Ultimo aggiornamento: November 1, 2026

🗺️ Percorso di quattro anni · Anno 3, Autunno

Informazioni sul corso

Questo corso gratuito ha 10 unità e 6 laboratori. Sono i totali reali, non un programma più lungo accorciato.

Un controllo è un numero o un risultato di codice in una pagina del corso che uno script ricalcola prima della pubblicazione. Il numero stampato e quello ricalcolato devono coincidere.

> Questo è lo schema di un corso gratuito di autoapprendimento scritto da Saving Planets. Non è un corso universitario, non dà crediti accademici e nessuna scuola è coinvolta.
>
> Il programma segue un corso semestrale di metodi numerici del terzo anno per ingegneri. Si ispira ad argomenti e livello di MIT 18.330 Introduction to Numerical Analysis, MIT 2.086 Numerical Computation for Mechanical Engineers e MIT 10.34 (gratuiti su MIT OpenCourseWare), e usa sezioni gratuite di analisi di OpenStax, che colleghiamo dove aiutano. Nessuno di questi autori, scuole o enti approva questa pagina.
>
> Cosa aggiungiamo: ogni unità è collegata a un lavoro reale con una fonte pubblica citata (il Global Forecast System e i supercomputer della NOAA, la serie di CO_2 di Mauna Loa, i modelli delle acque sotterranee dell'USGS e i modelli climatici della NASA), ogni numero della pagina viene ricalcolato da uno script di verifica prima della pubblicazione e ogni laboratorio ha una simulazione gratuita o un foglio di calcolo.
>
> Seguilo in ordine. Ogni unità ha obiettivi, idee chiave, equazioni, esempi passo per passo, esercizi con soluzioni complete, errori comuni, flashcard e un quiz. I tuoi progressi sono salvati solo in questo browser.

Come questo corso aiuta a salvare il pianeta

Previsioni meteo, proiezioni climatiche e piani per le acque sotterranee sono tutti metodi numerici eseguiti al computer: le equazioni non si possono risolvere a mano, quindi vengono suddivise in griglie, passi temporali ed enormi sistemi lineari.

Sapere come funzionano questi metodi, e come falliscono, è ciò che permette agli ingegneri di giudicare una previsione o un modello. Ogni unità termina con una breve sezione con fonti. I valori che non provengono da una fonte sono indicati come valori di esempio o da manuale.

Per gli insegnanti

Puoi insegnare questo corso, oppure lasciare che uno studente lo faccia da solo. È gratis. Saving Planets non dà un voto né crediti scolastici.

- Questa pagina è l'intero corso: 10 unità e 6 laboratori (MATH 340).
- Prevedi 15 settimane, circa 6–9 ore a settimana, comprese le settimane di laboratorio.
- Segui il calendario di 15 settimane. Leggi l'unità, fai la pratica su carta, poi apri la risposta. Nella settimana di laboratorio, fai il laboratorio o la versione a casa.
- Un controllo è un numero o un risultato di codice nella pagina che uno script ricalcola prima della pubblicazione. Il numero che vedi e quello ricalcolato devono coincidere.
- Usa Stampa questa pagina, oppure scarica la guida di studio PDF. Il formulario è verso la fine.
- Chiedi: in che modo questa unità aiuta le persone e il pianeta? Ogni unità ha un riquadro verde con un fatto e la sua fonte.
- Copia il modello di guida per insegnanti e scrivi il nome della classe, il tempo che hai e le domande che farai. Apri il modello di guida per insegnanti

Prima di iniziare

Prerequisiti

- Analisi I e II: derivate, integrali e serie di Taylor.
- Equazioni differenziali: EDO del primo e del secondo ordine.
- Algebra lineare: matrici, determinanti e autovalori.
- Introduzione alla programmazione: cicli, funzioni e array (va bene anche un foglio di calcolo).

Come studiare

- Prima di calcolare, stima la risposta e decidi quale precisione ti serve.
- Confronta sempre con una risposta esatta su un problema di prova prima di fidarti di un metodo su un problema reale.
- Segui l'errore mentre dimezzi il passo: il rapporto ti dà l'ordine del metodo.
- Usa le unità SI e scrivi il passo con le sue unità.
- Attenzione a sottrarre numeri quasi uguali; riscrivi la formula se puoi.
- Svolgi ogni esercizio su carta o in un foglio di calcolo prima di aprire la risposta, e ripeti i quiz qualche giorno dopo.

Che cosa ti serve

- Un computer o un tablet per le simulazioni gratuite PhET Least-Squares Regression, Curve Fitting, Calculus Grapher e Projectile Motion.
- Un foglio di calcolo (va bene qualsiasi gratuito), oppure Python se lo conosci.
- Il file di dati CO_2 di Mauna Loa della NOAA in un browser.

- Una calcolatrice.

Programma suggerito di 15 settimane

Circa 6-9 ore a settimana: lettura, esercizi e, nelle settimane di laboratorio, il laboratorio.

Settimana	Unità	Argomenti	Lettura
1	Errori, numeri in virgola mobile e serie di Taylor	Errori, virgola mobile, serie di Taylor; Laboratorio A	MIT 18.330
2	Radici di equazioni: bisezione, Newton e secante	Bisezione e iterazione di punto fisso	MIT 18.330
3	Radici di equazioni: bisezione, Newton e secante	Metodi di Newton e delle secanti; Laboratorio B	OpenStax Calculus 1, 4.9
4	Sistemi lineari: eliminazione di Gauss, LU e condizionamento	Eliminazione di Gauss, LU e condizionamento	MIT 2.086
5	Metodi iterativi: Jacobi, Gauss–Seidel e convergenza	Jacobi, Gauss–Seidel e sistemi sparsi	MIT 18.330
6	Interpolazione, spline e adattamento ai minimi quadrati	Interpolazione e spline	MIT 18.330
7	Interpolazione, spline e adattamento ai minimi quadrati	Minimi quadrati; Laboratorio C; preparazione al compito intermedio	NOAA GML
8	Derivazione numerica	Derivazione numerica	MIT 18.330
9	Integrazione numerica	Integrazione numerica; Laboratorio D	OpenStax Calculus 2, 3.6
10	Equazioni differenziali ordinarie: Eulero, Runge–Kutta e stabilità	Eulero, Heun e RK4	MIT 10.34
11	Equazioni differenziali ordinarie: Eulero, Runge–Kutta e stabilità	Stabilità, rigidità e sistemi; Laboratorio E	MIT 10.34
12	Equazioni alle derivate parziali: differenze finite	Differenze finite per l’equazione del calore	MIT 2.086
13	Equazioni alle derivate parziali: differenze finite	Laplace, onde e CFL; Laboratorio F	NOAA EMC
14	Ottimizzazione, autovalori e calcolo su larga scala	Ottimizzazione e metodo delle potenze	MIT 18.330

Settimana	Unità	Argomenti	Lettura
15	Ottimizzazione, autovalori e calcolo su larga scala	Calcolo su larga scala, verifica e validazione; preparazione all’esame finale	NOAA; NASA GISS

I tuoi progressi

Spunta unità e laboratori man mano che li finisci, e fai i quiz. Progressi e punteggi sono salvati solo in questo browser e non ci vengono mai inviati.

Unità

Errori, numeri in virgola mobile e serie di Taylor

Errore assoluto e relativo, cifre significative, numeri in virgola mobile IEEE 754, epsilon di macchina, arrotondamento e cancellazione, ed errore di troncamento dalle serie di Taylor.

Obiettivi di apprendimento

Alla fine di questa unità saprai:

- Calcolare l'errore assoluto e relativo.
- Spiegare l'epsilon di macchina in precisione singola e doppia.
- Individuare e correggere la cancellazione catastrofica.
- Limitare l'errore di troncamento con il termine di Taylor successivo.

Concetti chiave

- L'errore assoluto è |approssimato − esatto|; l'errore relativo divide per |esatto|. L'errore relativo ti dice quante cifre sono corrette.
- I computer memorizzano i numeri in virgola mobile binaria. La doppia precisione ha epsilon di macchina $2^{-52} \approx 2.22 \times 10^{-16}$ (circa 16 cifre); la singola precisione ha $2^{-23} \approx 1.19 \times 10^{-7}$ (circa 7 cifre).
- La maggior parte dei decimali, come 0.1, non ha una forma binaria esatta, quindi 0.1 + 0.2 − 0.3 risulta circa 5.55×10^{-17} invece di 0.
- Sottrarre numeri quasi uguali fa perdere cifre (cancellazione catastrofica). Riscrivere la formula algebricamente spesso risolve.
- L'errore di troncamento deriva dall'interrompere un processo infinito, come una serie di Taylor. Il primo termine scartato stima l'errore.

Equazioni chiave

$$e_{rel} = \frac{|\tilde{x} - x|}{|x|}$$

```
e_rel=(| x-x|)/(|x|)
```

Errore relativo

$$\varepsilon_{mach} = 2^{-52} \approx 2.22 \times 10^{-16}$$

```
_mach=2^-52≈2.22×10^-16
```

Epsilon in doppia precisione

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \dots$$

f(x+h)=f(x)+hf'(x)+(h^2)/(2)f''(x)+

Serie di Taylor

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

Evitare la cancellazione

Esempi svolti passo passo

Esempio 1.1 Trova l'errore relativo di 22/7 come approssimazione di π.

1. |22/7 − π| = 0.001264.
2. Dividi per π.

Risposta: Errore relativo = 4.02×10^{-4}, quindi circa 3 cifre corrette.

Esempio 1.2 Calcola √(10⁸ + 1) − √(10⁸) in modo sicuro.

1. La sottrazione diretta cancella la maggior parte delle cifre.
2. Use 1/(√(10⁸ + 1) + √(10⁸)).

Risposta: 5.0×10^{-5} (più esattamente $4.99999999875 \times 10^{-5}$).

Esempio 1.3 Stima l'errore di e^0.1 ≈ 1 + 0.1.

1. Il termine successivo è $0.1^2/2 = 0.005$.
2. L'errore vero è e^0.1 − 1.1.

Risposta: Errore = 0.00517, vicino alla stima di 0.005.

Esercizi

Svolgi ciascuno prima su carta, poi controlla.

1. Quante cifre corrette dà la doppia precisione?

   Circa 16 ($\varepsilon = 2.22 \times 10^{-16}$).

2. Aggiungi il termine $0.1^3/6$ a e^0.1 ≈ 1.1. Nuovo errore?

1.71×10^{-4}.

3. Perché 0.1 + 0.2 − 0.3 non è esattamente 0 su un computer?

   0.1 e 0.2 non hanno forma binaria esatta; il risultato è circa 5.55×10^{-17}.

4. Qual è l'epsilon in precisione singola?

   $2^{-23} = 1.19 \times 10^{-7}$.

Errori concettuali comuni

Mito: I computer fanno aritmetica esatta.
In realtà: Ogni operazione arrotonda al numero in virgola mobile più vicino.

Mito: Passi più piccoli significano sempre errore minore.
In realtà: L'errore di arrotondamento cresce quando i passi si riducono.

