Dernière mise à jour: November 1, 2026

🗺️ Parcours sur quatre ans · Année 3, Printemps

À propos de ce cours

Ce cours gratuit compte 10 unités et 6 travaux pratiques. Ce sont les vrais totaux, pas un programme plus long raccourci.

Un contrôle est un nombre ou un résultat de code sur une page de cours qu'un script recalcule avant publication. Le nombre affiché et le nombre recalculé doivent correspondre.

> Ceci est le plan d'un cours gratuit en autonomie rédigé par Saving Planets. Ce n'est pas un cours universitaire : il ne donne aucun crédit académique et aucun établissement n'y participe.
>
> Son contenu suit un cours semestriel de probabilités et statistiques de troisième année pour ingénieurs. Il s'inspire des thèmes et du niveau de MIT 18.05 Introduction to Probability and Statistics et MIT 6.041 Probabilistic Systems Analysis (gratuits sur MIT OpenCourseWare), et utilise le manuel gratuit OpenStax Introductory Statistics et le NIST/SEMATECH e-Handbook of Statistical Methods, vers lesquels nous renvoyons quand ils sont utiles. Aucun de ces auteurs, établissements ou organismes ne cautionne cette page.
>
> Notre apport : chaque module est relié à un travail réel avec une source publique citée (probabilités de crues et de séismes de l'USGS, prévisions d'ouragans et cônes de prévision de la NOAA, série de CO_2 de Mauna Loa et analyse des températures de la NASA), chaque nombre de la page est recalculé par un script de vérification avant publication, et chaque TP dispose d'une simulation gratuite ou d'un tableur.
>
> Suivez-le dans l'ordre. Chaque unité comporte des objectifs, des notions clés, des équations, des exemples pas à pas, des exercices corrigés en détail, des erreurs fréquentes, des cartes mémoire et un quiz. Votre progression est enregistrée uniquement dans ce navigateur.

Comment ce cours aide à sauver la planète

Protéger les personnes et la planète est une question de probabilités : quelle est la probabilité d'une crue, d'un séisme ou d'un ouragan, à quel point sommes-nous sûrs que le CO_2 augmente plus vite, et quelle est la fiabilité des systèmes qui nous alertent.

La statistique transforme les données en probabilités et nous dit à quel point leur faire confiance. Chaque module se termine par une courte section sourcée. Les valeurs qui ne proviennent pas d'une source sont indiquées comme valeurs d'exemple ou de manuel.

Pour les enseignants

Vous pouvez enseigner ce cours, ou laisser un élève le faire seul. Il est gratuit. Saving Planets ne donne ni note ni crédit scolaire.

- Cette page est le cours entier : 10 unités et 6 travaux pratiques (MATH 350).
- Prévoyez 15 semaines, environ 6 à 9 heures par semaine, y compris les semaines de travaux pratiques.
- Suivez le calendrier de 15 semaines. Lisez l'unité, faites les exercices sur papier, puis ouvrez la réponse. La semaine d'un TP, faites le TP ou la version à la maison.
- Un contrôle est un nombre ou un résultat de code sur la page qu'un script recalcule avant publication. Le nombre affiché et le nombre recalculé doivent correspondre.
- Utilisez Imprimer cette page, ou téléchargez le guide d'étude PDF. La feuille de formules est vers la fin.
- Demandez : en quoi cette unité aide-t-elle les gens et la planète ? Chaque unité a un encadré vert avec un fait sourcé.
- Copiez le modèle de guide enseignant et écrivez le nom de votre classe, le temps dont vous disposez et les questions que vous poserez. Ouvrir le modèle de guide enseignant

Avant de commencer

Prérequis

- Analyse I et II : dérivées, intégrales et séries.
- Algèbre linéaire : vecteurs et moindres carrés (utile pour la régression).
- Initiation à la programmation ou maîtrise du tableur : formules, plages et graphiques.
- Méthodes numériques (utile, non obligatoire).

Comment étudier

- Écrivez la variable aléatoire et ses unités avant tout calcul.
- Dessinez d'abord la loi ou un arbre de probabilités.
- Vérifiez que les probabilités sont comprises entre 0 et 1 et que leur somme vaut 1.
- Énoncez explicitement les hypothèses comme l'indépendance : la plupart des erreurs commencent là.
- En cas de doute, simulez : un tableur avec RAND() peut vérifier presque n'importe quelle probabilité.
- Faites chaque exercice sur papier avant d'ouvrir la réponse, et refaites les quiz quelques jours plus tard.

Ce qu'il vous faut

- Un ordinateur ou une tablette pour les simulations gratuites PhET Center and Variability, Plinko Probability et Least-Squares Regression.
- Un tableur (n'importe quel tableur gratuit) avec RAND(), NORM.DIST et LINEST, ou Python.
- Le fichier de données CO_2 de Mauna Loa de la NOAA dans un navigateur web.
- Une calculatrice ; une paire de dés est facultative.

Programme suggéré sur 15 semaines

Environ 6 à 9 heures par semaine : lecture, exercices et, les semaines de TP, le TP.

Semaine	Unité	Thèmes	Lecture
1	Décrire les données : tendance centrale, dispersion et graphiques	Décrire les données ; TP A	OpenStax Intro Stats
2	Règles de probabilité, dénombrement et indépendance	Règles de probabilité et dénombrement	MIT 18.05
3	Probabilité conditionnelle et théorème de Bayes	Probabilité conditionnelle et Bayes	MIT 6.041
4	Variables aléatoires discrètes : binomiale et Poisson	Variables discrètes et loi binomiale ; TP B	MIT 18.05
5	Variables aléatoires discrètes : binomiale et Poisson	Modèles de Poisson et géométrique	MIT 18.05
6	Lois continues : normale, exponentielle et extrêmes	Lois continues ; TP C	USGS 100-year flood
7	Échantillonnage, simulation et théorème central limite	Échantillonnage et TCL ; TP D ; entraînement au partiel	MIT 18.05
8	Intervalles de confiance	Intervalles de confiance pour les moyennes	OpenStax Intro Stats
9	Intervalles de confiance	Intervalles pour les proportions et taille d'échantillon	NOAA CPC
10	Tests d'hypothèses et valeurs p	Tests d'hypothèses et valeurs p	MIT 18.05
11	Corrélation et régression linéaire	Corrélation et régression	OpenStax Intro Stats
12	Corrélation et régression linéaire	Résidus et validation du modèle ; TP E	NOAA GML
13	Fiabilité et risque	Fiabilité et MTBF	NIST e-Handbook

Semaine	Unité	Thèmes	Lecture
14	Fiabilité et risque	Fiabilité des systèmes ; TP F	NIST e-Handbook
15	Fiabilité et risque	Risque et révision ; entraînement à l'examen final	NOAA CPC; USGS

Votre progression

Cochez les unités et les TP à mesure que vous les terminez, et faites les quiz. La progression et les scores sont enregistrés uniquement dans ce navigateur et ne nous sont jamais envoyés.

Unités

Décrire les données : tendance centrale, dispersion et graphiques

Types de données, histogrammes et boîtes à moustaches, moyenne et médiane, étendue, variance et écart-type, quartiles et valeurs aberrantes, et pourquoi l'écart-type d'échantillon divise par n − 1.

Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette unité, vous saurez :

- Calculer la moyenne, la médiane, l'étendue et l'écart-type d'échantillon.
- Choisir entre moyenne et médiane.
- Lire un histogramme et une boîte à moustaches.
- Repérer les valeurs aberrantes avec la règle 1.5 IQR.

Notions clés

- La moyenne x̄ = Σx/n est le point d'équilibre ; la médiane est la valeur centrale et résiste aux valeurs aberrantes.
- La variance d'échantillon s² = Σ(x − x̄)²/(n − 1) mesure la dispersion ; s, sa racine carrée, a les unités des données. Diviser par n − 1 corrige l'utilisation de x̄ au lieu de la vraie moyenne.
- L'étendue vaut max − min ; l'écart interquartile IQR = Q3 − Q1 contient la moitié centrale des données.
- Les points situés à plus de 1.5 IQR au-delà des quartiles sont signalés comme valeurs aberrantes possibles : vérifiez-les, ne vous contentez pas de les supprimer.
- Tracez toujours d'abord : un histogramme ou une boîte à moustaches montre l'asymétrie, les lacunes et les valeurs aberrantes qu'un seul nombre masque.

Équations clés

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i$$

`x=1n x_i`

Moyenne d'échantillon

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum (x_i - \bar{x})^2$$

`s^2=(1)/(n-1)(x_i- x)^2`

Variance d'échantillon

$$IQR = Q_3 - Q_1$$

`IQR=Q_3-Q_1`

Écart interquartile

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

`z=(x- x)/(s)`

Score standard

Exemples résolus pas à pas

Exemple 1.1 Les moyennes annuelles de la NOAA à Mauna Loa donnent des hausses annuelles de CO_2 pour 2021–2025 de 2.20, 2.12, 2.55, 3.53 et 2.74 ppm. Trouvez la moyenne et la médiane.

1. Somme = 13.14 ; divisez par 5.
2. Tri : 2.12, 2.20, 2.55, 2.74, 3.53.

Réponse : Moyenne 2.628 ppm/an ; médiane 2.55 ppm/an.

Exemple 1.2 Trouvez l’étendue et l’écart-type d’échantillon.

1. Étendue = 3.53 − 2.12.
2. s = √(Σ(x − 2.628)²/4).

Réponse : Étendue 1.41 ppm/an ; s = 0.564 ppm/an.

Exemple 1.3 Trouvez le score z de la hausse de 3.53 ppm (2024).

1. z = (3.53 − 2.628)/0.564.

Réponse : z = 1.60.

Exercices

Faites chacun d’abord sur papier, puis vérifiez.

1. Laquelle est la plus influencée par la valeur 3.53, la moyenne ou la médiane ?

La moyenne (2.628 contre 2.55).

2. Pourquoi diviser par n − 1 ?

   Les écarts à $\bar{x}$ sont légèrement trop petits ; n − 1 corrige le biais.

3. Unités de s pour les hausses de CO_2 ?

   ppm par an.

4. Quel est l'effet d'une longue queue à droite sur la moyenne et la médiane ?

   Moyenne > médiane.

Idées reçues fréquentes

Idée reçue : La moyenne est toujours représentative.
En réalité : L'asymétrie ou les valeurs aberrantes peuvent l'éloigner.

