עודכן לאחרונה: November 1, 2026

🗺️ מפת דרכים לארבע שנים · שנה 3, סתיו

על הקורס

לקורס החינמי הזה יש 10 יחידות ו-6 מעבדות. אלה המספרים האמיתיים, לא תוכנית ארוכה יותר שקוצרה.

בדיקה היא מספר או תוצאת קוד בעמוד קורס שסקריפט מחשב מחדש לפני הפרסום. המספר המודפס והמספר שחושב מחדש חייבים להתאים.

זהו מתווה של קורס חינמי ללימוד עצמי שנכתב על ידי Saving Planets. הוא אינו קורס אוניברסיטאי, אינו מעניק נקודות זכות אקדמיות, ואף מוסד לימודים אינו מעורב בו.

היקפו תואם קורס סמסטריאלי בשיטות נומריות לשנה השלישית למהנדסים. הוא בנוי על הנושאים והעומק של MIT 18.330 Introduction to Numerical Analysis, MIT 2.086 Numerical Computation for Mechanical Engineers ו-MIT 10.34 (חינם ב-MIT OpenCourseWare), ומשתמש בפרקי חשבון חינמיים של OpenStax, שאליהם אנו מקשרים היכן שהם עוזרים. אף אחד מהמחברים, המוסדות או הגופים האלה אינו מאשר דף זה.

מה שאנחנו מוסיפים: כל יחידה מקושרת לעבודה אמיתית עם מקור ציבורי מצוטט (Global Forecast System ומחשבי העל של NOAA, רישום ה-CO_2 במאונה לואה, מודלי מי התהום של USGS ומודלי האקלים של NASA), כל מספר בדף מחושב מחדש בסקריפט בדיקה לפני הפרסום, ולכל מעבדה יש סימולציה חינמית או גיליון אלקטרוני.

עברו עליו לפי הסדר. בכל יחידה יש מטרות, רעיונות מרכזיים, משוואות, דוגמאות צעד אחר צעד, תרגול עם תשובות מלאות, טעויות נפוצות, כרטיסיות ובוחן. ההתקדמות שלכם נשמרת רק בדפדפן הזה.

איך הקורס הזה עוזר להציל את כדור הארץ

תחזיות מזג אוויר, תחזיות אקלים ותוכניות מי תהום הן כולן שיטות נומריות שרצות על מחשבים: את המשוואות אי אפשר לפתור ביד, ולכן מפרקים אותן לרשתות, לצעדי זמן ולמערכות ליניאריות ענקיות.

הבנה של איך השיטות האלה עובדות, ואיך הן נכשלות, היא מה שמאפשר למהנדסים לשפוט תחזית או מודל. כל יחידה מסתיימת בפרק קצר עם מקורות. ערכים שאינם ממקור מסומנים כערכי דוגמה או ערכי ספר לימוד.

למורים

אפשר ללמד את הקורס הזה, או לתת לתלמיד לעבור אותו לבד. הוא חינם. Saving Planets לא נותנת ציון ולא נקודות זכות.

- העמוד הזה הוא כל הקורס: 10 יחידות ו-6 מעבדות (MATH 340).
- תכננו 15 שבועות, בערך 6 עד 9 שעות בשבוע, כולל שבועות המעבדה.

- עקבו אחרי לוח 15 השבועות. קראו את היחידה, פתרו על הנייר, ואז פתחו את התשובה. בשבוע מעבדה עשו את המעבדה או את הגרסה הביתית.
- בדיקה היא מספר או תוצאת קוד בעמוד שסקריפט מחשב מחדש לפני הפרסום. המספר שרואים והמספר שחושב מחדש חייבים להתאים.
- השתמשו בהדפסת העמוד, או הורידו את מדריך הלימוד ב-PDF. דף הנוסחאות נמצא לקראת הסוף.
- שאלו: איך היחידה הזו עוזרת לאנשים ולכוכב? בכל יחידה יש תיבה ירוקה עם עובדה ומקור.
- העתיקו את תבנית המדריך למורה וכתבו את שם הכיתה, הזמן שיש לכם, והשאלות שתשאלו. פתיחת תבנית המדריך למורה

לפני שמתחילים

ידע מוקדם

- חשבון אינפיניטסימלי I ו-II: נגזרות, אינטגרלים וטורי טיילור.
- משוואות דיפרנציאליות: מד"ר מסדר ראשון ושני.
- אלגברה ליניארית: מטריצות, דטרמיננטות וערכים עצמיים.
- מבוא לתכנות: לולאות, פונקציות ומערכים (גם גיליון אלקטרוני מתאים).

איך ללמוד

- לפני שמחשבים, העריכו את התשובה והחליטו איזה דיוק אתם צריכים.
- השוו תמיד לתשובה מדויקת בבעיית מבחן לפני שסומכים על שיטה בבעיה אמיתית.
- עקבו אחרי השגיאה כשמחצים את הצעד: היחס מגלה את סדר השיטה.
- השתמשו ביחידות SI וכתבו את גודל הצעד עם היחידות שלו.
- היזהרו מחיסור של מספרים כמעט שווים; כתבו מחדש את הנוסחה אם אפשר.
- פתרו כל תרגיל על נייר או בגיליון אלקטרוני לפני שפותחים את התשובה, וחזרו על הבחנים כעבור כמה ימים.

מה צריך

- מחשב או טאבלט לסימולציות PhET החינמיות Least-Squares Regression, Curve Fitting, Calculus Grapher ו-Projectile Motion.
- תוכנת גיליון אלקטרוני (כל תוכנה חינמית מתאימה), או Python אם אתם מכירים.
- קובץ נתוני ה־CO_2 של Mauna Loa מ־NOAA בדפדפן.
- מחשבון.

לוח זמנים מוצע ל־15 שבועות

כ־6 עד 9 שעות בשבוע: קריאה, תרגילים, ובשבועות המעבדה גם המעבדה.

שבוע	יחידה	נושאים	קריאה
1	שגיאות, מספרי נקודה צפה וטורי טיילור	שגיאות, נקודה צפה, טורי טיילור; מעבדה A	MIT 18.330
2	שורשי משוואות: חציה, ניוטון ומיתר	חציה ואיטרציית נקודת שבת	MIT 18.330

שבוע	יחידה	נושאים	קריאה
3	שורשי משוואות: חציה, ניוטון ומיתר	שיטות ניוטון והמיתר; מעבדה B	OpenStax Calculus 1, 4.9
4	מערכות ליניאריות: אלימינציית גאוס, LU ומספר מצב	אלימינציית גאוס, LU ומספר מצב	MIT 2.086
5	פותרים איטרטיביים: יעקובי, גאוס–זיידל והתכנסות	יעקובי, גאוס–זיידל ומערכות דלילות	MIT 18.330
6	אינטרפולציה, ספליינים והתאמה בריבועים פחותים	אינטרפולציה וספליינים	MIT 18.330
7	אינטרפולציה, ספליינים והתאמה בריבועים פחותים	ריבועים פחותים; מעבדה C; תרגול לבוחן אמצע	NOAA GML
8	גזירה נומרית	גזירה נומרית	MIT 18.330
9	אינטגרציה נומרית	אינטגרציה נומרית; מעבדה D	OpenStax Calculus 2, 3.6
10	משוואות דיפרנציאליות רגילות: אוילר, רונגה–קוטה ויציבות	אוילר, הוין ו-RK4	MIT 10.34
11	משוואות דיפרנציאליות רגילות: אוילר, רונגה–קוטה ויציבות	יציבות, קשיחות ומערכות; מעבדה E	MIT 10.34
12	משוואות דיפרנציאליות חלקיות: הפרשים סופיים	הפרשים סופיים למשוואת החום	MIT 2.086
13	משוואות דיפרנציאליות חלקיות: הפרשים סופיים	לפלס, גלים ו-CFL; מעבדה F	NOAA EMC
14	אופטימיזציה, ערכים עצמיים וחישוב בקנה מידה גדול	אופטימיזציה ושיטת החזקה	MIT 18.330
15	אופטימיזציה, ערכים עצמיים וחישוב בקנה מידה גדול	חישוב בקנה מידה גדול, אימות ותיקוף; תרגול לבחינה הסופית	NOAA; NASA GISS

ההתקדמות שלכם

סמנו יחידות ומעבדות כשאתם מסיימים אותן, ועשו את הבחנים. ההתקדמות והציונים נשמרים רק בדפדפן הזה ולעולם לא נשלחים אלינו.

יחידות

שגיאות, מספרי נקודה צפה וטורי טיילור

שגיאה מוחלטת ויחסית, ספרות משמעותיות, מספרי נקודה צפה IEEE 754, אפסילון מכונה, עיגול וביטול, ושגיאת קטיעה מטורי טיילור.

מטרות הלמידה

בסוף היחידה הזו תוכלו:

- לחשב שגיאה מוחלטת ויחסית.
- להסביר את אפסילון המכונה בדיוק יחיד וכפול.
- לזהות ולתקן ביטול קטסטרופלי.
- לחסום את שגיאת הקטיעה באמצעות האיבר הבא בטור טיילור.

מושגי מפתח

- השגיאה המוחלטת היא |מקורב − מדויק|; השגיאה היחסית מחלקת ב-|מדויק|. השגיאה היחסית אומרת כמה ספרות נכונות.
- מחשבים שומרים מספרים בנקודה צפה בינארית. לדיוק כפול יש אפסילון מכונה $2^{-52} \approx 2.22 \times 10^{-16}$ (כ-16 ספרות); לדיוק יחיד יש $2^{-23} \approx 1.19 \times 10^{-7}$ (כ-7 ספרות).
- לרוב השברים העשרוניים, כמו 0.1, אין צורה בינארית מדויקת, ולכן 0.3 − 0.2 + 0.1 יוצא כ-5.55×10^{-17} במקום 0.
- חיסור של מספרים כמעט שווים מאבד ספרות (ביטול קטסטרופלי). כתיבה מחדש של הנוסחה באופן אלגברי פותרת זאת לרוב.
- שגיאת קטיעה נובעת מעצירת תהליך אינסופי, כמו טור טיילור. האיבר הראשון שהושמט מעריך את השגיאה.

משוואות מפתח

$$e_{rel} = \frac{|\tilde{x} - x|}{|x|}$$

e_rel=(| x-x|)/(|x|)

שגיאה יחסית

$$\varepsilon_{mach} = 2^{-52} \approx 2.22 \times 10^{-16}$$

_mach=2^-52≈2.22×10^-16

אפסילון בדיוק כפול

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \dots$$

f(x+h)=f(x)+hf'(x)+(h^2)/(2)f''(x)+

טור טיילור

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

דוגמאות פתורות שלב אחר שלב

דוגמה 1.1 מצאו את השגיאה היחסית של 22/7 כקירוב ל-π.

1. |22/7 − π| = 0.001264.
2. חלקו ב-π.

תשובה: שגיאה יחסית 4.02×10^{-4}, כלומר כ-3 ספרות נכונות.

דוגמה 1.2 חשבו את √(10⁸ + 1) − √(10⁸) בבטחה.

1. חיסור ישיר מבטל את רוב הספרות.
2. Use 1/(√(10⁸ + 1) + √(10⁸)).

תשובה: 5.0×10^{-5} (ליתר דיוק $4.99999999875 \times 10^{-5}$).

דוגמה 1.3 הערכו את השגיאה של e^0.1 ≈ 1 + 0.1.

1. האיבר הבא הוא 0.1²/2 = 0.005.
2. השגיאה האמיתית היא e^0.1 − 1.1.

תשובה: שגיאה 0.00517, קרוב להערכה של 0.005.

תרגילים

פתרו כל אחד קודם על נייר, ואז בדקו.

1. כמה ספרות נכונות נותן דיוק כפול?

   כ-(ε = 2.22 × 10⁻¹⁶) 16.

2. הוסיפו את האיבר 0.1³/6 ל-e^0.1 ≈ 1.1. מה השגיאה החדשה?

   1.71×10^{-4}.

3. למה 0.3 − 0.2 + 0.1 אינו בדיוק 0 במחשב?

ל-0.1 ול-0.2 אין צורה בינארית מדויקת; התוצאה היא כ-5.55×10^{-17}.

4. מהו האפסילון בדיוק יחיד?

$2^{-23} = 1.19 \times 10^{-7}$.

תפיסות שגויות נפוצות

מיתוס: מחשבים מבצעים חשבון מדויק.

