ההתפלגות המעריכית על זמני המתנה.
- קשרו בין תקופת חזרה להסתברות חריגה שנתית.

מושגי מפתח

- עבור משתנה רציף, הסתברויות הן שטחים מתחת לצפיפות f(x); פונקציית ההתפלגות המצטברת היא F(x) = P(X ≤ x).
- ההתפלגות הנורמלית פעמונית עם ממוצע μ וסטיית תקן σ. כ־68%, 95% ו־99.7% מהערכים נמצאים בטווח 1, 2 ו־3σ.
- תקננו עם z = (x − μ)/σ וקראו את Φ(z) מטבלה או עם NORM.S.DIST.
- זמני המתנה בין אירועים בקצב קבוע λ הם מעריכיים: P(T > t) = e^(−λt), ממוצע 1/λ. לתהליך אין זיכרון: ההמתנה שעברה אינה משנה את הסיכויים העתידיים.
- תקופת החזרה T והסתברות החריגה השנתית הן הופכיות: לאירוע עם AEP של 0.2 יש תקופת חזרה של 5 שנים.

משוואות מפתח

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

```
P(a<X<b)=_a^b f(x) dx
```

הסתברות כשטח

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

```
z=(x-μ)/(σ)
```

תקנון

$$P(T > t) = e^{-\lambda t}$$

```
P(T>t)=e^- t
```

הישרדות מעריכית

$$T = \frac{1}{AEP}$$

T=1/AEP

תקופת חזרה

דוגמאות פתורות שלב אחר שלב

דוגמה 5.1 מצאו $P(Z < 1)$ ואת החלק בטווח $\pm 1\sigma$ בהתפלגות נורמלית.

1. $\Phi(1) = 0.8413$.
2. $\Phi(1) - \Phi(-1)$.

תשובה: 0.8413; 68.3% בטווח $\pm 1\sigma$.

דוגמה 5.2 עם הקצב של אזור המפרץ $\lambda = 0.0424$ לשנה מיחידה 3, מצאו את ההמתנה הממוצעת והחציונית לרעידת אדמה $M \geq 6.7$.

1. ממוצע $= 1/\lambda$.
2. חציון $= \ln 2/\lambda$.

תשובה: ממוצע 23.6 שנים; חציון 16.3 שנים.

דוגמה 5.3 איזו תקופת חזרה מתאימה להסתברות חריגה שנתית של 0.2, ולאחת של 0.002?

1. $T = 1/AEP$.

תשובה: 5 שנים ו־500 שנה, בהתאם לטבלת USGS.

תרגילים

פתרו כל אחד קודם על נייר, ואז בדקו.

1. $P(Z < -1.5)$?

.0.0668

2. החלק בטווח $\pm 2\sigma$?

.95.4%

3. $\Phi(1.96)$?

.0.975

4. לא הייתה רעידת אדמה 20 שנה. האם המודל המעריכי מעלה את הסיכוי בשנה הבאה?

לא: הוא חסר זיכרון (העתקים האמיתיים עשויים להיות שונים).

תפיסות שגויות נפוצות

מיתוס: $P(X = x) > 0$ עבור X רציף.

בפועל: לנקודות בודדות הסתברות 0.

מיתוס: כל הנתונים נורמליים.

בפועל: בדקו בעזרת גרף; ערכי קיצון לרוב א־סימטריים.

מיתוס: חסר זיכרון פירושו שהאירועים מתוזמנים.

בפועל: פירושו ההפך.

כרטיסיות

PDF

צפיפות; שטח = הסתברות.

CDF

$P(X \le x)$.

נורמלי

עקומת פעמון, μ ו־σ.

z

$(x - \mu)/\sigma$.

מעריכית

זמן המתנה חסר זיכרון.

תקופת חזרה

1/AEP.

בוחן לבדיקה עצמית

1. בטווח $\pm 2\sigma$ בהתפלגות נורמלית...

בערך 95%

50%

68%

99.7%

בערך 95%. הכלל האמפירי.

2. ממוצע מעריכי…

1/λ

λ

λ²

ln λ

1/λ. תכונה.

3. תקופת חזרה של AEP של 1%…

100 שנה

שנה אחת (1)

10 שנים

1000 שנה

100 שנה. הופכי.

4. Φ(1) הוא…

0.8413

0.5

0.68

1

0.8413. טבלה.

לנסות שוב את הבוחן

איך זה עוזר להציל את כדור הארץ

USGS אומרת שתקופות חזרה נגזרות מניתוח שכיחויות של נתונים היסטוריים, שנדרשות עשר שנות נתונים או יותר, ושניתוח המבוסס על 30 שנות רישום ראוי ליותר אמון מאשר ניתוח המבוסס על 10. היא מגדירה שיטפון 1000 שנה כשיטפון שיש לו סיכוי של 0.1% בכל שנה נתונה.

מאחר שמפלסי שיטפון נאמדים מנתוני עבר, USGS מציינת שמפלס שיטפון 100 השנה משתנה כשנרשמים שיטפונות חדשים או כשסכרים ופיתוח משנים אגן, כך שההתפלגות שמאחורי מפת שיטפונות היא אומדן ולא עובדה קבועה.

ב־Saving Planets: אוקיינוסים · חשבון אינפיניטסימלי 2

מקורות: USGS Water Science School: The 100-Year Flood (https://www.usgs.gov/special-topics/water-science-school/science/100-year-flood)

מקורות לימוד חינמיים

- OpenStax Introductory Statistics 2e (https://openstax.org/books/introductory-statistics-2e/pages/1-introduction): ספר לימוד חינמי.
- NIST/SEMATECH e-Handbook of Statistical Methods (https://www.itl.nist.gov/div898/handbook/): מדריך חינמי.

צפו בהרצאה

Lecture 10: Continuous Bayes' Rule Derived Distributions (https://ocw.mit.edu/courses/6-041sc-probabilistic-systems-analysis-and-applied-probability-fall-2013/resources/lecture-10-video-1/) (באנגלית)

MIT 6.041SC Probabilistic Systems Analysis and Applied Probability (Fall 2013), MIT OpenCourseWare. רישיון: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · תנאי שימוש (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use). הקישור מיועד ללימוד חינמי בלבד; Saving Planets אינו קשור לאוניברסיטה זו ואינו נתמך על ידה.

☐ **סיימתי את היחידה הזו**

דגימה, סימולציה ומשפט הגבול המרכזי

אוכלוסיות ומדגמים, הטיה ודגימה מקרית, התפלגות הדגימה של הממוצע, טעות תקן, משפט הגבול המרכזי, חוק המספרים הגדולים וסימולציית מונטה קרלו.

מטרות הלמידה

בסוף היחידה הזו תוכלו:

- הבחינו בין גדלי אוכלוסייה לגדלי מדגם.
- חשבו טעות תקן.
- נסחו והחילו את משפט הגבול המרכזי.
- אמדו הסתברות בסימולציית מונטה קרלו.