Mito: Errore relativo e assoluto sono la stessa cosa.
In realtà: L'errore relativo divide per la grandezza vera.

Flashcard

Errore assoluto

|approssimato − esatto|.

Errore relativo

Errore assoluto / |esatto|.

Epsilon di macchina

$2^{-52} \approx 2.22 \times 10^{-16}$ in doppia precisione.

Cancellazione

Perdita di cifre sottraendo numeri vicini.

Errore di troncamento

Deriva dall'interrompere un processo infinito.

Precisione singola

Circa 7 cifre.

Quiz di autoverifica

1. L'epsilon in doppia precisione è circa...

2.2×10^{-16}

10^{-7}

10^{-3}

0

$2.2 \times 10^{-16}. 2^{-52}.$

2. Sottrarre numeri quasi uguali provoca...

cancellazione

overflow

niente

risultati esatti

cancellazione. Cifre perse.

3. L'errore di troncamento deriva da...

interrompere una serie

la memorizzazione binaria

errori di battitura

le unità

interrompere una serie. Definizione.

4. L'errore relativo divide per...

il valore vero

il passo

epsilon

10

il valore vero. Definizione.

Rifai questo quiz

Come questo aiuta a salvare il pianeta

L'Environmental Modeling Center della NOAA descrive una previsione globale accoppiata a circa 3 km di risoluzione che calcolava la dinamica atmosferica in precisione a 32 bit e tutto il resto a 64 bit, un compromesso voluto tra velocità e precisione.

È la scelta di epsilon di questa unità nella pratica: la precisione singola (circa 7 cifre) è più veloce e usa metà memoria, quindi i modellisti la usano dove l'errore che aggiunge resta sotto quello che il modello ha già.

Su Saving Planets: Osservazione della Terra · Introduzione alla programmazione

Fonti: NOAA Environmental Modeling Center: Global Forecast System (GFS) (https://www.emc.ncep.noaa.gov/emc/pages/numerical_forecast_systems/gfs.php)

Risorse di apprendimento gratuite

- MIT OpenCourseWare 18.330 Introduction to Numerical Analysis (primavera 2012) (https://ocw.mit.edu/courses/18-330-introduction-to-numerical-analysis-spring-2012/): Lezioni gratuite del MIT.
- MIT OpenCourseWare 2.086 Numerical Computation for Mechanical Engineers (autunno 2014) (https://ocw.mit.edu/courses/2-086-numerical-computation-for-mechanical-engineers-fall-2014/): Corso gratuito del MIT.

☐ **Ho finito questa unità**

Radici di equazioni: bisezione, Newton e secante

Intervalli con la bisezione, metodo di Newton, metodo delle secanti, iterazione di punto fisso, ordine di convergenza e criteri di arresto.

Obiettivi di apprendimento

Alla fine di questa unità saprai:

- Trovare una radice con la bisezione e prevedere il numero di passi.
- Applicare il metodo di Newton e riconoscere la convergenza quadratica.
- Usare il metodo delle secanti quando la derivata non è nota.
- Scegliere un criterio di arresto.

Concetti chiave

- La bisezione dimezza un intervallo [a, b] in cui f cambia segno. Converge sempre, ma solo di una cifra binaria per passo: n ≥ $\log_2((b - a)/tol)$.
- Il metodo di Newton segue la retta tangente: x_{n+1} = x_n − f(x_n)/f'(x_n). Vicino a una radice semplice converge quadraticamente, raddoppiando le cifre corrette a ogni passo.
- Il metodo delle secanti sostituisce f' con la pendenza tra gli ultimi due punti. Non richiede la derivata e converge con ordine di circa 1.618.
- Newton può fallire se f' è vicino a zero o il punto iniziale è lontano; un ripiego con intervallo lo rende sicuro.
- Fermati quando |x_{n+1} − x_n| e |f(x_n)| sono entrambi sotto la tolleranza, e limita sempre il numero di iterazioni.

Equazioni chiave

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

```
x_n+1=x_n-(f(x_n))/(f'(x_n))
```

Metodo di Newton

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

```
x_n+1=x_n-f(x_n)_n-x_n-1f(x_n)-f(x_n-1)
```

Metodo delle secanti

$$n \geq \log_2 \frac{b - a}{tol}$$

Passi di bisezione

$$|e_{n+1}| \approx C|e_n|^2$$

Convergenza quadratica

Esempi svolti passo passo

Esempio 2.1 Usa la bisezione su $f(x) = x^3 - x - 2$ in $[1, 2]$. Indica i primi tre punti medi e la radice.

1. $f(1) = -2$, $f(2) = 4$.
2. Punti medi 1.5, 1.75, 1.625.

Risposta: Radice $x = 1.5214$.

Esempio 2.2 Quanti passi di bisezione riducono un intervallo di ampiezza 1 sotto 10^{-6}?

1. $\log_2(10^6) = 19.93$.

Risposta: 20 passi.

Esempio 2.3 Usa il metodo di Newton su $x^2 - 2$ partendo da $x_0 = 1$.

1. $x_1 = 1.5$, $x_2 = 1.41667$.
2. $x_3 = 1.414216$.

Risposta: $x_3 = 1.414216$, già 6 cifre corrette.

Esercizi

Svolgi ciascuno prima su carta, poi controlla.

1. Applica Newton a $x^3 - x - 2$ partendo da $x_0 = 1.5$. Primo passo?

   1.52174.

2. Applica il metodo delle secanti a $x^2 - 2$ partendo da 1 e 2. Prime tre iterate?

   1.3333, 1.4000, 1.4146.

3. Che ordine di convergenza ha il metodo delle secanti?

Circa 1.618.

4. Perché limitare il numero di iterazioni?

   Un metodo può divergere o entrare in ciclo.

Errori concettuali comuni

Mito: Newton converge sempre.
In realtà: Può divergere da un cattivo punto iniziale.

Mito: La bisezione è veloce.
In realtà: Guadagna un bit per passo.

Mito: Un f(x) piccolo significa che x è vicino alla radice.
In realtà: Non se f è molto piatta.

Flashcard

Bisezione

Dimezzare un intervallo con cambio di segno.

Newton

x − f/f'.

Secante

Newton con una pendenza su due punti.

Convergenza quadratica

Le cifre raddoppiano a ogni passo.

Intervallo di confinamento

Intervallo con un cambio di segno.

Criterio di arresto

Passo e residuo sotto la tolleranza.

Quiz di autoverifica

1. Newton converge...

quadraticamente

linearmente

mai

sempre cubicamente

quadraticamente. Vicino a una radice semplice.

2. La bisezione richiede...

un cambio di segno

una derivata

una matrice

niente

un cambio di segno. Intervallo.

3. La secante evita...

la derivata

f

l'iterazione

i punti iniziali

la derivata. Pendenza da due punti.

4. Passi fino a 10^{-6} da ampiezza 1 con la bisezione...

20

6

100

2

20. $\log_2 10^6$.

Rifai questo quiz

Come questo aiuta a salvare il pianeta

L’USGS afferma che MODFLOW è considerato uno standard internazionale per simulare le acque sotterranee. Una delle sue versioni, MODFLOW-NWT, usa una formulazione di Newton-Raphson per migliorare la soluzione dei problemi di flusso sotterraneo non confinato.

Gli acquiferi liberi rendono le equazioni non lineari, perché lo spessore saturo dipende dal livello dell’acqua che si sta cercando. Il metodo di Newton di questa unità è ciò che fa convergere quei calcoli in modo affidabile.

Su Saving Planets: Oceani · Analisi I

Fonti: USGS: MODFLOW and Related Programs (https://www.usgs.gov/mission-areas/water-resources/science/modflow-and-related-programs)

Risorse di apprendimento gratuite

- OpenStax Calculus Volume 1, 4.9 Metodo di Newton (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/4-9-newtons-method): Sezione di un manuale gratuito.
- MIT OpenCourseWare 18.330 Introduction to Numerical Analysis (primavera 2012) (https://ocw.mit.edu/courses/18-330-introduction-to-numerical-analysis-spring-2012/): Lezioni gratuite del MIT.

Guarda la lezione

Session 7: Solutions of Nonlinear Equations; Newton-Raphson Method (https://ocw.mit.edu/courses/10-34-numerical-methods-applied-to-chemical-engineering-fall-2015/resources/session-7-solutions-of-nonlinear-equations-newton-raphson-method/) (in inglese)

MIT 10.34 Numerical Methods Applied to Chemical Engineering (Fall 2015), MIT OpenCourseWare. Licenza: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Condizioni d’uso (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Link fornito solo per lo studio gratuito; Saving Planets non è affiliato a questa università né approvato da essa.

☐ **Ho finito questa unità**

Sistemi lineari: eliminazione di Gauss, LU e condizionamento

Eliminazione di Gauss con pivoting parziale, fattorizzazione LU, conteggio delle operazioni, il numero di condizionamento e come limita la precisione.

Obiettivi di apprendimento

Alla fine di questa unità saprai:

- Risolvere un sistema 3 × 3 per eliminazione.
- Spiegare la fattorizzazione LU e il suo riuso.
- Stimare il costo dell'eliminazione.
- Usare il numero di condizionamento per giudicare la precisione.

Concetti chiave

- L'eliminazione di Gauss riduce Ax = b a un sistema triangolare superiore, poi esegue la sostituzione all'indietro. Il pivoting parziale scambia le righe per usare il pivot più grande, il che controlla l'errore di arrotondamento.
- La fattorizzazione LU memorizza l'eliminazione come A = LU. Una volta fattorizzata, ogni nuovo termine noto costa solo due risoluzioni triangolari.
- L'eliminazione costa circa $2n^3/3$ operazioni in virgola mobile: raddoppiare n moltiplica il lavoro per 8.
- Il numero di condizionamento $\kappa(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$ misura la sensibilità. Si possono perdere circa $\log_{10} \kappa$ cifre di precisione.
- Non calcolare mai A^{-1} per risolvere un sistema; fattorizza e risolvi.

Equazioni chiave

$$A = LU$$

A=LU

Fattorizzazione LU

$$\text{cost} \approx \tfrac{2}{3} n^3$$

Operazioni di eliminazione

$$\kappa(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$$

(A)=\|A\|\|A^-1\|

Numero di condizionamento

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le \kappa \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

Limite d’errore

Esempi svolti passo passo

Esempio 3.1 Risolvi 2x + y − z = 8, −3x − y + 2z = −11, −2x + y + 2z = −3.

1. Elimina x dalle righe 2 e 3, poi y dalla riga 3.
2. Esegui la sostituzione all’indietro.

Risposta: x = 2, y = 3, z = −1.

Esempio 3.2 Stima il costo dell’eliminazione per n = 1000.

1. $2 \times 1000^3/3$.

Risposta: Circa 6.67×10^8 operazioni.

Esempio 3.3 Trova il numero di condizionamento in norma 2 di [[1, 1], [1, 1.0001]].

1. Le righe sono quasi parallele.
2. κ = σ_max/σ_min.

Risposta: κ ≈ 40,002, quindi si possono perdere circa 4–5 cifre.

Esercizi

Svolgi ciascuno prima su carta, poi controlla.