בפועל: כל פעולה מעוגלת למספר הנקודה הצפה הקרוב ביותר.

מיתוס: צעדים קטנים יותר תמיד פירושם שגיאה קטנה יותר.

בפועל: שגיאת העיגול גדלה כשהצעדים קטנים.

מיתוס: שגיאה יחסית ומוחלטת הן אותו הדבר.

בפועל: השגיאה היחסית מחלקת בגודל האמיתי.

כרטיסיות

שגיאה מוחלטת

|מקורב − מדויק|.

שגיאה יחסית

שגיאה מוחלטת / |מדויק|.

אפסילון מכונה

$2^{-52} \approx 2.22 \times 10^{-16}$ בדיוק כפול.

ביטול

אובדן ספרות בחיסור מספרים קרובים.

שגיאת קטיעה

נובעת מעצירת תהליך אינסופי.

דיוק יחיד

כ-7 ספרות.

בוחן לבדיקה עצמית

1. האפסילון בדיוק כפול הוא בערך…

2.2×10^{-16}

10^{-7}

10^{-3}

0

$2.2 \times 10^{-16} \cdot 2^{-52}$.

2. חיסור של מספרים כמעט שווים גורם ל...

ביטול

גלישה

כלום

תוצאות מדויקות

ביטול. ספרות אבודות.

3. שגיאת קטיעה נובעת מ...

קטיעת טור

האחסון הבינארי

שגיאות הקלדה

היחידות

קטיעת טור. הגדרה.

4. השגיאה היחסית מחלקת ב...

הערך האמיתי

הצעד

אפסילון

10

הערך האמיתי. הגדרה.

לנסות שוב את הבוחן

איך זה עוזר להציל את כדור הארץ

ה-Environmental Modeling Center של NOAA מתאר הרצת תחזית גלובלית מצומדת ברזולוציה של כ-3 km שהריצה את הדינמיקה האטמוספרית בדיוק של 32 ביט וכל השאר ב-64 ביט, פשרה מכוונת בין מהירות לדיוק.

זו בחירת האפסילון של היחידה הזו בפועל: דיוק יחיד (כ-7 ספרות) מהיר יותר וצורך חצי זיכרון, ולכן ממדלים משתמשים בו היכן שהשגיאה שהוא מוסיף נשארת מתחת לשגיאה שכבר יש במודל.

ב־Saving Planets: תצפית על כדור הארץ · מבוא לתכנות

מקורות: NOAA Environmental Modeling Center: Global Forecast System (GFS) (https://www.emc.ncep.noaa.gov/emc/pages/numerical_forecast_systems/gfs.php)

מקורות לימוד חינמיים

- MIT OpenCourseWare 18.330 Introduction to Numerical Analysis (אביב 2012) (https://ocw.mit.edu/courses/18-330-introductio n-to-numerical-analysis-spring-2012/): הרצאות MIT חינמיות.
- MIT OpenCourseWare 2.086 Numerical Computation for Mechanical Engineers (סתיו 2014) (https://ocw.mit.edu/courses/2-086-numerical-computation-for-mechanical-engineers-fall-2014/): קורס MIT חינמי.

סיימתי את היחידה הזו

שורשי משוואות: חציה, ניוטון ומיתר

תיחום בשיטת החציה, שיטת ניוטון, שיטת המיתר, איטרציית נקודת שבת, סדר התכנסות וכללי עצירה.

מטרות הלמידה

בסוף היחידה הזו תוכלו:

- למצוא שורש בשיטת החציה ולחזות את מספר הצעדים.
- להפעיל את שיטת ניוטון ולזהות התכנסות ריבועית.
- להשתמש בשיטת המיתר כשהנגזרת אינה ידועה.
- לבחור כלל עצירה.

מושגי מפתח

- שיטת החציה מחצה קטע [a, b] שבו f מחליפה סימן. היא תמיד מתכנסת, אבל רק ספרה בינארית אחת בכל צעד: n ≥ log₂((b − a)/tol).
- שיטת ניוטון עוקבת אחרי המשיק: x_{n+1} = x_n − f(x_n)/f′(x_n). ליד שורש פשוט היא מתכנסת ריבועית, ומכפילה את מספר הספרות הנכונות בכל צעד.
- שיטת המיתר מחליפה את f′ בשיפוע דרך שתי הנקודות האחרונות. היא אינה דורשת נגזרת ומתכנסת בסדר של כ-1.618.
- ניוטון עלולה להיכשל אם f′ קרובה לאפס או שנקודת ההתחלה רחוקה; גיבוי בתיחום הופך אותה לבטוחה.
- עצרו כאשר |x_n − x_{n+1}| וגם |f(x_n)| נמוכים מהסבולת, ותמיד הגבילו את מספר האיטרציות.

משוואות מפתח

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

```
x_n+1=x_n-(f(x_n))/(f'(x_n))
```

שיטת ניוטון

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

```
x_n+1=x_n-f(x_n)_n-x_n-1f(x_n)-f(x_n-1)
```

שיטת המיתר

$$n \geq \log_2 \frac{b-a}{tol}$$

צעדי חציה

$$|e_{n+1}| \approx C|e_n|^2$$

דוגמאות פתורות שלב אחר שלב

דוגמה 2.1 השתמשו בשיטת החציה על $f(x) = x^3 - x - 2$ בקטע $[1, 2]$. תנו את שלוש נקודות האמצע הראשונות ואת השורש.

1. $f(1) = -2$, $f(2) = 4$.
2. נקודות אמצע 1.5, 1.75, 1.625.

תשובה: שורש $x = 1.5214$.

דוגמה 2.2 כמה צעדי חציה מקטינים קטע ברוחב 1 אל מתחת ל-10^{-6}?

1. $\log_2(10^6) = 19.93$.

תשובה: 20 צעדים.

דוגמה 2.3 השתמשו בשיטת ניוטון על $x^2 - 2$ החל מ-$x_0 = 1$.

1. $x_1 = 1.5$, $x_2 = 1.41667$.
2. $x_3 = 1.414216$.

תשובה: $x_3 = 1.414216$, כבר 6 ספרות נכונות.

תרגילים

פתרו כל אחד קודם על נייר, ואז בדקו.

1. הפעילו את ניוטון על $x^3 - x - 2$ החל מ-$x_0 = 1.5$. מהו הצעד הראשון?

   1.52174.

2. הפעילו את שיטת המיתר על $x^2 - 2$ החל מ-1 ו-2. מהן שלוש האיטרציות הראשונות?

   1.3333, 1.4000, 1.4146.

3. מהו סדר ההתכנסות של שיטת המיתר?

   כ-1.618.

4. למה להגביל את מספר האיטרציות?

   שיטה עלולה להתבדר או להיכנס למחזור.

תפיסות שגויות נפוצות

מיתוס: ניוטון תמיד מתכנסת.

בפועל: היא עלולה להתבדר מנקודת התחלה גרועה.

מיתוס: שיטת החציה מהירה.

בפועל: היא מרוויחה ביט אחד בכל צעד.

מיתוס: f(x) קטן פירושו ש-x קרוב לשורש.

בפועל: לא אם f שטוחה מאוד.

כרטיסיות

שיטת החציה

חציית קטע שבו יש החלפת סימן.

ניוטון

x − f/f′.

מיתר

ניוטון עם שיפוע משתי נקודות.

התכנסות ריבועית

הספרות מוכפלות בכל צעד.

קטע תיחום

קטע עם החלפת סימן.

כלל עצירה

הצעד והשארית מתחת לסבולת.

בוחן לבדיקה עצמית

1. ניוטון מתכנסת...

ריבועית

באופן לינארי

אף פעם

תמיד בסדר שלישי

ריבועית. ליד שורש פשוט.

2. שיטת החציה דורשת...

החלפת סימן

נגזרת

מטריצה

כלום

החלפת סימן. תיחום.

3. שיטת המיתר חוסכת את...

הנגזרת

f

האיטרציה

נקודות ההתחלה

הנגזרת. שיפוע משתי נקודות.

4. מספר צעדי חציה עד 10^{-6} מרוחב 1...

20

6

100

2

$20. \log_2 10^6$.

לנסות שוב את הבוחן

איך זה עוזר להציל את כדור הארץ

USGS מציין ש-MODFLOW נחשב לתקן בינלאומי להדמיית מי תהום. אחת מגרסאותיו, MODFLOW-NWT, משתמשת בניסוח ניוטון-רפסון כדי לשפר את פתרון בעיות זרימת מי תהום לא כלואים.

אקוויפרים לא כלואים הופכים את המשוואות ללא ליניאריות, כי העובי הרווי תלוי במפלס המים שפותרים עבורו. שיטת ניוטון מהיחידה הזו היא מה שגורם להרצות האלה להתכנס באמינות.

ב־Saving Planets: אוקיינוסים · חשבון אינפיניטסימלי 1

מקורות: USGS: MODFLOW and Related Programs (https://www.usgs.gov/mission-areas/water-resources/science/modflow-and-related-programs)

מקורות לימוד חינמיים

- OpenStax Calculus Volume 1, 4.9 שיטת ניוטון (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/4-9-newtons-method): פרק מספר לימוד חינמי.
- MIT OpenCourseWare 18.330 Introduction to Numerical Analysis (אביב 2012) (https://ocw.mit.edu/courses/18-330-introduction-to-numerical-analysis-spring-2012/): הרצאות MIT חינמיות.

צפו בהרצאה

Session 7: Solutions of Nonlinear Equations; Newton-Raphson Method (https://ocw.mit.edu/courses/10-34-numerical-methods-applied-to-chemical-engineering-fall-2015/resources/session-7-solutions-of-nonlinear-equations-newton-raphson-method/) (באנגלית)

MIT 10.34 Numerical Methods Applied to Chemical Engineering (Fall 2015), MIT OpenCourseWare. רישיון: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · תנאי שימוש (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). הקישור מיועד ללימוד חינמי בלבד; Saving Planets אינו קשור לאוניברסיטה זו ואינו נתמך על ידה.

סיימתי את היחידה הזו

מערכות ליניאריות: אלימינציית גאוס, LU ומספר מצב

אלימינציית גאוס עם עידון חלקי, פירוק LU, ספירת פעולות, מספר המצב ואיך הוא מגביל את הדיוק.

מטרות הלמידה

בסוף היחידה הזו תוכלו:

- לפתור מערכת 3 × 3 באלימינציה.
- להסביר את פירוק LU ושימוש חוזר בו.
- להעריך את עלות האלימינציה.
- להשתמש במספר המצב כדי לשפוט את הדיוק.

מושגי מפתח

- אלימינציית גאוס מצמצמת את Ax = b למערכת משולשית עליונה, ואז מבצעת הצבה לאחור. עידון חלקי מחליף שורות כדי להשתמש בציר הגדול ביותר, וכך שולט בשגיאת העיגול.
- פירוק LU שומר את האלימינציה בצורה A = LU. אחרי הפירוק, כל אגף ימין חדש עולה רק שני פתרונות משולשיים.
- אלימינציה עולה כ-2n³/3 פעולות נקודה צפה: הכפלת n מכפילה את העבודה פי 8.
- מספר המצב κ(A) = ‖A‖‖A⁻¹‖ מודד רגישות. אפשר לאבד כ-$\log_{10}\kappa$ ספרות של דיוק.
- לעולם אל תחשבו את A⁻¹ כדי לפתור מערכת; פרקו ופתרו במקום זאת.

משוואות מפתח

$$A = LU$$

```
A=LU
```

פירוק LU

$$\text{cost} \approx \tfrac{2}{3}n^3$$

פעולות אלימינציה

$$\kappa(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$$

```
(A)=\|A\|\|A^-1\|
```

מספר מצב

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le \kappa \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

חסם שגיאה

דוגמאות פתורות שלב אחר שלב

דוגמה 3.1 פתרו $2x + y - z = 8,\ -3x - y + 2z = -11,\ -2x + y + 2z = -3$.

1. סלקו את x משורות 2 ו-3, ואז את y משורה 3.
2. בצעו הצבה לאחור.

תשובה: $x = 2,\ y = 3,\ z = -1$.

דוגמה 3.2 העריכו את עלות האלימינציה עבור $n = 1000$.

1. $2 \times 1000^3/3$.

תשובה: כ-6.67×10^8 פעולות.

דוגמה 3.3 מצאו את מספר המצב בנורמה 2 של $[[1, 1], [1, 1.0001]]$.

1. השורות כמעט מקבילות.
2. $\kappa = \sigma_{max}/\sigma_{min}$.