Idée reçue : Les valeurs aberrantes sont des erreurs.
En réalité : Elles peuvent être des événements réels ; enquêtez.

Idée reçue : L'écart-type peut être négatif.
En réalité : C'est une racine carrée, jamais négative.

Cartes mémoire

Moyenne

$\Sigma x/n$.

Médiane

Valeur centrale.

Écart-type

$\sqrt{(\Sigma(x - \bar{x})^2/(n - 1))}$.

IQR

Q3 − Q1.

Règle des valeurs aberrantes

1.5 IQR au-delà des quartiles.

Score z

$(x - \bar{x})/s$.

Quiz d'autocontrôle

1. Résiste aux valeurs aberrantes…

la médiane

moyenne

l’étendue

la variance

la médiane. Valeur centrale.

2. La variance d’échantillon divise par…

$n - 1$

n

$n + 1$

$2n$

$n - 1$. Correction du biais.

3. L’IQR est…

$Q3 - Q1$

max − min

moyenne − médiane

s^2

$Q3 - Q1$. La moitié centrale.

4. Tracez les données…

d’abord

jamais

en dernier

seulement si on vous le demande

d’abord. Voir la forme.

Refaire ce quiz

Comment cela aide à sauver la planète

La NOAA indique que la série de CO_2 de Mauna Loa, lancée par C. David Keeling de Scripps en mars 1958, est la plus longue série de mesures directes du CO_2 atmosphérique. Les moyennes annuelles de la NOAA sont passées de 414.21 ppm en 2020 à 427.35 ppm en 2025.

Les statistiques descriptives de ce module transforment cette série en taux : les cinq hausses annuelles valent en moyenne 2.628 ppm par an, avec un écart-type de 0.564 ppm par an dû à la variabilité d’une année à l’autre.

Sur Saving Planets : Solutions · Observation de la Terre

Sources : NOAA Global Monitoring Laboratory: Trends in atmospheric CO_2 (Mauna Loa) (https://gml.noaa.gov/ccgg/trends/) · NOAA GML: Mauna Loa annual mean CO_2 data (https://gml.noaa.gov/webdata/ccgg/trends/co2/co2_annmean_mlo.txt)

Ressources d’apprentissage gratuites

- OpenStax Introductory Statistics 2e (https://openstax.org/books/introductory-statistics-2e/pages/1-introduction): Manuel gratuit.
- PhET: Center and Variability (https://phet.colorado.edu/en/simulations/center-and-variability): Moyenne, médiane et dispersion en interactif.

☐ **J’ai terminé cette unité**

Règles de probabilité, dénombrement et indépendance

Univers et événements, axiomes, complémentaires, règles d'addition et de multiplication, indépendance, permutations et combinaisons, et problèmes « au moins un ».

Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette unité, vous saurez :

- Appliquer les règles du complémentaire, d'addition et de multiplication.
- Tester l'indépendance.
- Dénombrer avec permutations et combinaisons.
- Résoudre les problèmes « au moins un ».

Notions clés

- Les probabilités sont comprises entre 0 et 1 et l'univers entier a une probabilité de 1. P(non A) = 1 − P(A).
- Règle d'addition : P(A ou B) = P(A) + P(B) − P(A et B).
- A et B sont indépendants si P(A et B) = P(A)P(B) ; connaître l'un n'apprend alors rien sur l'autre.
- Pour « au moins un » sur n essais indépendants, utilisez le complémentaire : 1 − (1 − p)^n.
- Les combinaisons C(n, k) = n!/(k!(n − k)!) dénombrent les sélections non ordonnées ; les permutations dénombrent les sélections ordonnées.

Équations clés

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

`P(A^c)=1-P(A)`

Complémentaire

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

`P(A B)=P(A)+P(B)-P(A B)`

Règle d'addition

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

`P(A B)=P(A)P(B)`

Indépendance

$$P(\geq 1) = 1 - (1 - p)^n$$

`P(1)=1-(1-p)^n`

Au moins un

Exemples résolus pas à pas

Exemple 2.1 Une crue de 100 ans a 1% de chances de se produire chaque année. Trouvez la probabilité d'au moins une crue pendant un prêt immobilier de 30 ans.

1. P(aucune) = 0.99^{30} = 0.740.
2. P(au moins une) = 1 − 0.740.

Réponse : 26.0%.

Exemple 2.2 Trouvez la probabilité d'au moins une crue de 100 ans en 100 ans.

1. 1 − 0.99^{100}.

Réponse : 63.4%, pas 100%.

Exemple 2.3 Trouvez la probabilité d'au moins une crue de 50 ans (2% par an) en 30 ans.

1. 1 − 0.98^{30}.

Réponse : 45.5%.

Exercices

Faites chacun d'abord sur papier, puis vérifiez.

1. Au moins une crue de période de retour 250 ans (0.4% par an) en 30 ans ?

   1 − 0.996^{30} = 11.3%.

2. De combien de façons peut-on choisir 6 éléments parmi 9 ?

   C(9, 6) = 84.

3. Deux crues de 100 ans peuvent-elles survenir deux années de suite ?

   Oui : chaque année commence avec la même probabilité de 1%.

4. Les crues annuelles sont-elles traitées comme indépendantes ici ?

Oui ; l’USGS note qu’une crue rare ne réduit pas la probabilité d’une autre peu après.

Idées reçues fréquentes

Idée reçue : Une crue de 100 ans se produit une fois tous les 100 ans.

En réalité : Elle a 1% de chances chaque année.

Idée reçue : Après une crue, la suivante est moins probable.

En réalité : Chaque année est indépendante.

Idée reçue : P(A ou B) = P(A) + P(B) toujours.

En réalité : Seulement si A et B ne peuvent pas se produire ensemble.

Cartes mémoire

Complémentaire

$1 - P(A)$.

Règle d’addition

Soustraire l’intersection.

Indépendance

$P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Au moins un

$1 - (1 - p)^n$.

Combinaison

$n!/(k!(n - k)!)$.

AEP

Probabilité annuelle de dépassement.

Quiz d’autocontrôle

1. P(au moins un sur n)…

$1 - (1 - p)^n$

np

p^n

$1 - p^n$

$1 - (1 - p)^n$. Complémentaire.

2. Indépendant signifie…

P(A∩B) = P(A)P(B)

disjoint

égaux

P = 0

P(A∩B) = P(A)P(B). Définition.

3. Probabilité annuelle d'une crue de 100 ans…

1%

100%

10%

0.1%

1%. USGS.

4. C(n, k) dénombre…

les choix non ordonnés

les ordres

toujours les issues

seulement les paires

les choix non ordonnés. Associations.

Refaire ce quiz

Comment cela aide à sauver la planète

L'USGS explique qu'une « crue de 100 ans » est une crue qui a 1 pour cent de chances de se produire chaque année, et que des crues de 100 ans peuvent survenir deux années de suite. Son tableau

associe à chaque période de retour une probabilité annuelle de dépassement : 2 ans avec 50%, 10 ans avec 10%, 100 ans avec 1% et 500 ans avec 0.2%.

L'USGS note que dans les années 1960 les États-Unis ont choisi la crue de probabilité annuelle de dépassement de 1 pour cent comme base du National Flood Insurance Program. La règle du complémentaire de ce module montre qu'une maison habitée 30 ans dans cette zone a 26% de chances de connaître au moins une telle crue.

Sur Saving Planets : Océans · Solutions

Sources : USGS Water Science School: The 100-Year Flood (https://www.usgs.gov/special-topics/water-science-school/science/100-year-flood)

Ressources d'apprentissage gratuites

- MIT OpenCourseWare 18.05 Introduction to Probability and Statistics (Spring 2022) (https://ocw.mit.edu/courses/18-05-introduction-to-probability-and-statistics-spring-2022/): Cours gratuits du MIT.
- OpenStax Introductory Statistics 2e (https://openstax.org/books/introductory-statistics-2e/pages/1-introduction): Manuel gratuit.

☐ **J'ai terminé cette unité**

Probabilité conditionnelle et théorème de Bayes

Probabilité conditionnelle, règle de multiplication, arbres de probabilités, formule des probabilités totales, théorème de Bayes, taux de base, et conversion d'une probabilité sur 30 ans en taux annuel.

Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette unité, vous saurez :

- Calculer des probabilités conditionnelles à partir d'un tableau ou d'un arbre.
- Appliquer la formule des probabilités totales.
- Utiliser le théorème de Bayes et expliquer l'effet du taux de base.
- Convertir des probabilités pluriannuelles en taux annuels.

Notions clés

- P(A | B) = P(A et B)/P(B) est la probabilité de A une fois que l'on sait que B s'est produit.
- La formule des probabilités totales additionne les branches d'un arbre : P(A) = Σ P(A | B_i)P(B_i).
- Le théorème de Bayes inverse un conditionnement : P(B | A) = P(A | B)P(B)/P(A).
- Les événements rares donnent beaucoup de fausses alertes : même un bon test a une faible valeur prédictive positive quand le taux de base est faible.
- Si les événements surviennent à un taux constant λ, la probabilité d'au moins un en t ans est 1 − e^(−λt), donc λ = −ln(1 − P)/t.

Équations clés

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

```
P(A|B)=(P(A B))/(P(B))
```

Probabilité conditionnelle

$$P(A) = \sum_i P(A|B_i)P(B_i)$$

```
P(A)=_i P(A|B_i)P(B_i)
```

Probabilités totales

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

```
P(B|A)=(P(A|B)P(B))/(P(A))
```

Théorème de Bayes

$$\lambda = -\frac{\ln(1-P)}{t}$$

```
=-((1-P))/(t)
```

Taux à partir d'une probabilité sur t ans

Exemples résolus pas à pas

Exemple 3.1 Un capteur signale une panne 95% du temps quand elle existe et à tort 5% du temps sinon ; 2% des unités ont la panne (valeurs d'exemple). Trouvez P(panne | signal).

1. P(signal) = 0.95 × 0.02 + 0.05 × 0.98 = 0.068.
2. Bayes : 0.019/0.068.

Réponse : 27.9% : la plupart des signaux sont de fausses alertes.

Exemple 3.2 L'USGS donne 72% de chances d'au moins un séisme M ≥ 6.7 dans la région de la baie de San Francisco en 30 ans. Trouvez le taux annuel, en supposant un taux constant.

1. λ = −ln(0.28)/30.

Réponse : λ = 0.0424 par an.

Exemple 3.3 Trouvez la probabilité d'au moins un tel séisme en une seule année.