מושגי מפתח

- סטטיסטי המחושב ממדגם משתנה ממדגם למדגם; ההתפלגות שלו היא התפלגות הדגימה.
- טעות התקן של הממוצע היא σ/√n: פי ארבעה נתונים מקטינים אותה בחצי.
- משפט הגבול המרכזי: עבור n גדול, ממוצע המדגם נורמלי בקירוב, יהא אשר יהא צורת הנתונים.
- חוק המספרים הגדולים: ממוצעים ושכיחויות במדגם מתייצבים לעבר ערכיהם האמיתיים ככל ש־n גדל.
- סימולציית מונטה קרלו חוזרת על ניסוי מקרי פעמים רבות במחשב; גם השגיאה שלה יורדת כמו 1/√n.

משוואות מפתח

$$SE = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

```
SE=(σ)/( n)
```

שגיאת תקן

$$\bar{X} \approx N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

משפט הגבול המרכזי

$$\hat{p} = \frac{\#\text{hits}}{N}$$

```
p=\#hitsN
```

אומדן מונטה קרלו

$$SE_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{N}}$$

דוגמאות פתורות שלב אחר שלב

דוגמה 6.1 למדידות σ = 10 (ערך דוגמה). מצאו את טעות התקן של ממוצע 25 מדידות.

1. 10/√25.

תשובה: SE = 2.

דוגמה 6.2 לקובייה הוגנת ממוצע 3.5 ו־σ = 1.708. מצאו את טעות התקן של ממוצע 25 הטלות.

1. 1.708/5.

תשובה: SE = 0.342.

דוגמה 6.3 כמה הרצות מונטה קרלו אומדות הסתברות קרובה ל־0.5 בדיוק של ±0.05 (95%)?

1. $n = 1.96^2 \times 0.25/0.05^2$.

תשובה: כ־384 הרצות.

תרגילים

פתרו כל אחד קודם על נייר, ואז בדקו.

1. טעות התקן של ממוצע קובייה ב־100 הטלות?

   0.171.

2. הכפילו את גודל המדגם. טעות התקן?

   מחולקת ב־√2.

3. האם משפט הגבול המרכזי הופך את הנתונים לנורמליים?

   לא, רק את ממוצע המדגם.

4. מרווח 95% לממוצע עם σ = 10, n = 25?

   1.96 × 2 = 3.92.

תפיסות שגויות נפוצות

מיתוס: מדגם גדול מתקן הטיה.

בפועל: הוא מקטין רק את השגיאה המקרית.

מיתוס: n = 30 תמיד מספיק.

בפועל: נתונים א־סימטריים עשויים לדרוש יותר.

מיתוס: הסימולציה מדויקת.

בפועל: יש לה שגיאת דגימה משלה.

כרטיסיות

אוכלוסייה

הקבוצה כולה.

מדגם

החלק הנמדד.

שגיאת תקן

σ/√n.

CLT

ממוצעים הופכים לנורמליים.

חוק המספרים הגדולים

ממוצעים מתייצבים.

מונטה קרלו

חזרה על ניסויים מקריים.

בוחן לבדיקה עצמית

1. טעות התקן של הממוצע...

σ/√n

σ/n

σ

nσ

σ/√n. נוסחה.

2. משפט הגבול המרכזי עוסק ב...

ממוצע המדגם

כל נקודת נתונים

החציון בלבד

הטיה

ממוצע המדגם. התפלגות הדגימה.

3. שגיאת מונטה קרלו יורדת כמו...

1/√n

1/n

n

קבוע

.1/√n. SE

4. דגימה מקרית מונעת...

הטיית בחירה

השונות

כל שגיאה

כלום

הטיית בחירה. תכנון.

לנסות שוב את הבוחן

איך זה עוזר להציל את כדור הארץ

ניתוח טמפרטורת פני השטח של GISS ב־NASA (GISTEMP v4) אומד את שינוי הטמפרטורה העולמית מנתוני תחנות ואוקיינוסים של NOAA, ומתעדכן בסביבות ה־10 בכל חודש. NASA מפרסמת גם אנסמבל אי־ודאות לשנת 2024 עבורו.

אנסמבל אי־ודאות הוא רעיון מונטה קרלו של יחידה זו בקנה מידה פלנטרי: גרסאות סבירות רבות של הרשומה, שהפיזור ביניהן מראה כמה אנו בטוחים בערך של כל שנה.

ב־Saving Planets: תצפית על כדור הארץ · פתרונות

מקורות: NASA GISS: GISS Surface Temperature Analysis (GISTEMP v4) (https://data.giss.nasa.gov/gistemp/)

מקורות לימוד חינמיים

- MIT OpenCourseWare 18.05 Introduction to Probability and Statistics (Spring 2022) (https://ocw.mit.edu/courses/18-05-introduction-to-probability-and-statistics-spring-2022/): הרצאות MIT חינמיות.
- PhET: Plinko Probability (https://phet.colorado.edu/en/simulations/plinko-probability): צפו בסכומים הופכים לנורמליים.

צפו בהרצאה

Lecture 20: Central Limit Theorem (https://ocw.mit.edu/courses/6-041sc-probabilistic-systems-analysis-and-applied-probability-fall-2013/resources/lecture-20-video-2/) (באנגלית)

MIT 6.041SC Probabilistic Systems Analysis and Applied Probability (Fall 2013), MIT OpenCourseWare. רישיון: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · תנאי שימוש (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). הקישור מיועד ללימוד חינמי בלבד; Saving Planets אינו קשור לאוניברסיטה זו ואינו נתמך על ידה.

☐ **סיימתי את היחידה הזו**

רווחי סמך

אומדנים נקודתיים ורווחיים, רווחי z ו־t לממוצע, רווחים לפרופורציה, מרווח טעות וגודל מדגם, ומה רמת סמך אומרת ומה לא.

מטרות הלמידה

בסוף היחידה הזו תוכלו:

- בנו רווח t לממוצע.
- בנו רווח לפרופורציה.
- בחרו גודל מדגם למרווח טעות רצוי.
- פרשו נכון רמת סמך.

מושגי מפתח

- רווח סמך הוא אומדן ± ערך קריטי × טעות תקן.
- כש־σ אינה ידועה ו־n קטן, השתמשו בהתפלגות t של סטודנט עם n − 1 דרגות חופש; ל־t זנבות עבים יותר מל־z.
- לפרופורציה: p̂ ± z√(p̂(1 − p̂)/n).
- רמה של 95% פירושה ש־95% מהרווחים שנבנים כך יכילו את הערך האמיתי; זה לא סיכוי של 95% לרווח מחושב אחד.
- הקטנת המרווח בחצי דורשת פי ארבעה גודל מדגם.

משוואות מפתח

$$\bar{x} \pm t_{n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

רווח t

$$\hat{p} \pm z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

רווח לפרופורציה

$$n = \frac{z^2 p(1-p)}{E^2}$$

n=(z^2p(1-p))/(E^2)

גודל מדגם

$$E = z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

E=z(σ)/(√n)

מרווח טעות

דוגמאות פתורות שלב אחר שלב

דוגמה 7.1 בנו רווח 95% לעלייה השנתית הממוצעת של CO_2 מיחידה 1 ($\bar{x} = 2.628, s = 0.564, n = 5, t = 2.776$).

