Dernière mise à jour: November 1, 2026

🗺️ Parcours sur quatre ans · Année 3, Automne

À propos de ce cours

Ce cours gratuit compte 10 unités et 6 travaux pratiques. Ce sont les vrais totaux, pas un programme plus long raccourci.

Un contrôle est un nombre ou un résultat de code sur une page de cours qu'un script recalcule avant publication. Le nombre affiché et le nombre recalculé doivent correspondre.

> Ceci est le plan d'un cours gratuit en autonomie rédigé par Saving Planets. Ce n'est pas un cours universitaire : il ne donne aucun crédit académique et aucun établissement n'y participe.
>
> Son contenu suit un cours semestriel de méthodes numériques de troisième année pour ingénieurs. Il s'inspire des sujets et du niveau de MIT 18.330 Introduction to Numerical Analysis, MIT 2.086 Numerical Computation for Mechanical Engineers et MIT 10.34 (gratuits sur MIT OpenCourseWare), et utilise des sections gratuites de calcul d'OpenStax, que nous citons là où elles aident. Aucun de ces auteurs, établissements ou organismes ne cautionne cette page.
>
> Ce que nous ajoutons : chaque unité est reliée à un travail réel avec une source publique citée (le Global Forecast System et les supercalculateurs de la NOAA, la série de CO_2 de Mauna Loa, les modèles d'eaux souterraines de l'USGS et les modèles climatiques de la NASA), chaque nombre de la page est recalculé par un script de vérification avant sa mise en ligne, et chaque TP dispose d'une simulation gratuite ou d'un tableur.
>
> Suivez-le dans l'ordre. Chaque unité comporte des objectifs, des notions clés, des équations, des exemples pas à pas, des exercices corrigés en détail, des erreurs fréquentes, des cartes mémoire et un quiz. Votre progression est enregistrée uniquement dans ce navigateur.

Comment ce cours aide à sauver la planète

Les prévisions météo, les projections climatiques et les plans de gestion des eaux souterraines sont tous des méthodes numériques exécutées sur ordinateur : les équations ne peuvent pas être résolues à la main, on les découpe donc en grilles, en pas de temps et en immenses systèmes linéaires.

Savoir comment ces méthodes fonctionnent, et comment elles échouent, permet aux ingénieurs de juger une prévision ou un modèle. Chaque unité se termine par une courte section sourcée. Les

valeurs qui ne proviennent pas d'une source sont indiquées comme valeurs d'exemple ou de manuel.

Pour les enseignants

Vous pouvez enseigner ce cours, ou laisser un élève le faire seul. Il est gratuit. Saving Planets ne donne ni note ni crédit scolaire.

- Cette page est le cours entier : 10 unités et 6 travaux pratiques (MATH 340).
- Prévoyez 15 semaines, environ 6 à 9 heures par semaine, y compris les semaines de travaux pratiques.
- Suivez le calendrier de 15 semaines. Lisez l'unité, faites les exercices sur papier, puis ouvrez la réponse. La semaine d'un TP, faites le TP ou la version à la maison.
- Un contrôle est un nombre ou un résultat de code sur la page qu'un script recalcule avant publication. Le nombre affiché et le nombre recalculé doivent correspondre.
- Utilisez Imprimer cette page, ou téléchargez le guide d'étude PDF. La feuille de formules est vers la fin.
- Demandez : en quoi cette unité aide-t-elle les gens et la planète ? Chaque unité a un encadré vert avec un fait sourcé.
- Copiez le modèle de guide enseignant et écrivez le nom de votre classe, le temps dont vous disposez et les questions que vous poserez. Ouvrir le modèle de guide enseignant

Avant de commencer

Prérequis

- Analyse I et II : dérivées, intégrales et séries de Taylor.
- Équations différentielles : EDO du premier et du second ordre.
- Algèbre linéaire : matrices, déterminants et valeurs propres.
- Introduction à la programmation : boucles, fonctions et tableaux (un tableur convient aussi).

Comment étudier

- Avant de calculer, estimez la réponse et décidez de la précision dont vous avez besoin.
- Comparez toujours avec une réponse exacte sur un problème test avant de faire confiance à une méthode sur un vrai problème.
- Suivez l'erreur quand vous divisez le pas par deux : le rapport vous donne l'ordre de la méthode.
- Gardez les unités en SI et écrivez le pas avec ses unités.
- Méfiez-vous de la soustraction de nombres presque égaux ; réécrivez la formule si vous le pouvez.
- Faites chaque exercice sur papier ou dans un tableur avant d'ouvrir la réponse, et refaites les quiz quelques jours plus tard.

Ce qu’il vous faut

- Un ordinateur ou une tablette pour les simulations PhET gratuites Least-Squares Regression, Curve Fitting, Calculus Grapher et Projectile Motion.
- Un tableur (n’importe lequel, gratuit), ou Python si vous le connaissez.
- Le fichier de données CO_2 de Mauna Loa de la NOAA dans un navigateur web.
- Une calculatrice.

Programme suggéré sur 15 semaines

Environ 6 à 9 heures par semaine : lecture, exercices et, les semaines de TP, le TP.

Semaine	Unité	Thèmes	Lecture
1	Erreurs, nombres à virgule flottante et séries de Taylor	Erreurs, virgule flottante, séries de Taylor ; TP A	MIT 18.330
2	Racines d’équations : bissection, Newton et sécante	Bissection et itération de point fixe	MIT 18.330
3	Racines d’équations : bissection, Newton et sécante	Méthodes de Newton et de la sécante ; TP B	OpenStax Calculus 1, 4.9
4	Systèmes linéaires : élimination de Gauss, LU et conditionnement	Élimination de Gauss, LU et conditionnement	MIT 2.086
5	Solveurs itératifs : Jacobi, Gauss–Seidel et convergence	Jacobi, Gauss–Seidel et systèmes creux	MIT 18.330
6	Interpolation, splines et ajustement par moindres carrés	Interpolation et splines	MIT 18.330
7	Interpolation, splines et ajustement par moindres carrés	Moindres carrés ; TP C ; préparation au partiel	NOAA GML
8	Dérivation numérique	Dérivation numérique	MIT 18.330
9	Intégration numérique	Intégration numérique ; TP D	OpenStax Calculus 2, 3.6
10	Équations différentielles ordinaires : Euler, Runge–Kutta et stabilité	Euler, Heun et RK4	MIT 10.34
11	Équations différentielles ordinaires : Euler, Runge–Kutta et stabilité	Stabilité, raideur et systèmes ; TP E	MIT 10.34

Semaine	Unité	Thèmes	Lecture
12	Équations aux dérivées partielles : différences finies	Différences finies pour l’équation de la chaleur	MIT 2.086
13	Équations aux dérivées partielles : différences finies	Laplace, ondes et CFL ; TP F	NOAA EMC
14	Optimisation, valeurs propres et calcul à grande échelle	Optimisation et méthode de la puissance	MIT 18.330
15	Optimisation, valeurs propres et calcul à grande échelle	Calcul à grande échelle, vérification et validation ; préparation à l’examen final	NOAA; NASA GISS

Votre progression

Cochez les unités et les TP à mesure que vous les terminez, et faites les quiz. La progression et les scores sont enregistrés uniquement dans ce navigateur et ne nous sont jamais envoyés.

Unités

Erreurs, nombres à virgule flottante et séries de Taylor

Erreur absolue et relative, chiffres significatifs, nombres à virgule flottante IEEE 754, epsilon machine, arrondi et annulation, et erreur de troncature issue des séries de Taylor.

Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette unité, vous saurez :

- Calculer l'erreur absolue et l'erreur relative.
- Expliquer l'epsilon machine en simple et double précision.
- Repérer et corriger l'annulation catastrophique.
- Borner l'erreur de troncature avec le terme de Taylor suivant.