1. 1 − e^(−0.0424).

Réponse : 4.15% par an.

Exercices

Faites chacun d'abord sur papier, puis vérifiez.

1. Probabilité d'un séisme dans les 10 prochaines années à ce taux ?

   1 − e^(−0.424) = 34.6%.

2. Taux annuel correspondant aux 60% en 30 ans de la région de Los Angeles ?

−ln(0.4)/30 = 0.0305 par an.

3. Pourquoi P(panne | signal) est-elle si faible ?

   Le taux de base (2%) est faible.

4. P(A | B) est-elle égale à P(B | A) ?

   En général, non.

Idées reçues fréquentes

Idée reçue : P(A | B) = P(B | A).
En réalité : Le théorème de Bayes les relie par les taux de base.

Idée reçue : Un test fiable à 95% a raison 95% du temps quand il se déclenche.
En réalité : Pas quand la condition est rare.

Idée reçue : Une probabilité sur 30 ans se divise simplement par 30.
En réalité : Utilisez la formule du taux.

Cartes mémoire

Conditionnelle

$P(A \cap B)/P(B)$.

Probabilités totales

Somme sur les branches.

Bayes

$P(A|B)P(B)/P(A)$.

Taux de base

Fréquence a priori.

Taux

$\lambda = -\ln(1 - P)/t$.

Arbre de probabilités

On multiplie le long des branches, on additionne les chemins.

Quiz d’autocontrôle

1. Bayes inverse...

un conditionnement

une somme

une moyenne

un échantillon

un conditionnement. P(B|A) à partir de P(A|B).

2. Des taux de base faibles provoquent…

de fausses alertes

plus de précision

rien

un biais sur s

de fausses alertes. Peu de vrais positifs.

3. P(A|B) est…

$P(A \cap B)/P(B)$

P(A)P(B)

P(A) + P(B)

P(B)/P(A)

$P(A \cap B)/P(B)$. Définition.

4. Probabilité sur 30 ans d'un séisme M ≥ 6.7 dans la baie de San Francisco…

72%

7%

99%

20%

72%. USGS.

Refaire ce quiz

Comment cela aide à sauver la planète

L'USGS, à l'aide de l'Uniform California Earthquake Rupture Forecast 3, donne des probabilités sur 30 ans de 72% pour un séisme de magnitude 6.7 dans la région de la baie de San Francisco et de 60% dans la région de Los Angeles. Il note aussi que dans le monde, la probabilité qu'un séisme soit suivi d'un plus fort à proximité dans la semaine est d'environ 5%.

Convertir ces chiffres sur 30 ans en un taux annuel d'environ 4% permet aux ingénieurs et aux planificateurs d'urgence de comparer le risque sismique aux autres aléas.

Sur Saving Planets : Solutions · Observation de la Terre

Sources : USGS FAQ: What is the probability that an earthquake will occur in the Los Angeles area? In the San Francisco Bay area? (https://www.usgs.gov/faqs/what-probability-earthquake-will-occur-los-angeles-area-san-francisco-bay-area)

Ressources d'apprentissage gratuites

- MIT OpenCourseWare 6.041 Probabilistic Systems Analysis and Applied Probability (Fall 2010) (https://ocw.mit.edu/courses/6-041-probabilistic-systems-analysis-and-applied-probability-fall-2010/): Cours gratuit du MIT.
- MIT OpenCourseWare 18.05 Introduction to Probability and Statistics (Spring 2022) (https://ocw.mit.edu/courses/18-05-introduction-to-probability-and-statistics-spring-2022/): Cours gratuits du MIT.

Regarder le cours magistral

Lecture 2: Conditioning and Bayes' Rule2 (https://ocw.mit.edu/courses/6-041sc-probabilistic-systems-analysis-and-applied-probability-fall-2013/resources/lecture-2-video-2/) (en anglais)

MIT 6.041SC Probabilistic Systems Analysis and Applied Probability (Fall 2013), MIT OpenCourseWare. Licence : CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Conditions d'utilisation (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Lien fourni uniquement pour l'étude gratuite ; Saving Planets n'est ni affilié à cette université ni soutenu par elle.

☐ J'ai terminé cette unité

Variables aléatoires discrètes : binomiale et Poisson

Variables aléatoires, fonctions de masse, espérance et variance, lois de Bernoulli et binomiale, loi de Poisson pour les événements rares, et loi géométrique.

Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette unité, vous saurez :

- Calculer l'espérance et la variance.
- Appliquer la loi binomiale.
- Appliquer la loi de Poisson aux événements rares.
- Choisir le bon modèle discret.

Notions clés

- Une variable aléatoire associe un nombre à chaque issue. Son espérance E[X] = Σx p(x) est la moyenne à long terme.
- Var(X) = E[(X − μ)²] ; l'écart-type est sa racine carrée.
- Binomiale : nombre de succès en n essais indépendants de probabilité p. P(X = k) = C(n, k)p^k(1 − p)$^{n-k}$, moyenne np, variance np(1 − p).
- Poisson : comptage d'événements rares au taux λ par intervalle. P(X = k) = e^(−λ)$λ^k$/k!, moyenne et variance toutes deux égales à λ.
- Géométrique : nombre d'essais jusqu'au premier succès, de moyenne 1/p, d'où vient la notion de « période de retour ».

Équations clés

$$E[X] = \sum x\, p(x)$$

`E[X]= x p(x)`

Espérance

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

`P(X=k)= nk p^k(1-p)^n-k`

Binomiale

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

`P(X=k)=^-^kk!`

Poisson

$$E[T] = 1/p$$

E[T]=1/p

Attente moyenne géométrique

Exemples résolus pas à pas

Exemple 4.1 La NOAA dimensionne son cône de prévision des ouragans pour que deux tiers des erreurs de trajectoire historiques tombent à l'intérieur. Sur 9 prévisions indépendantes, trouvez le nombre attendu à l'intérieur et P(les 9 à l'intérieur).

1. E = 9 × 2/3.
2. P = $(2/3)^9$.

Réponse : E = 6 ; P(les 9) = 2.60%.

Exemple 4.2 Trouvez P(exactement 6 sur 9 à l'intérieur).

1. $C(9, 6)(2/3)^6(1/3)^3 = 84 \times 0.0878 \times 0.0370$.

Réponse : 27.3%.

Exemple 4.3 Modélisez les crues de 100 ans sur 100 ans par une loi de Poisson avec λ = 1. Trouvez P(aucune) et P(2 ou plus).

1. $P(0) = e^{-1}$.
2. $P(\geq 2) = 1 - 2e^{-1}$.

Réponse : P(0) = 36.8%; P(≥2) = 26.4%.

Exercices

Faites chacun d'abord sur papier, puis vérifiez.

1. Écart-type du nombre à l'intérieur du cône, n = 9 ?

   $\sqrt{(9 \times 2/3 \times 1/3)} = 1.414$.

2. Attente moyenne pour un événement à 1% par an (géométrique) ?

1/0.01 = 100 ans.

3. P(au moins un) de Poisson avec $\lambda = 1$?

   $1 - e^{-1} = 63.2\%$, proche des 63.4% de la binomiale.

4. Quand la loi de Poisson approche-t-elle bien la binomiale ?

   n grand, p petit.

Idées reçues fréquentes

Idée reçue : L'espérance est la valeur la plus probable.
En réalité : C'est la moyenne à long terme.

Idée reçue : Cône = zone où restent les impacts de la tempête.
En réalité : Il montre seulement la trajectoire probable du centre.

Idée reçue : La loi de Poisson exige un nombre fixe d'essais.
En réalité : Elle compte des événements dans un intervalle.

Cartes mémoire

Variable aléatoire

Un nombre par issue.

E[X]

Moyenne à long terme.

Binomiale

Succès en n essais.

Poisson

Comptage d'événements rares.

Géométrique

Essais jusqu'au premier succès.

Variance

$E[(X - \mu)^2]$.

Quiz d'autocontrôle

1. Moyenne de la binomiale...

np

n/p

p

n

np. Somme de variables de Bernoulli.

2. Moyenne et variance de Poisson...

toutes deux λ

λ et λ^2

1 et λ

0

toutes deux λ. Propriété.

3. Les cercles du cône du NHC contiennent...

deux tiers des erreurs

toutes les erreurs

moitié

95%

deux tiers des erreurs. Définition de la NOAA.

4. Attente moyenne géométrique...

1/p

p

np

p^2

1/p. Période de retour.

Refaire ce quiz

Comment cela aide à sauver la planète

Le National Hurricane Center de la NOAA construit son cône de prévision de trajectoire à partir de cercles dimensionnés pour que deux tiers des erreurs de prévision officielles historiques sur un échantillon de 5 ans tombent à l'intérieur. Pour 2026 dans l'Atlantique, d'après les erreurs de 2021–2025, le rayon du cercle passe de 25 milles nautiques à 12 heures à 95 à 72 heures et 200 à 120 heures.

Le centre d'une tempête sera donc hors du cône environ une fois sur trois, un fait binomial à connaître avant de décider que le cône signifie « sûr » ou « dangereux ».

Sur Saving Planets : GOES-19 · Océans

Sources : NOAA National Hurricane Center: Definition of the NHC Track Forecast Cone (https://www.nhc.noaa.gov/aboutcone.shtml)

Ressources d'apprentissage gratuites

- MIT OpenCourseWare 18.05 Introduction to Probability and Statistics (Spring 2022) (https://ocw.mit.edu/courses/18-05-introduction-to-probability-and-statistics-spring-2022/): Cours gratuits du MIT.
- PhET: Plinko Probability (https://phet.colorado.edu/en/simulations/plinko-probability): La binomiale en interactif.

Regarder le cours magistral

Lecture 5: Discrete Random Variables; Probability Mass Functions; Expectations Video (https://ocw.mit.edu/courses/6-041sc-probabilistic-systems-analysis-and-applied-probability-fall-2013/resources/lecture-5-video/) (en anglais)

MIT 6.041SC Probabilistic Systems Analysis and Applied Probability (Fall 2013), MIT OpenCourseWare. Licence : CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Conditions d'utilisation (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Lien fourni uniquement pour l'étude gratuite ; Saving Planets n'est ni affilié à cette université ni soutenu par elle.

☐ **J'ai terminé cette unité**

Lois continues : normale, exponentielle et extrêmes

Densités de probabilité et fonctions de répartition, lois uniforme, normale et exponentielle, centrage-réduction avec z, absence de mémoire et périodes de retour des extrêmes.

Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette unité, vous saurez :

- Utiliser une densité et une fonction de répartition.
- Trouver des probabilités normales avec les scores z.
- Appliquer la loi exponentielle aux temps d'attente.
- Relier période de retour et probabilité annuelle de dépassement.

Notions clés

- Pour une variable continue, les probabilités sont des aires sous la densité f(x) ; la fonction de répartition est F(x) = P(X ≤ x).
- La loi normale est en cloche, de moyenne μ et d'écart-type σ. Environ 68%, 95% et 99.7% des valeurs se trouvent à moins de 1, 2 et 3σ.
- Centrez-réduisez avec z = (x − μ)/σ et lisez Φ(z) dans une table ou avec NORM.S.DIST.
- Les temps d'attente entre événements à taux constant λ sont exponentiels : P(T > t) = e^(−λt), de moyenne 1/λ. Le processus est sans mémoire : l'attente passée ne change pas les probabilités futures.
- La période de retour T et la probabilité annuelle de dépassement sont inverses l'une de l'autre : un événement d'AEP 0.2 a une période de retour de 5 ans.

Équations clés

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

`P(a<X<b)=_a^b f(x) dx`

Probabilité comme aire

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

`z=(x-μ)/(σ)`

Centrage-réduction

$$P(T > t) = e^{-\lambda t}$$

P(T>t)=e^- t

Survie exponentielle

$$T = \frac{1}{AEP}$$

T=1/AEP

Période de retour

Exemples résolus pas à pas

Exemple 5.1 Trouvez P(Z < 1) et la part à moins de ±1σ pour une loi normale.

1. Φ(1) = 0.8413.
2. Φ(1) − Φ(−1).

Réponse : 0.8413 ; 68.3% à moins de ±1σ.

Exemple 5.2 Avec le taux de la baie λ = 0.0424 par an du module 3, trouvez l'attente moyenne et médiane d'un séisme M ≥ 6.7.

1. Moyenne = 1/λ.
2. Médiane = ln 2/λ.

Réponse : Moyenne 23.6 ans ; médiane 16.3 ans.

Exemple 5.3 Quelle période de retour correspond à une probabilité annuelle de dépassement de 0.2, et de 0.002 ?

1. T = 1/AEP.

Réponse : 5 ans et 500 ans, comme dans le tableau de l'USGS.

Exercices

Faites chacun d'abord sur papier, puis vérifiez.

1. P(Z < −1.5)?

   0.0668.

2. Part à moins de ±2σ ?

   95.4%.

3. Φ(1.96)?

   0.975.

4. Aucun séisme ne s’est produit depuis 20 ans. Le modèle exponentiel augmente-t-il la probabilité l’an prochain ?

   Non : il est sans mémoire (les failles réelles peuvent différer).

Idées reçues fréquentes

Idée reçue : P(X = x) > 0 pour X continue.
En réalité : Les points isolés ont une probabilité 0.

Idée reçue : Toutes les données sont normales.
En réalité : Vérifiez avec un graphique ; les extrêmes sont souvent asymétriques.

Idée reçue : Sans mémoire signifie que les événements sont programmés.
En réalité : Cela signifie le contraire.

Cartes mémoire

PDF	**CDF**
Densité ; aire = probabilité.	P(X ≤ x).
Normale	**z**
Courbe en cloche, μ et σ.	(x − μ)/σ.
Exponentielle	**Période de retour**
Temps d’attente sans mémoire.	1/AEP.

Quiz d’autocontrôle

1. À moins de ±2σ pour une loi normale…

environ 95%

50%

68%

99.7%

environ 95%. Règle empirique.

2. Moyenne de l'exponentielle...

$1/\lambda$

λ

λ^2

$\ln \lambda$

$1/\lambda$. Propriété.

3. Période de retour d'une AEP de 1%...

100 ans

1 an

10 ans

1000 ans

100 ans. Inverse.

4. $\Phi(1)$ vaut...

0.8413

0.5

0.68

1

0.8413. Table.

Refaire ce quiz

Comment cela aide à sauver la planète

L'USGS indique que les périodes de retour proviennent d'une analyse fréquentielle de données historiques, qu'il faut au moins dix ans de données, et qu'une analyse fondée sur 30 ans de relevés inspire plus de confiance qu'une analyse fondée sur 10. Il définit une crue de 1000 ans comme une crue ayant 0.1% de chances de se produire chaque année.

Comme les niveaux de crue sont estimés à partir de données passées, l'USGS note que le niveau de la crue de 100 ans change à mesure que de nouvelles crues sont enregistrées ou que des barrages et l'urbanisation modifient un bassin : la loi derrière une carte des crues est donc une estimation, pas un fait figé.

Sur Saving Planets : Océans · Analyse II

Sources : USGS Water Science School: The 100-Year Flood (https://www.usgs.gov/special-topics/water-science-school/science/100-year-flood)

Ressources d'apprentissage gratuites

- OpenStax Introductory Statistics 2e (https://openstax.org/books/introductory-statistics-2e/pages/1-introduction): Manuel gratuit.
- NIST/SEMATECH e-Handbook of Statistical Methods (https://www.itl.nist.gov/div898/handbook/): Manuel gratuit.

Regarder le cours magistral

Lecture 10: Continuous Bayes' Rule Derived Distributions (https://ocw.mit.edu/courses/6-041sc-probabilistic-systems-analysis-and-applied-probability-fall-2013/resources/lecture-10-video-1/) (en anglais)

MIT 6.041SC Probabilistic Systems Analysis and Applied Probability (Fall 2013), MIT OpenCourseWare. Licence : CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Conditions d'utilisation (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Lien fourni uniquement pour l'étude gratuite ; Saving Planets n'est ni affilié à cette université ni soutenu par elle.

☐ **J'ai terminé cette unité**

Échantillonnage, simulation et théorème central limite

Populations et échantillons, biais et échantillonnage aléatoire, loi d'échantillonnage de la moyenne, erreur type, théorème central limite, loi des grands nombres et simulation de Monte-Carlo.

Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette unité, vous saurez :

- Distinguer les grandeurs de population et d'échantillon.
- Calculer une erreur type.
- Énoncer et appliquer le théorème central limite.
- Estimer une probabilité par simulation de Monte-Carlo.

Notions clés

- Une statistique calculée sur un échantillon varie d'un échantillon à l'autre ; sa loi est la loi d'échantillonnage.
- L'erreur type de la moyenne est σ/√n : quadrupler les données la divise par deux.
- Théorème central limite : pour n grand, la moyenne d'échantillon est approximativement normale quelle que soit la forme des données.
- Loi des grands nombres : les moyennes et fréquences d'échantillon se stabilisent vers leurs vraies valeurs quand n augmente.
- La simulation de Monte-Carlo répète une expérience aléatoire de nombreuses fois sur ordinateur ; son erreur décroît aussi comme 1/√n.

Équations clés

$$SE = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

```
SE=(σ)/( n)
```

Erreur type

$$\bar{X} \approx N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Théorème central limite

$$\hat{p} = \frac{\#\text{hits}}{N}$$

```
p=\#hitsN
```

Estimation de Monte-Carlo

$$SE_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{N}}$$

`SE_ p=(p(1-p))/(N)`

Erreur type d'une proportion

Exemples résolus pas à pas

Exemple 6.1 Des mesures ont σ = 10 (valeur d'exemple). Trouvez l'erreur type de la moyenne de 25 mesures.

1. 10/√25.

Réponse : SE = 2.

Exemple 6.2 Un dé équilibré a une moyenne de 3.5 et σ = 1.708. Trouvez l'erreur type de la moyenne de 25 lancers.

1. 1.708/5.

Réponse : SE = 0.342.

Exemple 6.3 Combien de simulations de Monte-Carlo pour estimer une probabilité proche de 0.5 à ±0.05 près (95%) ?

1. n = 1.96² × 0.25/0.05².

Réponse : Environ 384 simulations.

Exercices

Faites chacun d'abord sur papier, puis vérifiez.

1. Erreur type de la moyenne d'un dé sur 100 lancers ?

   0.171.

2. Doublez la taille de l'échantillon. Erreur type ?

Divisée par √2.

3. Le TCL rend-il les données normales ?

   Non, seulement la moyenne d'échantillon.

4. Marge à 95% pour la moyenne avec σ = 10, n = 25 ?

   1.96 × 2 = 3.92.

Idées reçues fréquentes

Idée reçue : Un grand échantillon corrige le biais.
En réalité : Il ne réduit que l'erreur aléatoire.

Idée reçue : n = 30 suffit toujours.
En réalité : Des données asymétriques peuvent en exiger plus.

Idée reçue : La simulation est exacte.
En réalité : Elle a sa propre erreur d'échantillonnage.

Cartes mémoire

Population

L'ensemble du groupe.

Échantillon

La partie mesurée.

Erreur type

σ/√n.

CLT

Les moyennes deviennent normales.

Loi des grands nombres

Les moyennes se stabilisent.

Monte-Carlo

Répéter des essais aléatoires.

Quiz d'autocontrôle

1. L'erreur type de la moyenne…

σ/√n

σ/n

σ

nσ

σ/√n. Formule.

2. Le TCL concerne…

la moyenne d’échantillon

chaque donnée

seulement la médiane

le biais

la moyenne d’échantillon. Loi d’échantillonnage.

3. L’erreur de Monte-Carlo décroît comme…

1/√n

1/n

n

constant

1/√n. SE.

4. L’échantillonnage aléatoire évite…

le biais de sélection

la variance

toute erreur

rien

le biais de sélection. Conception.

Refaire ce quiz

Comment cela aide à sauver la planète

L'analyse des températures de surface du GISS de la NASA (GISTEMP v4) estime l'évolution de la température de surface mondiale à partir des données des stations et des océans de la NOAA, et elle est mise à jour vers le 10 de chaque mois. La NASA publie aussi un ensemble d'incertitude 2024 associé.

Un ensemble d'incertitude, c'est l'idée de Monte-Carlo de ce module à l'échelle planétaire : de nombreuses versions plausibles de la série, dont la dispersion montre à quel point nous sommes sûrs de la valeur de chaque année.