1. מרווח $= 2.776 \times 0.564/\sqrt{5} =$.

תשובה: 2.628 ± 0.700: מ־1.93 עד 3.33 ppm/שנה.

דוגמה 7.2 NOAA אומרת ש־22 מתוך 31 העונות האטלנטיות מאז 1995 היו מעל הנורמה. תנו רווח 95% לפרופורציה זו.

1. $\hat{p} = 0.710$; $SE = \sqrt{(0.710 \times 0.290/31)} =$.

תשובה: 0.710 ± 0.160: מ־0.55 עד 0.87.

דוגמה 7.3 איזה גודל מדגם נותן מרווח ± 0.05 לפרופורציה קרובה ל־0.5?

1. $1.96^2 \times 0.25/0.05^2$.

תשובה: כ־385 (384.2, מעוגל כלפי מעלה).

תרגילים

פתרו כל אחד קודם על נייר, ואז בדקו.

1. למה t ולא z עבור $n = 5$?

   σ נאמדת ממעט נקודות.

2. ההשפעה של 99% במקום 95%?

   רווח רחב יותר.

3. האם טווח ה־70% של NOAA לסופות בעלות שם פירושו 70% מהסופות?

   לא: סך העונה נופל בטווח ב־7 מתוך 10 עונות דומות.

4. מרווח לפרופורציה עם $n = 124$?

   בערך חצי (0.080).

תפיסות שגויות נפוצות

מיתוס: סיכוי של 95% שהערך האמיתי ברווח הזה.

בפועל: השיטה לוכדת אותו ב־95% מהפעמים.

מיתוס: רחב יותר זה גרוע יותר.

בפועל: רחב יותר זה כן כשיש מעט נתונים.

מיתוס: רווחים מתקנים הטיה.

בפועל: הם מתארים רק שגיאה מקרית.

כרטיסיות

רווח סמך

אומדן ± מרווח.

התפלגות t

זנבות עבים יותר, 1 − n דרגות חופש.

מרווח טעות

ערך קריטי × טעות תקן.

רמת סמך

שיעור לכידה בטווח הארוך.

רווח לפרופורציה

.(/n(1−p)p̂)± z√ p̂

גודל מדגם

.z²p(1−p)/E²

בוחן לבדיקה עצמית

1. n קטן, σ לא ידועה: השתמשו ב…

t

z

פואסון

אף אחת

t. סטודנט.

2. הקטנת המרווח בחצי…

4× נתונים

2× נתונים

אותם נתונים

½ מהנתונים

4× נתונים. √n.

3. הטווחים הסבירים של NOAA מתקיימים ב…

7 מתוך 10 עונות דומות

כל עונה

חצי

95%

7 מתוך 10 עונות דומות. CPC.

4. רווח סמך = אומדן ± …

ערך קריטי × טעות תקן

הממוצעת

הטווח

σ^2

ערך קריטי × טעות תקן. מבנה.

לנסות שוב את הבוחן

איך זה עוזר להציל את כדור הארץ

תחזית 2026 של Climate Prediction Center ב־NOAA, שעודכנה ב־6 באוגוסט, נותנת סיכוי של 75% לעונה אטלנטית מתחת לנורמה, 20% קרובה לנורמה ו־5% מעל הנורמה, והסתברות של 70% לכל טווח, כולל 13–7 סופות בעלות שם ו־6–2 הוריקנים.

NOAA מסבירה שהעונה צפויה ליפול בטווחים אלה ב־7 מתוך 10 עונות בתנאים דומים, וזו בדיוק הדרך לקרוא רווח של 70%. היא גם מדגישה שמספיק הוריקן אחד כדי לגרום לאסון.

ב־GOES-19 :Saving Planets · אוקיינוסים

מקורות: NOAA Climate Prediction Center: Atlantic Hurricane Outlook (updated Aug. 6, 2026) (https://cpc.ncep.noaa.gov/products/outlooks/hurricane.shtml)

מקורות לימוד חינמיים

- OpenStax Introductory Statistics 2e (https://openstax.org/books/introductory-statistics-2e/pages/1-introduction): ספר לימוד חינמי.
- MIT OpenCourseWare 18.05 Introduction to Probability and Statistics (Spring 2022) (https://ocw.mit.edu/courses/18-05-introduction-to-probability-and-statistics-spring-2022/): הרצאות MIT חינמיות.

סיימתי את היחידה הזו

בדיקת השערות וערכי p

השערות אפס וחלופית, סטטיסטי מבחן, ערכי p, מבחנים חד־צדדיים ודו־צדדיים, מבחני t ומבחני פרופורציה, טעויות מסוג ראשון ושני, עוצמה, ומובהקות סטטיסטית לעומת משמעות מעשית.

מטרות הלמידה

בסוף היחידה הזו תוכלו:

- נסחו השערת אפס והשערה חלופית.
- בצעו מבחן t למדגם אחד ומבחן פרופורציה.
- פרשו ערך p.
- הסבירו טעויות מסוג ראשון ושני ועוצמה.

מושגי מפתח

- מבחן שואל אם הנתונים מפתיעים במקרה שהשערת האפס H_0 נכונה.
- ערך ה־p הוא ההסתברות, תחת H_0, לתוצאה קיצונית לפחות כמו זו שנצפתה. p קטן הוא ראיה נגד H_0; זו לא ההסתברות ש־H_0 נכונה.
- טעות מסוג ראשון דוחה H_0 נכונה (שיעור α); טעות מסוג שני מחמיצה H_0 שגויה (שיעור β). עוצמה $= 1 - \beta$.
- יותר נתונים מעלים את העוצמה; אפקט זעיר וחסר חשיבות יכול להיות "מובהק" עם מספיק נתונים.
- קבעו את α ואת המבחן לפני שמסתכלים בנתונים.

משוואות מפתח

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

```
t=( x-μ_0)/(s/ n)
```

סטטיסטי t

$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}$$

```
z= p-p_0_0(1-p_0)/n
```

z לפרופורציה

$$\text{power} = 1 - \beta$$

```
power=1-β
```

הספק

$$p = P(\text{as extreme} \mid H_0)$$

```
p=P(as extreme H_0)
```

ערך p

דוגמאות פתורות שלב אחר שלב

דוגמה 8.1 בדקו H_0: $\mu = 2$ ppm/ שנה מול $\mu > 2$ עבור חמש עליות ה־CO_2 ($\bar{x} = 2.628, s = 0.564$).

1. $t = (2.628 - 2)/(0.564/\sqrt{5})$.

תשובה: $t = 2.49$ עם 4 דרגות חופש, מעל סף חד־צדדי של 5% שהוא 2.132: דוחים את H_0.

דוגמה 8.2 אם לכל עונה אטלנטית היה סיכוי של 1/3 להיות מעל הנורמה, כמה מתוך 31 היינו מצפים?

1. $31/3$.

תשובה: כ־10.3; NOAA מדווחת על 22.

דוגמה 8.3 מצאו את ההסתברות הבינומית המדויקת $P(22$ או יותר מתוך $31)$ תחת $p = 1/3$.

1. סכמו $C(31, k)(1/3)^k(2/3)^{31-k}$ עבור $k \geq 22$.