1. Quanto lavoro in più è n = 2000 rispetto a n = 1000?

   8 volte.

2. Operazioni di eliminazione per n = 3?

   2 × 27/3 = 18.

3. Perché fare pivoting?

   Per evitare di dividere per numeri piccoli e amplificare l’arrotondamento.

4. Cifre perse con $\kappa = 10^8$ in doppia precisione?

   Circa 8 su 16.

Errori concettuali comuni

Mito: Usare A^{-1} per risolvere sistemi.

In realtà: Fattorizza e risolvi; costa meno ed è più preciso.

Mito: Un determinante piccolo significa mal condizionamento.

In realtà: Usa il numero di condizionamento.

Mito: Il pivoting è facoltativo.

In realtà: Senza di esso, l'eliminazione può fallire o perdere precisione.

Flashcard

Eliminazione di Gauss

Ridurre a forma triangolare.

LU

$A = LU$.

Pivoting

Scambi di righe per la stabilità.

Numero di condizionamento

$\|A\|\|A^{-1}\|$.

Sostituzione all'indietro

Risolvere sistemi triangolari.

Costo

$\approx 2n^3/3$.

Quiz di autoverifica

1. L'eliminazione costa circa...

$2n^3/3$

n

n^2

2^n

$2n^3/3$. Triplo ciclo.

2. LU aiuta quando...

molti termini noti

n = 1

nessuna soluzione

mai

molti termini noti. Riutilizzare i fattori.

3. Un κ grande significa...

sensibile

facile

sempre singolare

simmetrica

sensibile. Amplifica gli errori.

4. Il pivoting parziale sceglie...

il pivot più grande

il più piccolo

zero

a caso

il pivot più grande. Stabilità.

Rifai questo quiz

Come questo aiuta a salvare il pianeta

L’USGS afferma che una caratteristica chiave di MODFLOW 6 è la capacità di risolvere più modelli numerici strettamente accoppiati in un unico sistema di equazioni.

La sua mappa della profondità della falda negli Stati Uniti continentali è venuta da una simulazione parallela di 256 domini di modello strettamente accoppiati su 256 core di un supercomputer dell’USGS. Ogni dominio è un grande sistema lineare sparso come quelli di questa unità.

Su Saving Planets: Algebra lineare · Oceani

Fonti: USGS: MODFLOW and Related Programs (https://www.usgs.gov/mission-areas/water-resources/science/modflow-and-related-programs)

Risorse di apprendimento gratuite

- MIT OpenCourseWare 2.086 Numerical Computation for Mechanical Engineers (autunno 2014) (https://ocw.mit.edu/courses/2-086-numerical-computation-for-mechanical-engineers-fall-2014/): Corso gratuito del MIT.
- MIT OpenCourseWare 10.34 Numerical Methods Applied to Chemical Engineering (autunno 2015) (https://ocw.mit.edu/courses/10-34-numerical-methods-applied-to-chemical-engineering-fall-2015/): Corso gratuito del MIT.

Guarda la lezione

Lecture 3: Solving a Linear System (https://ocw.mit.edu/courses/18-085-computational-science-and-engineering-i-fall-2008/resources/lecture-3-solving-a-linear-system/) (in inglese)

MIT 18.085 Computational Science and Engineering I (Fall 2008), MIT OpenCourseWare. Licenza: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Condizioni d’uso (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Link fornito solo per lo studio gratuito; Saving Planets non è affiliato a questa università né approvato da essa.

☐ **Ho finito questa unità**

Metodi iterativi: Jacobi, Gauss–Seidel e convergenza

Iterazione di Jacobi e Gauss–Seidel, dominanza diagonale, matrice di iterazione e raggio spettrale, sistemi sparsi e perché i metodi iterativi scalano.

Obiettivi di apprendimento

Alla fine di questa unità saprai:

- Eseguire passi di Jacobi e Gauss–Seidel.
- Verificare la dominanza diagonale.
- Usare il raggio spettrale per prevedere la velocità di convergenza.
- Spiegare perché i grandi sistemi sparsi usano l'iterazione.

Concetti chiave

- Jacobi aggiorna ogni incognita dall'iterata precedente; Gauss–Seidel usa i nuovi valori appena calcolati.
- Se A è a dominanza diagonale stretta, entrambi i metodi convergono da qualsiasi punto iniziale.
- L'errore si riduce a ogni passo di circa il raggio spettrale ρ della matrice di iterazione. Gauss–Seidel spesso ha ρ_GS = ρ_J².
- Le griglie grandi danno matrici sparse con pochi elementi non nulli per riga. I metodi iterativi memorizzano solo quelli, mentre l'eliminazione crea riempimento.
- Fermati quando il residuo ‖b − Ax‖ è piccolo rispetto a ‖b‖.

Equazioni chiave

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j^{(k)}\right)$$

```
x_i^(k+1)=1a_ii(b_i-_j ia_ijx_j^(k))
```

Jacobi

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

Dominanza diagonale

$$\|e_k\| \approx \rho^k \|e_0\|$$

Velocità di convergenza

$$r = b - Ax$$

`r=b-Ax`

Residuo

Esempi svolti passo passo

Esempio 4.1 Esegui due passi di Jacobi su 4x + y = 1, x + 3y = 2 partendo da (0, 0).

1. Passo 1: x = 1/4 = 0.25, y = 2/3 = 0.6667.
2. Passo 2: x = (1 − 0.6667)/4, y = (2 − 0.25)/3.

Risposta: x = 0.0833, y = 0.5833 (esatto 0.0909, 0.6364).

Esempio 4.2 Esegui due passi di Gauss–Seidel sullo stesso sistema.

1. Passo 1: x = 0.25, y = (2 − 0.25)/3 = 0.5833.
2. Passo 2: x = 0.1042, y = 0.6319.

Risposta: x = 0.1042, y = 0.6319, più vicino di Jacobi.

Esempio 4.3 Trova i raggi spettrali di Jacobi e Gauss–Seidel per quel sistema.

1. ρ_J = √(1/12).
2. ρ_GS = ρ_J² = 1/12.

Risposta: ρ_J = 0.289; ρ_GS = 0.0833.

Esercizi

Svolgi ciascuno prima su carta, poi controlla.

1. [[4, 1], [1, 3]] è a dominanza diagonale?

   Sì: 4 > 1 e 3 > 1.

2. Passi di Gauss–Seidel (ρ = 0.0833) per ridurre l’errore di 10^6?

   Circa 6 ($0.0833^6 = 3.35 \times 10^{-7}$).

3. Terza iterata di Gauss–Seidel?

x = 0.0920, y = 0.6360.

4. Perché non eliminare su una griglia da un milione di incognite?

   Il riempimento usa troppa memoria e tempo.

Errori concettuali comuni

Mito: L'iterazione converge sempre.
In realtà: Serve $\rho < 1$.

Mito: Jacobi e Gauss–Seidel sono uguali.
In realtà: Gauss–Seidel usa subito i nuovi valori.

Mito: Un piccolo cambiamento tra i passi significa convergenza.
In realtà: Controlla anche il residuo.

Flashcard

Jacobi

Aggiornare tutto dai vecchi valori.

Gauss–Seidel

Usare subito i nuovi valori.

Raggio spettrale

Il più grande |autovalore|.

Dominanza diagonale

$|a_{ii}|$ > somma della riga.

Sparso

Quasi tutti zeri.

Residuo

$b - Ax$.

Quiz di autoverifica

1. Converge se...

$\rho < 1$

$\rho > 1$

n è pari

A è singolare

ρ < 1. L’errore si riduce.

2. Gauss–Seidel usa...

i valori più recenti

solo i vecchi valori

nessun valore

inverse

i valori più recenti. Definizione.

3. Sparso significa...

quasi tutti zeri

densa

n piccolo

singolare

quasi tutti zeri. Pochi elementi non nulli.

4. Sufficiente per la convergenza...

dominanza diagonale

solo la simmetria

n = 2

niente

dominanza diagonale. Teorema.

Rifai questo quiz

Come questo aiuta a salvare il pianeta

Il GFS della NOAA divide l'atmosfera in 127 strati verticali con una spaziatura orizzontale di circa 13 km. Ogni punto di griglia è accoppiato solo ai vicini, quindi i sistemi che tali modelli costruiscono sono enormi e sparsi.

Con una superficie terrestre da manuale di 5.1×10^8 km^2, una griglia di 13 km ha circa 3.0 milioni di colonne e 383 milioni di celle. Sistemi di queste dimensioni si trattano con metodi iterativi e altri metodi sparsi, non con la semplice eliminazione.

Su Saving Planets: Osservazione della Terra · Algebra lineare

Fonti: NOAA Environmental Modeling Center: Global Forecast System (GFS) (https://www.emc.ncep.noaa.gov/emc/pages/numerical_forecast_systems/gfs.php)

Risorse di apprendimento gratuite

- MIT OpenCourseWare 18.330 Introduction to Numerical Analysis (primavera 2012) (https://ocw.mit.edu/courses/18-330-introduction-to-numerical-analysis-spring-2012/): Lezioni gratuite del MIT.
- MIT OpenCourseWare 2.086 Numerical Computation for Mechanical Engineers (autunno 2014) (https://ocw.mit.edu/courses/2-086-numerical-computation-for-mechanical-engineers-fall-2014/): Corso gratuito del MIT.

☐ **Ho finito questa unità**

Interpolazione, spline e adattamento ai minimi quadrati

Interpolazione lineare e polinomiale, forma di Lagrange, il pericolo dei polinomi di grado elevato, spline cubiche, e adattamenti ai minimi quadrati di rette e polinomi con residui.

Obiettivi di apprendimento

Alla fine di questa unità saprai:

- Interpolare linearmente tra punti dati.
- Costruire un polinomio di Lagrange.
- Adattare una retta ai minimi quadrati e interpretarne la pendenza.
- Scegliere tra interpolazione e adattamento.

Concetti chiave

- L'interpolazione passa esattamente per i dati; l'adattamento passa vicino a dati rumorosi e minimizza la somma dei quadrati dei residui.
- Un polinomio di grado n per n + 1 punti è unico. I gradi elevati su punti equispaziati possono oscillare fortemente vicino agli estremi (fenomeno di Runge).
- Le spline cubiche uniscono pezzi cubici con pendenza e curvatura coincidenti, dando curve lisce senza oscillazioni selvagge.
- La retta dei minimi quadrati risolve le equazioni normali $A^TAc = A^Ty$. La pendenza è un tasso, con unità.
- Traccia i residui: uno schema in essi significa che al modello manca qualcosa, come la curvatura.

Equazioni chiave

$$y = y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}(y_1 - y_0)$$

```
y=y_0+(x-x_0)/(x_1-x_0)(y_1-y_0)
```

Interpolazione lineare

$$p(x) = \sum_i y_i \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

```
p(x)=_i y_i_j i(x-x_j)/(x_i-x_j)
```

Forma di Lagrange

$$A^T A\, c = A^T y$$

```
A^TA c=A^Ty
```

Equazioni normali

$$\min \sum_i r_i^2$$

Minimi quadrati

Esempi svolti passo passo

Esempio 5.1 Le medie annuali di Mauna Loa della NOAA sono 390.10 ppm (2010) e 414.21 ppm (2020). Interpola il 2015.