Sur Saving Planets : Observation de la Terre · Solutions

Sources : NASA GISS: GISS Surface Temperature Analysis (GISTEMP v4) (https://data.giss.nasa.gov/gistemp/)

Ressources d'apprentissage gratuites

- MIT OpenCourseWare 18.05 Introduction to Probability and Statistics (Spring 2022) (https://ocw.mit.edu/courses/18-05-introduction-to-probability-and-statistics-spring-2022/): Cours gratuits du MIT.
- PhET: Plinko Probability (https://phet.colorado.edu/en/simulations/plinko-probability): Regardez les sommes devenir normales.

Regarder le cours magistral

Lecture 20: Central Limit Theorem (https://ocw.mit.edu/courses/6-041sc-probabilistic-systems-analysis-and-applied-probability-fall-2013/resources/lecture-20-video-2/) (en anglais)

MIT 6.041SC Probabilistic Systems Analysis and Applied Probability (Fall 2013), MIT OpenCourseWare. Licence : CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Conditions d'utilisation (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Lien fourni uniquement pour l'étude gratuite ; Saving Planets n'est ni affilié à cette université ni soutenu par elle.

☐ **J'ai terminé cette unité**

Intervalles de confiance

Estimations ponctuelles et par intervalle, intervalles z et t pour une moyenne, intervalles pour une proportion, marge d’erreur et taille d’échantillon, et ce que signifie et ne signifie pas un niveau de confiance.

Objectifs d’apprentissage

À la fin de cette unité, vous saurez :

- Construire un intervalle t pour une moyenne.
- Construire un intervalle pour une proportion.
- Choisir une taille d’échantillon pour une marge visée.
- Interpréter correctement un niveau de confiance.

Notions clés

- Un intervalle de confiance s’écrit estimation ± valeur critique × erreur type.
- Avec σ inconnu et n petit, utilisez la loi de Student t à n − 1 degrés de liberté ; t a des queues plus épaisses que z.
- Pour une proportion, p̂ ± z√(p̂(1 − p̂)/n).
- Un niveau de 95% signifie que 95% des intervalles construits ainsi contiendraient la vraie valeur ; ce n’est pas une probabilité de 95% pour un intervalle calculé.
- Diviser la marge par deux exige quatre fois plus d’échantillons.

Équations clés

$$\bar{x} \pm t_{n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

Intervalle t

$$\hat{p} \pm z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

Intervalle pour une proportion

$$n = \frac{z^2 p(1-p)}{E^2}$$

```
n=(z^2p(1-p))/(E^2)
```

Taille d’échantillon

$$E = z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

E=z(σ)/(n)

Marge d’erreur

Exemples résolus pas à pas

Exemple 7.1 Construisez un intervalle à 95% pour la hausse annuelle moyenne de CO_2 du module 1 ($\bar{x}$ = 2.628, s = 0.564, n = 5, t = 2.776).

1. Marge = 2.776 × 0.564/√5.

Réponse : 2.628 ± 0.700 : de 1.93 à 3.33 ppm/an.

Exemple 7.2 La NOAA indique que 22 des 31 saisons atlantiques depuis 1995 ont été supérieures à la normale. Donnez un intervalle à 95% pour cette proportion.

1. $\hat{p}$ = 0.710; SE = √(0.710 × 0.290/31).

Réponse : 0.710 ± 0.160 : de 0.55 à 0.87.

Exemple 7.3 Quelle taille d’échantillon donne une marge de ±0.05 pour une proportion proche de 0.5 ?

1. $1.96^2 \times 0.25/0.05^2$.

Réponse : Environ 385 (384.2, arrondi au supérieur).

Exercices

Faites chacun d’abord sur papier, puis vérifiez.

1. Pourquoi t plutôt que z pour n = 5 ?

   σ est estimé à partir de peu de points.

2. Effet de 99% au lieu de 95% ?

   Intervalle plus large.

3. La fourchette à 70% de la NOAA pour les tempêtes nommées signifie-t-elle 70% des tempêtes ?

Non : le total de la saison tombe dans la fourchette pour 7 saisons similaires sur 10.

4. Marge pour la proportion avec n = 124 ?

   Environ la moitié (0.080).

Idées reçues fréquentes

Idée reçue : Probabilité de 95% que la vraie valeur soit dans cet intervalle.
En réalité : La procédure la capture 95% du temps.

Idée reçue : Plus large, c’est pire.
En réalité : Plus large, c’est honnête quand les données sont rares.

Idée reçue : Les intervalles corrigent le biais.
En réalité : Ils ne décrivent que l’erreur aléatoire.

Cartes mémoire

Intervalle de confiance

Estimation ± marge.

Loi t

Queues plus épaisses, n − 1 ddl.

Marge d’erreur

Valeur critique × erreur type.

Niveau de confiance

Taux de capture à long terme.

Intervalle pour une proportion

$\hat{p} \pm z\sqrt{(\hat{p}(1-\hat{p})/n)}$.

Taille d’échantillon

$z^2p(1-p)/E^2$.

Quiz d’autocontrôle

1. n petit, σ inconnu : utilisez…

t

z

Poisson

aucune

t. Student.

2. Diviser la marge par deux…

4× les données

2× les données

mêmes données

½ des données

4× les données. √n.

3. Les fourchettes probables de la NOAA se vérifient dans…

7 saisons similaires sur 10

chaque saison

moitié

95%

7 saisons similaires sur 10. CPC.

4. IC = estimation ± …

valeur critique × erreur type

moyenne

l'étendue

σ^2

valeur critique × erreur type. Structure.

Refaire ce quiz

Comment cela aide à sauver la planète

La prévision 2026 du Climate Prediction Center de la NOAA, mise à jour le 6 août, donne 75% de chances d'une saison atlantique inférieure à la normale, 20% proche de la normale et 5% supérieure à la normale, et une probabilité de 70% pour chaque fourchette, dont 7–13 tempêtes nommées et 2–6 ouragans.

La NOAA explique que la saison devrait se situer dans ces fourchettes pour 7 saisons sur 10 aux conditions similaires, ce qui est exactement la façon dont il faut lire un intervalle à 70%. Elle souligne aussi qu'il suffit d'un seul ouragan pour provoquer une catastrophe.

Sur Saving Planets : GOES-19 · Océans

Sources : NOAA Climate Prediction Center: Atlantic Hurricane Outlook (updated Aug. 6, 2026) (https://cpc.ncep.noaa.gov/products/outlooks/hurricane.shtml)

Ressources d'apprentissage gratuites

- OpenStax Introductory Statistics 2e (https://openstax.org/books/introductory-statistics-2e/pages/1-introduction): Manuel gratuit.
- MIT OpenCourseWare 18.05 Introduction to Probability and Statistics (Spring 2022) (https://ocw.mit.edu/courses/18-05-introduction-to-probability-and-statistics-spring-2022/): Cours gratuits du MIT.

☐ **J'ai terminé cette unité**

Tests d’hypothèses et valeurs p

Hypothèses nulle et alternative, statistiques de test, valeurs p, tests unilatéraux et bilatéraux, tests t et tests de proportion, erreurs de première et de deuxième espèce, puissance, et significativité statistique contre significativité pratique.

Objectifs d’apprentissage

À la fin de cette unité, vous saurez :

- Poser les hypothèses nulle et alternative.
- Réaliser un test t à un échantillon et un test de proportion.
- Interpréter une valeur p.
- Expliquer les erreurs de première et de deuxième espèce et la puissance.

Notions clés

- Un test se demande si les données sont surprenantes dans le cas où l’hypothèse nulle H_0 serait vraie.
- La valeur p est la probabilité, sous H_0, d’un résultat au moins aussi extrême que celui observé. Un p petit est une preuve contre H_0 ; ce n’est pas la probabilité que H_0 soit vraie.
- Une erreur de première espèce rejette une H_0 vraie (taux α) ; une erreur de deuxième espèce ne détecte pas une H_0 fausse (taux β). Puissance = 1 − β.
- Plus de données augmentent la puissance ; un effet minuscule et sans importance peut être « significatif » avec assez de données.
- Choisissez α et le test avant de regarder les données.

Équations clés

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

```
t=( x-μ_0)/(s/ n)
```

Statistique t

$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}$$

```
z= p-p_0_0(1-p_0)/n
```

z de proportion

$$\text{power} = 1 - \beta$$

`power=1-β`

Puissance

$$p = P(\text{as extreme} \mid H_0)$$

`p=P(as extreme H_0)`

Valeur p

Exemples résolus pas à pas

Exemple 8.1 Testez H_0 : μ = 2 ppm/an contre μ > 2 pour les cinq hausses de CO_2 ($\bar{x}$ = 2.628, s = 0.564).

1. t = (2.628 − 2)/(0.564/√5).

Réponse : t = 2.49 avec 4 ddl, au-dessus du seuil unilatéral de 5% de 2.132 : on rejette H_0.

Exemple 8.2 Si chaque saison atlantique avait 1/3 de chances d'être supérieure à la normale, combien sur 31 en attendrait-on ?

1. 31/3.

Réponse : Environ 10.3 ; la NOAA en rapporte 22.

Exemple 8.3 Trouvez la probabilité binomiale exacte P(22 ou plus sur 31) avec p = 1/3.

1. Somme de $C(31, k)(1/3)^k(2/3)^{31-k}$ pour k ≥ 22.

Réponse : p ≈ 2.06 × 10^{-5} : forte preuve que l'ère de forte activité est réelle.

Exercices

Faites chacun d'abord sur papier, puis vérifiez.

1. z de proportion pour 22 sur 31 contre p_0 = 1/3 ?

   z = 4.45.

2. p = 0.03 est-il la probabilité que H_0 soit vraie ?

   No.

3. Erreur de première espèce dans un test d'alerte aux crues ?

   Une fausse alerte.

4. Comment augmenter la puissance ?

   Plus de données, un effet plus grand ou un α plus grand.

Idées reçues fréquentes

Idée reçue : p > 0.05 prouve H_0.
En réalité : On ne fait qu'échouer à rejeter.

Idée reçue : Significatif veut dire important.
En réalité : Vérifiez la taille d'effet.

Idée reçue : Tester beaucoup de choses et rapporter la gagnante.
En réalité : Cela gonfle les faux positifs.

Cartes mémoire

H_0

Hypothèse nulle.

Valeur p

Surprise sous H_0.

α

Taux d'erreur de première espèce.

β

Taux d'erreur de deuxième espèce.

Puissance

$1 - \beta$.

Taille d'effet

Quelle ampleur, pas seulement si.

Quiz d'autocontrôle

1. La valeur p est...

P(données aussi extrêmes | H_0)

$P(H_0)$

α

de la puissance

P(données aussi extrêmes | H_0). Définition.