Notions clés

- L'erreur absolue est |approché − exact| ; l'erreur relative divise par |exact|. L'erreur relative indique combien de chiffres sont justes.
- Les ordinateurs stockent les nombres en virgule flottante binaire. La double précision a un epsilon machine de $2^{-52} \approx 2.22 \times 10^{-16}$ (environ 16 chiffres) ; la simple précision a $2^{-23} \approx 1.19 \times 10^{-7}$ (environ 7 chiffres).
- La plupart des décimaux, comme 0.1, n'ont pas de forme binaire exacte, donc 0.1 + 0.2 − 0.3 donne environ 5.55×10^{-17} au lieu de 0.
- Soustraire des nombres presque égaux fait perdre des chiffres (annulation catastrophique). Réécrire la formule algébriquement corrige souvent le problème.
- L'erreur de troncature vient de l'arrêt d'un processus infini, comme une série de Taylor. Le premier terme omis estime l'erreur.

Équations clés

$$e_{rel} = \frac{|\tilde{x} - x|}{|x|}$$

```
e_rel=(| x-x|)/(|x|)
```

Erreur relative

$$\varepsilon_{mach} = 2^{-52} \approx 2.22 \times 10^{-16}$$

```
_mach=2^-52≈2.22×10^-16
```

Epsilon en double précision

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \dots$$

`f(x+h)=f(x)+hf'(x)+(h^2)/(2)f''(x)+`

Série de Taylor

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

Éviter l’annulation

Exemples résolus pas à pas

Exemple 1.1 Trouvez l’erreur relative de 22/7 comme approximation de π.

1. |22/7 − π| = 0.001264.
2. Divisez par π.

Réponse : Erreur relative = 4.02 × 10⁻⁴, donc environ 3 chiffres corrects.

Exemple 1.2 Calculez √(10⁸ + 1) − √(10⁸) sans perte de précision.

1. La soustraction directe annule la plupart des chiffres.
2. Use 1/(√(10⁸ + 1) + √(10⁸)).

Réponse : 5.0 × 10⁻⁵ (plus exactement 4.99999999875 × 10⁻⁵).

Exemple 1.3 Estimez l’erreur de e^0.1 ≈ 1 + 0.1.

1. Le terme suivant est 0.1²/2 = 0.005.
2. L’erreur vraie est e^0.1 − 1.1.

Réponse : Erreur = 0.00517, proche de l’estimation de 0.005.

Exercices

Faites chacun d’abord sur papier, puis vérifiez.

1. Combien de chiffres corrects donne la double précision ?

   Environ 16 (ε = 2.22 × 10⁻¹⁶).

2. Ajoutez le terme 0.1³/6 à e^0.1 ≈ 1.1. Nouvelle erreur ?

1.71×10^{-4}.

3. Pourquoi 0.1 + 0.2 − 0.3 ne vaut-il pas exactement 0 sur un ordinateur ?

   0.1 et 0.2 n'ont pas de forme binaire exacte ; le résultat vaut environ 5.55×10^{-17}.

4. Quel est l'epsilon en simple précision ?

   $2^{-23} = 1.19 \times 10^{-7}$.

Idées reçues fréquentes

Idée reçue : Les ordinateurs font de l'arithmétique exacte.
En réalité : Chaque opération arrondit au nombre à virgule flottante le plus proche.

Idée reçue : Des pas plus petits signifient toujours une erreur plus petite.
En réalité : L'erreur d'arrondi augmente quand les pas diminuent.

Idée reçue : L'erreur relative et l'erreur absolue sont identiques.
En réalité : L'erreur relative divise par la taille vraie.

Cartes mémoire

Erreur absolue

|approché − exact|.

Erreur relative

Erreur absolue / |exact|.

Epsilon machine

$2^{-52} \approx 2.22 \times 10^{-16}$ en double précision.

Annulation

Perte de chiffres en soustrayant des nombres proches.

Erreur de troncature

Vient de l'arrêt d'un processus infini.

Simple précision

Environ 7 chiffres.

Quiz d'autocontrôle

1. L'epsilon en double précision vaut environ…

2.2×10^{-16}

10^{-7}

10^{-3}

0

$2.2 \times 10^{-16}. 2^{-52}.$

2. Soustraire des nombres presque égaux provoque...

l'annulation

le dépassement de capacité

rien

des résultats exacts

l'annulation. Des chiffres perdus.

3. L'erreur de troncature vient de...

l'arrêt d'une série

le stockage binaire

les fautes de frappe

les unités

l'arrêt d'une série. Définition.

4. L'erreur relative divise par...

la valeur vraie

le pas

epsilon

10

la valeur vraie. Définition.

Refaire ce quiz

Comment cela aide à sauver la planète

Le Environmental Modeling Center de la NOAA décrit une prévision globale couplée à environ 3 km de résolution qui calculait la dynamique atmosphérique en précision 32 bits et tout le reste en 64 bits, un compromis délibéré entre vitesse et précision.

C'est le choix d'epsilon de cette unité en pratique : la simple précision (environ 7 chiffres) est plus rapide et utilise moitié moins de mémoire, donc les modélisateurs l'emploient là où l'erreur qu'elle ajoute reste inférieure à celle que le modèle a déjà.

Sur Saving Planets : Observation de la Terre · Introduction à la programmation

Sources : NOAA Environmental Modeling Center : Global Forecast System (GFS) (https://www.emc.ncep.noaa.gov/emc/pages/numerical_forecast_systems/gfs.php)

Ressources d'apprentissage gratuites

- MIT OpenCourseWare 18.330 Introduction to Numerical Analysis (printemps 2012) (https://ocw.mit.edu/courses/18-330-introduction-to-numerical-analysis-spring-2012/): Cours gratuits du MIT.
- MIT OpenCourseWare 2.086 Numerical Computation for Mechanical Engineers (automne 2014) (https://ocw.mit.edu/courses/2-086-numerical-computation-for-mechanical-engineers-fall-2014/): Cours gratuit du MIT.

☐ **J'ai terminé cette unité**

UNITÉ 2 · SEMAINES 2–3

Racines d’équations : bissection, Newton et sécante

Encadrement par bissection, méthode de Newton, méthode de la sécante, itération de point fixe, ordre de convergence et critères d’arrêt.

Objectifs d’apprentissage

À la fin de cette unité, vous saurez :

- Trouver une racine par bissection et prévoir le nombre d’étapes.
- Appliquer la méthode de Newton et reconnaître la convergence quadratique.
- Utiliser la méthode de la sécante quand la dérivée est inconnue.
- Choisir un critère d’arrêt.

Notions clés

- La bissection divise par deux un intervalle [a, b] où f change de signe. Elle converge toujours, mais d’un seul chiffre binaire par étape : n ≥ log$_2$((b − a)/tol).
- La méthode de Newton suit la tangente : x_{n+1} = x_n − f(x_n)/f'(x_n). Près d’une racine simple, elle converge quadratiquement, doublant le nombre de chiffres corrects à chaque étape.
- La méthode de la sécante remplace f' par la pente passant par les deux derniers points. Elle ne nécessite aucune dérivée et converge avec un ordre d’environ 1.618.
- Newton peut échouer si f' est proche de zéro ou si le départ est loin ; un repli par encadrement la rend sûre.
- Arrêtez-vous quand |x_{n+1} − x_n| et |f(x_n)| sont tous deux sous la tolérance, et plafonnez toujours le nombre d’itérations.

Équations clés

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

```
x_n+1=x_n-(f(x_n))/(f'(x_n))
```

Méthode de Newton

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

```
x_n+1=x_n-f(x_n)_n-x_n-1f(x_n)-f(x_n-1)
```

Méthode de la sécante

$$n \geq \log_2 \frac{b-a}{tol}$$

Étapes de bissection

$$|e_{n+1}| \approx C|e_n|^2$$

Convergence quadratique

Exemples résolus pas à pas

Exemple 2.1 Utilisez la bissection sur $f(x) = x^3 - x - 2$ sur $[1, 2]$. Donnez les trois premiers milieux et la racine.

1. $f(1) = -2$, $f(2) = 4$.
2. Milieux 1.5, 1.75, 1.625.

Réponse : Racine $x = 1.5214$.

Exemple 2.2 Combien d'étapes de bissection réduisent un intervalle de largeur 1 sous 10^{-6} ?