תשובה: $\kappa \approx 40{,}002$, ולכן עלולות לאבד כ-4–5 ספרות.

תרגילים

פתרו כל אחד קודם על נייר, ואז בדקו.

1. כמה יותר עבודה יש ב-$n = 2000$ לעומת $n = 1000$?

   פי 8.

2. פעולות אלימינציה עבור $n = 3$?

   $2 \times 27/3 = 18$.

3. למה לבצע עידון?

   כדי להימנע מחלוקה במספרים קטנים ומהגברת העיגול.

4. כמה ספרות אובדות עם $\kappa = 10^8$ בדיוק כפול?

   כ-8 מתוך 16.

תפיסות שגויות נפוצות

מיתוס: להשתמש ב-A^{-1} לפתרון מערכות.

בפועל: פרקו ופתרו; זה זול ומדויק יותר.

מיתוס: דטרמיננטה קטנה פירושה מספר מצב גרוע.

בפועל: השתמשו במספר המצב.

מיתוס: העידון הוא אופציונלי.

בפועל: בלעדיו האלימינציה עלולה להיכשל או לאבד דיוק.

כרטיסיות

אלימינציית גאוס

צמצום לצורה משולשית.

LU

$A = LU$.

עידון

החלפת שורות לשם יציבות.

מספר מצב

$\|A\|\|A^{-1}\|$.

הצבה לאחור

פתרון מערכות משולשיות.

עלות

$\approx 2n^3/3$.

בוחן לבדיקה עצמית

1. אלימינציה עולה בערך…

$2n^3/3$

n

n^2

2^n

$2n^3/3$. לולאה משולשת.

2. LU עוזר כאשר…

יש אגפי ימין רבים

n = 1

אין פתרון

אף פעם

יש אגפי ימין רבים. שימוש חוזר בגורמים.

3. א גדול פירושו…

רגיש

קל

תמיד סינגולרי

סימטרית

רגיש. מגביר שגיאות.

4. עידון חלקי בוחר…

את הציר הגדול ביותר

את הקטן ביותר

אפס

באקראי

את הציר הגדול ביותר. יציבות.

לנסות שוב את הבוחן

איך זה עוזר להציל את כדור הארץ

USGS מציין שתכונה מרכזית של MODFLOW 6 היא היכולת לפתור כמה מודלים נומריים מצומדים היטב במערכת משוואות אחת.

המפה שלו של עומק מפלס מי התהום ברחבי ארצות הברית היבשתית הגיעה מהדמיה מקבילית של 256 תחומי מודל מצומדים היטב על 256 ליבות של מחשב-על של USGS. כל תחום הוא מערכת ליניארית דלילה גדולה כמו אלה שביחידה הזו.

ב־Saving Planets: אלגברה לינארית · אוקיינוסים

מקורות: USGS: MODFLOW and Related Programs (https://www.usgs.gov/mission-areas/water-resources/science/modflow-and-related-programs)

מקורות לימוד חינמיים

- MIT OpenCourseWare 2.086 Numerical Computation for Mechanical Engineers (סתיו 2014) (https://ocw.mit.edu/courses/2-086-numerical-computation-for-mechanical-engineers-fall-2014/): קורס MIT חינמי.
- MIT OpenCourseWare 10.34 Numerical Methods Applied to Chemical Engineering (סתיו 2015) (https://ocw.mit.edu/courses/10-34-numerical-methods-applied-to-chemical-engineering-fall-2015/): קורס MIT חינמי.

צפו בהרצאה

Lecture 3: Solving a Linear System (https://ocw.mit.edu/courses/18-085-computational-science-and-engineering-i-fall-2008/resources/lecture-3-solving-a-linear-system/) (באנגלית)

MIT 18.085 Computational Science and Engineering I (Fall 2008), MIT OpenCourseWare. רישיון: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · תנאי שימוש (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use). הקישור מיועד ללימוד חינמי בלבד; Saving Planets אינו קשור לאוניברסיטה זו ואינו נתמך על ידה.

סיימתי את היחידה הזו

פותרים איטרטיביים: יעקובי, גאוס–זיידל והתכנסות

איטרציות יעקובי וגאוס–זיידל, דומיננטיות אלכסונית, מטריצת האיטרציה והרדיוס הספקטרלי, מערכות דלילות ולמה שיטות איטרטיביות מתאימות לקנה מידה גדול.

מטרות הלמידה

בסוף היחידה הזו תוכלו:

- לבצע צעדי יעקובי וגאוס–זיידל.
- לבדוק דומיננטיות אלכסונית.
- להשתמש ברדיוס הספקטרלי לחיזוי מהירות ההתכנסות.
- להסביר למה מערכות דלילות גדולות משתמשות באיטרציה.

מושגי מפתח

- יעקובי מעדכן כל נעלם מהאיטרציה הקודמת; גאוס–זיידל משתמש בערכים החדשים מיד כשהם מחושבים.
- אם A בעלת דומיננטיות אלכסונית חזקה, שתי השיטות מתכנסות מכל נקודת התחלה.
- השגיאה קטנה בכל צעד בערך פי הרדיוס הספקטרלי ρ של מטריצת האיטרציה. לגאוס–זיידל יש לעיתים קרובות ρ_GS = ρ_J².
- רשתות גדולות יוצרות מטריצות דלילות עם מעט איברים שונים מאפס בכל שורה. שיטות איטרטיביות שומרות רק אותם, בעוד שאלימינציה יוצרת מילוי.
- עצרו כשהשארית ‖b − Ax‖ קטנה ביחס ל-‖b‖.

משוואות מפתח

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j^{(k)}\right)$$

```
x_i^(k+1)=1a_ii(b_i-_j ia_ijx_j^(k))
```

יעקובי

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

דומיננטיות אלכסונית

$$\|e_k\| \approx \rho^k \|e_0\|$$

קצב התכנסות

$$r = b - Ax$$

```
r=b-Ax
```

דוגמאות פתורות שלב אחר שלב

דוגמה 4.1 בצעו שני צעדי יעקובי על $4x + y = 1,\ x + 3y = 2$ החל מ-$(0, 0)$.

1. צעד 1: $x = 1/4 = 0.25,\ y = 2/3 = 0.6667$.
2. צעד 2: $x = (1 - 0.6667)/4,\ y = (2 - 0.25)/3$.

תשובה: $x = 0.0833,\ y = 0.5833$ (מדויק $0.0909,\ 0.6364$).

דוגמה 4.2 בצעו שני צעדי גאוס–זיידל על אותה מערכת.

1. צעד 1: $x = 0.25,\ y = (2 - 0.25)/3 = 0.5833$.
2. צעד 2: $x = 0.1042,\ y = 0.6319$.

תשובה: $x = 0.1042,\ y = 0.6319$, קרוב יותר מיעקובי.

דוגמה 4.3 מצאו את הרדיוסים הספקטרליים של יעקובי וגאוס–זיידל עבור המערכת הזו.

1. $\rho_J = \sqrt{(1/12)}$.
2. $\rho_{GS} = \rho_J^2 = 1/12$.

תשובה: $\rho_J = 0.289;\ \rho_{GS} = 0.0833$.

תרגילים

פתרו כל אחד קודם על נייר, ואז בדקו.

1. האם $[[4, 1], [1, 3]]$ בעלת דומיננטיות אלכסונית?

   כן: $4 > 1$ ו-$3 > 1$.

2. כמה צעדי גאוס–זיידל ($\rho = 0.0833$) כדי להקטין את השגיאה פי 10^6?

   כ-6 ($0.0833^6 = 3.35 \times 10^{-7}$).

3. האיטרציה השלישית של גאוס–זיידל?

   $x = 0.0920,\ y = 0.6360$.

4. למה לא לבצע אלימינציה על רשת עם מיליון נעלמים?

המילוי צורך יותר מדי זיכרון וזמן.

תפיסות שגויות נפוצות

מיתוס: איטרציה תמיד מתכנסת.

בפועל: נדרש $\rho < 1$.

מיתוס: יעקובי וגאוס–זיידל זהות.

בפועל: גאוס–זיידל משתמשת בערכים החדשים מיד.

מיתוס: שינוי קטן בין צעדים פירושו התכנסות.

בפועל: בדקו גם את השארית.

כרטיסיות

יעקובי

עדכון הכול מהערכים הישנים.

גאוס–זיידל

שימוש מיידי בערכים החדשים.

רדיוס ספקטרלי

ה-|ערך העצמי| הגדול ביותר.

דומיננטיות אלכסונית

$|a_{ii}| >$ סכום השורה.

דליל

בעיקר אפסים.

שארית

$b - Ax$.

בוחן לבדיקה עצמית

1. מתכנס אם…

$\rho < 1$

$\rho > 1$

n זוגי

A סינגולרית

$\rho < 1$. השגיאה קטנה.

2. גאוס–זיידל משתמשת ב...

הערכים העדכניים ביותר

רק בערכים הישנים

אף ערך

הופכיות

הערכים העדכניים ביותר. הגדרה.

3. דליל פירושו...

בעיקר אפסים

צפוף

n קטן

סינגולרית

בעיקר אפסים. מעט איברים שונים מאפס.

4. מספיק להתכנסות...

דומיננטיות אלכסונית

סימטריה בלבד

n = 2

כלום

דומיננטיות אלכסונית. משפט.

לנסות שוב את הבוחן

איך זה עוזר להציל את כדור הארץ

ה-GFS של NOAA מחלק את האטמוספרה ל-127 שכבות אנכיות במרווח אופקי של כ-13 km. כל נקודת רשת מצומדת רק לשכנותיה, ולכן המערכות שמודלים כאלה בונים ענקיות ודלילות.

עם שטח פני כדור הארץ מספר הלימוד של $5.1 \times 10^8\ \text{km}^2$, לרשת של 13 km יש כ-3.0 מיליון עמודות ו-383 מיליון תאים. מערכות בגודל כזה מטופלות בשיטות איטרטיביות ובשיטות דלילות אחרות, לא באלימינציה פשוטה.

ב־Saving Planets: תצפית על כדור הארץ · אלגברה לינארית

מקורות: NOAA Environmental Modeling Center: Global Forecast System (GFS) (https://www.emc.ncep.noaa.gov/emc/pages/numerical_forecast_systems/gfs.php)

מקורות לימוד חינמיים

- MIT OpenCourseWare 18.330 Introduction to Numerical Analysis (אביב 2012) (https://ocw.mit.edu/courses/18-330-introductio/n-to-numerical-analysis-spring-2012/): הרצאות MIT חינמיות.
- MIT OpenCourseWare 2.086 Numerical Computation for Mechanical Engineers (סתיו 2014) (https://ocw.mit.edu/courses/2-086-numerical-computation-for-mechanical-engineers-fall-2014/): קורס MIT חינמי.

סיימתי את היחידה הזו

אינטרפולציה, ספליינים והתאמה בריבועים פחותים

אינטרפולציה ליניארית ופולינומית, צורת לגרנז', הסכנה בפולינומים ממעלה גבוהה, ספליינים קוביים, והתאמות קו ופולינום בריבועים פחותים עם שאריות.

מטרות הלמידה

בסוף היחידה הזו תוכלו:

- לבצע אינטרפולציה ליניארית בין נקודות נתונים.
- לבנות פולינום לגרנז'.
- להתאים קו בריבועים פחותים ולפרש את שיפועו.
- לבחור בין אינטרפולציה להתאמה.

מושגי מפתח

- אינטרפולציה עוברת בדיוק דרך הנתונים; התאמה עוברת קרוב לנתונים רועשים וממזערת את סכום ריבועי השאריות.
- פולינום ממעלה n דרך n + 1 נקודות הוא יחיד. מעלות גבוהות בנקודות במרווחים שווים עלולות לתנודות פרועות ליד הקצוות (תופעת רונגה).
- ספליינים קוביים מחברים חלקים קוביים עם שיפוע ועקמומיות תואמים, ונותנים עקומות חלקות בלי תנודות פרועות.
- קו הריבועים הפחותים פותר את המשוואות הנורמליות $A^{T}Ac = A^{T}y$. השיפוע הוא קצב, עם יחידות.
- שרטטו את השאריות: דפוס בהן פירושו שחסר משהו במודל, כמו עקמומיות.