2. Erreur de première espèce...

rejeter une H_0 vraie

manquer une H_0 fausse

de mauvaises données

aucune

rejeter une H_0 vraie. Fausse alerte.

3. La puissance est...

$1 - \beta$

α

p

$1 - \alpha$

$1 - \beta$. Détecter un effet réel.

4. Plus de données...

augmentent la puissance

diminuent la puissance

aucun changement

augmentent α

augmentent la puissance. Erreur type plus petite.

Refaire ce quiz

Comment cela aide à sauver la planète

Le Climate Prediction Center de la NOAA indique que depuis le début de l'ère actuelle de forte activité atlantique en 1995, 22 saisons sur 31 (71%) ont été supérieures à la normale, 5 (16%) proches de la normale et 4 (13%) inférieures à la normale.

La NOAA note aussi que chaque saison cyclonique coïncidant avec un fort El Niño depuis 1950 a connu une activité inférieure à la normale. Confronter de telles affirmations au hasard est la façon dont les prévisionnistes décident quels signaux ont leur place dans une prévision.

Sur Saving Planets : GOES-19 · Solutions

Sources : NOAA Climate Prediction Center: Atlantic Hurricane Outlook (updated Aug. 6, 2026) (https://cpc.ncep.noaa.gov/products/outlooks/hurricane.shtml)

Ressources d'apprentissage gratuites

- MIT OpenCourseWare 18.05 Introduction to Probability and Statistics (Spring 2022) (https://ocw.mit.edu/courses/18-05-introduction-to-probability-and-statistics-spring-2022/): Cours gratuits du MIT.
- NIST/SEMATECH e-Handbook of Statistical Methods (https://www.itl.nist.gov/div898/handbook/): Manuel gratuit.

☐ **J'ai terminé cette unité**

Corrélation et régression linéaire

Nuages de points, corrélation r, régression des moindres carrés, interprétation de la pente, R^2, résidus, prédiction contre extrapolation, et corrélation contre causalité.

Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette unité, vous saurez :

- Calculer et interpréter r et R^2.
- Ajuster et interpréter une droite des moindres carrés.
- Utiliser les graphiques de résidus pour vérifier un modèle.
- Distinguer corrélation et causalité.

Notions clés

- La corrélation r mesure l'association linéaire de −1 à 1 ; elle n'a pas d'unité.
- La droite des moindres carrés $\hat{y} = b_0 + b_1 x$ a pour pente $b_1 = Sxy/Sxx$ et passe par $(\bar{x}, \bar{y})$.
- $R^2 = r^2$ est la part de la variation de y expliquée par la droite.
- Les graphiques de résidus révèlent une courbure ou une dispersion variable que r masque.
- Corrélation n'est pas causalité ; il faut pour cela des mécanismes physiques et des études planifiées. L'extrapolation au-delà des données est risquée.

Équations clés

$$b_1 = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}$$

b_1=_xyS_xx

Pente

$$b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x}$$

b_0= y-b_1 x

Ordonnée à l'origine

$$r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx} S_{yy}}}$$

r=_xy_xxS_yy

Corrélation

$$R^2 = r^2$$

R^2=r^2

Part expliquée

Exemples résolus pas à pas

Exemple 9.1 Ajustez une droite aux moyennes décennales de Mauna Loa de la NOAA 1960–2020 (316.91, 325.68, 338.76, 354.45, 369.71, 390.10, 414.21 ppm), avec x en années depuis 1960.

1. $\bar{x} = 30$, $\bar{y} = 358.55$.
2. $b_1 = Sxy/Sxx$.

Réponse : $\hat{y} = 310.15 + 1.613x$ ppm.

Exemple 9.2 Trouvez r et R^2.

1. $r = Sxy/\sqrt{(SxxSyy)}$.

Réponse : $r = 0.990$; $R^2 = 0.979$.

Exemple 9.3 Les résidus confirment-ils une droite ?

1. Les résidus sont positifs aux deux extrémités et négatifs au milieu.

Réponse : Non : la courbe s’infléchit vers le haut, donc la croissance s’accélère malgré $R^2 = 0.979$.

Exercices

Faites chacun d’abord sur papier, puis vérifiez.

1. Unités de la pente ?

   ppm par an.

2. Prédiction de la droite pour 2025 (x = 65) ?

   415.0 ppm contre 427.35 pour la NOAA.

3. r = 0.99 prouve-t-il que la droite est correcte ?

Non ; vérifiez les résidus.

4. Une tendance temporelle prouve-t-elle à elle seule sa cause ?

   Non ; la cause vient de la physique et d'autres preuves.

Idées reçues fréquentes

Idée reçue : Un r élevé signifie un bon modèle.

En réalité : Une courbure peut se cacher derrière un r élevé.

Idée reçue : r a une unité.

En réalité : Il est sans unité.

Idée reçue : Extrapoler est sûr si R^2 est élevé.

En réalité : Pas en dehors de la plage des données.

Cartes mémoire

Corrélation

De −1 à 1, sans unité.

Pente

Sxy/Sxx.

R^2

Part expliquée.

Résidu

$y - \hat{y}$.

Extrapolation

Prédire en dehors des données.

Causalité

Exige un mécanisme ou un protocole.

Quiz d'autocontrôle

1. R^2 est…

la part de variation expliquée

la pente

Valeur p

le résidu

la part de variation expliquée. Définition.

2. La droite passe par…

$(\bar{x}, \bar{y})$

l'origine

$(0, \bar{y})$

le point maximal

$(\bar{x}, \bar{y})$. Propriété.

3. Des résidus courbés signifient…

une mauvaise forme de modèle

un ajustement parfait

aucune donnée

un biais sur x

une mauvaise forme de modèle. Motif.

4. La corrélation montre…

une association

une causalité

rien

une erreur

une association. Prudence.

Refaire ce quiz

Comment cela aide à sauver la planète

La NOAA note que les données de Mauna Loa sont prises à une altitude de 3400 m et peuvent différer de la moyenne mondiale, et que lors de l'éruption du Mauna Loa en 2022 les mesures ont été déplacées au Maunakea, à environ 21 milles au nord, jusqu'en juillet 2023.

Savoir où et comment les données ont été recueillies fait aussi partie de la régression : un ajustement ne vaut que ce que vaut la série derrière lui, et la NOAA documente ouvertement ses lacunes et changements de site.

Sur Saving Planets : Solutions · Algèbre linéaire

Sources : NOAA Global Monitoring Laboratory: Trends in atmospheric CO_2 (Mauna Loa) (https://gml.noaa.gov/ccgg/trends/)

Ressources d'apprentissage gratuites

- PhET: Least-Squares Regression (https://phet.colorado.edu/en/simulations/least-squares-regression): Ajuster des droites en interactif.
- OpenStax Introductory Statistics 2e (https://openstax.org/books/introductory-statistics-2e/pages/1-introduction): Manuel gratuit.

☐ **J'ai terminé cette unité**

Fiabilité et risque

Fonctions de fiabilité, taux de défaillance et MTBF, systèmes en série et en parallèle, redondance, modèles de durée de vie exponentiel et de Weibull, et combinaison de la probabilité et des conséquences en risque.

Objectifs d’apprentissage

À la fin de cette unité, vous saurez :

- Calculer la fiabilité de systèmes en série et en parallèle.
- Utiliser le modèle de durée de vie exponentiel avec le MTBF.
- Expliquer la courbe en baignoire et les formes de Weibull.
- Combiner probabilité et conséquence en risque.

Notions clés

- La fiabilité R(t) est la probabilité qu’une pièce survive jusqu’au temps t. Avec un taux de défaillance constant λ, R(t) = e^(−λt) et MTBF = 1/λ.
- Les systèmes en série exigent que chaque pièce fonctionne : R = $R_1R_2…R_n$, toujours moins bon que la pièce la plus faible.
- Les systèmes en parallèle (redondants) n’en exigent qu’une : R = 1 − (1 − R_1)(1 − R_2)….
- Le modèle de Weibull couvre les défaillances précoces (forme < 1), aléatoires (forme = 1, exponentielle) et d’usure (forme > 1), les trois parties de la courbe en baignoire.
- Le risque combine probabilité et conséquence ; la redondance et les alertes le réduisent, mais seulement si les défaillances sont indépendantes.

Équations clés

$$R(t) = e^{-\lambda t},\ MTBF = 1/\lambda$$

```
R(t)=e^- t,\ MTBF=1/
```

Fiabilité exponentielle

$$R_s = \prod R_i$$

```
R_s= R_i
```

Système en série

$$R_p = 1 - \prod (1 - R_i)$$

```
R_p=1-(1-R_i)
```

Système en parallèle

$$R(t) = e^{-(t/\eta)^{\beta}}$$

R(t)=e^-(t/)^β

Weibull

Exemples résolus pas à pas

Exemple 10.1 Trois pièces en série ont chacune R = 0.99 (valeurs d'exemple). Trouvez la fiabilité du système.

1. 0.99^3.

Réponse : R = 0.9703.

Exemple 10.2 Deux pompes redondantes ont chacune R = 0.9. Trouvez la fiabilité du système.

1. $1 - 0.1^2$.

Réponse : R = 0.99.

Exemple 10.3 Un capteur a un MTBF de 50000 h. Trouvez sa fiabilité sur une mission de 1000 heures.

1. e^(−1000/50,000).

Réponse : R = 0.980.

Exercices

Faites chacun d'abord sur papier, puis vérifiez.

1. Trois unités redondantes de 0.9 ?

   $1 - 0.1^3 = 0.999$.

2. Une pièce de 0.9 en série avec une paire redondante de 0.9 ?

   $0.9 \times 0.99 = 0.891$.

3. Fiabilité sur un an (8760 h) avec un MTBF de 100000 h ?

   e^(−0.0876) = 0.916.

4. Deux unités de 0.95 en parallèle ?

   0.9975.

Idées reçues fréquentes

Idée reçue : La redondance aide toujours.
En réalité : Pas contre les défaillances de cause commune.

Idée reçue : Le MTBF est la durée de vie de chaque unité.
En réalité : C'est une moyenne ; beaucoup lâchent plus tôt.

Idée reçue : Un système en série est aussi fiable que sa meilleure pièce.
En réalité : Il est moins fiable que la plus faible.

Cartes mémoire

Fiabilité

P(survivre jusqu'à t).

MTBF

1/λ.

Série

Multiplier les R.

Parallèle

1 − Π(1 − R).