1. $\log_2(10^6) = 19.93$.

Réponse : 20 étapes.

Exemple 2.3 Utilisez la méthode de Newton sur $x^2 - 2$ à partir de $x_0 = 1$.

1. $x_1 = 1.5$, $x_2 = 1.41667$.
2. $x_3 = 1.414216$.

Réponse : $x_3 = 1.414216$, déjà 6 chiffres corrects.

Exercices

Faites chacun d'abord sur papier, puis vérifiez.

1. Appliquez Newton à $x^3 - x - 2$ à partir de $x_0 = 1.5$. Première étape ?

   1.52174.

2. Appliquez la méthode de la sécante à $x^2 - 2$ à partir de 1 et 2. Trois premiers itérés ?

   1.3333, 1.4000, 1.4146.

3. Quel ordre de convergence a la méthode de la sécante ?

Environ 1.618.

4. Pourquoi plafonner le nombre d’itérations ?

   Une méthode peut diverger ou boucler.

Idées reçues fréquentes

Idée reçue : Newton converge toujours.
En réalité : Elle peut diverger depuis un mauvais départ.

Idée reçue : La bissection est rapide.
En réalité : Elle gagne un bit par étape.

Idée reçue : Un petit f(x) signifie que x est proche de la racine.
En réalité : Pas si f est très plate.

Cartes mémoire

Dichotomie

Diviser par deux un intervalle à changement de signe.

Newton

x − f/f'.

Sécante

Newton avec une pente sur deux points.

Convergence quadratique

Les chiffres doublent à chaque étape.

Encadrement

Intervalle avec un changement de signe.

Critère d’arrêt

Pas et résidu sous la tolérance.

Quiz d’autocontrôle

1. Newton converge…

quadratiquement

linéairement

jamais

toujours cubiquement

quadratiquement. Près d'une racine simple.

2. La bissection nécessite…

un changement de signe

une dérivée

une matrice

rien

un changement de signe. Encadrement.

3. La sécante évite…

la dérivée

f

l'itération

les points de départ

la dérivée. Pente à partir de deux points.

4. Étapes pour atteindre 10^{-6} depuis une largeur 1 par bissection…

20

6

100

2

20. $\log_2 10^6$.

Refaire ce quiz

Comment cela aide à sauver la planète

L'USGS indique que MODFLOW est considéré comme une norme internationale pour simuler les eaux souterraines. L'une de ses versions, MODFLOW-NWT, utilise une formulation de Newton-Raphson pour améliorer la résolution des problèmes d'écoulement souterrain non confiné.

Les aquifères libres rendent les équations non linéaires, car l'épaisseur saturée dépend du niveau d'eau que l'on cherche. La méthode de Newton de cette unité est ce qui fait converger ces calculs de manière fiable.

Sur Saving Planets : Océans · Analyse I

Sources : USGS : MODFLOW and Related Programs (https://www.usgs.gov/mission-areas/water-resources/science/modflow-and-related-programs)

Ressources d'apprentissage gratuites

- OpenStax Calculus Volume 1, 4.9 La méthode de Newton (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/4-9-newtons-method): Section de manuel gratuite.
- MIT OpenCourseWare 18.330 Introduction to Numerical Analysis (printemps 2012) (https://ocw.mit.edu/courses/18-330-introduction-to-numerical-analysis-spring-2012/): Cours gratuits du MIT.

Regarder le cours magistral

Session 7: Solutions of Nonlinear Equations; Newton-Raphson Method (https://ocw.mit.edu/courses/10-34-numerical-methods-applied-to-chemical-engineering-fall-2015/resources/session-7-solutions-of-nonlinear-equations-newton-raphson-method/) (en anglais)

MIT 10.34 Numerical Methods Applied to Chemical Engineering (Fall 2015), MIT OpenCourseWare. Licence : CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Conditions d'utilisation (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Lien fourni uniquement pour l'étude gratuite ; Saving Planets n'est ni affilié à cette université ni soutenu par elle.

☐ **J'ai terminé cette unité**

Systèmes linéaires : élimination de Gauss, LU et conditionnement

Élimination de Gauss avec pivot partiel, factorisation LU, nombre d'opérations, conditionnement et sa limite sur la précision.

Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette unité, vous saurez :

- Résoudre un système 3 × 3 par élimination.
- Expliquer la factorisation LU et sa réutilisation.
- Estimer le coût de l'élimination.
- Utiliser le conditionnement pour juger la précision.

Notions clés

- L'élimination de Gauss réduit Ax = b à un système triangulaire supérieur, puis effectue la remontée. Le pivot partiel échange des lignes pour utiliser le plus grand pivot, ce qui contrôle l'erreur d'arrondi.
- La factorisation LU stocke l'élimination sous la forme A = LU. Une fois factorisée, chaque nouveau second membre ne coûte que deux résolutions triangulaires.
- L'élimination coûte environ $2n^3/3$ opérations en virgule flottante : doubler n multiplie le travail par 8.
- Le conditionnement $\kappa(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$ mesure la sensibilité. On peut perdre environ $\log_{10} \kappa$ chiffres de précision.
- Ne calculez jamais A^{-1} pour résoudre un système ; factorisez et résolvez plutôt.

Équations clés

$$A = LU$$

A=LU

Factorisation LU

$$\text{cost} \approx \tfrac{2}{3} n^3$$

Opérations d'élimination

$$\kappa(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$$

(A)=\|A\|\|A^-1\|

Conditionnement

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \kappa \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

Borne d'erreur

Exemples résolus pas à pas

Exemple 3.1 Résolvez 2x + y − z = 8, −3x − y + 2z = −11, −2x + y + 2z = −3.

1. Éliminez x des lignes 2 et 3, puis y de la ligne 3.
2. Faites la remontée.

Réponse : x = 2, y = 3, z = −1.

Exemple 3.2 Estimez le coût de l'élimination pour n = 1000.

1. $2 \times 1000^3/3$.

Réponse : Environ 6.67×10^8 opérations.

Exemple 3.3 Trouvez le conditionnement en norme 2 de [[1, 1], [1, 1.0001]].

1. Les lignes sont presque parallèles.
2. κ = σ_max/σ_min.

Réponse : κ ≈ 40,002, donc environ 4–5 chiffres peuvent être perdus.

Exercices

Faites chacun d'abord sur papier, puis vérifiez.

1. Combien de travail en plus pour n = 2000 que pour n = 1000 ?

   8 fois plus.

2. Opérations d'élimination pour n = 3 ?

   2 × 27/3 = 18.

3. Pourquoi pivoter ?

Pour éviter de diviser par de petits nombres et d'amplifier l'arrondi.

4. Chiffres perdus avec $\kappa = 10^8$ en double précision ?

   Environ 8 sur 16.

Idées reçues fréquentes

Idée reçue : Utiliser A^{-1} pour résoudre des systèmes.
En réalité : Factorisez et résolvez ; c'est moins coûteux et plus précis.

Idée reçue : Un petit déterminant signifie un mauvais conditionnement.
En réalité : Utilisez le conditionnement.

Idée reçue : Le pivot est facultatif.
En réalité : Sans lui, l'élimination peut échouer ou perdre en précision.

Cartes mémoire

Élimination de Gauss	**LU**
Réduire à une forme triangulaire.	$A = LU$.
Pivot	**Conditionnement**
Échanges de lignes pour la stabilité.	$\|A\|\|A^{-1}\|$.
Remontée	**Coût**
Résoudre des systèmes triangulaires.	$\approx 2n^3/3$.

Quiz d'autocontrôle

1. L'élimination coûte environ…

$2n^3/3$

n

n^2

2^n

$2n^3/3$. Triple boucle.

2. LU aide quand…

plusieurs seconds membres

n = 1

aucune solution

jamais

plusieurs seconds membres. Réutiliser les facteurs.

3. Un grand κ signifie…

sensible

facile

toujours singulier

symétrique

sensible. Amplifie les erreurs.

4. Le pivot partiel choisit…

le plus grand pivot

le plus petit

zéro

du hasard

le plus grand pivot. Stabilité.