תשובה: $p \approx 2.06 \times 10^{-5}$: ראיה חזקה שתקופת הפעילות הגבוהה אמיתית.

תרגילים

פתרו כל אחד קודם על נייר, ואז בדקו.

1. לפרופורציה עבור 22 מתוך 31 מול $p_0 = 1/3$? z

$z = 4.45$.

2. האם $p = 0.03$ הוא הסיכוי ש־H_0 נכונה?

No.

3. טעות מסוג ראשון במבחן התרעת שיטפונות?

אזעקת שווא.

4. איך מעלים עוצמה?

יותר נתונים, אפקט גדול יותר או α גדול יותר.

תפיסות שגויות נפוצות

מיתוס: $p > 0.05$ מוכיח את H_0.

בפועל: הוא רק לא דוחה.

מיתוס: מובהק פירושו חשוב.

בפועל: בדקו את גודל האפקט.

מיתוס: בודקים הרבה דברים ומדווחים על המנצח.

בפועל: זה מנפח חיוביים שגויים.

כרטיסיות

H_0

השערת האפס.

ערך p

הפתעה תחת H_0.

α

שיעור טעות מסוג ראשון.

β

שיעור טעות מסוג שני.

הספק

1 − β.

גודל אפקט

כמה גדול, לא רק אם קיים.

בוחן לבדיקה עצמית

1. ערך p הוא...

P(נתונים קיצוניים כאלה H_0 |)

$P(H_0)$

α

הספק

P(נתונים קיצוניים כאלה H_0 |). הגדרה.

2. טעות מסוג ראשון…

לדחות H_0 נכונה

להחמיץ H_0 שגויה

נתונים פגומים

אף אחת

לדחות H_0 נכונה. אזעקת שווא.

3. עוצמה היא…

$1 - \beta$

α

p

$1 - \alpha$

$\beta - 1$. זיהוי אפקט אמיתי.

4. יותר נתונים…

מעלים עוצמה

מורידים עוצמה

אין שינוי

מעלים את α

מעלים עוצמה. טעות תקן קטנה יותר.

לנסות שוב את הבוחן

איך זה עוזר להציל את כדור הארץ

ה־Climate Prediction Center של NOAA מדווח שמאז תחילת תקופת הפעילות האטלנטית הגבוהה הנוכחית ב־1995, 22 מתוך 31 עונות (71%) היו מעל הנורמה, 5 (16%) קרובות לנורמה ו־4 (13%) מתחת לנורמה.

NOAA מציינת גם שכל עונת הוריקנים שחפפה ל־El Niño חזק מאז 1950 הייתה בפעילות מתחת לנורמה. בדיקת טענות כאלה מול המקרה היא הדרך שבה חזאים מחליטים אילו אותות שייכים לתחזית.

ב־GOES-19 :Saving Planets · פתרונות

מקורות: NOAA Climate Prediction Center: Atlantic Hurricane Outlook (updated Aug. 6, 2026) (https://cpc.ncep.noaa.gov/products/outlooks/hurricane.shtml)

מקורות לימוד חינמיים

- MIT OpenCourseWare 18.05 Introduction to Probability and Statistics (Spring 2022) (https://ocw.mit.edu/courses/18-05-introduction-to-probability-and-statistics-spring-2022/): הרצאות MIT חינמיות.
- NIST/SEMATECH e-Handbook of Statistical Methods (https://www.itl.nist.gov/div898/handbook/): מדריך חינמי.

סיימתי את היחידה הזו

מתאם ורגרסיה ליניארית

דיאגרמות פיזור, מתאם r, רגרסיית ריבועים פחותים, פירוש השיפוע, R², שאריות, חיזוי לעומת אקסטרפולציה, ומתאם לעומת סיבתיות.

מטרות הלמידה

בסוף היחידה הזו תוכלו:

- חשבו ופרשו את r ו־R².
- התאימו ופרשו קו ריבועים פחותים.
- השתמשו בגרפי שאריות לבדיקת מודל.
- הפרידו בין מתאם לסיבתיות.

מושגי מפתח

- המתאם r מודד קשר ליניארי בין −1 ל־1; אין לו יחידות.
- לקו הריבועים הפחותים ŷ = b₀ + b₁x שיפוע b₁ = Sxy/Sxx והוא עובר דרך (x̄, ȳ).
- R² = r² הוא חלק השונות ב־y שהקו מסביר.
- גרפי שאריות חושפים עקמומיות או פיזור משתנה ש־r מסתיר.
- מתאם אינו סיבתיות; לשם כך דרושים מנגנונים פיזיקליים ומחקרים מתוכננים. אקסטרפולציה מעבר לנתונים מסוכנת.

משוואות מפתח

$$b_1 = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}$$

```
b_1=_xyS_xx
```

שיפוע

$$b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x}$$

```
b_0= y-b_1 x
```

חותך

$$r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx} S_{yy}}}$$

```
r=_xy_xxS_yy
```

מתאם

$$R^2 = r^2$$

דוגמאות פתורות שלב אחר שלב

דוגמה 9.1 התאימו קו לממוצעי העשורים של NOAA ב־Mauna Loa בשנים 1960–2020 (316.91, 325.68, 338.76, 354.45, 369.71, 390.10, 414.21 ppm), כאשר x בשנים מאז 1960.

1. $\bar{x} = 30$, $\bar{y} = 358.55$.
2. $b_1 = Sxy/Sxx$.

תשובה: $\hat{y} = 310.15 + 1.613x$ ppm.

דוגמה 9.2 מצאו r ו־R^2.

1. $r = Sxy/\sqrt{(SxxSyy)}$.

תשובה: $r = 0.990$; $R^2 = 0.979$.

דוגמה 9.3 האם השאריות תומכות בקו ישר?

1. השאריות חיוביות בשני הקצוות ושליליות באמצע.

תשובה: לא: העקומה מתכופפת כלפי מעלה, כך שהגידול מואץ למרות $R^2 = 0.979$.

תרגילים

פתרו כל אחד קודם על נייר, ואז בדקו.

1. יחידות השיפוע?

   ppm לשנה.

2. חיזוי הקו לשנת 2025 ($x = 65$)?

   415.0 ppm לעומת 427.35 של NOAA.

3. האם $r = 0.99$ מוכיח שהקו נכון?

   לא; בדקו את השאריות.

4. האם מגמה בזמן לבדה מוכיחה את הגורם לה?

לא; הגורם נובע מהפיזיקה ומראיות אחרות.

תפיסות שגויות נפוצות

מיתוס: r גבוה פירושו מודל טוב.

בפועל: עקמומיות יכולה להסתתר מאחורי r גבוה.

מיתוס: ל־r יש יחידות.

בפועל: הוא חסר יחידות.

מיתוס: אקסטרפולציה בטוחה אם R^2 גבוה.

בפועל: לא מחוץ לטווח הנתונים.

כרטיסיות

מתאם

מ־1− עד 1, חסר יחידות.

שיפוע

Sxy/Sxx.

R^2

חלק מוסבר.

שארית

$y - \hat{y}$.