משוואות מפתח

$$y = y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}(y_1 - y_0)$$

```
y=y_0+(x-x_0)/(x_1-x_0)(y_1-y_0)
```

אינטרפולציה לינארית

$$p(x) = \sum_{i} y_i \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

```
p(x)=_i y_i_j i(x-x_j)/(x_i-x_j)
```

צורת לגרנז'

$$A^T A\, c = A^T y$$

```
A^TA c=A^Ty
```

משוואות נורמליות

$$\min \sum_{i} r_i^2$$

דוגמאות פתורות שלב אחר שלב

דוגמה 5.1 הממוצעים השנתיים של מאונה לואה של NOAA הם 390.10 ppm (2010) ו-414.21 ppm (2020). בצעו אינטרפולציה ל-2015.

1. $y = 390.10 + 0.5 \times 24.11$.

תשובה: 402.16 ppm; ערך NOAA ל-2015 הוא 401.01, כך שהרישום מתעקל כלפי מעלה.

דוגמה 5.2 התאימו קו בריבועים פחותים לערכי העשורים 1960–2020 (316.91, 325.68, 338.76, 354.45, 369.71, 390.10, 414.21 ppm).

1. פתרו את המשוואות הנורמליות לשיפוע ולחיתוך.

תשובה: שיפוע 1.613 ppm לשנה; הקו חוזה 415.0 ppm ל-2025.

דוגמה 5.3 התאימו במקום זאת פרבולה ב-t = שנה − 1960.

1. ריבועים פחותים עם העמודות $1, t, t^2$.

תשובה: $c = 316.84 + 0.810t + 0.01338t^2$; היא חוזה 426.0 ppm ל-2025, קרוב ל-427.35 של NOAA.

תרגילים

פתרו כל אחד קודם על נייר, ואז בדקו.

1. הגידול הממוצע 2010–2020 לפי ערכי העשורים?

   2.41 ppm לשנה.

2. הגידול הממוצע 2000–2010?

   2.04 ppm לשנה.

3. למה הקו הישר מעריך בחסר את 2025?

   הגידול מואץ; השאריות מתעקלות.

4. אינטרפולציה או התאמה לנתוני מעבדה רועשים?

.Fit

תפיסות שגויות נפוצות

מיתוס: פולינומים ממעלה גבוהה יותר תמיד מתאימים טוב יותר.

בפועל: הם עלולים לתנודות בין הנקודות.

מיתוס: R^2 טוב פירושו מודל טוב.

בפועל: בדקו את דפוס השאריות.

מיתוס: אקסטרפולציה בטוחה כמו אינטרפולציה.

בפועל: היא מסוכנת הרבה יותר.

כרטיסיות

אינטרפולציה

בדיוק דרך הנתונים.

ריבועים פחותים

מזעור ריבועי השאריות.

ספליין

קובית למקוטעין וחלקה.

רונגה

תנודות של התאמות ממעלה גבוהה.

שארית

נתונים פחות מודל.

משוואות נורמליות

$A^TAc = A^Ty$.

בוחן לבדיקה עצמית

1. ריבועים פחותים ממזערים את...

סכום ריבועי השאריות

השגיאה המרבית

השיפוע

המעלה

סכום ריבועי השאריות. הגדרה.

2. תופעת רונגה היא...

תנודה בקצוות

ביטול

התבדרות

עידון

תנודה בקצוות. פולינומים ממעלה גבוהה.

3. ספליינים הם...

פולינומים קוביים למקוטעין

קווים בודדים

באקראי

טור טיילור

פולינומים קוביים למקוטעין. הגדרה.

4. המשוואות הנורמליות הן...

$A^TAc = A^Ty$

$Ax = 0$

LU

$f = 0$

$A^TAc = A^Ty$. ריבועים פחותים.

לנסות שוב את הבוחן

איך זה עוזר להציל את כדור הארץ

NOAA מדווחת שרישום מאונה לואה, שהחל C. David Keeling מ-Scripps במרץ 1958, הוא הרישום הארוך ביותר של מדידות CO_2 ישירות באטמוספרה. הממוצע החודשי היה 426.07 ppm בספטמבר 2026, לעומת 424.37 ppm בספטמבר 2025.

הממוצעים השנתיים של NOAA עלו מ-316.91 ppm ב-1960 ל-427.35 ppm ב-2025. העקומה העולה מופיעה בשאריות של היחידה הזו: קו ישר מחמיץ אותה, ופרבולה מתאימה לה.

ב־Saving Planets: פתרונות · תצפית על כדור הארץ

מקורות: NOAA Global Monitoring Laboratory: Trends in atmospheric CO_2 (Mauna Loa) (https://gml.noaa.gov/ccgg/trends/) · GML: Mauna Loa annual mean CO_2 data (https://gml.noaa.gov/webdata/ccgg/trends/co2/co2_annmean_mlo.txt)

מקורות לימוד חינמיים

- PhET: Least-Squares Regression (https://phet.colorado.edu/en/simulations/least-squares-regression): התאמת קווים באופן אינטראקטיבי.
- PhET: Curve Fitting (https://phet.colorado.edu/en/simulations/curve-fitting): התאמות פולינומיות אינטראקטיביות.

צפו בהרצאה

Lecture 11: Least Squares (part 2) (https://ocw.mit.edu/courses/18-085-computational-science-and-engineering-i-fall-2008/resources/lecture-11-least-squares-part-2/) (באנגלית)

MIT 18.085 Computational Science and Engineering I (Fall 2008), MIT OpenCourseWare. רישיון: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · תנאי שימוש (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use). הקישור מיועד ללימוד חינמי בלבד; Saving Planets אינו קשור לאוניברסיטה זו ואינו נתמך על ידה.

☐ **סיימתי את היחידה הזו**

גזירה נומרית

הפרשים קדמיים, אחוריים ומרכזיים, שגיאת הקטיעה שלהם, האיזון מול שגיאת העיגול וגודל הצעד הטוב ביותר, נגזרות שניות ואקסטרפולציית ריצ'רדסון.

מטרות הלמידה

בסוף היחידה הזו תוכלו:

- להפעיל הפרשים קדמיים ומרכזיים.
- לציין את הסדר של כל נוסחה.
- לבחור גודל צעד שמאזן בין קטיעה לעיגול.
- להעריך נגזרת שנייה.

מושגי מפתח

- להפרש הקדמי (f(x + h) − f(x))/h יש שגיאה פרופורציונלית ל-h (סדר ראשון).
- להפרש המרכזי (f(x + h) − f(x − h))/(2h) יש שגיאה פרופורציונלית ל-h² (סדר שני), ולכן חציית h מקטינה את השגיאה פי 4.
- שגיאת העיגול גדלה כמו ε/h כש-h קטן. להפרשים קדמיים ה-h הטוב ביותר הוא כ-1.49 × 10⁻⁸ ≈ √ε; להפרשים מרכזיים כ-(1/3)^ε ≈ 6.06 × 10⁻⁶.
- הנגזרת השנייה היא (f(x + h) − 2f(x) + f(x − h))/h², גם היא מסדר שני.
- אקסטרפולציית ריצ'רדסון משלבת שני גדלי צעד כדי לבטל את איבר השגיאה המוביל.

משוואות מפתח

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

הפרש קדמי

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

הפרש מרכזי

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

הפרש שני

$$h_{opt} \approx \sqrt{\varepsilon}$$

הצעד הקדמי הטוב ביותר

דוגמאות פתורות שלב אחר שלב

דוגמה 6.1 העריכו את הנגזרת של sin x ב-x = 1 בהפרש קדמי, h = 0.1.

1. (sin 1.1 − sin 1)/0.1.

תשובה: 0.4974; מדויק cos 1 = 0.5403; שגיאה −0.0429.

דוגמה 6.2 חזרו על כך בהפרש מרכזי.

1. (sin 1.1 − sin 0.9)/0.2.

תשובה: 0.5394; שגיאה −0.00090, קטנה בערך פי 47.7.

דוגמה 6.3 מצאו את צעד ההפרש הקדמי הטוב ביותר בדיוק כפול.

1. $h \approx \sqrt{(2.22 \times 10^{-16})}$.

תשובה: $h \approx 1.49 \times 10^{-8}$.

תרגילים

פתרו כל אחד קודם על נייר, ואז בדקו.

1. חצו את h בהפרש מרכזי. מה השגיאה?

   בערך ¼ מגודלה.

2. חצו את h בהפרש קדמי. מה השגיאה?

   בערך ½ מגודלה.

3. צעד ההפרש המרכזי הטוב ביותר בדיוק כפול?

   בערך 6.06×10^{-6} = ε^(1/3).

4. למה לא להשתמש ב-$h = 10^{-15}$?

   שגיאת העיגול ε/h שולטת.

תפיסות שגויות נפוצות

מיתוס: h קטן יותר תמיד עדיף.

בפועל: מתחת לאופטימום, העיגול גובר.

מיתוס: הפרשים קדמיים ומרכזיים מדויקים באותה מידה.

בפועל: המרכזי הוא מסדר שני.

מיתוס: גזירה של נתונים רועשים קלה.

בפועל: הפרשים מגבירים רעש; החליקו או התאימו קודם.

כרטיסיות

הפרש קדמי

סדר ראשון.

הפרש מרכזי

סדר שני.

הפרש שני

$f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)$ חלקי h^2.

h אופטימלי

$\approx \sqrt{\varepsilon}$ להפרש קדמי.

ריצ'רדסון

ביטול השגיאה המובילה.

סדר

המעריך של h בשגיאה.

בוחן לבדיקה עצמית

1. שגיאת ההפרש המרכזי ∝…

h^2

h

1/h

תמיד h^3

h^2. סימטרי.

2. ההפרש הקדמי הוא מסדר …

קודם

שני

אפס

רביעי

קודם. שגיאה ∝ h.

3. ה-h הקדמי הטוב ביותר הוא בערך…

ε√

ε

1

0.1

ε√. איזון.

4. הרעש בנתונים … על ידי לקיחת הפרשים.

מוגבר

מוסר

מוחצה

ללא שינוי

מוגבר. מחלק ב-h.

לנסות שוב את הבוחן

איך זה עוזר להציל את כדור הארץ

NOAA מציינת שה-GFS מפיק פלט שעתי ל-120 השעות הראשונות, ואז פלט כל 3 שעות לימים 5 עד 16. חזאים ומודלים במורד הזרם לוקחים הפרשים של הפלטים האלה כדי לקבל קצבים כמו מגמת לחץ וקצב גשם.

היחידה הזו מראה למה צעד הזמן של הפלט השמור חשוב: קצב שמחושב מערכים כל 3 שעות בהפרש מרכזי מדויק הרבה יותר מהפרש חד-צדדי על אותו מרווח.

ב־GOES-19 :Saving Planets · חשבון אינפיניטסימלי 1

מקורות: NOAA Environmental Modeling Center: Global Forecast System (GFS) (https://www.emc.ncep.noaa.gov/emc/pages/numerical_forecast_systems/gfs.php)

מקורות לימוד חינמיים

- MIT OpenCourseWare 18.330 Introduction to Numerical Analysis (אביב 2012) (https://ocw.mit.edu/courses/18-330-introductio/n-to-numerical-analysis-spring-2012/): הרצאות MIT חינמיות.
- PhET: Calculus Grapher (https://phet.colorado.edu/en/simulations/calculus-grapher): נגזרות באופן אינטראקטיבי.

סיימתי את היחידה הזו

אינטגרציה נומרית

כלל הטרפז וכלל סימפסון, כללים מורכבים וסדרי שגיאה, אקסטרפולציית רומברג, קוודרטורת גאוס, ואינטגרציה של נתונים מדודים.

מטרות הלמידה

בסוף היחידה הזו תוכלו:

- להפעיל את כללי הטרפז וסימפסון המורכבים.
- לחזות איך השגיאה יורדת עם n.
- להשתמש ברומברג לשיפור תוצאה.
- להפעיל קוודרטורת גאוס בת 2 נקודות.

מושגי מפתח

- כלל הטרפז מחבר נקודות בקווים ישרים. השגיאה שלו יורדת כמו h²: הכפלת n מקטינה אותה פי 4.
- כלל סימפסון מתאים פרבולות דרך זוגות של קטעים (n זוגי). השגיאה שלו יורדת כמו h⁴: הכפלת n מקטינה אותה פי 16.
- אקסטרפולציית רומברג: $T_{2n} + (T_{2n} - T_n)/3$ מבטלת את שגיאת ה-h² של כלל הטרפז (היא שווה לכלל סימפסון).
- קוודרטורת גאוס בוחרת את הנקודות הטובות ביותר: 2 נקודות ב-$\pm 1/\sqrt{3}$ מבצעות אינטגרציה מדויקת לפולינומים קוביים.
- לנתונים מדודים במרווח קבוע, הפעילו את כלל הטרפז או סימפסון ישירות על הדגימות.