Refaire ce quiz

Comment cela aide à sauver la planète

L'USGS indique qu'une caractéristique clé de MODFLOW 6 est sa capacité à résoudre plusieurs modèles numériques étroitement couplés dans un seul système d'équations.

Sa carte de la profondeur de la nappe sur les États-Unis continentaux provient d'une simulation parallèle de 256 domaines de modèle étroitement couplés sur 256 cœurs d'un supercalculateur de l'USGS. Chaque domaine est un grand système linéaire creux comme ceux de cette unité.

Sur Saving Planets : Algèbre linéaire · Océans

Sources : USGS : MODFLOW and Related Programs (https://www.usgs.gov/mission-areas/water-resources/science/modflow-and-related-programs)

Ressources d'apprentissage gratuites

- MIT OpenCourseWare 2.086 Numerical Computation for Mechanical Engineers (automne 2014) (https://ocw.mit.edu/courses/2-086-numerical-computation-for-mechanical-engineers-fall-2014/): Cours gratuit du MIT.
- MIT OpenCourseWare 10.34 Numerical Methods Applied to Chemical Engineering (automne 2015) (https://ocw.mit.edu/courses/10-34-numerical-methods-applied-to-chemical-engineering-fall-2015/): Cours gratuit du MIT.

Regarder le cours magistral

Lecture 3: Solving a Linear System (https://ocw.mit.edu/courses/18-085-computational-science-and-engineering-i-fall-2008/resources/lecture-3-solving-a-linear-system/) (en anglais)

MIT 18.085 Computational Science and Engineering I (Fall 2008), MIT OpenCourseWare. Licence : CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Conditions d'utilisation (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Lien fourni uniquement pour l'étude gratuite ; Saving Planets n'est ni affilié à cette université ni soutenu par elle.

☐ **J'ai terminé cette unité**

Solveurs itératifs : Jacobi, Gauss–Seidel et convergence

Itérations de Jacobi et de Gauss–Seidel, dominance diagonale, matrice d'itération et rayon spectral, systèmes creux et pourquoi les méthodes itératives passent à l'échelle.

Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette unité, vous saurez :

- Effectuer des étapes de Jacobi et de Gauss–Seidel.
- Tester la dominance diagonale.
- Utiliser le rayon spectral pour prévoir la vitesse de convergence.
- Expliquer pourquoi les grands systèmes creux utilisent l'itération.

Notions clés

- Jacobi met à jour chaque inconnue à partir de l'itéré précédent ; Gauss–Seidel utilise les nouvelles valeurs dès qu'elles sont calculées.
- Si A est à diagonale strictement dominante, les deux méthodes convergent depuis n'importe quel départ.
- L'erreur diminue à chaque étape d'un facteur d'environ le rayon spectral ρ de la matrice d'itération. Gauss–Seidel a souvent ρ_GS = ρ_J².
- Les grandes grilles donnent des matrices creuses avec seulement quelques éléments non nuls par ligne. Les méthodes itératives ne stockent que ces éléments, alors que l'élimination crée du remplissage.
- Arrêtez-vous quand le résidu ‖b − Ax‖ est petit par rapport à ‖b‖.

Équations clés

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j^{(k)}\right)$$

```
x_i^(k+1)=1a_ii(b_i-_j ia_ijx_j^(k))
```

Jacobi

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

Dominance diagonale

$$\|e_k\| \approx \rho^k \|e_0\|$$

Vitesse de convergence

$$r = b - Ax$$

`r=b-Ax`

Résidu

Exemples résolus pas à pas

Exemple 4.1 Faites deux étapes de Jacobi sur 4x + y = 1, x + 3y = 2 à partir de (0, 0).

1. Étape 1 : x = 1/4 = 0.25, y = 2/3 = 0.6667.
2. Étape 2 : x = (1 − 0.6667)/4, y = (2 − 0.25)/3.

Réponse : x = 0.0833, y = 0.5833 (exact 0.0909, 0.6364).

Exemple 4.2 Faites deux étapes de Gauss–Seidel sur le même système.

1. Étape 1 : x = 0.25, y = (2 − 0.25)/3 = 0.5833.
2. Étape 2 : x = 0.1042, y = 0.6319.

Réponse : x = 0.1042, y = 0.6319, plus proche que Jacobi.

Exemple 4.3 Trouvez les rayons spectraux de Jacobi et de Gauss–Seidel pour ce système.

1. ρ_J = √(1/12).
2. ρ_GS = ρ_J² = 1/12.

Réponse : ρ_J = 0.289; ρ_GS = 0.0833.

Exercices

Faites chacun d’abord sur papier, puis vérifiez.

1. [[4, 1], [1, 3]] est-elle à diagonale dominante ?

   Oui : 4 > 1 et 3 > 1.

2. Étapes de Gauss–Seidel (ρ = 0.0833) pour réduire l’erreur d’un facteur 10^6 ?

   Environ 6 ($0.0833^6 = 3.35 \times 10^{-7}$).

3. Troisième itéré de Gauss–Seidel ?

x = 0.0920, y = 0.6360.

4. Pourquoi ne pas éliminer sur une grille à un million d’inconnues ?

   Le remplissage consomme trop de mémoire et de temps.

Idées reçues fréquentes

Idée reçue : L’itération converge toujours.

En réalité : Il faut ρ < 1.

Idée reçue : Jacobi et Gauss–Seidel sont identiques.

En réalité : Gauss–Seidel utilise immédiatement les nouvelles valeurs.

Idée reçue : Un petit changement entre deux étapes signifie la convergence.

En réalité : Vérifiez aussi le résidu.

Cartes mémoire

Jacobi

Tout mettre à jour à partir des anciennes valeurs.

Gauss–Seidel

Utiliser immédiatement les nouvelles valeurs.

Rayon spectral

La plus grande |valeur propre|.

Dominance diagonale

|a_ii| > somme de la ligne.

Creux

Surtout des zéros.

Résidu

b − Ax.

Quiz d’autocontrôle

1. Converge si…

ρ < 1

ρ > 1

n est pair

A est singulière

ρ < 1. L’erreur diminue.

2. Gauss–Seidel utilise…

les valeurs les plus récentes

seulement les anciennes valeurs

aucune valeur

des inverses

les valeurs les plus récentes. Définition.

3. Creux signifie…

surtout des zéros

dense

petit n

singulière

surtout des zéros. Peu d’éléments non nuls.

4. Suffisant pour la convergence…

dominance diagonale

la symétrie seule

n = 2

rien

dominance diagonale. Théorème.

Refaire ce quiz

Comment cela aide à sauver la planète

Le GFS de la NOAA divise l'atmosphère en 127 couches verticales avec un espacement horizontal d'environ 13 km. Chaque point de grille n'est couplé qu'à ses voisins, donc les systèmes que construisent ces modèles sont immenses et creux.

Avec une surface terrestre de manuel de 5.1×10^8 km², une grille de 13 km compte environ 3.0 millions de colonnes et 383 millions de cellules. Des systèmes de cette taille se traitent avec des méthodes itératives et d'autres méthodes creuses, pas par simple élimination.

Sur Saving Planets : Observation de la Terre · Algèbre linéaire

Sources : NOAA Environmental Modeling Center : Global Forecast System (GFS) (https://www.emc.ncep.noaa.gov/emc/pages/numerical_forecast_systems/gfs.php)

Ressources d'apprentissage gratuites

- MIT OpenCourseWare 18.330 Introduction to Numerical Analysis (printemps 2012) (https://ocw.mit.edu/courses/18-330-introduction-to-numerical-analysis-spring-2012/): Cours gratuits du MIT.
- MIT OpenCourseWare 2.086 Numerical Computation for Mechanical Engineers (automne 2014) (https://ocw.mit.edu/courses/2-086-numerical-computation-for-mechanical-engineers-fall-2014/): Cours gratuit du MIT.

☐ **J'ai terminé cette unité**

Interpolation, splines et ajustement par moindres carrés

Interpolation linéaire et polynomiale, forme de Lagrange, danger des polynômes de haut degré, splines cubiques, et ajustements par moindres carrés d'une droite ou d'un polynôme avec résidus.

Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette unité, vous saurez :

- Interpoler linéairement entre des points de données.
- Construire un polynôme de Lagrange.
- Ajuster une droite par moindres carrés et interpréter sa pente.
- Choisir entre interpolation et ajustement.

Notions clés

- L'interpolation passe exactement par les données ; l'ajustement passe près de données bruitées et minimise la somme des carrés des résidus.
- Un polynôme de degré n passant par n + 1 points est unique. Les hauts degrés sur des points équidistants peuvent osciller fortement près des extrémités (phénomène de Runge).
- Les splines cubiques raccordent des morceaux cubiques de même pente et même courbure, donnant des courbes lisses sans oscillations sauvages.
- La droite des moindres carrés résout les équations normales $A^TAc = A^Ty$. La pente est un taux, avec des unités.
- Tracez les résidus : un motif dans ceux-ci signifie qu'il manque quelque chose au modèle, comme une courbure.

Équations clés

$$y = y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}(y_1 - y_0)$$

```
y=y_0+(x-x_0)/(x_1-x_0)(y_1-y_0)
```

Interpolation linéaire

$$p(x) = \sum_i y_i \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

```
p(x)=_i y_i_j i(x-x_j)/(x_i-x_j)
```

Forme de Lagrange

$$A^T A\, c = A^T y$$

```
A^TA c=A^Ty
```

Équations normales

$$\min \sum_i r_i^2$$

Moindres carrés

Exemples résolus pas à pas

Exemple 5.1 Les moyennes annuelles de Mauna Loa de la NOAA sont 390.10 ppm (2010) et 414.21 ppm (2020). Interpolez 2015.

1. y = 390.10 + 0.5 × 24.11.

Réponse : 402.16 ppm ; la valeur 2015 de la NOAA est 401.01, donc la série s'incurve vers le haut.

Exemple 5.2 Ajustez une droite par moindres carrés aux valeurs décennales 1960–2020 (316.91, 325.68, 338.76, 354.45, 369.71, 390.10, 414.21 ppm).

1. Résolvez les équations normales pour la pente et l'ordonnée à l'origine.

Réponse : Pente 1.613 ppm par an ; la droite prévoit 415.0 ppm pour 2025.

Exemple 5.3 Ajustez plutôt une parabole en t = année − 1960.

1. Moindres carrés avec les colonnes 1, t, t^2.

Réponse : c = 316.84 + 0.810t + 0.01338t^2 ; elle prévoit 426.0 ppm pour 2025, proche des 427.35 de la NOAA.

Exercices

Faites chacun d'abord sur papier, puis vérifiez.

1. Croissance moyenne 2010–2020 d'après les valeurs décennales ?

   2.41 ppm par an.

2. Croissance moyenne 2000–2010 ?

2.04 ppm par an.

3. Pourquoi la droite sous-estime-t-elle 2025 ?

   La croissance s’accélère ; les résidus forment une courbe.

4. Interpoler ou ajuster des données de laboratoire bruitées ?

   Fit.

Idées reçues fréquentes

Idée reçue : Les polynômes de plus haut degré ajustent toujours mieux.
En réalité : Ils peuvent osciller entre les points.

Idée reçue : Un bon R^2 signifie un bon modèle.
En réalité : Vérifiez la forme des résidus.

Idée reçue : L’extrapolation est aussi sûre que l’interpolation.
En réalité : Elle est beaucoup plus risquée.

Cartes mémoire

Interpolation

Exactement par les données.

Moindres carrés

Minimiser les carrés des résidus.

Spline

Cubique par morceaux et lisse.

Runge

Oscillations des ajustements de haut degré.

Résidu

Données moins modèle.

Équations normales

$A^TAc = A^Ty$.

Quiz d’autocontrôle

1. Les moindres carrés minimisent…

la somme des carrés des résidus

l’erreur maximale

la pente

le degré

la somme des carrés des résidus. Définition.

2. Le phénomène de Runge est...

une oscillation aux extrémités

l'annulation

une divergence

le pivot

une oscillation aux extrémités. Polynômes de haut degré.

3. Les splines sont...

des cubiques par morceaux

des droites uniques

du hasard

Série de Taylor

des cubiques par morceaux. Définition.

4. Les équations normales servent aux...

$A^TAc = A^Ty$

$Ax = 0$

LU

$f = 0$

$A^TAc = A^Ty$. Moindres carrés.

Refaire ce quiz

Comment cela aide à sauver la planète

La NOAA indique que la série de Mauna Loa, commencée par C. David Keeling de Scripps en mars 1958, est la plus longue série de mesures directes du CO_2 atmosphérique. La moyenne mensuelle était de 426.07 ppm en septembre 2026, contre 424.37 ppm en septembre 2025.

Les moyennes annuelles de la NOAA sont passées de 316.91 ppm en 1960 à 427.35 ppm en 2025. La courbe ascendante apparaît dans les résidus de cette unité : une droite la manque, et une parabole l'ajuste.

Sur Saving Planets : Solutions · Observation de la Terre

Sources : NOAA Global Monitoring Laboratory: Trends in atmospheric CO_2 (Mauna Loa) (https://gml.noaa.gov/ccgg/trends/) · NOAA GML: Mauna Loa annual mean CO_2 data (https://gml.noaa.gov/webdata/ccgg/trends/co2/co2_annmean_mlo.txt)

Ressources d'apprentissage gratuites

- PhET: Least-Squares Regression (https://phet.colorado.edu/en/simulations/least-squares-regression): Ajuster des droites en interactif.
- PhET : Curve Fitting (https://phet.colorado.edu/en/simulations/curve-fitting): Ajustements polynomiaux interactifs.

Regarder le cours magistral

Lecture 11: Least Squares (part 2) (https://ocw.mit.edu/courses/18-085-computational-science-and-engineering-i-fall-2008/resources/lecture-11-least-squares-part-2/) (en anglais)

MIT 18.085 Computational Science and Engineering I (Fall 2008), MIT OpenCourseWare. Licence : CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Conditions d'utilisation (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Lien fourni uniquement pour l'étude gratuite ; Saving Planets n'est ni affilié à cette université ni soutenu par elle.

☐ **J'ai terminé cette unité**

Dérivation numérique

Différences avant, arrière et centrées, leur erreur de troncature, l'équilibre avec l'erreur d'arrondi et le meilleur pas, dérivées secondes et extrapolation de Richardson.

Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette unité, vous saurez :

- Appliquer les différences avant et centrées.
- Donner l'ordre de chaque formule.
- Choisir un pas qui équilibre troncature et arrondi.
- Estimer une dérivée seconde.

Notions clés

- La différence avant (f(x + h) − f(x))/h a une erreur proportionnelle à h (premier ordre).
- La différence centrée (f(x + h) − f(x − h))/(2h) a une erreur proportionnelle à h^2 (second ordre), donc diviser h par deux divise l'erreur par 4.
- L'erreur d'arrondi croît comme ε/h quand h diminue. Pour les différences avant, le meilleur h est environ $\sqrt{\varepsilon} \approx 1.49 \times 10^{-8}$; pour les différences centrées, environ $\varepsilon^{(1/3)} \approx 6.06 \times 10^{-6}$.
- La dérivée seconde est (f(x + h) − 2f(x) + f(x − h))/h^2, également du second ordre.
- L'extrapolation de Richardson combine deux pas pour annuler le terme d'erreur dominant.

Équations clés

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Différence avant

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

Différence centrée

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

Différence seconde

$$h_{opt} \approx \sqrt{\varepsilon}$$

Meilleur pas avant

Exemples résolus pas à pas

Exemple 6.1 Estimez la dérivée de sin x en x = 1 par une différence avant, h = 0.1.

1. (sin 1.1 − sin 1)/0.1.

Réponse : 0.4974 ; valeur exacte cos 1 = 0.5403 ; erreur −0.0429.

Exemple 6.2 Recommencez avec une différence centrée.

1. (sin 1.1 − sin 0.9)/0.2.

Réponse : 0.5394 ; erreur −0.00090, environ 47.7 fois plus petite.