אקסטרפולציה

חיזוי מחוץ לנתונים.

סיבתיות

דורשת מנגנון או תכנון.

בוחן לבדיקה עצמית

1. R^2 הוא…

חלק השונות המוסבר

השיפוע

ערך p

השארית

חלק השונות המוסבר. הגדרה.

2. הקו עובר דרך…

$(\bar{x}, \bar{y})$

הראשית

$(0, \bar{y})$

נקודת המקסימום

$(\bar{x}, \bar{y})$. תכונה.

3. שאריות מעוקלות פירושן…

צורת מודל שגויה

התאמה מושלמת

אין נתונים

הטיה ב־x

צורת מודל שגויה. דפוס.

4. מתאם מראה…

קשר

סיבתיות

כלום

שגיאה

קשר. זהירות.

לנסות שוב את הבוחן

איך זה עוזר להציל את כדור הארץ

NOAA מציינת שנתוני Mauna Loa נמדדים בגובה 3400 m ועשויים להיות שונים מהממוצע העולמי, ושבמהלך התפרצות Mauna Loa ב־2022 עברו המדידות ל־Maunakea, כ־21 מייל צפונה, עד יולי 2023.

הידיעה היכן ואיך נאספו הנתונים היא גם חלק מרגרסיה: התאמה טובה רק כמו הרשומה שמאחוריה, ו־NOAA מתעדת בגלוי את הפערים ואת שינויי האתר שלה.

ב־Saving Planets: פתרונות · אלגברה לינארית

מקורות: NOAA Global Monitoring Laboratory: Trends in atmospheric CO_2 (Mauna Loa) (https://gml.noaa.gov/ccgg/trends/)

מקורות לימוד חינמיים

- PhET: Least-Squares Regression (https://phet.colorado.edu/en/simulations/least-squares-regression): התאמת קווים באופן אינטראקטיבי.
- OpenStax Introductory Statistics 2e (https://openstax.org/books/introductory-statistics-2e/pages/1-introduction): ספר לימוד חינמי.

סיימתי את היחידה הזו

אמינות וסיכון

פונקציות אמינות, שיעורי כשל ו־MTBF, מערכות בטור ובמקביל, יתירות, מודלי חיים מעריכי ו־Weibull, ושילוב הסתברות עם השלכות לכדי סיכון.

מטרות הלמידה

בסוף היחידה הזו תוכלו:

- חשבו אמינות של מערכות בטור ובמקביל.
- השתמשו במודל החיים המעריכי עם MTBF.
- הסבירו את עקומת האמבט ואת צורות Weibull.
- שלבו סבירות והשלכה לכדי סיכון.

מושגי מפתח

- האמינות R(t) היא ההסתברות שרכיב ישרוד עד זמן t. בשיעור כשל קבוע R(t) = e^(−λt), ו־MTBF = 1/λ.
- מערכות בטור צריכות כל רכיב: R = R₁R₂…Rₙ, תמיד גרועה מהרכיב החלש ביותר.
- מערכות במקביל (יתירות) צריכות רק אחד: R = 1 − (1 − R₁)(1 − R₂)….
- מודל Weibull מכסה כשלים מוקדמים (צורה < 1), כשלים אקראיים (צורה = 1, מעריכי) ובלאי (צורה > 1), שלושת חלקי עקומת האמבט.
- סיכון משלב הסתברות והשלכה; יתירות והתרעות מקטינות אותו, אבל רק אם הכשלים בלתי תלויים.

משוואות מפתח

$$R(t) = e^{-\lambda t},\ MTBF = 1/\lambda$$

```
R(t)=e^- t,\ MTBF=1/
```

אמינות מעריכית

$$R_s = \prod R_i$$

```
R_s= R_i
```

מערכת בטור

$$R_p = 1 - \prod (1 - R_i)$$

```
R_p=1-(1-R_i)
```

מערכת במקביל

$$R(t) = e^{-(t/\eta)^{\beta}}$$

R(t)=e^-(t/)^β

Weibull

דוגמאות פתורות שלב אחר שלב

דוגמה 10.1 לשלושה רכיבים בטור יש לכל אחד R = 0.99 (ערכי דוגמה). מצאו את אמינות המערכת.

1. 0.99^3.

תשובה: R = 0.9703.

דוגמה 10.2 לשתי משאבות יתירות יש לכל אחת R = 0.9. מצאו את אמינות המערכת.

1. $1 - 0.1^2$.

תשובה: R = 0.99.

דוגמה 10.3 לחיישן MTBF של 50000 h. מצאו את אמינותו במשימה של 1000 שעות.

1. $e^{(-1000/50{,}000)}$.

תשובה: R = 0.980.

תרגילים

פתרו כל אחד קודם על נייר, ואז בדקו.

1. שלוש יחידות יתירות של 0.9?

   $1 - 0.1^3 = 0.999$.

2. רכיב של 0.9 בטור עם זוג יתיר של 0.9?

   $0.9 \times 0.99 = 0.891$.

3. אמינות לאורך שנה (8760 h) ב־MTBF של 100000 h?

   $e^{(-0.0876)} = 0.916$.

4. שתי יחידות של 0.95 במקביל?

   0.9975.

תפיסות שגויות נפוצות

מיתוס: יתירות תמיד עוזרת.

בפועל: לא מול כשלים בעלי גורם משותף.

מיתוס: MTBF הוא כמה זמן כל יחידה מחזיקה.

בפועל: זה ממוצע; רבות נכשלות מוקדם יותר.

מיתוס: מערכת בטור אמינה כמו הרכיב הטוב ביותר שלה.

בפועל: היא גרועה מהחלש ביותר.

כרטיסיות

אמינות

P(שרידות עד t).

MTBF

1/λ.

טור

הכפילו את ערכי R.

מקביל

1 − Π(1 − R).

Weibull

צורות אמבט.

סיכון

הסתברות × השלכה.

בוחן לבדיקה עצמית

1. אמינות בטור…

מכפלה

סכום

מקסימום

מינימום

מכפלה. הכול חייב לעבוד.

2. MTBF מעריכי…

1/λ

λ

e^λ

ln λ

1/λ. אורך חיים ממוצע.

3. צורת 1 < Weibull פירושה…

בלאי

תמותת תינוקות

באקראי

אף אחת

בלאי. שיעור כשל עולה.

4. יתירות נכשלת מול…

גורמים משותפים

כשלים אקראיים

כלום

λ קטן

גורמים משותפים. כשל משותף.

לנסות שוב את הבוחן

איך זה עוזר להציל את כדור הארץ

תחזית ההוריקנים של NOAA לשנת 2026 מזכירה לתושבים, לעסקים ולממשלות שאסונות הקשורים להוריקנים יכולים לקרות בכל עונה, גם בעונה דלת פעילות, ושקהילות חוף צריכות להתכונן כל שנה בלי קשר לתחזית.

זו חשיבת אמינות: הסתברות נמוכה אינה אפס, ולכן מערכות התרעה, גיבויים ותוכניות מתוכננים לעבוד בשנה הרעה הנדירה, לא רק בשנה הממוצעת.