משוואות מפתח

$$T_n = h\left[\tfrac{1}{2}f_0 + f_1 + \cdots + f_{n-1} + \tfrac{1}{2}f_n\right]$$

```
T_n=h[12f_0+f_1++f_n-1+12f_n]
```

כלל הטרפז

$$S_n = \tfrac{h}{3}\left[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + \cdots + 4f_{n-1} + f_n\right]$$

```
S_n= h3[f_0+4f_1+2f_2++4f_n-1+f_n]
```

כלל סימפסון

$$\int_{-1}^{1} f \approx f(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}) + f(\tfrac{1}{\sqrt{3}})$$

גאוס 2 נקודות

$$E_T \propto h^2,\ E_S \propto h^4$$

סדרי שגיאה

דוגמאות פתורות שלב אחר שלב

דוגמה 7.1 העריכו את $\int_0^1 e^x\,dx$ בכלל הטרפז, $n = 4$.

1. $h = 0.25$; סכמו את הערכים המשוקללים.

תשובה: $T_4 = 1.72722$; מדויק $e - 1 = 1.71828$; שגיאה 0.00894.

דוגמה 7.2 חזרו על כך בכלל סימפסון, $n = 4$.

1. משקלים $1, 4, 2, 4, 1$ כפול $h/3$.

תשובה: $S_4 = 1.718319$; שגיאה 3.70×10^{-5}.

דוגמה 7.3 השתמשו בקוודרטורת גאוס בת 2 נקודות על אותו אינטגרל.

1. מפו את $[0, 1]$ ל-$[-1, 1]$: נקודות $\pm 0.5/\sqrt{3}$, משקל $½$ לכל אחת.

תשובה: 1.717896; שגיאה -3.85×10^{-4} עם 2 ערכי פונקציה בלבד.

תרגילים

פתרו כל אחד קודם על נייר, ואז בדקו.

1. שגיאת הטרפז עם $n = 8$?

   0.00224, בערך ¼ מהשגיאה ב-$n = 4$.

2. רומברג מ-T_4 ו-T_8?

   1.718284.

3. כלל סימפסון עם $n = 2$?

   1.718861.

4. למה n בסימפסון חייב להיות זוגי?

   הוא משתמש בזוגות של קטעים.

תפיסות שגויות נפוצות

מיתוס: סימפסון עובד לכל n.

בפועל: n חייב להיות זוגי.

מיתוס: יותר נקודות תמיד עוזרות באותה מידה.

בפועל: כללים מסדר גבוה יותר משתפרים מהר הרבה יותר.

מיתוס: נקודות גאוס יכולות להיות בכל מקום.

בפועל: הן שורשים קבועים של פולינומי לז'נדר.

כרטיסיות

טרפז

שגיאה $\propto h^2$.

סימפסון

שגיאה $\propto h^4$.

רומברג

אקסטרפולציה של תוצאות הטרפז.

קוודרטורת גאוס

נקודות ומשקלים אופטימליים.

כלל מורכב

הפעלה על תתי-קטעים רבים.

n זוגי

נחוץ לסימפסון.

בוחן לבדיקה עצמית

1. שגיאת סימפסון $\propto$...

h^4

h^2

h

1

h^4. סדר רביעי.

2. הכפלת n בכלל הטרפז מקטינה את השגיאה פי...

4

2

16

1

.4. h²

3. גאוס בת 2 נקודות מדויקת עבור…

פולינומים קוביים

כל הפונקציות

קווים בלבד

כלום

פולינומים קוביים. מעלה 1 − 2n.

4. רומברג מבטל את…

השגיאה המובילה

כל שגיאה

העיגול

f

השגיאה המובילה. אקסטרפולציה.

לנסות שוב את הבוחן

איך זה עוזר להציל את כדור הארץ

NOAA מסבירה שכל ממוצע חודשי במאונה לואה הוא ממוצע של ממוצעים יומיים, שבתורם מבוססים על ממוצעים שעתיים, תוך שימוש רק בשעות בתנאי "רקע".

ממוצע הוא אינטגרל חלקי המרווח, ולכן בניית ממוצעים חודשיים מערכים שעתיים היא אינטגרציה נומרית, רעיון הטרפז מהיחידה הזו מיושם על מדידות אמיתיות.

ב־Saving Planets: חשבון אינפיניטסימלי 2 · פתרונות

מקורות: NOAA Global Monitoring Laboratory: Trends in atmospheric CO_2 (Mauna Loa) (https://gml.noaa.gov/ccgg/trends/)

מקורות לימוד חינמיים

- OpenStax Calculus Volume 2, 3.6 אינטגרציה נומרית (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/3-6-numerical-integration): פרק מספר לימוד חינמי.
- PhET: Calculus Grapher (https://phet.colorado.edu/en/simulations/calculus-grapher): אינטגרלים באופן אינטראקטיבי.

צפו בהרצאה

Session 13: ODE-IVP and Numerical Integration 1 (https://ocw.mit.edu/courses/10-34-numerical-methods-applied-to-chemical-engineering-fall-2015/resources/session-13-ode-ivp-and-numerical-integration-1/) (באנגלית)

MIT 10.34 Numerical Methods Applied to Chemical Engineering (Fall 2015), MIT OpenCourseWare. רישיון: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · תנאי שימוש (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). הקישור מיועד ללימוד חינמי בלבד; Saving Planets אינו קשור לאוניברסיטה זו ואינו נתמך על ידה.

סיימתי את היחידה הזו

משוואות דיפרנציאליות רגילות: אוילר, רונגה–קוטה ויציבות

שיטת אוילר, שיטת הוין, רונגה–קוטה מסדר רביעי, שגיאה מקומית וגלובלית, גבולות יציבות, משוואות קשיחות ושיטות סתומות, ומערכות מד"ר.

מטרות הלמידה

בסוף היחידה הזו תוכלו:

- לקדם מד"ר בשיטות אוילר ו-RK4.
- לקשר בין גודל הצעד לשגיאה הגלובלית.
- למצוא את גבול היציבות המפורש עבור y′ = −λy.
- לזהות בעיות קשיחות.

מושגי מפתח

- לשיטת אוילר y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n) יש שגיאה גלובלית פרופורציונלית ל-h (סדר ראשון).
- רונגה–קוטה מסדר רביעי (RK4) משתמשת בארבע דגימות שיפוע בכל צעד; השגיאה הגלובלית שלה יורדת כמו h^4.
- עבור y′ = −λy, אוילר מפורש יציב רק אם h < 2/λ. מחוץ לזה הפתרון הנומרי גדל אף שהפתרון האמיתי דועך.
- לבעיות קשיחות יש חלקים מהירים מאוד ואיטיים מאוד. שיטות סתומות כמו אוילר אחורי נשארות יציבות עם צעדים גדולים.
- מד"ר מסדר גבוה הופכות למערכות מסדר ראשון, שאותן השיטות פותרות.

משוואות מפתח

$$y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n)$$

```
y_n+1=y_n+hf(t_n,y_n)
```

אוילר

$$y_{n+1} = y_n + \tfrac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

```
y_n+1=y_n+ h6(k_1+2k_2+2k_3+k_4)
```

RK4

$$h < \frac{2}{\lambda}$$

יציבות אוילר עבור y′ = −λy

$$y_{n+1} = y_n + h f(t_{n+1}, y_{n+1})$$

```
y_n+1=y_n+hf(t_n+1,y_n+1)
```

דוגמאות פתורות שלב אחר שלב

דוגמה 8.1 פתרו את $y' = -y$, $y(0) = 1$ עד $t = 1$ באוילר, $h = 0.1$.

1. כל צעד מכפיל ב-0.9.
2. $y(1) \approx 0.9^{10}$.

תשובה: 0.34868 לעומת 0.36788 מדויק; שגיאה -0.0192.

דוגמה 8.2 בצעו צעד RK4 אחד של $h = 0.1$ על אותה בעיה.

1. $k_1 = -1$, $k_2 = -0.95$, $k_3 = -0.9525$, $k_4 = -0.90475$.

תשובה: $y(0.1) = 0.9048375$ לעומת 0.9048374 מדויק.

דוגמה 8.3 קפה מתקרר לפי $T' = -0.1(T - 20)$ מ-$90\,^\circ\text{C}$ (ערכי דוגמה). השתמשו באוילר עם $h = 1$ min למשך 10 min.

1. בכל צעד $T - 20$ מוכפל ב-0.9.

תשובה: $44.41\,^\circ\text{C}$ לעומת $45.75\,^\circ\text{C}$ מדויק.

תרגילים

פתרו כל אחד קודם על נייר, ואז בדקו.

1. אוילר עם $h = 0.05$ עד $t = 1$ על $y' = -y$?

   $0.95^{20} = 0.35849$, השגיאה בערך חצי.

2. גבול היציבות עבור $y' = -50y$ באוילר?

   $h < 0.04$.

3. צעד הוין אחד של $h = 0.1$ על $y' = -y$?

   0.905.

4. איך פותרים את $y'' = -y$ בשיטות האלה?

   כתבו אותה כ-$y' = v$, $v' = -y$.

תפיסות שגויות נפוצות

מיתוס: צעד קטן יותר תמיד יציב.

בפועל: רק מתחת לגבול, והעיגול גדל עם צעדים רבים.

מיתוס: RK4 מדויקת.

בפועל: השגיאה שלה קטנה אבל לא אפס.

מיתוס: שיטות סתומות תמיד איטיות יותר.

בפועל: בבעיות קשיחות הן מהירות הרבה יותר בסך הכול.

כרטיסיות

אוילר

מפורשת מסדר ראשון.

RK4

סדר רביעי, 4 שיפועים.

יציבות

השגיאות אינן גדלות.

קשיח

סקאלות מהירות ואיטיות יחד.

אוילר אחורי

סתומה, יציבה מאוד.

מערכת

סדר גבוה → סדר ראשון.

בוחן לבדיקה עצמית

1. השגיאה הגלובלית של אוילר ∝…

h

h⁴

h²

1

h. סדר ראשון.

2. RK4 משתמשת ב-... שיפועים.

4

1

2

10

k_1 עד 4. k_4.

3. אוילר יציבה עבור $y' = -\lambda y$ אם...

$h < 2/\lambda$

$h > 2/\lambda$

כל h

$\lambda < 0$

$h < 2/\lambda$. הגברה $|1 - h\lambda| < 1$.

4. בעיות קשיחות מעדיפות...

שיטות סתומות

אוילר

חציה

סימפסון

שיטות סתומות. יציבות.

לנסות שוב את הבוחן

איך זה עוזר להציל את כדור הארץ

NOAA מציינת שה-GFS רץ ארבע פעמים ביום וחוזה עד 16 ימים קדימה. דף ה-EMC מתאר גם הרצת מחקר מצומדת ב-3 km שלקחה כ-40,000 שניות זמן מחשב לכל תחזית של 24 שעות, על 233 צמתים.

זה כ-11.1 שעות חישוב לכל יום תחזית, כך שהמודל רץ רק כ-2.16 פעמים מהר יותר מהזמן האמיתי. כל תחזית היא פתרון מד"ר ומד"ח בצעדי זמן, וצעד היציבות קובע את העלות.

ב־Saving Planets: משוואות דיפרנציאליות · GOES-19

מקורות: NOAA Environmental Modeling Center: Global Forecast System (GFS) (https://www.emc.ncep.noaa.gov/emc/pages/numerical_forecast_systems/gfs.php)

מקורות לימוד חינמיים

- MIT OpenCourseWare 10.34 Numerical Methods Applied to Chemical Engineering (סתיו 2015) (https://ocw.mit.edu/course/10-34-numerical-methods-applied-to-chemical-engineering-fall-2015/): קורס MIT חינמי.
- PhET: Projectile Motion (https://phet.colorado.edu/en/simulations/projectile-motion): השוו לפותר שלכם.

צפו בהרצאה

Session 18: Differential Algebraic Equations 2 (https://ocw.mit.edu/courses/10-34-numerical-methods-applied-to-chemical-engineering-fall-2015/resources/session-18-differential-algebraic-equations-2/) (באנגלית)

MIT 10.34 Numerical Methods Applied to Chemical Engineering (Fall 2015), MIT OpenCourseWare. רישיון: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · תנאי שימוש (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). הקישור מיועד ללימוד חינמי בלבד; Saving Planets אינו קשור לאוניברסיטה זו ואינו נתמך על ידה.