1. y = 390.10 + 0.5 × 24.11.

Risposta: 402.16 ppm; il valore NOAA del 2015 è 401.01, quindi la serie curva verso l'alto.

Esempio 5.2 Adatta una retta ai minimi quadrati ai valori decennali 1960–2020 (316.91, 325.68, 338.76, 354.45, 369.71, 390.10, 414.21 ppm).

1. Risolvi le equazioni normali per pendenza e intercetta.

Risposta: Pendenza 1.613 ppm all'anno; la retta prevede 415.0 ppm per il 2025.

Esempio 5.3 Adatta invece una parabola in t = anno − 1960.

1. Minimi quadrati con colonne 1, t, t^2.

Risposta: c = 316.84 + 0.810t + 0.01338t^2; prevede 426.0 ppm per il 2025, vicino ai 427.35 della NOAA.

Esercizi

Svolgi ciascuno prima su carta, poi controlla.

1. Crescita media 2010–2020 dai valori decennali?

   2.41 ppm all'anno.

2. Crescita media 2000–2010?

   2.04 ppm all'anno.

3. Perché la retta sottostima il 2025?

La crescita accelera; i residui formano una curva.

4. Interpolare o adattare dati di laboratorio rumorosi?

   Fit.

Errori concettuali comuni

Mito: I polinomi di grado più alto adattano sempre meglio.
In realtà: Possono oscillare tra i punti.

Mito: Un buon R^2 significa un buon modello.
In realtà: Controlla lo schema dei residui.

Mito: L'estrapolazione è sicura quanto l'interpolazione.
In realtà: È molto più rischiosa.

Flashcard

Interpolazione

Esattamente per i dati.

Minimi quadrati

Minimizzare i quadrati dei residui.

Spline

Cubica a tratti e liscia.

Runge

Oscillazioni degli adattamenti di grado elevato.

Residuo

Dati meno modello.

Equazioni normali

$A^TAc = A^Ty$.

Quiz di autoverifica

1. I minimi quadrati minimizzano...

la somma dei quadrati dei residui

l'errore massimo

la pendenza

il grado

la somma dei quadrati dei residui. Definizione.

2. Il fenomeno di Runge è...

un’oscillazione agli estremi

cancellazione

una divergenza

il pivoting

un’oscillazione agli estremi. Polinomi di grado elevato.

3. Le spline sono...

cubiche a tratti

rette singole

a caso

Serie di Taylor

cubiche a tratti. Definizione.

4. Le equazioni normali servono per...

$A^TAc = A^Ty$

$Ax = 0$

LU

$f = 0$

$A^TAc = A^Ty$. Minimi quadrati.

Rifai questo quiz

Come questo aiuta a salvare il pianeta

La NOAA riferisce che la serie di Mauna Loa, avviata da C. David Keeling di Scripps nel marzo 1958, è la più lunga serie di misure dirette di CO_2 nell'atmosfera. La media mensile era 426.07 ppm a settembre 2026, rispetto a 424.37 ppm a settembre 2025.

Le medie annuali della NOAA sono salite da 316.91 ppm nel 1960 a 427.35 ppm nel 2025. La curva ascendente compare nei residui di questa unità: una retta la manca, una parabola la adatta.

Su Saving Planets: Soluzioni · Osservazione della Terra

Fonti: NOAA Global Monitoring Laboratory: Trends in atmospheric CO_2 (Mauna Loa) (https://gml.noaa.gov/ccgg/trends/) · NOAA GML: Mauna Loa annual mean CO_2 data (https://gml.noaa.gov/webdata/ccgg/trends/co2/co2_annmean_mlo.txt)

Risorse di apprendimento gratuite

- PhET: Least-Squares Regression (https://phet.colorado.edu/en/simulations/least-squares-regression): Adatta rette in modo interattivo.
- PhET: Curve Fitting (https://phet.colorado.edu/en/simulations/curve-fitting): Adattamenti polinomiali interattivi.

Guarda la lezione

Lecture 11: Least Squares (part 2) (https://ocw.mit.edu/courses/18-085-computational-science-and-engineering-i-fall-2008/resources/lecture-11-least-squares-part-2/) (in inglese)

MIT 18.085 Computational Science and Engineering I (Fall 2008), MIT OpenCourseWare. Licenza: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Condizioni d'uso (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Link fornito solo per lo studio gratuito; Saving Planets non è affiliato a questa università né approvato da essa.

☐ **Ho finito questa unità**

Derivazione numerica

Differenze in avanti, all'indietro e centrate, il loro errore di troncamento, l'equilibrio con l'errore di arrotondamento e il passo migliore, derivate seconde ed estrapolazione di Richardson.

Obiettivi di apprendimento

Alla fine di questa unità saprai:

- Applicare differenze in avanti e centrate.
- Indicare l'ordine di ogni formula.
- Scegliere un passo che bilanci troncamento e arrotondamento.
- Stimare una derivata seconda.

Concetti chiave

- La differenza in avanti (f(x + h) − f(x))/h ha errore proporzionale a h (primo ordine).
- La differenza centrata (f(x + h) − f(x − h))/(2h) ha errore proporzionale a h² (secondo ordine), quindi dimezzare h riduce l'errore di 4 volte.
- L'errore di arrotondamento cresce come ε/h quando h diminuisce. Per le differenze in avanti il miglior h è circa √ε ≈ 1.49 × 10⁻⁸; per quelle centrate circa ε^(1/3) ≈ 6.06 × 10⁻⁶.
- La derivata seconda è (f(x + h) − 2f(x) + f(x − h))/h², anch'essa del secondo ordine.
- L'estrapolazione di Richardson combina due passi per cancellare il termine d'errore dominante.

Equazioni chiave

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Differenza in avanti

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

Differenza centrata

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

Differenza seconda

$$h_{opt} \approx \sqrt{\varepsilon}$$

Miglior passo in avanti

Esempi svolti passo passo

Esempio 6.1 Stima la derivata di sin x in x = 1 con una differenza in avanti, h = 0.1.

1. (sin 1.1 − sin 1)/0.1.

Risposta: 0.4974; esatto cos 1 = 0.5403; errore −0.0429.

Esempio 6.2 Ripeti con una differenza centrata.

1. (sin 1.1 − sin 0.9)/0.2.

Risposta: 0.5394; errore −0.00090, circa 47.7 volte più piccolo.

Esempio 6.3 Trova il miglior passo di differenza in avanti in doppia precisione.

1. $h \approx \sqrt{(2.22 \times 10^{-16})}$.

Risposta: $h \approx 1.49 \times 10^{-8}$.

Esercizi

Svolgi ciascuno prima su carta, poi controlla.

1. Dimezza h in una differenza centrata. Errore?

   Circa ¼ di quello iniziale.

2. Dimezza h in una differenza in avanti. Errore?

   Circa ½ di quello iniziale.

3. Miglior passo di differenza centrata in doppia precisione?

   Circa ε^(1/3) = 6.06×10^{-6}.

4. Perché non usare $h = 10^{-15}$?

   Domina l'errore di arrotondamento ε/h.

Errori concettuali comuni

Mito: Un h più piccolo è sempre meglio.

In realtà: Sotto l'ottimo vince l'arrotondamento.

Mito: Le differenze in avanti e centrate sono ugualmente precise.

In realtà: Quella centrata è del secondo ordine.

Mito: Derivare dati rumorosi è facile.

In realtà: Le differenze amplificano il rumore; prima leviga o adatta.

Flashcard

Differenza in avanti

Primo ordine.

Differenza centrata

Secondo ordine.

Differenza seconda

$f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)$ diviso h^2.

h ottimale

$\approx \sqrt{\varepsilon}$ per la differenza in avanti.

Richardson

Cancellare l'errore dominante.

Ordine

Esponente di h nell'errore.

Quiz di autoverifica

1. Errore della differenza centrata ∝…

h^2

h

1/h

sempre h^3

h^2. Simmetrica.

2. La differenza in avanti è di ordine …

prima

secondo

zero

quarto

prima. Errore ∝ h.

3. Il miglior h in avanti è circa…

√ε

ε

1

0.1

√ε. Equilibrio.

4. Il rumore nei dati viene … dalla differenziazione.

amplificato

rimosso

dimezzato

invariata

amplificato. Divide per h.

Rifai questo quiz

Come questo aiuta a salvare il pianeta

La NOAA afferma che il GFS produce output orari per le prime 120 ore, poi ogni 3 ore per i giorni da 5 a 16. Previsori e modelli a valle fanno differenze su quegli output per ottenere tassi come la tendenza della pressione e l'intensità di pioggia.

Questa unità mostra perché conta il passo temporale degli output salvati: un tasso ricavato da valori ogni 3 ore con una differenza centrata è molto più preciso di una differenza unilaterale sullo stesso intervallo.

Su Saving Planets: GOES-19 · Analisi I

Fonti: NOAA Environmental Modeling Center: Global Forecast System (GFS) (https://www.emc.ncep.noaa.gov/emc/pages/numerical_forecast_systems/gfs.php)

Risorse di apprendimento gratuite

- MIT OpenCourseWare 18.330 Introduction to Numerical Analysis (primavera 2012) (https://ocw.mit.edu/courses/18-330-introduction-to-numerical-analysis-spring-2012/): Lezioni gratuite del MIT.
- PhET: Calculus Grapher (https://phet.colorado.edu/en/simulations/calculus-grapher): Derivate in modo interattivo.

☐ **Ho finito questa unità**

Integrazione numerica

Regole dei trapezi e di Simpson, regole composite e ordini d’errore, estrapolazione di Romberg, quadratura di Gauss e integrazione di dati misurati.

Obiettivi di apprendimento

Alla fine di questa unità saprai:

- Applicare le regole composite dei trapezi e di Simpson.
- Prevedere come l’errore diminuisce con n.
- Usare Romberg per migliorare un risultato.
- Applicare la quadratura di Gauss a 2 punti.

Concetti chiave

- La regola dei trapezi unisce i punti con segmenti. Il suo errore cala come h^2: raddoppiare n lo divide per 4.
- La regola di Simpson adatta parabole su coppie di intervalli (n pari). Il suo errore cala come h^4: raddoppiare n lo divide per 16.
- Estrapolazione di Romberg: $T_{2n} + (T_{2n} - T_n)/3$ cancella l’errore h^2 della regola dei trapezi (coincide con la regola di Simpson).
- La quadratura di Gauss sceglie i punti migliori: 2 punti in $\pm 1/\sqrt{3}$ integrano esattamente le cubiche.
- Per dati misurati a passo fisso, applica direttamente la regola dei trapezi o di Simpson ai campioni.