Weibull

Formes de baignoire.

Risque

Probabilité × conséquence.

Quiz d'autocontrôle

1. Fiabilité en série...

produit

somme

max

min

produit. Tout doit fonctionner.

2. MTBF exponentiel…

1/λ

λ

e^λ

ln λ

1/λ. Durée de vie moyenne.

3. Une forme de Weibull > 1 signifie…

l’usure

la mortalité infantile

du hasard

aucune

l’usure. Taux de défaillance croissant.

4. La redondance échoue face aux…

causes communes

défaillances aléatoires

rien

petits λ

causes communes. Défaillance partagée.

Refaire ce quiz

Comment cela aide à sauver la planète

La prévision cyclonique 2026 de la NOAA rappelle aux habitants, aux entreprises et aux pouvoirs publics que des catastrophes liées aux ouragans peuvent survenir pendant n'importe quelle saison, même peu active, et que les communautés côtières doivent se préparer chaque année, quelle que soit la prévision.

C'est le raisonnement de la fiabilité : une probabilité faible n'est pas nulle, donc les systèmes d'alerte, les secours et les plans sont conçus pour fonctionner lors de la rare mauvaise année, pas seulement lors de l'année moyenne.

Sur Saving Planets : GOES-19 · Solutions

Sources : NOAA Climate Prediction Center: Atlantic Hurricane Outlook (updated Aug. 6, 2026) (https://cpc.ncep.noaa.gov/products/outlooks/hurricane.shtml)

Ressources d'apprentissage gratuites

- NIST/SEMATECH e-Handbook of Statistical Methods (https://www.itl.nist.gov/div898/handbook/): Manuel gratuit (chapitre sur la fiabilité).
- MIT OpenCourseWare 6.041 Probabilistic Systems Analysis and Applied Probability (Fall 2010) (https://ocw.mit.edu/courses/6-041-probabilistic-systems-analysis-and-applied-probability-fall-2010/): Cours gratuit du MIT.

☐ **J'ai terminé cette unité**

Exercices

Ces exercices sont dans chaque unité. Faites-les sur papier, puis ouvrez la réponse.

1. Décrire les données : tendance centrale, dispersion et graphiques
   4 exercices
2. Règles de probabilité, dénombrement et indépendance
   4 exercices
3. Probabilité conditionnelle et théorème de Bayes
   4 exercices
4. Variables aléatoires discrètes : binomiale et Poisson
   4 exercices
5. Lois continues : normale, exponentielle et extrêmes
   4 exercices
6. Échantillonnage, simulation et théorème central limite
   4 exercices
7. Intervalles de confiance
   4 exercices
8. Tests d'hypothèses et valeurs p
   4 exercices
9. Corrélation et régression linéaire

4 exercices

10. Fiabilité et risque
    4 exercices

Le laboratoire (Statistics lab)

Le labo est la partie pratique du cours. Ici, il est gratuit et sert uniquement à s'entraîner, sans crédits.

Chaque TP se déroule dans une simulation gratuite ou un tableur : il n'y a donc aucun risque physique. Faites des pauses d'écran, tenez-vous bien assis et gardez les câbles hors des zones de passage.

Référence de sécurité : OSHA: Walking-working surfaces (slip, trip and fall hazards) (https://www.osha.gov/walking-working-surfaces)

TP A : Tendance centrale et dispersion de la série de CO_2

SEMAINE 1

Objectif : Explorez moyenne, médiane et dispersion dans PhET Center and Variability, puis résumez les hausses annuelles récentes de CO_2 de la NOAA.

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

`s=((x- x)^2)/(n-1)`

Écart-type d'échantillon

Mode opératoire

1. Dans PhET Center and Variability, faites glisser des valeurs et observez la moyenne et la médiane bouger.
2. Ouvrez les moyennes annuelles de Mauna Loa de la NOAA et calculez les hausses annuelles pour 2021–2025.
3. Calculez moyenne, médiane, étendue et s.
4. Tracez un diagramme en points et décrivez la valeur de 2024.

Tableau de données

Statistique	Valeur (ppm/an)
Moyenne	2.628
Médiane	2.55
Portée	1.41
Écart-type	0.564

Données de NOAA GML ; statistiques calculées.

Exemple de calcul

1. Hausses : 2.20, 2.12, 2.55, 3.53, 2.74.
2. s = √(1.2735/4) = 0.564.

> **Sécurité**
>
> - Ordinateur uniquement.

Alternative à la maison ou virtuelle

- N’importe quel tableur convient.

PhET: Center and Variability (https://phet.colorado.edu/en/simulations/center-and-variability) · NOAA GML: Mauna Loa annual mean CO_2 data (https://gml.noaa.gov/webdata/ccgg/trends/co2/co2_annmean_mlo.txt)

Lien avec la planète : La moyenne mensuelle de Mauna Loa de la NOAA était de 426.07 ppm en septembre 2026. NOAA Global Monitoring Laboratory: Trends in atmospheric CO_2 (Mauna Loa) (https://gml.noaa.gov/ccgg/trends/)

☐ **J’ai terminé ce TP (réel ou virtuel)**

TP B : Plinko et la loi binomiale

SEMAINE 4

Objectif : Lâchez des billes dans PhET Plinko Probability et comparez l'histogramme au modèle binomial.

$$\mu = np,\ \sigma = \sqrt{np(1-p)}$$

`μ=np,\ σ=(1-p)`

Moyenne et dispersion binomiales

Mode opératoire

1. Réglez 12 rangées et p = 0.5.
2. Lâchez 1000 billes et notez la moyenne et l'écart-type.
3. Calculez les valeurs binomiales.
4. Passez p à 0.7 et prédisez la nouvelle moyenne avant de lâcher.

Tableau de données

Grandeur	Valeur binomiale
Case moyenne	6
Écart-type	1.732
P(case 6)	0.2256

Valeurs calculées ; votre simulation devrait s'en approcher.

Exemple de calcul

1. σ = √(12 × 0.25) = 1.732.
2. P(6) = C(12, 6)/2^{12} = 924/4096 = 0.2256.

> **Sécurité**
>
> - Ordinateur uniquement.

Alternative à la maison ou virtuelle

- N'importe quel navigateur convient.

PhET: Plinko Probability (https://phet.colorado.edu/en/simulations/plinko-probability)

Lien avec la planète : La NOAA dimensionne son cône cyclonique pour que deux tiers des erreurs de trajectoire passées tombent à l'intérieur. NOAA National Hurricane Center: Definition of the NHC Track Forecast Cone (https://www.nhc.noaa.gov/aboutcone.shtml)

- [ ] **J'ai terminé ce TP (réel ou virtuel)**

TP C : Simuler des crues de 100 ans

SEMAINE 6

Objectif : Utilisez un Monte-Carlo sur tableur pour estimer la probabilité d'au moins une crue à 1% par an en 30 ans.

$$P = 1 - 0.99^{30}$$

```
P=1-0.99^30
```

Réponse exacte

Mode opératoire

1. Créez 30 colonnes de =RAND()<0.01 (une par année).
2. Sur chaque ligne, testez si une année a connu une crue.
3. Copiez sur 1000 lignes et faites la moyenne du résultat.
4. Comparez à la réponse exacte et à l'erreur de Monte-Carlo attendue.

Tableau de données

Grandeur	Valeur
Probabilité exacte	0.260
Erreur type de Monte-Carlo, N = 1000	0.0139
Plage attendue (±2 erreurs types)	0.232 à 0.288

Valeurs calculées ; votre estimation variera à chaque recalcul.

Exemple de calcul

1. SE = √(0.26 × 0.74/1000) = 0.0139.
2. 0.260 ± 0.0278.

> **Sécurité**
>
> - Ordinateur uniquement.

Alternative à la maison ou virtuelle

- N'importe quel tableur convient.

MIT OpenCourseWare 18.05 Introduction to Probability and Statistics (Spring 2022) (https://ocw.mit.edu/courses/18-05-introduction-to-probability-and-statistics-spring-2022/)

Lien avec la planète : L'USGS souligne que des crues de 100 ans peuvent survenir deux années de suite. USGS Water Science School: The 100-Year Flood (https://www.usgs.gov/special-topics/water-science-school/science/100-year-flood)

- [ ] **J'ai terminé ce TP (réel ou virtuel)**

TP D : Dés et théorème central limite

SEMAINE 7

Objectif : Faites la moyenne de lancers de dés simulés (ou réels) et regardez la loi des moyennes devenir normale.

$$SE = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

SE=(σ)/(n)

Erreur type

Mode opératoire

1. Simulez des lancers avec =RANDBETWEEN(1,6).
2. Faites la moyenne de groupes de 1, 5, 25 et 100 lancers, 500 fois chacun.
3. Tracez des histogrammes et calculez leurs écarts-types.
4. Comparez avec σ/√n.

Tableau de données

Lancers par moyenne	Erreur type prédite
1	1.708
25	0.342
100	0.171

Valeurs calculées ; un dé a une moyenne de 3.5 et σ = √(35/12).

Exemple de calcul

1. σ = √(35/12) = 1.708.
2. SE(25) = 1.708/5 = 0.342.

> **Sécurité**
>
> - Ordinateur uniquement.

Alternative à la maison ou virtuelle

- De vrais dés conviennent aussi.

PhET: Plinko Probability (https://phet.colorado.edu/en/simulations/plinko-probability)

Lien avec la planète : La NASA publie un ensemble d'incertitude pour sa série de températures GISTEMP. NASA GISS: GISS Surface Temperature Analysis (GISTEMP v4) (https://data.giss.nasa.gov/gistemp/)

- [ ] **J'ai terminé ce TP (réel ou virtuel)**

TP E : Régression et résidus

SEMAINE 12

Objectif : Ajustez une droite dans PhET Least-Squares Regression, puis ajustez les moyennes décennales de Mauna Loa de la NOAA et étudiez les résidus.

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x$$

y=b_0+b_1x

Droite des moindres carrés

Mode opératoire

1. Dans PhET, placez des points et comparez votre droite au meilleur ajustement.
2. Saisissez les moyennes décennales 1960–2020 avec x = années depuis 1960.
3. Utilisez LINEST ou une courbe de tendance pour obtenir b_0, b_1 et r.
4. Tracez les résidus et décrivez le motif.