ב־GOES-19 :Saving Planets · פתרונות

מקורות: NOAA Climate Prediction Center: Atlantic Hurricane Outlook (updated Aug. 6, 2026) (https://cpc.ncep.noaa.gov/products/outlooks/hurricane.shtml)

מקורות לימוד חינמיים

- NIST/SEMATECH e-Handbook of Statistical Methods (https://www.itl.nist.gov/div898/handbook/): מדריך חינמי (פרק האמינות).
- MIT OpenCourseWare 6.041 Probabilistic Systems Analysis and Applied Probability (Fall 2010) (https://ocw.mit.edu/courses/6-041-probabilistic-systems-analysis-and-applied-probability-fall-2010/): קורס MIT חינמי.

סיימתי את היחידה הזו

תרגילים

התרגילים האלה נמצאים בתוך כל יחידה. פתרו על הנייר, ואז פתחו את התשובה.

1. תיאור נתונים: מרכז, פיזור ותרשימים
   4 תרגילים
2. כללי הסתברות, קומבינטוריקה ואי־תלות
   4 תרגילים
3. הסתברות מותנית ומשפט בייס
   4 תרגילים
4. משתנים מקריים בדידים: בינומי ופואסון
   4 תרגילים
5. התפלגויות רציפות: נורמלית, מעריכית וערכי קיצון
   4 תרגילים
6. דגימה, סימולציה ומשפט הגבול המרכזי
   4 תרגילים
7. רווחי סמך
   4 תרגילים
8. בדיקת השערות וערכי p
   4 תרגילים
9. מתאם ורגרסיה ליניארית
   4 תרגילים
10. אמינות וסיכון
    4 תרגילים

המעבדה (Statistics lab)

המעבדה היא החלק המעשי של הקורס. כאן היא חינמית ולתרגול בלבד, ללא נקודות זכות.

כל מעבדה פועלת בסימולציה חינמית או בגיליון אלקטרוני, כך שאין סכנות פיזיות. קחו הפסקות ממסך, שבו ביציבה טובה והרחיקו כבלים ממעברים.

מקור בטיחות: OSHA: Walking-working surfaces (slip, trip and fall hazards) (https://www.osha.gov/walking-working-surfaces)

מעבדה A: מרכז ופיזור של רשומת ה־CO_2

שבוע 1

מטרה: חקרו ממוצע, חציון ופיזור ב־PhET Center and Variability, ואז סכמו את העליות השנתיות האחרונות של CO_2 לפי NOAA.

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

`s=((x- x)^2)/(n-1)`

סטיית תקן מדגמית

מהלך הניסוי

1. ב־PhET Center and Variability, גררו ערכים וצפו בממוצע ובחציון זזים.
2. פתחו את הממוצעים השנתיים של Mauna Loa מ־NOAA וחשבו את העליות השנתיות לשנים 2021–2025.
3. חשבו ממוצע, חציון, טווח ו־s.
4. שרטטו דיאגרמת נקודות ותארו את ערך 2024.

טבלת נתונים

סטטיסטי	ערך (ppm/שנה)
ממוצע	2.628
חציון	2.55
טווח	1.41
סטיית תקן	0.564

נתונים מ־NOAA GML; סטטיסטיים מחושבים.

חישוב לדוגמה

1. עליות: 2.20, 2.12, 2.55, 3.53, 2.74.
2. s = √(1.2735/4) = 0.564.

בטיחות

- מחשב בלבד.

חלופה ביתית או וירטואלית

- כל גיליון אלקטרוני מתאים.

PhET: Center and Variability (https://phet.colorado.edu/en/simulations/center-and-variability) · NOAA GML: Mauna Loa annual mean CO_2 data (https://gml.noaa.gov/webdata/ccgg/trends/co2/co2_annmean_mlo.txt)

הקשר לכדור הארץ: הממוצע החודשי של NOAA ב־Mauna Loa היה 426.07 ppm בספטמבר 2026. NOAA Global Monitoring Laboratory: Trends in atmospheric CO_2 (Mauna Loa) (https://gml.noaa.gov/ccgg/trends/)

☐ **השלמתי את המעבדה הזו (רטובה או וירטואלית)**

מעבדה B: פלינקו וההתפלגות הבינומית

שבוע 4

מטרה: הפילו כדורים ב־PhET Plinko Probability והשוו את ההיסטוגרמה למודל הבינומי.

$$\mu = np,\ \sigma = \sqrt{np(1-p)}$$

```
μ=np,\ σ=(1-p)
```

ממוצע ופיזור בינומיים

מהלך הניסוי

1. קבעו 12 שורות ו־p = 0.5.
2. הפילו 1000 כדורים ורשמו את הממוצע ואת סטיית התקן.
3. חשבו את הערכים הבינומיים.
4. שנו את p ל־0.7 וחזו את הממוצע החדש לפני ההפלה.

טבלת נתונים

גודל	ערך בינומי
תא ממוצע	6
סטיית תקן	1.732
P(תא 6)	0.2256

ערכים מחושבים; הסימולציה שלכם אמורה להתקרב אליהם.

חישוב לדוגמה

1. σ = √(12 × 0.25) = 1.732.
2. P(6) = C(12, 6)/2¹² = 924/4096 = 0.2256.

בטיחות

- מחשב בלבד.

חלופה ביתית או וירטואלית

- כל דפדפן מתאים.

PhET: Plinko Probability (https://phet.colorado.edu/en/simulations/plinko-probability)

הקשר לכדור הארץ: NOAA קובעת את גודל קונוס ההוריקנים כך ששני שלישים משגיאות המסלול בעבר נופלים בתוכו. NOAA National Hurricane Center: Definition of the NHC Track Forecast Cone (https://www.nhc.noaa.gov/aboutcone.shtml)

- [ ] השלמתי את המעבדה הזו (רטובה או וירטואלית)

מעבדה C: סימולציה של שיטפונות 100 שנה

שבוע 6

מטרה: השתמשו במונטה קרלו בגיליון אלקטרוני כדי לאמוד את הסיכוי לפחות לשיטפון אחד של 1% לשנה ב־30 שנה.

$$P = 1 - 0.99^{30}$$

```
P=1-0.99^30
```

תשובה מדויקת

מהלך הניסוי

1. צרו 30 עמודות של RAND()<0.01= (אחת לכל שנה).
2. בכל שורה, בדקו אם בשנה כלשהי היה שיטפון.
3. העתיקו ל־1000 שורות ומצעו את התוצאה.
4. השוו לתשובה המדויקת ולשגיאת מונטה קרלו הצפויה.

טבלת נתונים

גודל	ערך
הסתברות מדויקת	0.260
טעות תקן של מונטה קרלו, N = 1000	0.0139
טווח צפוי (±2 טעויות תקן)	0.232 עד 0.288

ערכים מחושבים; האומדן שלכם ישתנה בכל חישוב מחדש.

חישוב לדוגמה

1. SE = √(0.26 × 0.74/1000) = 0.0139.
2. 0.260 ± 0.0278.

בטיחות

- מחשב בלבד.

חלופה ביתית או וירטואלית

- כל גיליון אלקטרוני מתאים.