☐ **סיימתי את היחידה הזו**

משוואות דיפרנציאליות חלקיות: הפרשים סופיים

רשתות ותבניות, משוואת החום המפורשת וגבול היציבות שלה, סכמות סתומות וקרנק–ניקולסון, משוואת לפלס ופתרון איטרטיבי, תנאי CFL לגלים, ועלות הרזולוציה.

מטרות הלמידה

בסוף היחידה הזו תוכלו:

- לכתוב תבניות הפרשים סופיים למשוואות החום ולפלס.
- להפעיל את גבול היציבות המפורש r ≤ ½.
- להסביר את תנאי CFL.
- להעריך איך העלות גדלה עם הרזולוציה.

מושגי מפתח

- החליפו נגזרות בהפרשים על רשת. עבור u_t = αu_xx, הסכמה המפורשת היא u_i^{n+1} = u_i^n + r(u_{i+1}^n − 2u_i^n + u_{i−1}^n) עם r = αΔt/Δx².
- סכמת החום המפורשת יציבה רק אם r ≤ ½, ולכן חציית Δx מחייבת הקטנת Δt פי 4.
- סכמות סתומות וקרנק–ניקולסון יציבות לכל Δt אבל דורשות פתרון ליניארי בכל צעד.
- משוואת לפלס u_xx + u_yy = 0 נותנת תבנית של 5 נקודות; יעקובי או גאוס–זיידל (יחידה 4) פותרות אותה.
- לגלים ולזרימה, תנאי CFL c Δt/Δx ≤ 1 קושר בין צעד הזמן למרווח הרשת. עידון רשת אופקית 2D פי k עולה בערך פי k² עמודות ופי k צעדי זמן.

משוואות מפתח

$$r = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} \le \frac{1}{2}$$

r=(αΔ t)/(Δ x^2)12

יציבות חום מפורשת

$$u_{i,j} = \tfrac{1}{4}\left(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}\right)$$

u_i,j=14(u_i+1,j+u_i-1,j+u_i,j+1+u_i,j-1)

לפלס 5 נקודות

$$\frac{c \Delta t}{\Delta x} \le 1$$

תנאי CFL

$$\text{cost} \propto k^3$$

דוגמאות פתורות שלב אחר שלב

דוגמה 9.1 מצאו את צעד הזמן המפורש היציב הגדול ביותר עבור $\alpha = 1.0 \times 10^{-4}\ \text{m}^2/\text{s}$ ו-$\Delta x = 0.01\ \text{m}$ (ערכי דוגמה).

1. $\Delta t \le 0.5 \Delta x^2 / \alpha$.

תשובה: $\Delta t \le 0.5\ \text{s}$.

דוגמה 9.2 NOAA מתכננת לעדן את ה-GFS מ-13 km ל-9 km. העריכו את השינוי במספר העמודות האופקיות.

1. $(13/9)^2$.

תשובה: בערך פי 2.09 עמודות.

דוגמה 9.3 כולל צעד זמן המוגבל על ידי CFL, העריכו את הגידול הכולל בעלות.

1. $(13/9)^3$.

תשובה: בערך פי 3.01 עבודה.

תרגילים

פתרו כל אחד קודם על נייר, ואז בדקו.

1. חצו את Δx בסכמת החום המפורשת. מהו גבול Δt החדש?

   ¼ מגודלו.

2. מספר העמודות ברשת גלובלית של 13 km (כדור הארץ $5.1 \times 10^8\ \text{km}^2$, ערך ספר לימוד)?

   כ-3.02 מיליון.

3. מספר התאים עם 127 שכבות?

   כ-3.83×10^8.

4. מספר התאים ב-9 km עם 127 שכבות?

   כ-8.0×10^8.

תפיסות שגויות נפוצות

מיתוס: כל צעד זמן מתאים אם הרשת עדינה.

בפועל: רשתות עדינות יותר דורשות צעדים מפורשים קטנים יותר.

מיתוס: סכמות סתומות תמיד מדויקות יותר.

בפועל: הן יציבות יותר, לא בהכרח מדויקות יותר.

מיתוס: הכפלת הרזולוציה מכפילה את העלות.

בפועל: ב-2D ועוד זמן זה בערך 8×.

כרטיסיות

תבנית

דפוס של נקודות שכנות.

r

$\alpha \Delta t / \Delta x^2$.

CFL

$c\Delta t/\Delta x \le 1$.

קרנק–ניקולסון

סתומה, סדר שני.

לפלסיאן 5 נקודות

ממוצע השכנים.

עלות הרזולוציה

k^3 ≈ לעידון פי k.

בוחן לבדיקה עצמית

1. יציבות חום מפורשת...

$r \le ½$

$r \le 2$

כל r

$r \ge 1$

$r \le ½$. פון נוימן.

2. CFL קושר בין...

Δt ו-Δx

u-ו α

ε-ו n

y-ו x

Δx-ו Δt. מהירות המידע.

3. תבנית לפלס משתמשת ב-... נקודות.

5

2

תמיד 9

1

5. מרכז 4 +.

4. קרנק–ניקולסון היא...

יציבה ללא תנאי

מפורשת

לא יציב

מסדר ראשון

יציבה ללא תנאי. ממוצע סתום.

לנסות שוב את הבוחן

איך זה עוזר להציל את כדור הארץ

שדרוג מחשבי העל של NOAA ב-2023 נועד לאפשר ל-GFS לעבור לרזולוציה אופקית של תשעה קילומטרים, לעומת 13 בגרסה הנוכחית, כדי שתופעות בקנה מידה קטן יותר ייראו ויודמו.

קנה המידה ביחידה הזו מראה למה זה דרש מחשבים חדשים: פי 2.09 עמודות, ועם צעד זמן המוגבל על ידי CFL, בערך פי 3 עבודה לכל תחזית.

ב־Saving Planets: מכניקת זורמים · תרמודינמיקה

מקורות: NOAA: NOAA completes upgrade to weather and climate supercomputer system (Aug. 10, 2023) (https://www.noaa.gov/news-release/noaa-completes-upgrade-to-weather-and-climate-supercomputer-system) · NOAA Environmental Modeling Center: Global Forecast System (GFS) (https://www.emc.ncep.noaa.gov/emc/pages/numerical_forecast_systems/gfs.php)

מקורות לימוד חינמיים

- MIT OpenCourseWare 2.086 Numerical Computation for Mechanical Engineers (סתיו 2014) (https://ocw.mit.edu/courses/2-086-numerical-computation-for-mechanical-engineers-fall-2014/): קורס MIT חינמי.
- MIT OpenCourseWare 18.330 Introduction to Numerical Analysis (אביב 2012) (https://ocw.mit.edu/courses/18-330-introduction-to-numerical-analysis-spring-2012/): הרצאות MIT חינמיות.

צפו בהרצאה

Session 22: Partial Differential Equations 1 (https://ocw.mit.edu/courses/10-34-numerical-methods-applied-to-chemical-engineering-fall-2015/resources/session-22-partial-differential-equations-1/) (באנגלית)

MIT 10.34 Numerical Methods Applied to Chemical Engineering (Fall 2015), MIT OpenCourseWare. רישיון: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · תנאי שימוש (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use). הקישור מיועד ללימוד חינמי בלבד; Saving Planets אינו קשור לאוניברסיטה זו ואינו נתמך על ידה.

☐ **סיימתי את היחידה הזו**

אופטימיזציה, ערכים עצמיים וחישוב בקנה מידה גדול

חיפוש חתך הזהב, ירידה במורד הגרדיאנט ושיטת ניוטון למזעור, שיטת החזקה לערכים עצמיים, ספירת פעולות, חישוב מקבילי, ואימות ותיקוף של מודלים.

מטרות הלמידה

בסוף היחידה הזו תוכלו:

- למזער פונקציה 1D בחיפוש חתך הזהב.
- להפעיל ירידה במורד הגרדיאנט ולבחור צעד.
- למצוא ערך עצמי דומיננטי בשיטת החזקה.
- להעריך זמן ריצה מספירת פעולות וממהירות המכונה.

מושגי מפתח

- חיפוש חתך הזהב מכווץ קטע פי 0.618 בכל צעד בלי נגזרות.
- ירידה במורד הגרדיאנט צועדת במורד: x ← x − α ∇f. α גדול מדי מתבדר; קטן מדי זוחל.
- שיטת ניוטון למזעור פותרת את ∇f = 0 בעזרת ההסיאן; היא מתכנסת ריבועית ליד המינימום.
- שיטת החזקה מכפילה שוב ושוב ב-A; הווקטור מתיישר עם הווקטור העצמי הדומיננטי, ומנת ריילי נותנת את הערך העצמי שלו.
- אימות שואל אם הקוד פותר את המשוואות נכון; תיקוף שואל אם אלה המשוואות הנכונות, בבדיקה מול תצפיות.

משוואות מפתח

$$\tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$$

`τ=(5-1)/(2)≈0.618`

מקדם יחס הזהב

$$x_{k+1} = x_k - \alpha \nabla f(x_k)$$

`x_k+1=x_k-α f(x_k)`

ירידה במורד הגרדיאנט

$$\lambda \approx \frac{v^T A v}{v^T v}$$

מנת ריילי

$$t = \frac{\text{flops}}{\text{flop rate}}$$

`t= rate`

זמן ריצה

דוגמאות פתורות שלב אחר שלב

דוגמה 10.1 בכמה מכווץ חיפוש חתך הזהב קטע ב-10 צעדים?

1. 0.618^{10}.

תשובה: ל-(0.81%) 0.0081 מרוחבו.

דוגמה 10.2 מזערו את $f = (x - 3)^2$ בירידה במורד הגרדיאנט עם $\alpha = 0.1$ מ-$x = 0$. היכן תהיו אחרי 5 צעדים?

1. בכל צעד $x - 3$ מוכפל ב-0.8.
2. $x_5 = 3(1 - 0.8^5)$.

תשובה: $x_5 = 2.017$.

דוגמה 10.3 הפעילו את שיטת החזקה על $[[2, 1], [1, 2]]$ מ-$(1, 0)$, 5 צעדים.

1. $v = (122, 121)$.
2. מנת ריילי.

תשובה: $\lambda \approx 2.99997$ (מדויק 3).

תרגילים

פתרו כל אחד קודם על נייר, ואז בדקו.

1. כמה זמן לוקח פתרון צפוף של 10,000 נעלמים ($2n^3/3$ flops) ב-14.5 פטה-פלופס?

   $6.67 \times 10^{11} / 1.45 \times 10^{16} = 4.6 \times 10^{-5}$ s.

2. המהירות המשולבת של שני המחשבים של NOAA, 14.5 פטה-פלופס כל אחד?

   29 פטה-פלופס.

3. קיבולת מבצעית ועוד מחקר (20 פטה-פלופס)?

   49 פטה-פלופס.

4. אימות או תיקוף: השוואת מודל לנתוני מאונה לואה?

תיקוף.

תפיסות שגויות נפוצות

מיתוס: צעד גדול יותר תמיד מאיץ ירידה במורד הגרדיאנט.

בפועל: הוא עלול לחרוג ולהתבדר.

מיתוס: שיטת החזקה מוצאת את כל הערכים העצמיים.

בפועל: רק את הדומיננטי.

מיתוס: קוד שמתכנס הוא מודל נכון.

בפועל: הוא עדיין צריך תיקוף.

כרטיסיות

חתך הזהב

הקטע מתכווץ פי 0.618.

ירידה במורד הגרדיאנט

$x - \alpha \nabla f$.

שיטת החזקה

ערך עצמי דומיננטי.

מנת ריילי

$v^T A v / v^T v$.

אימות

לפתור את המשוואות נכון.

אימות

לפתור את המשוואות הנכונות.

בוחן לבדיקה עצמית

1. חתך הזהב מכווץ פי…

0.618

0.5

0.1

2

0.618. יחס הזהב.

2. שיטת החזקה מוצאת...

הערך העצמי הדומיננטי

כל השורשים

את ההפכית

דטרמיננטה

הערך העצמי הדומיננטי. הכפלה חוזרת.

3. תיקוף משווה ל...

תצפיות

הקוד

כלום

אפסילון

תצפיות. בדיקת מציאות.

4. ירידה במורד הגרדיאנט נעה...