Exemple 6.3 Trouvez le meilleur pas de différence avant en double précision.

1. $h \approx \sqrt{(2.22 \times 10^{-16})}$.

Réponse : $h \approx 1.49 \times 10^{-8}$.

Exercices

Faites chacun d'abord sur papier, puis vérifiez.

1. Divisez h par deux dans une différence centrée. Erreur ?

   Environ ¼ aussi grande.

2. Divisez h par deux dans une différence avant. Erreur ?

   Environ ½ aussi grande.

3. Meilleur pas de différence centrée en double précision ?

   Environ ε^(1/3) = 6.06×10^{-6}.

4. Pourquoi ne pas utiliser $h = 10^{-15}$?

   L'erreur d'arrondi ε/h domine.

Idées reçues fréquentes

Idée reçue : Un h plus petit est toujours meilleur.

En réalité : Sous l'optimum, l'arrondi l'emporte.

Idée reçue : Les différences avant et centrées sont aussi précises.

En réalité : La centrée est du second ordre.

Idée reçue : Dériver des données bruitées est facile.

En réalité : Les différences amplifient le bruit ; lissez ou ajustez d'abord.

Cartes mémoire

Différence avant

Premier ordre.

Différence centrée

Second ordre.

Différence seconde

$f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)$ divisé par h^2.

h optimal

$\approx \sqrt{\varepsilon}$ pour la différence avant.

Richardson

Annuler l'erreur dominante.

Ordre

Exposant de h dans l'erreur.

Quiz d'autocontrôle

1. Erreur de la différence centrée $\propto$...

h^2

h

1/h

h^3 toujours

h^2. Symétrique.

2. La différence avant est d'ordre ...

d'abord

deux

zéro

quatre

d’abord. Erreur ∝ h.

3. Le meilleur h avant vaut environ…

√ε

ε

1

0.1

√ε. Équilibre.

4. Le bruit des données est … par la différenciation.

amplifié

supprimé

divisé par deux

inchangée

amplifié. Divise par h.

Refaire ce quiz

Comment cela aide à sauver la planète

La NOAA indique que le GFS produit des sorties horaires pour les 120 premières heures, puis toutes les 3 heures pour les jours 5 à 16. Les prévisionnistes et les modèles en aval font des différences sur ces sorties pour obtenir des taux comme la tendance de pression et l’intensité de pluie.

Cette unité montre pourquoi le pas de temps des sorties enregistrées compte : un taux calculé à partir de valeurs toutes les 3 heures avec une différence centrée est bien plus précis qu’une différence unilatérale sur le même intervalle.

Sur Saving Planets : GOES-19 · Analyse I

Sources : NOAA Environmental Modeling Center : Global Forecast System (GFS) (https://www.emc.ncep.noaa.gov/emc/pages/numerical_forecast_systems/gfs.php)

Ressources d’apprentissage gratuites

- MIT OpenCourseWare 18.330 Introduction to Numerical Analysis (printemps 2012) (https://ocw.mit.edu/courses/18-330-introduction-to-numerical-analysis-spring-2012/): Cours gratuits du MIT.
- PhET : Calculus Grapher (https://phet.colorado.edu/en/simulations/calculus-grapher): Dérivées de façon interactive.

- [ ] **J’ai terminé cette unité**

Intégration numérique

Règles des trapèzes et de Simpson, règles composites et ordres d'erreur, extrapolation de Romberg, quadrature de Gauss, et intégration de données mesurées.

Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette unité, vous saurez :

- Appliquer les règles composites des trapèzes et de Simpson.
- Prévoir comment l'erreur diminue avec n.
- Utiliser Romberg pour améliorer un résultat.
- Appliquer la quadrature de Gauss à 2 points.

Notions clés

- La règle des trapèzes relie les points par des segments. Son erreur décroît comme h^2 : doubler n la divise par 4.
- La règle de Simpson ajuste des paraboles sur des paires d'intervalles (n pair). Son erreur décroît comme h^4 : doubler n la divise par 16.
- Extrapolation de Romberg : $T_{2n} + (T_{2n} - T_n)/3$ annule l'erreur en h^2 de la règle des trapèzes (elle est égale à la règle de Simpson).
- La quadrature de Gauss choisit les meilleurs points : 2 points en $\pm 1/\sqrt{3}$ intègrent exactement les cubiques.
- Pour des données mesurées à pas fixe, appliquez directement la règle des trapèzes ou de Simpson aux échantillons.

Équations clés

$$T_n = h\left[\tfrac{1}{2}f_0 + f_1 + \cdots + f_{n-1} + \tfrac{1}{2}f_n\right]$$

```
T_n=h[12f_0+f_1++f_n-1+12f_n]
```

Règle des trapèzes

$$S_n = \tfrac{h}{3}\left[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + \cdots + 4f_{n-1} + f_n\right]$$

```
S_n= h3[f_0+4f_1+2f_2++4f_n-1+f_n]
```

Méthode de Simpson

$$\int_{-1}^{1} f \approx f\left(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Gauss à 2 points

$$E_T \propto h^2,\ E_S \propto h^4$$

Ordres d’erreur

Exemples résolus pas à pas

Exemple 7.1 Estimez $\int_0^1 e^x\,dx$ par la règle des trapèzes, n = 4.

1. h = 0.25 ; additionnez les valeurs pondérées.

Réponse : $T_4 = 1.72722$; exact e − 1 = 1.71828 ; erreur 0.00894.

Exemple 7.2 Recommencez avec la règle de Simpson, n = 4.

1. Poids 1, 4, 2, 4, 1 fois h/3.

Réponse : $S_4 = 1.718319$; erreur 3.70×10^{-5}.

Exemple 7.3 Utilisez la quadrature de Gauss à 2 points sur la même intégrale.

1. Ramenez [0, 1] à [−1, 1] : points 0.5 ± 0.5/√3, poids ½ chacun.

Réponse : 1.717896 ; erreur -3.85×10^{-4} avec seulement 2 valeurs de la fonction.

Exercices

Faites chacun d’abord sur papier, puis vérifiez.

1. Erreur des trapèzes avec n = 8 ?

   0.00224, environ ¼ de l’erreur pour n = 4.

2. Romberg à partir de T_4 et T_8 ?

   1.718284.

3. Règle de Simpson avec n = 2 ?

   1.718861.

4. Pourquoi n doit-il être pair pour Simpson ?

   Elle utilise des paires d'intervalles.

Idées reçues fréquentes

Idée reçue : Simpson fonctionne pour tout n.

En réalité : n doit être pair.

Idée reçue : Plus de points aident toujours autant.

En réalité : Les règles d'ordre plus élevé gagnent beaucoup plus vite.

Idée reçue : Les points de Gauss peuvent être n'importe où.

En réalité : Ce sont les racines fixes des polynômes de Legendre.

Cartes mémoire

Trapèzes

Erreur $\propto h^2$.

Simpson

Erreur $\propto h^4$.

Romberg

Extrapoler les résultats des trapèzes.

Quadrature de Gauss

Points et poids optimaux.

Règle composite

Appliquer sur de nombreux sous-intervalles.

n pair

Nécessaire pour Simpson.

Quiz d'autocontrôle

1. Erreur de Simpson $\propto$...

h^4

h^2

h

1

h^4. Quatrième ordre.

2. Doubler n dans la règle des trapèzes divise l'erreur par…

4

2

16

1

4. h^2.

3. Gauss à 2 points est exacte pour…

les cubiques

toutes les fonctions

les droites seulement

rien

les cubiques. Degré 2n − 1.

4. Romberg annule…

l'erreur dominante

toute erreur

l'arrondi

f

l'erreur dominante. Extrapolation.

Refaire ce quiz

Comment cela aide à sauver la planète

La NOAA explique que chaque moyenne mensuelle de Mauna Loa est la moyenne de moyennes journalières, elles-mêmes fondées sur des moyennes horaires, en n'utilisant que les heures en conditions de « fond ».