Equazioni chiave

$$T_n = h\left[\tfrac{1}{2}f_0 + f_1 + \cdots + f_{n-1} + \tfrac{1}{2}f_n\right]$$

```
T_n=h[12f_0+f_1++f_n-1+12f_n]
```

Regola dei trapezi

$$S_n = \tfrac{h}{3}\left[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + \cdots + 4f_{n-1} + f_n\right]$$

```
S_n= h3[f_0+4f_1+2f_2++4f_n-1+f_n]
```

Regola di Simpson

$$\int_{-1}^{1} f \approx f(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}) + f(\tfrac{1}{\sqrt{3}})$$

Gauss a 2 punti

$$E_T \propto h^2,\ E_S \propto h^4$$

Ordini d’errore

Esempi svolti passo passo

Esempio 7.1 Stima $\int_0^1 e^x\,dx$ con la regola dei trapezi, n = 4.

1. h = 0.25; somma i valori pesati.

Risposta: T_4 = 1.72722; esatto e − 1 = 1.71828; errore 0.00894.

Esempio 7.2 Ripeti con la regola di Simpson, n = 4.

1. Pesi 1, 4, 2, 4, 1 per h/3.

Risposta: S_4 = 1.718319; errore 3.70×10^{-5}.

Esempio 7.3 Usa la quadratura di Gauss a 2 punti sullo stesso integrale.

1. Porta [0, 1] su [−1, 1]: punti 0.5 ± 0.5/√3, peso ½ ciascuno.

Risposta: 1.717896; errore -3.85×10^{-4} con solo 2 valori della funzione.

Esercizi

Svolgi ciascuno prima su carta, poi controlla.

1. Errore dei trapezi con n = 8?

   0.00224, circa ¼ dell’errore con n = 4.

2. Romberg da T_4 e T_8?

   1.718284.

3. Regola di Simpson con n = 2?

   1.718861.

4. Perché in Simpson n deve essere pari?

   Usa coppie di intervalli.

Errori concettuali comuni

Mito: Simpson funziona per qualsiasi n.

In realtà: n deve essere pari.

Mito: Più punti aiutano sempre allo stesso modo.

In realtà: Le regole di ordine più alto guadagnano molto più in fretta.

Mito: I punti di Gauss possono essere ovunque.

In realtà: Sono radici fisse dei polinomi di Legendre.

Flashcard

Trapezi

Errore $\propto h^2$.

Simpson

Errore $\propto h^4$.

Romberg

Estrapolare i risultati dei trapezi.

Quadratura di Gauss

Punti e pesi ottimali.

Regola composita

Applicare su molti sottointervalli.

n pari

Necessario per Simpson.

Quiz di autoverifica

1. Errore di Simpson $\propto$...

h^4

h^2

h

1

h^4. Quarto ordine.

2. Raddoppiare n nella regola dei trapezi divide l'errore per...

4

2

16

1

4. h^2.

3. Gauss a 2 punti è esatta per...

cubiche

tutte le funzioni

solo rette

niente

cubiche. Grado $2n - 1$.

4. Romberg cancella...

l'errore dominante

ogni errore

l'arrotondamento

f

l'errore dominante. Estrapolazione.

Rifai questo quiz

Come questo aiuta a salvare il pianeta

La NOAA spiega che ogni media mensile di Mauna Loa è la media di medie giornaliere, a loro volta basate su medie orarie, usando solo le ore in condizioni di "fondo".

Una media è un integrale diviso per l'intervallo, quindi costruire medie mensili da valori orari è integrazione numerica, l'idea dei trapezi di questa unità applicata a misure reali.

Su Saving Planets: Analisi II · Soluzioni

Fonti: NOAA Global Monitoring Laboratory: Trends in atmospheric CO_2 (Mauna Loa) (https://gml.noaa.gov/ccgg/trends/)

Risorse di apprendimento gratuite

- OpenStax Calculus Volume 2, 3.6 Integrazione numerica (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/3-6-numerical-integration): Sezione di un manuale gratuito.
- PhET: Calculus Grapher (https://phet.colorado.edu/en/simulations/calculus-grapher): Integrali in modo interattivo.

Guarda la lezione

Session 13: ODE-IVP and Numerical Integration 1 (https://ocw.mit.edu/courses/10-34-numerical-methods-applied-to-chemical-engineering-fall-2015/resources/session-13-ode-ivp-and-numerical-integration-1/) (in inglese)

MIT 10.34 Numerical Methods Applied to Chemical Engineering (Fall 2015), MIT OpenCourseWare. Licenza: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Condizioni d'uso (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Link fornito solo per lo studio gratuito; Saving Planets non è affiliato a questa università né approvato da essa.

- [ ] **Ho finito questa unità**

UNITÀ 8 · SETTIMANE 10–11

Equazioni differenziali ordinarie: Eulero, Runge–Kutta e stabilità

Metodo di Eulero, metodo di Heun, Runge–Kutta del quarto ordine, errore locale e globale, limiti di stabilità, equazioni rigide e metodi impliciti, e sistemi di EDO.

Obiettivi di apprendimento

Alla fine di questa unità saprai:

- Far avanzare una EDO con Eulero e RK4.
- Collegare il passo all'errore globale.
- Trovare il limite di stabilità esplicito per y' = −λy.
- Riconoscere i problemi rigidi.

Concetti chiave

- Il metodo di Eulero y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n) ha errore globale proporzionale a h (primo ordine).
- Runge–Kutta del quarto ordine (RK4) usa quattro campioni di pendenza per passo; il suo errore globale cala come h^4.
- Per y' = −λy, Eulero esplicito è stabile solo se h < 2/λ. Oltre, la soluzione numerica cresce mentre quella vera decade.
- I problemi rigidi hanno parti molto veloci e molto lente. I metodi impliciti come Eulero all'indietro restano stabili con passi grandi.
- Le EDO di ordine superiore diventano sistemi del primo ordine, risolti dagli stessi metodi.

Equazioni chiave

$$y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n)$$

`y_n+1=y_n+hf(t_n,y_n)`

Euler

$$y_{n+1} = y_n + \tfrac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

`y_n+1=y_n+ h6(k_1+2k_2+2k_3+k_4)`

RK4

$$h < \frac{2}{\lambda}$$

Stabilità di Eulero per y' = −λy

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1})$$

`y_n+1=y_n+hf(t_n+1,y_n+1)`

Eulero all’indietro

Esempi svolti passo passo

Esempio 8.1 Risolvi y' = −y, y(0) = 1 fino a t = 1 con Eulero, h = 0.1.

1. Ogni passo moltiplica per 0.9.
2. y(1) ≈ 0.9^{10}.

Risposta: 0.34868 contro 0.36788 esatto; errore −0.0192.

Esempio 8.2 Esegui un passo RK4 di h = 0.1 sullo stesso problema.

1. $k_1 = -1$, $k_2 = -0.95$, $k_3 = -0.9525$, $k_4 = -0.90475$.

Risposta: y(0.1) = 0.9048375 contro 0.9048374 esatto.

Esempio 8.3 Un caffè si raffredda secondo T' = −0.1(T − 20) da 90 °C (valori di esempio). Usa Eulero con h = 1 min per 10 min.

1. A ogni passo, T − 20 si riduce di un fattore 0.9.

Risposta: 44.41 °C contro 45.75 °C esatto.

Esercizi

Svolgi ciascuno prima su carta, poi controlla.

1. Eulero con h = 0.05 fino a t = 1 su y' = −y?

   0.95^{20} = 0.35849, errore circa la metà.

2. Limite di stabilità per y' = −50y con Eulero?

   h < 0.04.

3. Un passo di Heun di h = 0.1 su y' = −y?

0.905.

4. Come si risolve $y'' = -y$ con questi metodi?

   Scrivila come $y' = v$, $v' = -y$.

Errori concettuali comuni

Mito: Un passo più piccolo è sempre stabile.

In realtà: Solo sotto il limite, e l'arrotondamento cresce con molti passi.

Mito: RK4 è esatto.

In realtà: Il suo errore è piccolo ma non nullo.

Mito: I metodi impliciti sono sempre più lenti.

In realtà: Per i problemi rigidi sono molto più veloci nel complesso.

Flashcard

Euler

Esplicito del primo ordine.

RK4

Quarto ordine, 4 pendenze.

Stabilità

Gli errori non crescono.

Rigido

Scale veloci e lente insieme.

Eulero all'indietro

Implicito, molto stabile.

Sistema

Ordine superiore → primo ordine.

Quiz di autoverifica

1. Errore globale di Eulero ∝...

h

h^4

h^2

1

h. Primo ordine.

2. RK4 usa … pendenze.

4

1

2

10

4. da k_1 a k_4.

3. Eulero è stabile per y' = −λy se…

$h < 2/\lambda$

$h > 2/\lambda$

qualsiasi h

$\lambda < 0$

$h < 2/\lambda$. Amplificazione $|1 - h\lambda| < 1$.

4. I problemi rigidi favoriscono…

i metodi impliciti

Euler

la bisezione

Simpson

i metodi impliciti. Stabilità.

Rifai questo quiz

Come questo aiuta a salvare il pianeta

La NOAA afferma che il GFS gira quattro volte al giorno e prevede fino a 16 giorni. La pagina dell'EMC descrive anche un calcolo di ricerca accoppiato a 3 km che ha richiesto circa 40,000 secondi di calcolo per ogni previsione di 24 ore, usando 233 nodi.

Sono circa 11.1 ore di calcolo per giorno di previsione, quindi il modello girava solo circa 2.16 volte più veloce del tempo reale. Ogni previsione è una soluzione di EDO ed EDP a passi temporali, e il passo stabile fissa il costo.

Su Saving Planets: Equazioni differenziali · GOES-19

Fonti: NOAA Environmental Modeling Center: Global Forecast System (GFS) (https://www.emc.ncep.noaa.gov/emc/pages/numerical_forecast_systems/gfs.php)

Risorse di apprendimento gratuite

- MIT OpenCourseWare 10.34 Numerical Methods Applied to Chemical Engineering (autunno 2015) (https://ocw.mit.edu/courses/10-34-numerical-methods-applied-to-chemical-engineering-fall-2015/): Corso gratuito del MIT.
- PhET: Projectile Motion (https://phet.colorado.edu/en/simulations/projectile-motion): Confronta con il tuo risolutore.

Guarda la lezione

Session 18: Differential Algebraic Equations 2 (https://ocw.mit.edu/courses/10-34-numerical-methods-applied-to-chemical-engineering-fall-2015/resources/session-18-differential-algebraic-equations-2/) (in inglese)

MIT 10.34 Numerical Methods Applied to Chemical Engineering (Fall 2015), MIT OpenCourseWare. Licenza: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Condizioni d'uso (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Link fornito solo per lo studio gratuito; Saving Planets non è affiliato a questa università né approvato da essa.

☐ **Ho finito questa unità**

Equazioni alle derivate parziali: differenze finite

Griglie e stencil, l’equazione del calore esplicita e il suo limite di stabilità, schemi impliciti e di Crank–Nicolson, l’equazione di Laplace e la soluzione iterativa, la condizione CFL per le onde, e il costo della risoluzione.

Obiettivi di apprendimento

Alla fine di questa unità saprai:

- Scrivere stencil alle differenze finite per le equazioni del calore e di Laplace.
- Applicare il limite di stabilità esplicito r ≤ ½.
- Spiegare la condizione CFL.
- Stimare come cresce il costo con la risoluzione.