MIT OpenCourseWare 18.05 Introduction to Probability and Statistics (Spring 2022) (https://ocw.mit.edu/courses/18-05-introduction-to-probability-and-statistics-spring-2022/)

הקשר לכדור הארץ: USGS מדגישה ששיטפונות 100 שנה יכולים לקרות שנתיים ברציפות. USGS Water Science School: The 100-Year Flood (https://www.usgs.gov/special-topics/water-science-school/science/100-year-flood)

☐ **השלמתי את המעבדה הזו (רטובה או וירטואלית)**

מעבדה D: קוביות ומשפט הגבול המרכזי

שבוע 7

מטרה: מצעו הטלות קובייה מדומות (או אמיתיות) וצפו בהתפלגות הממוצעים הופכת לנורמלית.

$$SE = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

SE=(σ)/(n)

שגיאת תקן

מהלך הניסוי

1. הדמו הטלות עם =RANDBETWEEN(1,6).
2. מצעו קבוצות של 1, 5, 25 ו־100 הטלות, 500 פעמים כל אחת.
3. שרטטו היסטוגרמות וחשבו את סטיות התקן שלהן.
4. השוו ל־σ/√n.

טבלת נתונים

הטלות לממוצע	טעות תקן חזויה
1	1.708
25	0.342
100	0.171

ערכים מחושבים; לקובייה ממוצע 3.5 ו־σ = √(35/12).

חישוב לדוגמה

1. σ = √(35/12) = 1.708.
2. SE(25) = 1.708/5 = 0.342.

בטיחות

- מחשב בלבד.

חלופה ביתית או וירטואלית

- גם קוביות אמיתיות מתאימות.

PhET: Plinko Probability (https://phet.colorado.edu/en/simulations/plinko-probability)

הקשר לכדור הארץ: NASA מפרסמת אנסמבל אי־ודאות לרשומת הטמפרטורות GISTEMP שלה. NASA GISS: GISS Surface Temperature Analysis (GISTEMP v4) (https://data.giss.nasa.gov/gistemp/)

- [ ] השלמתי את המעבדה הזו (רטובה או וירטואלית)

מעבדה E: רגרסיה ושאריות

שבוע 12

מטרה: התאימו קו ב־PhET Least-Squares Regression, ואז התאימו את ממוצעי העשורים של NOAA ב־Mauna Loa ובחנו את השאריות.

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x$$

y=b_0+b_1x

קו ריבועים פחותים

מהלך הניסוי

1. ב־PhET, מקמו נקודות והשוו את הקו שלכם להתאמה הטובה ביותר.
2. הזינו את ממוצעי העשורים 1960–2020 עם x = שנים מאז 1960.
3. השתמשו ב־LINEST או בקו מגמה כדי לקבל b_0, b_1 ו־r.
4. שרטטו את השאריות ותארו את הדפוס.

טבלת נתונים

גודל	ערך
שיפוע	1.613 ppm/שנה
חותך	310.15 ppm
r	0.990
שאריות 2020 / 2000 / 1960	+7.27 / −4.97 / +6.76 ppm

נתונים מ־NOAA GML; ההתאמה מחושבת. השאריות בצורת U מראות עקמומיות כלפי מעלה.

חישוב לדוגמה

1. b_1 = Sxy/Sxx = 1.613.
2. שארית 2020 = 414.21 − (310.15 + 1.613 × 60) = 7.27.

בטיחות

- מחשב בלבד.

חלופה ביתית או וירטואלית

- כל גיליון אלקטרוני מתאים.

PhET: Least-Squares Regression (https://phet.colorado.edu/en/simulations/least-squares-regression) · NOAA GML: Mauna Loa annual mean CO_2 data (https://gml.noaa.gov/webdata/ccgg/trends/co2/co2_annmean_mlo.txt)

הקשר לכדור הארץ: NOAA מציינת ש־Mauna Loa דוגמת אוויר בגובה 3400 m, מה שעשוי להיות שונה מהממוצע העולמי. NOAA Global Monitoring Laboratory: Trends in atmospheric CO_2 (Mauna Loa) (/https://gml.noaa.gov/ccgg/trends)

☐ **השלמתי את המעבדה הזו (רטובה או וירטואלית)**

מעבדה F: אמינות של מערכת התרעה

שבוע 14

מטרה: בנו גיליון אלקטרוני לאמינות בטור ובמקביל ובדקו כיצד יתירות משנה שרשרת התרעת שיטפונות לדוגמה.

$$R_s = \prod R_i,\; R_p = 1 - \prod (1 - R_i)$$

```
R_s= R_i,\ R_p=1-(1-R_i)
```

אמינות המערכת

מהלך הניסוי

1. מדלו שרשרת לדוגמה: חיישן, קישור רדיו וצופר בטור.
2. חשבו R כשכל אחד ב־0.99, ואז עם זוג צופרים יתיר.
3. השתמשו ב־e^(−t/MTBF) למשימה של 1000 h עם MTBF של 50000 h.
4. מצאו איזה שדרוג בודד עוזר הכי הרבה.

טבלת נתונים

תצורה	אמינות
שלושה רכיבים בטור (0.99 כל אחד)	0.9703
שתי יחידות יתירות (0.9 כל אחת)	0.99
רכיב + 0.9 זוג יתיר של 0.9	0.891
1000 h עם MTBF של 50000 h	0.980

ערכי דוגמה; מחושבים.

חישוב לדוגמה

1. $0.99^3 = 0.9703$.
2. $0.9 \times (1 - 0.1^2) = 0.891$.

בטיחות

- מחשב בלבד.

חלופה ביתית או וירטואלית

- כל גיליון אלקטרוני מתאים.

NIST/SEMATECH e-Handbook of Statistical Methods (/https://www.itl.nist.gov/div898/handbook)

הקשר לכדור הארץ: NOAA אומרת שאסונות יכולים לקרות גם בעונות הוריקנים דלות פעילות, אז התכוננו כל שנה. NOAA Climate Prediction Center: Atlantic Hurricane Outlook (updated Aug. 6, 2026) (https://cpc.ncep.noaa.gov/products/outlooks/hurricane.shtml)

☐ **השלמתי את המעבדה הזו (רטובה או וירטואלית)**

מערכי תרגול למבחן

מדדו זמן: כ־10 דקות לבעיה. אחר כך השוו לפתרונות המלאים.

סט תרגול לבחינת אמצע (יחידות 5–1)

1. מצאו ממוצע, חציון וסטיית תקן מדגמית של 4, 8, 6, 10, 12.

   1. ממוצע = 40/5.
   2. s = √(40/4).

   תשובה: ממוצע 8, חציון 8, s = 3.16.

2. מצאו את הסיכוי לפחות לשיטפון 25 שנה אחד (4% בשנה) ב־10 שנים.

   1. $1 - 0.96^{10}$.

   תשובה: 33.5%.

3. בדיקה מזהה מצב ב־90% מהמקרים ומתריעה בטעות ב־10%; שיעור הבסיס הוא 1%. מצאו P(מצב | חיובי).

   1. 0.009/(0.009 + 0.099).

   תשובה: 8.33%.