Une moyenne est une intégrale divisée par l'intervalle, donc construire des moyennes mensuelles à partir de valeurs horaires relève de l'intégration numérique, l'idée des trapèzes de cette unité appliquée à des mesures réelles.

Sur Saving Planets : Analyse II · Solutions

Sources : NOAA Global Monitoring Laboratory: Trends in atmospheric CO_2 (Mauna Loa) (https://gml.noaa.gov/ccgg/trends/)

Ressources d'apprentissage gratuites

- OpenStax Calculus Volume 2, 3.6 Intégration numérique (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/3-6-numerical-integration): Section de manuel gratuite.
- PhET : Calculus Grapher (https://phet.colorado.edu/en/simulations/calculus-grapher): Intégrales de façon interactive.

Regarder le cours magistral

Session 13: ODE-IVP and Numerical Integration 1 (https://ocw.mit.edu/courses/10-34-numerical-methods-applied-to-chemical-engineering-fall-2015/resources/session-13-ode-ivp-and-numerical-integration-1/) (en anglais)

MIT 10.34 Numerical Methods Applied to Chemical Engineering (Fall 2015), MIT OpenCourseWare. Licence : CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Conditions d'utilisation (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Lien fourni uniquement pour l'étude gratuite ; Saving Planets n'est ni affilié à cette université ni soutenu par elle.

☐ **J'ai terminé cette unité**

UNITÉ 8 · SEMAINES 10–11

Équations différentielles ordinaires : Euler, Runge–Kutta et stabilité

Méthode d’Euler, méthode de Heun, Runge–Kutta d’ordre quatre, erreur locale et globale, limites de stabilité, équations raides et méthodes implicites, et systèmes d’EDO.

Objectifs d’apprentissage

À la fin de cette unité, vous saurez :

- Faire avancer une EDO avec Euler et RK4.
- Relier le pas à l’erreur globale.
- Trouver la limite de stabilité explicite pour y' = −λy.
- Reconnaître les problèmes raides.

Notions clés

- La méthode d’Euler y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n) a une erreur globale proportionnelle à h (premier ordre).
- Runge–Kutta d’ordre quatre (RK4) utilise quatre échantillons de pente par pas ; son erreur globale décroît comme h⁴.
- Pour y' = −λy, Euler explicite n’est stable que si h < 2/λ. Au-delà, la solution numérique croît alors que la vraie décroît.
- Les problèmes raides ont des parties très rapides et très lentes. Les méthodes implicites comme Euler implicite restent stables avec de grands pas.
- Les EDO d’ordre supérieur deviennent des systèmes du premier ordre, que les mêmes méthodes résolvent.

Équations clés

$$y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n)$$

```
y_n+1=y_n+hf(t_n,y_n)
```

Euler

$$y_{n+1} = y_n + \tfrac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

```
y_n+1=y_n+ h6(k_1+2k_2+2k_3+k_4)
```

RK4

$$h < \frac{2}{\lambda}$$

Stabilité d’Euler pour y' = −λy

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1})$$

y_n+1=y_n+hf(t_n+1,y_n+1)

Euler implicite

Exemples résolus pas à pas

Exemple 8.1 Résolvez y' = −y, y(0) = 1 jusqu’à t = 1 avec Euler, h = 0.1.

1. Chaque pas multiplie par 0.9.
2. y(1) ≈ 0.9^{10}.

Réponse : 0.34868 contre 0.36788 exact ; erreur −0.0192.

Exemple 8.2 Faites un pas RK4 de h = 0.1 sur le même problème.

1. $k_1 = -1$, $k_2 = -0.95$, $k_3 = -0.9525$, $k_4 = -0.90475$.

Réponse : y(0.1) = 0.9048375 contre 0.9048374 exact.

Exemple 8.3 Un café refroidit selon T' = −0.1(T − 20) à partir de 90 °C (valeurs d’exemple). Utilisez Euler avec h = 1 min pendant 10 min.

1. À chaque pas, T − 20 est multiplié par 0.9.

Réponse : 44.41 °C contre 45.75 °C exact.

Exercices

Faites chacun d’abord sur papier, puis vérifiez.

1. Euler avec h = 0.05 jusqu’à t = 1 sur y' = −y ?

   0.95^{20} = 0.35849, erreur environ moitié.

2. Limite de stabilité pour y' = −50y avec Euler ?

   h < 0.04.

3. Un pas de Heun de h = 0.1 sur y' = −y ?

   0.905.

4. Comment résoudre y'' = −y avec ces méthodes ?

   Écrivez-la sous la forme y' = v, v' = −y.

Idées reçues fréquentes

Idée reçue : Un pas plus petit est toujours stable.

En réalité : Seulement sous la limite, et l'arrondi croît avec de nombreux pas.

Idée reçue : RK4 est exacte.

En réalité : Son erreur est petite mais pas nulle.

Idée reçue : Les méthodes implicites sont toujours plus lentes.

En réalité : Pour les problèmes raides, elles sont bien plus rapides au total.

Cartes mémoire

Euler

Explicite du premier ordre.

RK4

Quatrième ordre, 4 pentes.

Stabilité

Les erreurs ne croissent pas.

Raide

Échelles rapides et lentes à la fois.

Euler implicite

Implicite, très stable.

Système

Ordre supérieur → premier ordre.

Quiz d'autocontrôle

1. Erreur globale d'Euler ∝…

h

h^4

h^2

1

h. Premier ordre.

2. RK4 utilise … pentes.

4

1

2

10

4. k_1 à k_4.

3. Euler est stable pour y' = −λy si…

h < 2/λ

h > 2/λ

tout h

λ < 0

h < 2/λ. Amplification |1 − hλ| < 1.

4. Les problèmes raides favorisent…

les méthodes implicites

Euler

la bissection

Simpson

les méthodes implicites. Stabilité.

Refaire ce quiz

Comment cela aide à sauver la planète

La NOAA indique que le GFS tourne quatre fois par jour et prévoit jusqu'à 16 jours à l'avance. La page de l'EMC décrit aussi un calcul de recherche couplé à 3 km qui a pris environ 40,000 secondes de temps machine pour chaque prévision de 24 heures, sur 233 nœuds.

Cela fait environ 11.1 heures de calcul par jour de prévision, donc le modèle n'a tourné qu'environ 2.16 fois plus vite que le temps réel. Chaque prévision est une résolution d'EDO et d'EDP par pas de temps, et le pas stable fixe le coût.

Sur Saving Planets : Équations différentielles · GOES-19

Sources : NOAA Environmental Modeling Center : Global Forecast System (GFS) (https://www.emc.ncep.noaa.gov/emc/pages/numerical_forecast_systems/gfs.php)

Ressources d'apprentissage gratuites

- MIT OpenCourseWare 10.34 Numerical Methods Applied to Chemical Engineering (automne 2015) (https://ocw.mit.edu/courses/10-34-numerical-methods-applied-to-chemical-engineering-fall-2015/): Cours gratuit du MIT.
- PhET : Projectile Motion (https://phet.colorado.edu/en/simulations/projectile-motion): Comparez avec votre solveur.

Regarder le cours magistral

Session 18: Differential Algebraic Equations 2 (https://ocw.mit.edu/courses/10-34-numerical-methods-applied-to-chemical-engineering-fall-2015/resources/session-18-differential-algebraic-equations-2/) (en anglais)

MIT 10.34 Numerical Methods Applied to Chemical Engineering (Fall 2015), MIT OpenCourseWare. Licence : CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Conditions d'utilisation (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Lien fourni uniquement pour l'étude gratuite ; Saving Planets n'est ni affilié à cette université ni soutenu par elle.

☐ **J'ai terminé cette unité**

Équations aux dérivées partielles : différences finies

Grilles et stencils, l'équation de la chaleur explicite et sa limite de stabilité, schémas implicite et de Crank–Nicolson, équation de Laplace et résolution itérative, condition CFL pour les ondes, et coût de la résolution.

Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette unité, vous saurez :

- Écrire des stencils aux différences finies pour les équations de la chaleur et de Laplace.
- Appliquer la limite de stabilité explicite r ≤ ½.
- Expliquer la condition CFL.
- Estimer comment le coût croît avec la résolution.