Concetti chiave

- Sostituisci le derivate con differenze su una griglia. Per u_t = αu_xx, lo schema esplicito è u_i^{n+1} = u_i^n + r(u_{i+1}^n − 2u_i^n + u_{i−1}^n) con r = αΔt/Δx².
- Lo schema esplicito del calore è stabile solo se r ≤ ½, quindi dimezzare Δx costringe a ridurre Δt di 4 volte.
- Gli schemi impliciti e di Crank–Nicolson sono stabili per qualsiasi Δt ma richiedono una risoluzione lineare a ogni passo.
- L’equazione di Laplace u_xx + u_yy = 0 dà uno stencil a 5 punti; Jacobi o Gauss–Seidel (Unità 4) la risolvono.
- Per onde e flussi, la condizione CFL c Δt/Δx ≤ 1 lega il passo temporale alla spaziatura della griglia. Raffinare una griglia orizzontale 2D di un fattore k costa circa k² colonne in più e k passi temporali in più.

Equazioni chiave

$$r = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} \le \frac{1}{2}$$

r=(αΔ t)/(Δ x^2)12

Stabilità esplicita del calore

$$u_{i,j} = \tfrac{1}{4}\left(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}\right)$$

u_i,j=14(u_i+1,j+u_i-1,j+u_i,j+1+u_i,j-1)

Laplace a 5 punti

$$\frac{c\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

Condizione CFL

$$\text{cost} \propto k^3$$

Raffinamento orizzontale di k

Esempi svolti passo passo

Esempio 9.1 Trova il massimo passo temporale esplicito stabile per α = 1.0 × 10⁻⁴ m²/s e Δx = 0.01 m (valori di esempio).

1. $\Delta t \leq 0.5\Delta x^2/\alpha$.

Risposta: $\Delta t \leq 0.5$ s.

Esempio 9.2 La NOAA prevede di raffinare il GFS da 13 km a 9 km. Stima la variazione delle colonne orizzontali.

1. $(13/9)^2$.

Risposta: Circa 2.09 volte più colonne.

Esempio 9.3 Includendo un passo temporale limitato dalla CFL, stima l'aumento totale del costo.

1. $(13/9)^3$.

Risposta: Circa 3.01 volte il lavoro.

Esercizi

Svolgi ciascuno prima su carta, poi controlla.

1. Dimezza Δx nello schema esplicito del calore. Nuovo limite di Δt?

   ¼ di quello iniziale.

2. Colonne su una griglia globale di 13 km (Terra 5.1 × 10⁸ km², valore da manuale)?

Circa 3.02 milioni.

3. Celle con 127 strati?

   Circa 3.83×10^8.

4. Celle a 9 km con 127 strati?

   Circa 8.0×10^8.

Errori concettuali comuni

Mito: Qualsiasi passo temporale va bene se la griglia è fine.
In realtà: Le griglie più fini richiedono passi espliciti più piccoli.

Mito: Gli schemi impliciti sono sempre più precisi.
In realtà: Sono più stabili, non automaticamente più precisi.

Mito: Raddoppiare la risoluzione raddoppia il costo.
In realtà: In 2D più il tempo è circa 8×.

Flashcard

Stencil

Schema di punti vicini.

r

$\alpha\Delta t/\Delta x^2$.

CFL

$c\Delta t/\Delta x \le 1$.

Crank–Nicolson

Implicito, secondo ordine.

Laplaciano a 5 punti

Media dei vicini.

Costo della risoluzione

$\approx k^3$ per un raffinamento di k volte.

Quiz di autoverifica

1. Stabilità esplicita del calore...

$r \le ½$

$r \le 2$

qualsiasi r

r ≥ 1

r ≤ ½. Von Neumann.

2. La CFL lega...

Δt e Δx

α e u

n e ε

x e y

Δt e Δx. Velocità dell'informazione.

3. Lo stencil di Laplace usa ... punti.

5

2

sempre 9

1

5. Centro + 4.

4. Crank–Nicolson è...

incondizionatamente stabile

esplicito

instabile

del primo ordine

incondizionatamente stabile. Media implicita.

Rifai questo quiz

Come questo aiuta a salvare il pianeta

L'aggiornamento dei supercomputer della NOAA del 2023 doveva permettere al GFS di passare a una risoluzione orizzontale di nove chilometri, rispetto ai 13 della versione attuale, per vedere e simulare fenomeni a scala più piccola.

Lo scaling di questa unità mostra perché servivano nuovi computer: 2.09 volte più colonne e, con un passo temporale limitato dalla CFL, circa 3 volte il lavoro per ogni previsione.

Su Saving Planets: Meccanica dei fluidi · Termodinamica

Fonti: NOAA: NOAA completes upgrade to weather and climate supercomputer system (Aug. 10, 2023) (https://www.noaa.gov/news-release/noaa-completes-upgrade-to-weather-and-climate-supercomputer-system) · NOAA Environmental Modeling Center: Global Forecast System (GFS) (https://www.emc.ncep.noaa.gov/emc/pages/numerical_forecast_systems/gfs.php)

Risorse di apprendimento gratuite

- MIT OpenCourseWare 2.086 Numerical Computation for Mechanical Engineers (autunno 2014) (https://ocw.mit.edu/courses/2-086-numerical-computation-for-mechanical-engineers-fall-2014/): Corso gratuito del MIT.
- MIT OpenCourseWare 18.330 Introduction to Numerical Analysis (primavera 2012) (https://ocw.mit.edu/courses/18-330-introduction-to-numerical-analysis-spring-2012/): Lezioni gratuite del MIT.

Guarda la lezione

Session 22: Partial Differential Equations 1 (https://ocw.mit.edu/courses/10-34-numerical-methods-applied-to-chemical-engineering-fall-2015/resources/session-22-partial-differential-equations-1/) (in inglese)

MIT 10.34 Numerical Methods Applied to Chemical Engineering (Fall 2015), MIT OpenCourseWare. Licenza: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Condizioni d'uso (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Link fornito solo per lo studio gratuito; Saving Planets non è affiliato a questa università né approvato da essa.

☐ **Ho finito questa unità**

Ottimizzazione, autovalori e calcolo su larga scala

Ricerca della sezione aurea, discesa del gradiente e metodo di Newton per la minimizzazione, il metodo delle potenze per gli autovalori, conteggio delle operazioni, calcolo parallelo, e verifica e validazione dei modelli.

Obiettivi di apprendimento

Alla fine di questa unità saprai:

- Minimizzare una funzione 1D con la ricerca della sezione aurea.
- Applicare la discesa del gradiente e scegliere un passo.
- Trovare un autovalore dominante con il metodo delle potenze.
- Stimare il tempo di esecuzione dal conteggio delle operazioni e dalla velocità della macchina.

Concetti chiave

- La ricerca della sezione aurea riduce un intervallo di 0.618 a ogni passo senza derivate.
- La discesa del gradiente scende lungo il pendio: x ← x − α∇f. Un α troppo grande diverge; troppo piccolo procede lentissimo.
- Il metodo di Newton per la minimizzazione risolve ∇f = 0 usando l’hessiana; converge quadraticamente vicino al minimo.
- Il metodo delle potenze moltiplica ripetutamente per A; il vettore si allinea all’autovettore dominante e il quoziente di Rayleigh dà il suo autovalore.
- La verifica chiede se il codice risolve bene le equazioni; la validazione chiede se sono le equazioni giuste, confrontandole con le osservazioni.

Equazioni chiave

$$\tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$$

`τ=(5-1)/(2)≈0.618`

Fattore del rapporto aureo

$$x_{k+1} = x_k - \alpha \nabla f(x_k)$$

`x_k+1=x_k-α f(x_k)`

Discesa del gradiente

$$\lambda \approx \frac{v^T A v}{v^T v}$$

Quoziente di Rayleigh

$$t = \frac{\text{flops}}{\text{flop rate}}$$

`t= rate`

Tempo di esecuzione

Esempi svolti passo passo

Esempio 10.1 Di quanto la ricerca della sezione aurea riduce un intervallo in 10 passi?

1. 0.618^{10}.

Risposta: A 0.0081 (0.81%) della sua ampiezza.

Esempio 10.2 Minimizza $f = (x - 3)^2$ con la discesa del gradiente con $\alpha = 0.1$ da $x = 0$. Dove sei dopo 5 passi?

1. A ogni passo $x - 3$ si riduce di 0.8.
2. $x_5 = 3(1 - 0.8^5)$.

Risposta: $x_5 = 2.017$.

Esempio 10.3 Applica il metodo delle potenze a [[2, 1], [1, 2]] da (1, 0), 5 passi.

1. v = (122, 121).
2. Quoziente di Rayleigh.

Risposta: $\lambda \approx 2.99997$ (esatto 3).

Esercizi

Svolgi ciascuno prima su carta, poi controlla.

1. Quanto richiede una risoluzione densa con 10,000 incognite ($2n^3/3$ flops) a 14.5 petaflops?

   $6.67 \times 10^{11} / 1.45 \times 10^{16} = 4.6 \times 10^{-5}$ s.

2. Velocità combinata dei due computer da 14.5 petaflops della NOAA?

29 petaflops.

3. Capacità operativa più ricerca (20 petaflops)?

   49 petaflops.

4. Verifica o validazione: confrontare un modello con i dati di Mauna Loa?

   Validazione.

Errori concettuali comuni

Mito: Un passo più grande accelera sempre la discesa del gradiente.
In realtà: Può oltrepassare e divergere.

Mito: Il metodo delle potenze trova tutti gli autovalori.
In realtà: Solo quello dominante.

Mito: Un codice che converge è un modello corretto.
In realtà: Serve comunque la validazione.

Flashcard

Sezione aurea

L’intervallo si riduce di 0.618.

Discesa del gradiente

$x - \alpha \nabla f$.

Metodo delle potenze

Autovalore dominante.

Quoziente di Rayleigh

$v^T Av / v^T v$.

Verifica

Risolvere bene le equazioni.

Validazione

Risolvere le equazioni giuste.

Quiz di autoverifica

1. La sezione aurea riduce di...

0.618

0.5

0.1

2

0.618. Rapporto aureo.

2. Il metodo delle potenze trova...

l’autovalore dominante

tutte le radici

l’inversa

al determinante

l’autovalore dominante. Moltiplicazione ripetuta.

3. La validazione confronta con...

le osservazioni

il codice

niente

epsilon

le osservazioni. Verifica con la realtà.

4. La discesa del gradiente si muove...

in discesa

in salita

a caso

di lato

in discesa. $-\nabla f$.

Rifai questo quiz

Come questo aiuta a salvare il pianeta

La NOAA riferisce che i suoi supercomputer gemelli per meteo e clima, Dogwood a Manassas (Virginia) e Cactus a Phoenix (Arizona), sono stati aggiornati nell'agosto 2023 a 14.5 petaflops ciascuno, quindi insieme il sistema di previsione può elaborare 29 biliardi di calcoli al secondo. Con macchine di ricerca per un totale di 20 petaflops, la capacità della NOAA è di 49 petaflops, e oltre 20 modelli operativi di previsione numerica del tempo girano sul sistema.