במורד

במעלה

באקראי

הצידה

במורד. −∇f.

לנסות שוב את הבוחן

איך זה עוזר להציל את כדור הארץ

NOAA מדווחת שמחשבי העל התאומים שלה למזג אוויר ואקלים, Dogwood במנסס, וירג'יניה, ו-Cactus בפיניקס, אריזונה, שודרגו באוגוסט 2023 ל-14.5 פטה-פלופס כל אחד, כך שיחד מערכת התחזית יכולה לעבד 29 קוודריליון חישובים בשנייה. עם

מכונות מחקר בסך 20 פטה-פלופס, הקיבולת של NOAA היא 49 פטה-פלופס, ויותר מ-20 מודלים מבצעיים של חיזוי מזג אוויר נומרי רצים על המערכת.

NASA GISS מעמידה לרשות הציבור בחינם את הקוד של מודל מערכת כדור הארץ ModelE, וניתוח טמפרטורת פני השטח GISTEMP שלה מתעדכן בסביבות ה-10 בכל חודש. קוד ונתונים פתוחים מאפשרים לכל אחד לאמת ולתקף את השיטות הנומריות שמאחורי מדע האקלים.

ב־Saving Planets: פתרונות · מבוא לתכנות

מקורות: NOAA: NOAA completes upgrade to weather and climate supercomputer system (Aug. 10, 2023) (https://www.noaa.gov/news-release/noaa-completes-upgrade-to-weather-and-climate-supercomputer-system) · NASA GISS: מודל מערכת כדור הארץ GISS, ModelE (https://www.giss.nasa.gov/tools/modelE/) · NASA GISS: GISS Surface Temperature Analysis (GISTEMP v4) (https://data.giss.nasa.gov/gistemp/)

מקורות לימוד חינמיים

- MIT OpenCourseWare 18.330 Introduction to Numerical Analysis (אביב 2012) (https://ocw.mit.edu/courses/18-330-introduction-to-numerical-analysis-spring-2012/): הרצאות MIT חינמיות.
- MIT OpenCourseWare 10.34 Numerical Methods Applied to Chemical Engineering (סתיו 2015) (https://ocw.mit.edu/courses/10-34-numerical-methods-applied-to-chemical-engineering-fall-2015/): קורס MIT חינמי.

סיימתי את היחידה הזו

תרגילים

התרגילים האלה נמצאים בתוך כל יחידה. פתרו על הנייר, ואז פתחו את התשובה.

1. שגיאות, מספרי נקודה צפה וטורי טיילור
   4 תרגילים
2. שורשי משוואות: חציה, ניוטון ומיתר
   4 תרגילים
3. מערכות ליניאריות: אלימינציית גאוס, LU ומספר מצב
   4 תרגילים
4. פותרים איטרטיביים: יעקובי, גאוס–זיידל והתכנסות
   4 תרגילים
5. אינטרפולציה, ספליינים והתאמה בריבועים פחותים
   4 תרגילים
6. גזירה נומרית
   4 תרגילים
7. אינטגרציה נומרית
   4 תרגילים
8. משוואות דיפרנציאליות רגילות: אוילר, רונגה–קוטה ויציבות
   4 תרגילים
9. משוואות דיפרנציאליות חלקיות: הפרשים סופיים
   4 תרגילים
10. אופטימיזציה, ערכים עצמיים וחישוב בקנה מידה גדול
    4 תרגילים

המעבדה (Computation lab)

המעבדה היא החלק המעשי של הקורס. כאן היא חינמית ולתרגול בלבד, ללא נקודות זכות.

כל מעבדה פועלת בסימולציה חינמית או בגיליון אלקטרוני, כך שאין סכנות פיזיות. קחו הפסקות ממסך, שבו ביציבה טובה והרחיקו כבלים ממעברים.

מקור בטיחות: OSHA: Walking-working surfaces (slip, trip and fall hazards) (https://www.osha.gov/walking-working-surfaces)

מעבדה A: אפסילון מכונה וטור טיילור בגיליון אלקטרוני

שבוע 1

מטרה: מצאו את אפסילון המכונה בניסוי וצפו בטור טיילור מתכנס ל-e.

$$e \approx \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}$$

e≈_k=0^n-1(1)/(k!)

טור טיילור עבור e

מהלך הניסוי

1. בעמודה, התחילו ב-1 וחצו בכל שורה.
2. בעמודה הבאה, בדקו אם + 1 ערך 1 <.
3. הערך האחרון שעובר הוא אפסילון המכונה.
4. סכמו 1/k! עבור 5 ו-10 איברים והשוו ל-e.

טבלת נתונים

גודל	ערך
אפסילון מכונה (כפולה)	2.22×10^{-16}
e, 5 איברים	2.70833
e, 10 איברים	2.7182815
e	2.7182818

ערכים מחושבים; רוב הגיליונות האלקטרוניים משתמשים בדיוק כפול.

חישוב לדוגמה

1. חציה 52 פעמים נותנת $2.22 \times 10^{-16} = 2^{-52}$.
2. 1 + 1 + ½ + ⅙ + 1/24 = 2.70833 +.

בטיחות

- מחשב בלבד.

חלופה ביתית או וירטואלית

- כל גיליון אלקטרוני מתאים.

MIT OpenCourseWare 18.330 Introduction to Numerical Analysis (אביב 2012) (https://ocw.mit.edu/courses/18-330-introdu
/ction-to-numerical-analysis-spring-2012)

הקשר לכדור הארץ: NOAA מתארת הרצת תחזית שבה הדינמיקה בדיוק 32 סיביות וכל השאר ב-64 סיביות. NOAA Environmental Modeling Center: Global Forecast System (GFS) (https://www.emc.ncep.noaa.gov/emc/pages/numerical_forec
ast_systems/gfs.php)

☐ **השלמתי את המעבדה הזו (רטובה או וירטואלית)**

מעבדה B: חציה מול ניוטון

שבוע 3

מטרה: פתרו את cos x = x בחציה ובשיטת ניוטון, וספרו את הספרות הנכונות בכל צעד.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\cos x_n - x_n}{-\sin x_n - 1}$$

```
x_n+1=x_n-( x_n-x_n)/(- x_n-1)
```

ניוטון עבור cos x − x = 0

מהלך הניסוי

1. תחמו את השורש ב-[0, 1].
2. הריצו 20 צעדי חציה בגיליון אלקטרוני.
3. הריצו את ניוטון מ-$x_0 = 1$.
4. שרטטו את $\log_{10}$ של השגיאה מול מספר הצעד עבור שתיהן.

טבלת נתונים

צעד ניוטון	x
1	0.750364
2	0.739113
3	0.739085133
4	0.739085133

ערכים מחושבים. חציה צריכה כ-20 צעדים ל-6 ספרות; ניוטון צריך 3.

חישוב לדוגמה

1. $x_1 = 1 - (\cos 1 - 1)/(-\sin 1 - 1) = 0.750364$.
2. שורש 0.7390851.

> **בטיחות**
>
> - מחשב בלבד.

חלופה ביתית או וירטואלית

- כל גיליון אלקטרוני מתאים.

OpenStax Calculus Volume 1, 4.9 שיטת ניוטון (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/4-9-newtons-method)

הקשר לכדור הארץ: ה-USGS מציין ש-MODFLOW-NWT משתמש בניסוח ניוטון-רפסון לזרימת מי תהום לא כלואים. USGS: MODFLOW and Related Programs (https://www.usgs.gov/mission-areas/water-resources/science/modflow-and-related-programs)

- [ ] **השלמתי את המעבדה הזו (רטובה או וירטואלית)**

מעבדה C: התאמת רשומת ה-CO_2 של מאונה לואה

שבוע 7

מטרה: התאימו מודל קווי ומודל ריבועי לממוצעים השנתיים של מאונה לואה מ-NOAA ושפטו אותם לפי השאריות.

$$A^T A\, c = A^T y$$

A^TA c=A^Ty

ריבועים פחותים

מהלך הניסוי

1. חקרו את PhET Least-Squares Regression ו-Curve Fitting כדי לראות איך השאריות משתנות עם המודל.
2. פתחו את קובץ הממוצעים השנתיים של NOAA והעתיקו את ערכי העשורים 1960–2020.
3. התאימו קו ופונקציה ריבועית (LINEST בגיליון או קו מגמה).
4. חזו את 2025 והשוו ל-427.35 ppm של NOAA.

טבלת נתונים

מודל	מקדם מרכזי	תחזית 2025 (ppm)
ישר	שיפוע 1.613 ppm/שנה	415.0
ריבועי	0.01338 ppm/שנה²	426.0
NOAA 2025	—	427.35

נתונים מ-NOAA GML; ההתאמות מחושבות.

חישוב לדוגמה

1. הקו מעריך את 2025 בחסר של 12.3 ppm.
2. הריבועי בטווח של 1.3 ppm.

בטיחות

- מחשב בלבד.

חלופה ביתית או וירטואלית

- כל גיליון אלקטרוני מתאים.

PhET: Least-Squares Regression (https://phet.colorado.edu/en/simulations/least-squares-regression) · PhET: Curve Fitting (https://phet.colorado.edu/en/simulations/curve-fitting) · NOAA GML: Mauna Loa annual mean CO_2 data (https://gml.noaa.gov/webdata/ccgg/trends/co2/co2_annmean_mlo.txt)

הקשר לכדור הארץ: NOAA מדווחת שהממוצע החודשי במאונה לואה היה 426.07 ppm בספטמבר 2026. NOAA Global Monitoring Laboratory: Trends in atmospheric CO_2 (Mauna Loa) (/https://gml.noaa.gov/ccgg/trends)

- [ ] **השלמתי את המעבדה הזו (רטובה או וירטואלית)**

מעבדה D: טרפז מול סימפסון

שבוע 9

מטרה: בצעו אינטגרציה של sin x מ-0 עד π בשני הכללים, חצו את הצעד ומדדו את סדר השגיאה.

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = 2$$

```
_0^π x dx=2
```

אינטגרל בדיקה

מהלך הניסוי

1. השתמשו ב-PhET Calculus Grapher כדי לראות את השטח מתחת לעקומה.
2. בנו עמודות ל-x, ל-sin x ולמשקלות הכללים.
3. חשבו את T ו-S עבור n = 4, ואז n = 8.
4. מצאו את יחסי השגיאה.

טבלת נתונים

כלל, n = 4	הערכה	שגיאה
טרפז	1.89612	−0.10388
סימפסון	2.00456	+0.00456

ערכים מחושבים; הכפלה ל-n = 8 מקטינה את השגיאות פי 4.03 ו-16.9, קרוב ל-4 ול-16 התאורטיים.

חישוב לדוגמה

1. $T_4 = (\pi/4)(\sin \pi/4 + \sin \pi/2 + \sin 3\pi/4) = 1.89612$.
2. $S_4 = (\pi/12)(4 \sin \pi/4 + 2 \sin \pi/2 + 4 \sin 3\pi/4) = 2.00456$.

בטיחות

- מחשב בלבד.

חלופה ביתית או וירטואלית

- כל גיליון אלקטרוני מתאים.

PhET: Calculus Grapher (https://phet.colorado.edu/en/simulations/calculus-grapher) · OpenStax Calculus Volume 2, 3.6 אינטגרציה נומרית (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/3-6-numerical-integration)

הקשר לכדור הארץ: NOAA בונה כל ממוצע חודשי במאונה לואה מממוצעים יומיים המבוססים על ממוצעים שעתיים. NOAA Global Monitoring Laboratory: Trends in atmospheric CO_2 (Mauna Loa) (https://gml.noaa.gov/ccgg/trends/)

- [ ] השלמתי את המעבדה הזו (רטובה או וירטואלית)

מעבדה E: סדרי שגיאה של אוילר ו-RK4

שבוע 11

מטרה: פתרו את y′ = −y עד t = 1 בכמה גדלי צעד ואשרו התכנסות מסדר ראשון ומסדר רביעי.

$$y(1) = e^{-1} = 0.367879$$

y(1)=e^-1=0.367879

תשובה מדויקת

מהלך הניסוי

1. בנו עמודת אוילר עבור h = 0.2, 0.1 ו-0.05.
2. בנו בלוק RK4 עבור h = 0.2 ו-0.1.
3. רשמו את השגיאה ב-t = 1.
4. השוו את יחסי השגיאה כש-h נחצה; אחר כך נסו את אותו הפותר על מקרה ללא גרר ב-PhET Projectile Motion.