Tableau de données

Grandeur	Valeur
Pente	1.613 ppm/an
Ordonnée à l'origine	310.15 ppm
r	0.990
Résidus 1960 / 2000 / 2020	+6.76 / −4.97 / +7.27 ppm

Données de NOAA GML ; ajustement calculé. Les résidus en U montrent une courbure vers le haut.

Exemple de calcul

1. b_1 = Sxy/Sxx = 1.613.
2. Résidu 2020 = 414.21 − (310.15 + 1.613 × 60) = 7.27.

> **Sécurité**
>
> - Ordinateur uniquement.

Alternative à la maison ou virtuelle

- N'importe quel tableur convient.

PhET: Least-Squares Regression (https://phet.colorado.edu/en/simulations/least-squares-regression) · NOAA GML: Mauna Loa annual mean CO_2 data (https://gml.noaa.gov/webdata/ccgg/trends/co2/co2_annmean_mlo.txt)

Lien avec la planète : La NOAA note que Mauna Loa échantillonne l'air à 3400 m, ce qui peut différer de la moyenne mondiale. NOAA Global Monitoring Laboratory: Trends in atmospheric CO_2 (Mauna Loa) (https://gml.noaa.gov/ccgg/trends/)

☐ **J'ai terminé ce TP (réel ou virtuel)**

TP F : Fiabilité d’un système d’alerte

SEMAINE 14

Objectif : Construisez un tableur de fiabilité série et parallèle et testez comment la redondance modifie une chaîne d’alerte aux crues d’exemple.

$$R_s = \prod R_i,\ R_p = 1 - \prod (1 - R_i)$$

```
R_s= R_i,\ R_p=1-(1-R_i)
```

Fiabilité du système

Mode opératoire

1. Modélisez une chaîne d’exemple : capteur, liaison radio et sirène en série.
2. Calculez R avec chacun à 0.99, puis avec une paire de sirènes redondantes.
3. Utilisez e^(−t/MTBF) pour une mission de 1000 h avec un MTBF de 50000 h.
4. Trouvez l’amélioration unique la plus utile.

Tableau de données

Configuration	Fiabilité
Trois pièces en série (0.99 chacune)	0.9703
Deux unités redondantes (0.9 chacune)	0.99
Pièce de 0.9 + paire redondante de 0.9	0.891
1000 h avec MTBF de 50000 h	0.980

Valeurs d’exemple ; calculées.

Exemple de calcul

1. $0.99^3 = 0.9703$.
2. $0.9 \times (1 - 0.1^2) = 0.891$.

> **Sécurité**
>
> - Ordinateur uniquement.

Alternative à la maison ou virtuelle

- N’importe quel tableur convient.

NIST/SEMATECH e-Handbook of Statistical Methods (https://www.itl.nist.gov/div898/handbook/)

Lien avec la planète : La NOAA indique que des catastrophes peuvent survenir même lors de saisons cycloniques peu actives : préparez-vous chaque année. NOAA Climate Prediction Center: Atlantic Hurricane Outlook (updated Aug. 6, 2026) (https://cpc.ncep.noaa.gov/products/outlooks/hurricane.shtml)

- [ ] **J’ai terminé ce TP (réel ou virtuel)**

Séries d’entraînement aux examens

Chronométrez-vous : environ 10 minutes par problème. Comparez ensuite avec les solutions complètes.

Série d’exercices de mi-parcours (unités 1–5)

1. Trouvez la moyenne, la médiane et l’écart-type d’échantillon de 4, 8, 6, 10, 12.

    1. Moyenne = 40/5.
    2. s = √(40/4).

    Réponse : Moyenne 8, médiane 8, s = 3.16.

2. Trouvez la probabilité d’au moins une crue de 25 ans (4% par an) en 10 ans.

    1. $1 - 0.96^{10}$.

    Réponse : 33.5%.

3. Un test détecte une condition 90% du temps et donne une fausse alerte 10% du temps ; le taux de base est de 1%. Trouvez P(condition | positif).

    1. 0.009/(0.009 + 0.099).

    Réponse : 8.33%.

4. Trouvez P(X = 0) pour une binomiale avec n = 5, p = 0.2.

    1. 0.8^5.

    Réponse : 0.328.

5. Trouvez P(X = 0) pour une loi de Poisson avec λ = 2.

    1. e^{-2}.

    Réponse : 0.135.

Série d’entraînement finale (toutes les unités)

1. Trouvez P(Z > 1.96).
    1. 1 − 0.975.

    Réponse : 0.025.

2. Trouvez l'erreur type pour σ = 6, n = 36.
    1. 6/6.

    Réponse : 1.

3. Construisez un intervalle à 95% pour x̄ = 50, s = 4, n = 16 (t = 2.131).
    1. 2.131 × 4/4.

    Réponse : 50 ± 2.13.

4. Testez H_0 : μ = 50 avec x̄ = 52, s = 4, n = 16.
    1. t = 2/(4/4).

    Réponse : t = 2.0, juste sous 2.131 : on ne rejette pas au seuil de 5% (bilatéral).

5. Trouvez la fiabilité de quatre pièces de 0.95 en série.
    1. 0.95^4.

    Réponse : 0.815.

6. Une pièce a un MTBF de 2000 h. Trouvez P(elle survit 500 h).
    1. e^(−0.25).

    Réponse : 0.779.

Fiche de formules

$$\bar{x} = \sum x/n,\ s^2 = \sum (x-\bar{x})^2/(n-1) \qquad P(\geq 1) = 1-(1-p)^n,\ P(A \cup B) = P(A) + P(B$$

$$P(B|A) = P(A|B)P(B)/P(A),\ \lambda = -\ln(1-P)/ \qquad P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},\ P(X=k) = e^{-\lambda}\lambda$$

$$z = (x-\mu)/\sigma,\ P(T>t) = e^{-\lambda t},\ T = 1/AEP \qquad SE = \sigma/\sqrt{n}$$

$$\bar{x} \pm t\, s/\sqrt{n},\ \hat{p} \pm z\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}$$

$$t = (\bar{x} - \mu_0)/(s/\sqrt{n})$$

$$b_1 = S_{xy}/S_{xx},\ r = S_{xy}/\sqrt{S_{xx}S_{yy}}$$

$$R_s = \prod R_i,\ R_p = 1 - \prod(1 - R_i),\ MTBF = 1/$$

Constantes

Constante	Valeur
Loi normale centrée réduite (valeurs de manuel)	Φ(1) = 0.8413, Φ(1.96) = 0.975, Φ(2) − Φ(−2) = 0.9545
Loi t de Student, 4 degrés de liberté (valeur de manuel)	$t_{0{,}975}$ = 2.776
e	2.718281828
Règle 68–95–99.7	part d'une loi normale à moins de 1, 2 et 3 écarts-types
1 ppm	une partie par million en fraction molaire
Probabilité annuelle de dépassement	1/(période de retour)

Source : NIST/SEMATECH e-Handbook of Statistical Methods (https://www.itl.nist.gov/div898/handbook/)

Textes et simulations gratuits

Utilisez ces cours, manuels, guides et simulations gratuits en parallèle du cours.

- MIT OpenCourseWare 18.05 Introduction to Probability and Statistics (Spring 2022) (https://ocw.mit.edu/courses/18-05-introduction-to-probability-and-statistics-spring-2022/): Cours, lectures et exercices gratuits du MIT.
- MIT OpenCourseWare 6.041 Probabilistic Systems Analysis and Applied Probability (Fall 2010) (https://ocw.mit.edu/courses/6-041-probabilistic-systems-analysis-and-applied-probability-fall-2010/): Cours gratuit du MIT de probabilités appliquées.
- OpenStax Introductory Statistics 2e (https://openstax.org/books/introductory-statistics-2e/pages/1-introduction): Manuel gratuit.
- NIST/SEMATECH e-Handbook of Statistical Methods (https://www.itl.nist.gov/div898/handbook/): Manuel gratuit de statistique pour l'ingénieur.
- PhET: Plinko Probability (https://phet.colorado.edu/en/simulations/plinko-probability): Lois binomiale et normale en interactif.
- PhET: Center and Variability (https://phet.colorado.edu/en/simulations/center-and-variability): Moyenne, médiane et dispersion en interactif.

Glossaire

Probabilité annuelle de dépassement
Probabilité qu'un événement soit égalé ou dépassé au cours d'une année.

Théorème de Bayes
Inverse une probabilité conditionnelle.

Loi binomiale
Succès en n essais indépendants.

Théorème central limite
Les moyennes d'échantillon deviennent normales.

Probabilité conditionnelle
Probabilité sachant qu'un autre événement s'est produit.

Intervalle de confiance
Intervalle issu d'une procédure qui capture la vraie valeur à un taux fixé.

Corrélation
Force de l'association linéaire.

Espérance
Moyenne à long terme.

Loi exponentielle
Temps d'attente sans mémoire.

Indépendance
Un événement ne modifie pas la probabilité d'un autre.

MTBF
Temps moyen entre défaillances.

Médiane
Valeur centrale.

Monte-Carlo
Estimation par simulation aléatoire répétée.

Loi normale
Loi en forme de cloche.

Loi de Poisson
Comptages d'événements rares.

Période de retour
Nombre moyen d'années entre événements d'une taille donnée.

Fiabilité
Probabilité de survivre jusqu'à un temps donné.

Erreur type
Écart-type d'une statistique.

Erreur de première espèce
Rejeter une hypothèse nulle vraie.

Valeur p
Probabilité de données aussi extrêmes si H_0 est vraie.

Grille d’autoévaluation

Aucune note ni aucun crédit ne sont attribués. Utilisez cette grille pour juger honnêtement où vous en êtes dans chaque unité.

Niveau	À quoi cela ressemble
4 · Maîtrise	Nomme la variable aléatoire, énonce les hypothèses, choisit le bon modèle, indique l’incertitude et interprète les résultats en langage clair.
3 · Compétent	Résout les exercices avec des erreurs occasionnelles sur les hypothèses ou les unités.
2 · En progression	Suit les exemples résolus mais interprète mal les valeurs p ou les niveaux de confiance.
1 · Débutant	Applique les formules sans vérifier les hypothèses ; doit revoir le module.

Pondération suggérée si vous voulez une note

Partie	Poids
Exercices	20%
Travaux pratiques	25%
Série d’entraînement de mi-parcours	25%
Série d’entraînement finale	30%

Visez le niveau 3 ou mieux dans chaque unité avant de passer au cours suivant.

Cours associés

- Méthodes numériques MATH 340
- Propulsion AERO 410
- Aérodynamique I AERO 310
- Tous les cours