Il NASA GISS rende liberamente disponibile il codice del suo modello del sistema Terra ModelE, e la sua analisi delle temperature superficiali GISTEMP viene aggiornata intorno al 10 di ogni mese. Codice e dati aperti permettono a chiunque di verificare e validare i metodi numerici della scienza del clima.

Su Saving Planets: Soluzioni · Introduzione alla programmazione

Fonti: NOAA: NOAA completes upgrade to weather and climate supercomputer system (Aug. 10, 2023) (https://www.noaa.gov/news-release/noaa-completes-upgrade-to-weather-and-climate-supercomputer-system) · NASA GISS: modello del sistema Terra GISS, ModelE (https://www.giss.nasa.gov/tools/modelE/) · NASA GISS: GISS Surface Temperature Analysis (GISTEMP v4) (https://data.giss.nasa.gov/gistemp/)

Risorse di apprendimento gratuite

- MIT OpenCourseWare 18.330 Introduction to Numerical Analysis (primavera 2012) (https://ocw.mit.edu/courses/18-330-introduction-to-numerical-analysis-spring-2012/): Lezioni gratuite del MIT.
- MIT OpenCourseWare 10.34 Numerical Methods Applied to Chemical Engineering (autunno 2015) (https://ocw.mit.edu/courses/10-34-numerical-methods-applied-to-chemical-engineering-fall-2015/): Corso gratuito del MIT.

☐ **Ho finito questa unità**

Esercizi

Questi esercizi stanno dentro ogni unità. Falli su carta, poi apri la risposta.

1. Errori, numeri in virgola mobile e serie di Taylor
   4 esercizi
2. Radici di equazioni: bisezione, Newton e secante
   4 esercizi
3. Sistemi lineari: eliminazione di Gauss, LU e condizionamento
   4 esercizi
4. Metodi iterativi: Jacobi, Gauss–Seidel e convergenza
   4 esercizi

5. Interpolazione, spline e adattamento ai minimi quadrati
   4 esercizi
6. Derivazione numerica
   4 esercizi
7. Integrazione numerica
   4 esercizi
8. Equazioni differenziali ordinarie: Eulero, Runge–Kutta e stabilità
   4 esercizi
9. Equazioni alle derivate parziali: differenze finite
   4 esercizi
10. Ottimizzazione, autovalori e calcolo su larga scala
    4 esercizi

Il laboratorio (Computation lab)

Il laboratorio è la parte pratica del corso. Qui è gratuito e solo per esercitarsi, senza crediti.

Ogni laboratorio si svolge in una simulazione gratuita o in un foglio di calcolo, quindi non ci sono rischi fisici. Fai pause dallo schermo, siediti con una buona postura e tieni i cavi lontano dai passaggi.

Riferimento per la sicurezza: OSHA: Walking-working surfaces (slip, trip and fall hazards) (https://www.osha.gov/walking-working-surfaces)

Laboratorio A: epsilon di macchina e serie di Taylor in un foglio di calcolo

SETTIMANA 1

Obiettivo: Trova l'epsilon di macchina sperimentalmente e guarda una serie di Taylor convergere a e.

$$e \approx \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}$$

```
e≈_k=0^n-1(1)/(k!)
```

Serie di Taylor per e

Procedimento

1. In una colonna, parti da 1 e dimezza a ogni riga.
2. Nella colonna successiva, verifica se 1 + valore > 1.
3. L'ultimo valore che supera il test è l'epsilon di macchina.
4. Somma 1/k! per 5 e 10 termini e confronta con e.

Tabella dei dati

Grandezza	Valore
Epsilon di macchina (doppia)	2.22×10^{-16}
e, 5 termini	2.70833
e, 10 termini	2.7182815
e	2.7182818

Valori calcolati; la maggior parte dei fogli di calcolo usa la doppia precisione.

Calcolo di esempio

1. Dimezzare 52 volte dà $2^{-52} = 2.22 \times 10^{-16}$.
2. 1 + 1 + ½ + ⅛ + 1/24 = 2.70833.

> **Sicurezza**
>
> - Solo computer.

Alternativa a casa o virtuale

- Va bene qualsiasi foglio di calcolo.

MIT OpenCourseWare 18.330 Introduction to Numerical Analysis (primavera 2012) (https://ocw.mit.edu/courses/18-330-introduction-to-numerical-analysis-spring-2012/)

Legame con il pianeta: La NOAA descrive una previsione con la dinamica in precisione a 32 bit e tutto il resto a 64 bit. NOAA Environmental Modeling Center: Global Forecast System (GFS) (https://www.emc.ncep.noaa.gov/emc/pages/numerical_forecast_systems/gfs.php)

- [ ] **Ho completato questo laboratorio (reale o virtuale)**

Laboratorio B: bisezione contro Newton

SETTIMANA 3

Obiettivo: Risolvi cos x = x con la bisezione e con il metodo di Newton, e conta le cifre corrette a ogni passo.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\cos x_n - x_n}{-\sin x_n - 1}$$

```
x_n+1=x_n-( x_n-x_n)/(- x_n-1)
```

Newton per cos x − x = 0

Procedimento

1. Racchiudi la radice in [0, 1].
2. Esegui 20 passi di bisezione in un foglio di calcolo.
3. Esegui Newton da $x_0 = 1$.
4. Traccia $\log_{10}$ dell'errore rispetto al numero di passo per entrambi.

Tabella dei dati

Passo di Newton	x
1	0.750364
2	0.739113
3	0.739085133
4	0.739085133

Valori calcolati. La bisezione richiede circa 20 passi per 6 cifre; Newton ne richiede 3.

Calcolo di esempio

1. $x_1 = 1 - (\cos 1 - 1)/(-\sin 1 - 1) = 0.750364$.
2. Radice 0.7390851.

> **Sicurezza**
>
> - Solo computer.

Alternativa a casa o virtuale

- Va bene qualsiasi foglio di calcolo.

OpenStax Calculus Volume 1, 4.9 Metodo di Newton (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/4-9-newtons-method)

Legame con il pianeta: L'USGS afferma che MODFLOW-NWT usa una formulazione di Newton-Raphson per il flusso sotterraneo non confinato. USGS: MODFLOW and Related Programs (https://www.usgs.gov/mission-areas/water-resources/science/modflow-and-related-programs)

- [ ] **Ho completato questo laboratorio (reale o virtuale)**

Laboratorio C: adattare la serie di CO_2 di Mauna Loa

SETTIMANA 7

Obiettivo: Adatta modelli lineare e quadratico alle medie annuali di Mauna Loa della NOAA e giudicali dai residui.

$$A^T A\, c = A^T y$$

A^TA c=A^Ty

Minimi quadrati

Procedimento

1. Esplora PhET Least-Squares Regression e Curve Fitting per vedere come cambiano i residui con il modello.
2. Apri il file delle medie annuali della NOAA e copia i valori decennali 1960–2020.
3. Adatta una retta e una quadratica (LINEST del foglio o linea di tendenza).
4. Prevedi il 2025 e confronta con i 427.35 ppm della NOAA.

Tabella dei dati

Modello	Coefficiente chiave	Previsione 2025 (ppm)
Retta	pendenza 1.613 ppm/anno	415.0
Quadratico	0.01338 ppm/anno²	426.0
NOAA 2025	—	427.35

Dati NOAA GML; adattamenti calcolati.

Calcolo di esempio

1. La retta sottostima il 2025 di 12.3 ppm.
2. La quadratica è entro 1.3 ppm.

> **Sicurezza**
>
> - Solo computer.

Alternativa a casa o virtuale

- Va bene qualsiasi foglio di calcolo.

PhET: Least-Squares Regression (https://phet.colorado.edu/en/simulations/least-squares-regression) · PhET: Curve Fitting (https://phet.colorado.edu/en/simulations/curve-fitting) · NOAA GML: Mauna Loa annual mean CO_2 data

(https://gml.noaa.gov/webdata/ccgg/trends/co2/co2_annmean_mlo.txt)

Legame con il pianeta: La NOAA riferisce che la media mensile di Mauna Loa era 426.07 ppm a settembre 2026. NOAA Global Monitoring Laboratory: Trends in atmospheric CO_2 (Mauna Loa) (https://gml.noaa.gov/ccgg/trends/)

- [ ] **Ho completato questo laboratorio (reale o virtuale)**

Laboratorio D: trapezi contro Simpson

SETTIMANA 9

Obiettivo: Integra sin x da 0 a π con entrambe le regole, dimezza il passo e misura l'ordine dell'errore.

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = 2$$

```
_0^π x dx=2
```

Integrale di prova

Procedimento

1. Usa PhET Calculus Grapher per vedere l'area sotto una curva.
2. Crea colonne per x, sin x e i pesi delle regole.
3. Calcola T e S per n = 4, poi n = 8.
4. Trova i rapporti degli errori.

Tabella dei dati

Regola, n = 4	Stima	Errore
Trapezi	1.89612	−0.10388
Simpson	2.00456	+0.00456

Valori calcolati; raddoppiare a n = 8 riduce gli errori di 4.03 e 16.9, vicini ai teorici 4 e 16.

Calcolo di esempio

1. $T_4 = (\pi/4)(\sin \pi/4 + \sin \pi/2 + \sin 3\pi/4) = 1.89612$.
2. $S_4 = (\pi/12)(4 \sin \pi/4 + 2 \sin \pi/2 + 4 \sin 3\pi/4) = 2.00456$.

> **Sicurezza**
>
> - Solo computer.

Alternativa a casa o virtuale

- Va bene qualsiasi foglio di calcolo.

PhET: Calculus Grapher (https://phet.colorado.edu/en/simulations/calculus-grapher) · OpenStax Calculus Volume 2, 3.6 Integrazione numerica (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/3-6-numerical-integration)

Legame con il pianeta: La NOAA costruisce ogni media mensile di Mauna Loa da medie giornaliere basate su medie orarie. NOAA Global Monitoring Laboratory: Trends in atmospheric CO_2 (Mauna Loa) (https://gml.noaa.gov/ccgg/trends/)

☐ **Ho completato questo laboratorio (reale o virtuale)**

Laboratorio E: ordini di errore di Eulero e RK4

SETTIMANA 11

Obiettivo: Risolvi y' = −y fino a t = 1 con diversi passi e conferma la convergenza del primo e del quarto ordine.

$$y(1) = e^{-1} = 0.367879$$

`y(1)=e^-1=0.367879`

Risposta esatta

Procedimento

1. Crea una colonna di Eulero per h = 0.2, 0.1 e 0.05.
2. Crea un blocco RK4 per h = 0.2 e 0.1.
3. Registra l'errore a t = 1.
4. Confronta i rapporti degli errori quando h si dimezza; poi prova lo stesso risolutore sul caso senza attrito di PhET Projectile Motion.

Tabella dei dati

Metodo, h	Errore a t = 1
Eulero, 0.2	−0.0402
Eulero, 0.1	−0.0192
Eulero, 0.05	−0.00939
RK4, 0.2	5.80×10^{-6}
RK4, 0.1	3.33×10^{-7}

Valori calcolati. L'errore di Eulero si dimezza con h; quello di RK4 cala di circa 17 (vicino a $2^4 = 16$).