טבלת נתונים

שיטה, h	שגיאה ב-t = 1
אוילר, 0.2	−0.0402
אוילר, 0.1	−0.0192
אוילר, 0.05	−0.00939
RK4, 0.2	5.80 × 10⁻⁶
RK4, 0.1	3.33 × 10⁻⁷

ערכים מחושבים. השגיאה של אוילר נחצית עם h; של RK4 יורדת פי 17 בערך (קרוב ל-16 = 2⁴).

חישוב לדוגמה

1. אוילר h = 0.1: 0.9¹⁰ − e⁻¹ = −0.0192.
2. יחס RK4 5.80 × 10⁻⁶/3.33 × 10⁻⁷ = 17.4.

בטיחות

- מחשב בלבד.

חלופה ביתית או וירטואלית

- כל גיליון אלקטרוני מתאים.

MIT OpenCourseWare 10.34 Numerical Methods Applied to Chemical Engineering (סתיו 2015) (https://ocw.mit.edu/courses/10-34-numerical-methods-applied-to-chemical-engineering-fall-2015/) · PhET: Projectile Motion (https://phet.colorado.edu/en/simulations/projectile-motion)

הקשר לכדור הארץ: ה-GFS של NOAA רץ ארבע פעמים ביום וחוזה עד 16 ימים קדימה. NOAA Environmental Modeling Center: Global Forecast System (GFS) (https://www.emc.ncep.noaa.gov/emc/pages/numerical_forecast_systems/gfs.php)

- [ ] **השלמתי את המעבדה הזו (רטובה או וירטואלית)**

מעבדה F: משוואת החום וגבול היציבות שלה

שבוע 13

מטרה: הריצו את סכמת החום המפורשת על מוט עם נקודה חמה וראו מה קורה מעל ½ = r.

$$u_i^{n+1} = u_i^n + r(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$$

```
u_i^n+1=u_i^n+r(u_i+1^n-2u_i^n+u_i-1^n)
```

סכמה מפורשת

מהלך הניסוי

1. קבעו 7 צמתים עם קצוות ב-0 והצומת האמצעי ב-100 (ערכי דוגמה).
2. התקדמו עם r = 0.25 במשך 10 צעדים.
3. חזרו עם r = 0.6.
4. תארו את שתי התוצאות.

טבלת נתונים

מקרה	הערך האמצעי אחרי צעד 1	אחרי 10 צעדים
r = 0.25	50.0	16.7
r = 0.6	−20.0	290.5

ערכים מחושבים. עם r = 0.6 הערכים מתנודדים וגדלים: הסכמה אינה יציבה.

חישוב לדוגמה

1. r = 0.25: 100 + 0.25(0 − 200 + 0) = 50.
2. r = 0.6: 100 + 0.6(−200) = −20.

בטיחות

- מחשב בלבד.

חלופה ביתית או וירטואלית

- כל גיליון אלקטרוני מתאים.

MIT OpenCourseWare 2.086 Numerical Computation for Mechanical Engineers (סתיו 2014) (https://ocw.mit.edu/course/s/2-086-numerical-computation-for-mechanical-engineers-fall-2014/)

הקשר לכדור הארץ: NOAA תכננה להעביר את ה-GFS מרזולוציה של 13 km ל-9 km אחרי שדרוג 2023. NOAA: NOAA completes upgrade to weather and climate supercomputer system (Aug. 10, 2023) (https://www.noaa.gov/news-release/noaa-completes-upgrade-to-weather-and-climate-supercomputer-system)

☐ **השלמתי את המעבדה הזו (רטובה או וירטואלית)**

מערכי תרגול למבחן

מדדו זמן: כ־10 דקות לבעיה. אחר כך השוו לפתרונות המלאים.

סט תרגול לבחינת אמצע (יחידות 5–1)

1. מצאו את השגיאה היחסית של 3.14 כקירוב ל-π.

   1. $|3.14 - \pi| / \pi$.

   תשובה: 5.07×10^{-4}.

2. בצעו שני צעדי ניוטון על $x^2 - 5$ מ-$x_0 = 2$.

   1. $x_1 = 2 - (-1)/4$.
   2. $x_2 = 2.25 - 0.0625/4.5$.

   תשובה: $x_1 = 2.25$; $x_2 = 2.23611$.

3. כמה צעדי חציה מכווצים קטע ברוחב 4 אל מתחת ל-10^{-3}?

   1. $\log_2(4000) = 11.97$.

   תשובה: 12 צעדים.

4. כמה יותר עבודת חילוץ דורש $n = 500$ לעומת $n = 100$?

   1. $(500/100)^3$.

   תשובה: פי 125.

5. בצעו אינטרפולציה ל-CO_2 במאונה לואה ל-2023 מהממוצעים השנתיים של NOAA ל-2020 (414.21) ול-2025 (427.35).

   1. $414.21 + 0.6 \times 13.14$.

   תשובה: 422.09 ppm (הערך של NOAA ל-2023 הוא 421.08).

מערך תרגול מסכם (כל היחידות)

1. העריכו את $\int_0^2 x^2\,dx$ בכלל הטרפז, $n = 2$.

   1. $h = 1: 0.5 \times 0 + 1 + 0.5 \times 4$.

   תשובה: 3 (מדויק 2.667).

2. חזרו עם כלל סימפסון, $n = 2$.

1. (1/3)(0 + 4 + 4).

תשובה: 2.667, מדויק לפונקציה ריבועית.

3. בצעו שני צעדי אוילר עם h = 0.1 על y′ = −2y, y(0) = 1.

1. 0.8².

תשובה: 0.64 (מדויק 0.670).

4. מצאו את צעד הזמן המפורש הגדול ביותר לחום עבור α = 2 × 10⁻⁵ m²/s, Δx = 0.005 m.

1. 0.5 × 0.005²/2 × 10⁻⁵.

תשובה: 0.625 s.

5. העריכו את הנגזרת של e^x ב-0 בהפרש מרכזי, h = 0.01.

1. (e^0.01 − e^−0.01)/0.02.

תשובה: 1.0000167.

6. בכמה מכווץ חיפוש חתך הזהב קטע ב-20 צעדים?

1. 0.618²⁰.

תשובה: ל-6.6 × 10⁻⁵ מרוחבו.

דף נוסחאות

$$e_{rel} = |\tilde{x} - x|/|x|,\ \varepsilon_{mach} = 2^{-52}$$

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n),\ n \geq \log_2((b-a)/tol)$$

$$A = LU,\ \text{cost} \approx \tfrac{2}{3}n^3,\ \kappa = \|A\|\|A^{-1}\|$$

$$\|e_k\| \approx \rho^k \|e_0\|$$

$$A^T A c = A^T y$$

$$f' \approx (f(x+h) - f(x-h))/(2h),\ h_{opt} \approx \sqrt{\varepsilon}$$

$$T_n:\ E \propto h^2,\ S_n:\ E \propto h^4$$

$$y_{n+1} = y_n + hf,\ h < 2/\lambda$$

$$r = \alpha \Delta t/\Delta x^2 \leq \tfrac{1}{2},\ c\Delta t/\Delta x \leq 1$$

$$x_{k+1} = x_k - \alpha \nabla f,\ \lambda \approx v^T A v / v^T v$$

קבועים

קבוע	ערך
דיוק כפול (IEEE 754)	אפסילון מכונה 2.22 × 10⁻¹⁶ = 2⁻⁵², כ-16 ספרות משמעותיות

קבוע	ערך
דיוק יחיד (IEEE 754)	אפסילון מכונה $2^{-23} = 1.19 \times 10^{-7}$, כ-7 ספרות משמעותיות
e	2.718281828
π	3.141592654
שטח פני כדור הארץ (ערך ספר לימוד)	$5.1 \times 10^{8}\ \text{km}^2$
1 פטה-פלופ	10^{15} פעולות נקודה צפה בשנייה

מקור: NIST Guide to the SI, Appendix B.9: conversion factors (https://www.nist.gov/pml/special-publication-811/nist-guide-si-appendix-b-conversion-factors/nist-guide-si-appendix-b9)

טקסטים וסימולציות בחינם

השתמשו בהרצאות, בפרקי ספרי הלימוד ובסימולציות החינמיים האלה לצד הקורס.

- MIT OpenCourseWare 18.330 Introduction to Numerical Analysis (אביב 2012) (https://ocw.mit.edu/courses/18-330-introductio/n-to-numerical-analysis-spring-2012): הרצאות ותרגילים חינמיים באנליזה נומרית מ-MIT.
- MIT OpenCourseWare 2.086 Numerical Computation for Mechanical Engineers (סתיו 2014) (https://ocw.mit.edu/courses/2-/086-numerical-computation-for-mechanical-engineers-fall-2014): קורס חינמי של MIT בחישוב הנדסי.
- MIT OpenCourseWare 10.34 Numerical Methods Applied to Chemical Engineering (סתיו 2015) (https://ocw.mit.edu/course/s/10-34-numerical-methods-applied-to-chemical-engineering-fall-2015): קורס חינמי של MIT בשיטות נומריות שימושיות.
- OpenStax Calculus Volume 2, 3.6 אינטגרציה נומרית (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/3-6-numerical-integration): פרק מספר לימוד חינמי.
- OpenStax Calculus Volume 1, 4.9 שיטת ניוטון (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/4-9-newtons-method): פרק מספר לימוד חינמי.
- PhET: Least-Squares Regression (https://phet.colorado.edu/en/simulations/least-squares-regression): התאמת קווים באופן אינטראקטיבי.

מילון מונחים

שגיאה מוחלטת

גודל ההפרש מהערך האמיתי.

שיטת החציה

מציאת שורשים בחציית קטע עם החלפת סימן.

תנאי CFL

גבול צעד הזמן $c\Delta t/\Delta x \le 1$.

ביטול קטסטרופלי

אובדן ספרות בחיסור מספרים קרובים.

מספר מצב

כמה בעיה מגבירה שגיאות קלט.

קרנק–ניקולסון

סכמת זמן סתומה מסדר שני.

דומיננטיות אלכסונית

כל איבר אלכסוני גובר על שאר השורה שלו.

קוודרטורת גאוס

אינטגרציה עם נקודות ומשקלות אופטימליים.

גאוס–זיידל

פותר איטרטיבי שמשתמש בערכים החדשים מיד.

פירוק LU

A = LU, חילוץ לשימוש חוזר.

ריבועים פחותים

התאמה הממזערת את סכום ריבועי השאריות.

אפסילון מכונה

הפער בין 1 למספר הצף הבא.

שיטת ניוטון

מציאת שורשים לאורך משיקים.

שיטת החזקה

הכפלה חוזרת למציאת הערך העצמי הדומיננטי.

רונגה–קוטה (RK4)

פותר מד"ר מסדר רביעי.

כלל סימפסון

אינטגרציה מסדר רביעי בעזרת פרבולות.

ספליין

עקומה קובית חלקה למקוטעין.

משוואה קשיחה

מד"ר עם חלקים מהירים מאוד ואיטיים מאוד.

שגיאת קטיעה

שגיאה מקיטוע של תהליך אינסופי.

אימות

בדיקת מודל מול תצפיות.

מחוון להערכה עצמית

לא ניתנים ציון או נקודות זכות. השתמשו בזה כדי להעריך בכנות איפה אתם עומדים בכל יחידה.

רמה	איך זה נראה
4 · שליטה מלאה	בוחר שיטה לפי הדיוק הנדרש, בודק אותה על בעיה עם תשובה ידועה, מודד את הסדר שלה ומסביר את גבולות היציבות שלה.

רמה	איך זה נראה
3 · מיומן	פותר את תרגילי התרגול עם טעויות מזדמנות בגודל הצעד או ביחידות.
2 · מתפתח	עוקב אחרי הדוגמאות הפתורות אבל לא מבחין בין שגיאת קיטוע לשגיאת עיגול.
1 · מתחיל	מפעיל נוסחאות בלי לבדוק שגיאה או יציבות; צריך לחזור על היחידה.

שקלול מוצע אם רוצים ציון

חלק	משקל
תרגילים	20%
מעבדות	25%
מערך תרגול לאמצע הקורס	25%
מערך תרגול מסכם	30%

שאפו לרמה 3 ומעלה בכל יחידה לפני שעוברים לקורס הבא.

קורסים קשורים

- מכניקה מסלולית AERO 340
- הסתברות וסטטיסטיקה MATH 350
- אווירודינמיקה 1 AERO 310
- כל הקורסים