4. מצאו P(X = 0) להתפלגות בינומית עם n = 5, p = 0.2.

   1. 0.8^5.

   תשובה: 0.328.

5. מצאו P(X = 0) להתפלגות פואסון עם λ = 2.

   1. e^{-2}.

   תשובה: 0.135.

מערך תרגול מסכם (כל היחידות)

1. מצאו P(Z > 1.96).

   1. 1 − 0.975.

תשובה: 0.025.

2. מצאו את טעות התקן עבור σ = 6, n = 36.

.6/6 .1

תשובה: 1.

3. בנו רווח 95% עבור x̄ עם n = 16, s = 4, (t = 2.131) = 50.

.2.131 × 4/4 .1

תשובה: 50 ± 2.13.

4. בדקו H_0: μ = 50 עם x̄ = 52, s = 4, n = 16.

.t = 2/(4/4) .1

תשובה: t = 2.0, מעט מתחת ל־2.131: לא דוחים ברמה של 5% (דו־צדדי).

5. מצאו את האמינות של ארבעה רכיבים של 0.95 בטור.

.0.95⁴ .1

תשובה: 0.815.

6. לרכיב MTBF של 2000 h. מצאו P(הוא שורד 500 h).

.e^(−0.25) .1

תשובה: 0.779.

דף נוסחאות

$$\bar{x} = \sum x/n,\ s^2 = \sum (x-\bar{x})^2/(n-1)$$

$$P(\geq 1) = 1-(1-p)^n,\ P(A\cup B) = P(A)+P(B$$

$$P(B|A) = P(A|B)P(B)/P(A),\ \lambda = -\ln(1-P)/$$

$$P(X=k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},\ P(X=k) = e^{-\lambda}\lambda$$

$$z = (x-\mu)/\sigma,\ P(T>t) = e^{-\lambda t},\ T = 1/AEP$$

$$SE = \sigma/\sqrt{n}$$

$$\bar{x} \pm t\, s/\sqrt{n},\ \hat{p} \pm z\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}$$

$$t = (\bar{x}-\mu_0)/(s/\sqrt{n})$$

$$R_s = \prod R_i,\ R_p = 1 - \prod (1 - R_i),\ MTBF = 1/\lambda \qquad b_1 = S_{xy}/S_{xx},\ r = S_{xy}/\sqrt{S_{xx}S_{yy}}$$

קבועים

קבוע	ערך
התפלגות נורמלית סטנדרטית (ערכי ספר לימוד)	Φ(1) = 0.8413, Φ(1.96) = 0.975, Φ(2) − Φ(−2) = 0.9545
התפלגות t של סטודנט, 4 דרגות חופש (ערך ספר לימוד)	$t_{0.975} = 2.776$
e	2.718281828
כלל 68–95–99.7	החלק של התפלגות נורמלית בטווח 1, 2 ו־3 סטיות תקן
1 ppm	חלק אחד למיליון בשבר מולי
הסתברות חריגה שנתית	1/(תקופת חזרה)

מקור: NIST/SEMATECH e-Handbook of Statistical Methods (https://www.itl.nist.gov/div898/handbook/)

טקסטים וסימולציות בחינם

השתמשו בהרצאות, בספרים, במדריכים ובסימולציות החינמיים האלה לצד הקורס.

- MIT OpenCourseWare 18.05 Introduction to Probability and Statistics (Spring 2022) (https://ocw.mit.edu/courses/18-05-introduction-to-probability-and-statistics-spring-2022/): הרצאות, קריאה ותרגילים חינמיים של MIT.
- MIT OpenCourseWare 6.041 Probabilistic Systems Analysis and Applied Probability (Fall 2010) (https://ocw.mit.edu/courses/6-041-probabilistic-systems-analysis-and-applied-probability-fall-2010/): קורס MIT חינמי בהסתברות שימושית.
- OpenStax Introductory Statistics 2e (https://openstax.org/books/introductory-statistics-2e/pages/1-introduction): ספר לימוד חינמי.
- NIST/SEMATECH e-Handbook of Statistical Methods (https://www.itl.nist.gov/div898/handbook/): מדריך חינמי לסטטיסטיקה הנדסית.
- PhET: Plinko Probability (https://phet.colorado.edu/en/simulations/plinko-probability): התפלגויות בינומית ונורמלית באופן אינטראקטיבי.
- PhET: Center and Variability (https://phet.colorado.edu/en/simulations/center-and-variability): ממוצע, חציון ופיזור באופן אינטראקטיבי.

מילון מונחים

הסתברות חריגה שנתית
הסיכוי שאירוע ישתווה או יעבור ערך מסוים בשנה.

משפט בייס
הופך הסתברות מותנית.

התפלגות בינומית
הצלחות ב־n ניסויים בלתי תלויים.

משפט הגבול המרכזי

ממוצעי מדגם הופכים לנורמליים.

הסתברות מותנית

הסתברות בהינתן שאירוע אחר קרה.

רווח סמך

טווח משיטה שלוכדת את הערך האמיתי בשיעור קבוע.

מתאם

עוצמת הקשר הליניארי.

תוחלת

ממוצע בטווח הארוך.

התפלגות מעריכית

זמן המתנה חסר זיכרון.

אי־תלות

אירוע אחד אינו משנה את ההסתברות של אחר.

MTBF

זמן ממוצע בין כשלים.

חציון

הערך האמצעי.

מונטה קרלו

אמידה באמצעות סימולציה מקרית חוזרת.

התפלגות נורמלית

התפלגות בצורת פעמון.

התפלגות פואסון

ספירת אירועים נדירים.

תקופת חזרה

מספר השנים הממוצע בין אירועים בגודל נתון.

אמינות

ההסתברות לשרוד עד זמן נתון.

שגיאת תקן

סטיית התקן של סטטיסטי.

טעות מסוג ראשון

דחיית השערת אפס נכונה.

ערך p

הסיכוי לנתונים קיצוניים כאלה אם H_0 נכונה.

מחוון להערכה עצמית

לא ניתנים ציון או נקודות זכות. השתמשו בזה כדי להעריך בכנות איפה אתם עומדים בכל יחידה.

רמה	איך זה נראה
4 · שליטה מלאה	מגדיר את המשתנה המקרי, מצהיר על הנחות, בוחר את המודל הנכון, מדווח על אי־ודאות ומפרש תוצאות במילים פשוטות.
3 · מיומן	פותר את תרגילי התרגול עם החלקות מזדמנות בהנחות או ביחידות.
2 · מתפתח	עוקב אחר דוגמאות פתורות אך קורא לא נכון ערכי p או רמות סמך.
1 · מתחיל	מציב מספרים בנוסחאות בלי לבדוק הנחות; צריך לחזור על היחידה.

שקלול מוצע אם רוצים ציון

חלק	משקל
תרגילים	20%
מעבדות	25%
מערך תרגול לאמצע הקורס	25%
מערך תרגול מסכם	30%

שאפו לרמה 3 ומעלה בכל יחידה לפני שעוברים לקורס הבא.

קורסים קשורים

- שיטות נומריות MATH 340
- הנעה AERO 410
- אווירודינמיקה 1 AERO 310
- כל הקורסים