Calcolo di esempio

1. Eulero h = 0.1: $0.9^{10} - e^{-1} = -0.0192$.
2. Rapporto RK4 $5.80 \times 10^{-6} / 3.33 \times 10^{-7} = 17.4$.

> **Sicurezza**
>
> - Solo computer.

Alternativa a casa o virtuale

- Va bene qualsiasi foglio di calcolo.

PhET: Projectile Motion (https://phet.colorado.edu/en/simulations/projectile-motion) · MIT OpenCourseWare 10.34 Numerical Methods Applied to Chemical Engineering (autunno 2015) (https://ocw.mit.edu/courses/10-34-numerical-methods-applied-to-chemical-engineering-fall-2015/)

Legame con il pianeta: Il GFS della NOAA gira quattro volte al giorno e prevede fino a 16 giorni. NOAA Environmental Modeling Center: Global Forecast System (GFS) (https://www.emc.ncep.noaa.gov/emc/pages/numerical_forecast_systems/gfs.php)

- [ ] **Ho completato questo laboratorio (reale o virtuale)**

Laboratorio F: l’equazione del calore e il suo limite di stabilità

SETTIMANA 13

Obiettivo: Applica lo schema esplicito del calore a una barra con un punto caldo e guarda cosa succede sopra r = ½.

$$u_i^{n+1} = u_i^n + r(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$$

```
u_i^n+1=u_i^n+r(u_i+1^n-2u_i^n+u_i-1^n)
```

Schema esplicito

Procedimento

1. Imposta 7 nodi con gli estremi a 0 e il nodo centrale a 100 (valori di esempio).
2. Avanza con r = 0.25 per 10 passi.
3. Ripeti con r = 0.6.
4. Descrivi entrambi i risultati.

Tabella dei dati

Caso	Valore centrale dopo 1 passo	Dopo 10 passi
r = 0.25	50.0	16.7
r = 0.6	−20.0	290.5

Valori calcolati. Con r = 0.6 i valori oscillano e crescono: lo schema è instabile.

Calcolo di esempio

1. r = 0.25: 100 + 0.25(0 − 200 + 0) = 50.
2. r = 0.6: 100 + 0.6(−200) = −20.

> **Sicurezza**
>
> - Solo computer.

Alternativa a casa o virtuale

- Va bene qualsiasi foglio di calcolo.

MIT OpenCourseWare 2.086 Numerical Computation for Mechanical Engineers (autunno 2014) (https://ocw.mit.edu/courses/2-086-numerical-computation-for-mechanical-engineers-fall-2014/)

Legame con il pianeta: La NOAA prevedeva di portare il GFS da 13 km a 9 km di risoluzione dopo l’aggiornamento del 2023. NOAA: NOAA completes upgrade to weather and climate

supercomputer system (Aug. 10, 2023) (https://www.noaa.gov/news-release/noaa-completes-upgrade-to-weather-and-climate-supercomputer-system)

- [ ] **Ho completato questo laboratorio (reale o virtuale)**

Serie di esercizi per gli esami

Cronometrati: circa 10 minuti per problema. Poi confronta con le soluzioni complete.

Esercizi di preparazione all'esame intermedio (unità 1–5)

1. Trova l'errore relativo di 3.14 come approssimazione di π.

    1. $|3.14 - \pi|/\pi$.

    Risposta: 5.07×10^{-4}.

2. Fai due passi di Newton su $x^2 - 5$ da $x_0 = 2$.

    1. $x_1 = 2 - (-1)/4$.
    2. $x_2 = 2.25 - 0.0625/4.5$.

    Risposta: $x_1 = 2.25$; $x_2 = 2.23611$.

3. Quanti passi di bisezione riducono un intervallo di ampiezza 4 sotto 10^{-3}?

    1. $\log_2(4000) = 11.97$.

    Risposta: 12 passi.

4. Quanto lavoro di eliminazione in più richiede n = 500 rispetto a n = 100?

    1. $(500/100)^3$.

    Risposta: 125 volte.

5. Interpola il CO_2 di Mauna Loa per il 2023 dalle medie annuali NOAA del 2020 (414.21) e del 2025 (427.35).

    1. 414.21 + 0.6 × 13.14.

    Risposta: 422.09 ppm (il valore NOAA del 2023 è 421.08).

Serie di esercizi finale (tutte le unità)

1. Stima $\int_0^2 x^2\,dx$ con la regola dei trapezi, n = 2.

    1. h = 1: 0.5 × 0 + 1 + 0.5 × 4.

Risposta: 3 (esatto 2.667).

2. Ripeti con la regola di Simpson, n = 2.

    1. (1/3)(0 + 4 + 4).

    Risposta: 2.667, esatto per una quadratica.

3. Fai due passi di Eulero con h = 0.1 su y' = −2y, y(0) = 1.

    1. 0.8^2.

    Risposta: 0.64 (esatto 0.670).

4. Trova il massimo passo temporale esplicito del calore per α = 2 × 10^{-5} m^2/s, Δx = 0.005 m.

    1. $0.5 \times 0.005^2/2 \times 10^{-5}$.

    Risposta: 0.625 s.

5. Stima la derivata di e^x in 0 con la differenza centrale, h = 0.01.

    1. (e^0.01 − e^−0.01)/0.02.

    Risposta: 1.0000167.

6. Di quanto la ricerca della sezione aurea riduce un intervallo in 20 passi?

    1. 0.618^{20}.

    Risposta: A 6.6 × 10^{-5} della sua ampiezza.

Formulario

$$e_{rel} = |\tilde{x} - x|/|x|,\ \varepsilon_{mach} = 2^{-52} \qquad x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n),\ n \geq \log_2((b-a)/tol)$$

$$A = LU,\ \text{cost} \approx \tfrac{2}{3}n^3,\ \kappa = \|A\|\|A^{-1}\| \qquad \|e_k\| \approx \rho^k \|e_0\|$$

$$A^T A c = A^T y \qquad f' \approx (f(x+h) - f(x-h))/(2h),\ h_{opt} \approx \sqrt{\varepsilon}$$

$$T_n:\ E \propto h^2,\ S_n:\ E \propto h^4 \qquad y_{n+1} = y_n + hf,\ h < 2/\lambda$$

$$r = \alpha \Delta t/\Delta x^2 \leq \tfrac{1}{2},\ c\Delta t/\Delta x \leq 1 \qquad x_{k+1} = x_k - \alpha \nabla f,\ \lambda \approx v^T A v / v^T v$$

Costanti

Costante	Valore
Doppia precisione (IEEE 754)	epsilon di macchina $2^{-52} = 2.22 \times 10^{-16}$, circa 16 cifre significative
Precisione singola (IEEE 754)	epsilon di macchina $2^{-23} = 1.19 \times 10^{-7}$, circa 7 cifre significative
e	2.718281828
π	3.141592654
Superficie della Terra (valore da manuale)	5.1×10^8 km^2
1 petaflop	10^{15} operazioni in virgola mobile al secondo

Fonte: NIST Guide to the SI, Appendix B.9: conversion factors (https://www.nist.gov/pml/special-publication-811/nist-guide-si-appendix-b-conversion-factors/nist-guide-si-appendix-b9)

Testi e simulazioni gratuiti

Usa queste lezioni, sezioni di manuale e simulazioni gratuite insieme al corso.

- MIT OpenCourseWare 18.330 Introduction to Numerical Analysis (primavera 2012) (https://ocw.mit.edu/courses/18-330-introduction-to-numerical-analysis-spring-2012/): Lezioni ed esercizi gratuiti di analisi numerica del MIT.
- MIT OpenCourseWare 2.086 Numerical Computation for Mechanical Engineers (autunno 2014) (https://ocw.mit.edu/courses/2-086-numerical-computation-for-mechanical-engineers-fall-2014/): Corso gratuito del MIT di calcolo per l'ingegneria.
- MIT OpenCourseWare 10.34 Numerical Methods Applied to Chemical Engineering (autunno 2015) (https://ocw.mit.edu/courses/10-34-numerical-methods-applied-to-chemical-engineering-fall-2015/): Corso gratuito del MIT di metodi numerici applicati.
- OpenStax Calculus Volume 2, 3.6 Integrazione numerica (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/3-6-numerical-integration): Sezione di un manuale gratuito.
- OpenStax Calculus Volume 1, 4.9 Metodo di Newton (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/4-9-newtons-method): Sezione di un manuale gratuito.
- PhET: Least-Squares Regression (https://phet.colorado.edu/en/simulations/least-squares-regression): Adatta rette in modo interattivo.

Glossario

Errore assoluto
Ampiezza della differenza dal valore vero.

Bisezione

Ricerca di radici dimezzando un intervallo con cambio di segno.

Condizione CFL
Limite del passo temporale $c\Delta t/\Delta x \le 1$.

Cancellazione catastrofica
Perdita di cifre sottraendo numeri vicini.

Numero di condizionamento
Quanto un problema amplifica gli errori in ingresso.

Crank–Nicolson
Schema temporale implicito del secondo ordine.

Dominanza diagonale
Ogni elemento diagonale supera il resto della sua riga.

Quadratura di Gauss
Integrazione con punti e pesi ottimali.

Gauss–Seidel
Risolutore iterativo che usa subito i nuovi valori.

Fattorizzazione LU
$A = LU$, eliminazione riutilizzabile.

Minimi quadrati
Adattamento che minimizza la somma dei quadrati dei residui.

Epsilon di macchina
Distanza tra 1 e il float successivo.

Metodo di Newton
Ricerca di radici lungo le tangenti.

Metodo delle potenze
Moltiplicazione ripetuta per trovare l'autovalore dominante.

Runge–Kutta (RK4)
Risolutore di EDO del quarto ordine.

Regola di Simpson
Integrazione del quarto ordine con parabole.

Spline
Curva cubica a tratti liscia.

Equazione rigida
EDO con parti molto veloci e molto lente.

Errore di troncamento
Errore dovuto al troncamento di un processo infinito.

Validazione
Verificare un modello rispetto alle osservazioni.

Griglia di autovalutazione

Non si assegnano voti né crediti. Usala per valutare onestamente a che punto sei in ogni unità.

Livello	Come si presenta
4 · Padronanza	Sceglie un metodo per l'accuratezza richiesta, lo prova su un problema con risposta nota, ne misura l'ordine e spiega i suoi limiti di stabilità.
3 · Competente	Risolve gli esercizi con errori occasionali nel passo o nelle unità.
2 · In sviluppo	Segue gli esempi svolti ma non distingue l'errore di troncamento da quello di arrotondamento.
1 · Principiante	Applica formule senza controllare errore o stabilità; deve rivedere l'unità.

Pesi suggeriti se vuoi un punteggio

Parte	Peso
Esercizi	20%
Laboratori	25%
Serie di esercizi di metà corso	25%
Serie di esercizi finale	30%

Punta al livello 3 o superiore in ogni unità prima di passare al corso successivo.

Corsi correlati

- Meccanica orbitale AERO 340
- Probabilità e statistica MATH 350
- Aerodinamica I AERO 310
- Tutti i corsi