Notions clés

- Remplacez les dérivées par des différences sur une grille. Pour u_t = αu_xx, le schéma explicite est u_i^{n+1} = u_i^n + r(u_{i+1}^n − 2u_i^n + u_{i−1}^n) avec r = αΔt/Δx².
- Le schéma explicite de la chaleur n'est stable que si r ≤ ½, donc diviser Δx par deux oblige à diviser Δt par 4.
- Les schémas implicite et de Crank–Nicolson sont stables pour tout Δt mais nécessitent une résolution linéaire à chaque pas.
- L'équation de Laplace u_xx + u_yy = 0 donne un stencil à 5 points ; Jacobi ou Gauss–Seidel (unité 4) la résolvent.
- Pour les ondes et les écoulements, la condition CFL c Δt/Δx ≤ 1 relie le pas de temps à l'espacement de grille. Raffiner une grille horizontale 2D d'un facteur k coûte environ k² colonnes de plus et k pas de temps de plus.

Équations clés

$$r = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} \le \frac{1}{2}$$

```
r=(αΔ t)/(Δ x^2)12
```

Stabilité explicite de la chaleur

$$u_{i,j} = \tfrac{1}{4}\left(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}\right)$$

```
u_i,j=14(u_i+1,j+u_i-1,j+u_i,j+1+u_i,j-1)
```

Laplace à 5 points

$$\frac{c\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

Condition CFL

$$\text{cost} \propto k^3$$

Raffinement horizontal d’un facteur k

Exemples résolus pas à pas

Exemple 9.1 Trouvez le plus grand pas de temps explicite stable pour α = 1.0 × 10⁻⁴ m²/s et Δx = 0.01 m (valeurs d’exemple).

1. Δt ≤ 0.5Δx²/α.

Réponse : Δt ≤ 0.5 s.

Exemple 9.2 La NOAA prévoit d’affiner le GFS de 13 km à 9 km. Estimez la variation du nombre de colonnes horizontales.

1. (13/9)².

Réponse : Environ 2.09 fois plus de colonnes.

Exemple 9.3 En incluant un pas de temps limité par la CFL, estimez l’augmentation totale du coût.

1. (13/9)³.

Réponse : Environ 3.01 fois le travail.

Exercices

Faites chacun d’abord sur papier, puis vérifiez.

1. Divisez Δx par deux dans le schéma explicite de la chaleur. Nouvelle limite de Δt ?

   ¼ aussi grand.

2. Colonnes sur une grille globale de 13 km (Terre 5.1 × 10⁸ km², valeur de manuel) ?

Environ 3.02 millions.

3. Cellules avec 127 couches ?

   Environ 3.83×10^8.

4. Cellules à 9 km avec 127 couches ?

   Environ 8.0×10^8.

Idées reçues fréquentes

Idée reçue : N'importe quel pas de temps convient si la grille est fine.
En réalité : Les grilles plus fines exigent des pas explicites plus petits.

Idée reçue : Les schémas implicites sont toujours plus précis.
En réalité : Ils sont plus stables, pas automatiquement plus précis.

Idée reçue : Doubler la résolution double le coût.
En réalité : En 2D plus le temps, c'est environ 8×.

Cartes mémoire

Stencil

Motif de points voisins.

r

$\alpha \Delta t / \Delta x^2$.

CFL

$c\Delta t/\Delta x \le 1$.

Crank–Nicolson

Implicite, second ordre.

Laplacien à 5 points

Moyenne des voisins.

Coût de la résolution

$\approx k^3$ pour un raffinement d'un facteur k.

Quiz d'autocontrôle

1. Stabilité explicite de la chaleur…

$r \le \frac{1}{2}$

$r \le 2$

tout r

r ≥ 1

r ≤ ½. Von Neumann.

2. La CFL relie…

Δt et Δx

α et u

n et ε

x et y

Δt et Δx. Vitesse de l’information.

3. Le stencil de Laplace utilise … points.

5

2

9 toujours

1

5. Centre + 4.

4. Crank–Nicolson est…

inconditionnellement stable

explicite

instable

du premier ordre

inconditionnellement stable. Moyenne implicite.

Refaire ce quiz

Comment cela aide à sauver la planète

La mise à niveau des supercalculateurs de la NOAA en 2023 devait permettre au GFS de passer à une résolution horizontale de neuf kilomètres, contre 13 dans la version actuelle, afin de voir et simuler des phénomènes à plus petite échelle.

La mise à l'échelle de cette unité montre pourquoi il fallait de nouveaux ordinateurs : 2.09 fois plus de colonnes et, avec un pas de temps limité par la CFL, environ 3 fois le travail pour chaque prévision.

Sur Saving Planets : Mécanique des fluides · Thermodynamique

Sources : NOAA: NOAA completes upgrade to weather and climate supercomputer system (Aug. 10, 2023) (https://www.noaa.gov/news-release/noaa-completes-upgrade-to-weather-and-climate-supercomputer-system) · NOAA Environmental Modeling Center : Global Forecast System (GFS) (https://www.emc.ncep.noaa.gov/emc/pages/numerical_forecast_systems/gfs.php)

Ressources d'apprentissage gratuites

- MIT OpenCourseWare 2.086 Numerical Computation for Mechanical Engineers (automne 2014) (https://ocw.mit.edu/courses/2-086-numerical-computation-for-mechanical-engineers-fall-2014/): Cours gratuit du MIT.
- MIT OpenCourseWare 18.330 Introduction to Numerical Analysis (printemps 2012) (https://ocw.mit.edu/courses/18-330-introduction-to-numerical-analysis-spring-2012/): Cours gratuits du MIT.

Regarder le cours magistral

Session 22: Partial Differential Equations 1 (https://ocw.mit.edu/courses/10-34-numerical-methods-applied-to-chemical-engineering-fall-2015/resources/session-22-partial-differential-equations-1/) (en anglais)

MIT 10.34 Numerical Methods Applied to Chemical Engineering (Fall 2015), MIT OpenCourseWare. Licence : CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Conditions d'utilisation (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Lien fourni uniquement pour l'étude gratuite ; Saving Planets n'est ni affilié à cette université ni soutenu par elle.

☐ **J'ai terminé cette unité**

Optimisation, valeurs propres et calcul à grande échelle

Recherche par section dorée, descente de gradient et méthode de Newton pour la minimisation, méthode de la puissance pour les valeurs propres, nombre d'opérations, calcul parallèle, et vérification et validation des modèles.

Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette unité, vous saurez :

- Minimiser une fonction 1D par recherche par section dorée.
- Appliquer la descente de gradient et choisir un pas.
- Trouver une valeur propre dominante par la méthode de la puissance.
- Estimer le temps de calcul à partir du nombre d'opérations et de la vitesse de la machine.

Notions clés

- La recherche par section dorée réduit un intervalle d'un facteur 0.618 à chaque étape sans dérivées.
- La descente de gradient descend la pente : x ← x − α∇f. Un α trop grand diverge ; trop petit, elle rampe.
- La méthode de Newton pour la minimisation résout ∇f = 0 à l'aide de la hessienne ; elle converge quadratiquement près du minimum.
- La méthode de la puissance multiplie à répétition par A ; le vecteur s'aligne sur le vecteur propre dominant, et le quotient de Rayleigh donne sa valeur propre.
- La vérification demande si le code résout correctement les équations ; la validation demande si ce sont les bonnes équations, en les confrontant aux observations.

Équations clés

$$\tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$$

`τ=(5-1)/(2)≈0.618`

Facteur du nombre d'or

$$x_{k+1} = x_k - \alpha \nabla f(x_k)$$

`x_k+1=x_k-α f(x_k)`

Descente de gradient

$$\lambda \approx \frac{v^T A v}{v^T v}$$

Quotient de Rayleigh

$$t = \frac{\text{flops}}{\text{flop rate}}$$

`t= rate`

Temps de calcul

Exemples résolus pas à pas

Exemple 10.1 De combien la recherche par section dorée réduit-elle un intervalle en 10 étapes ?

1. 0.618^{10}.

Réponse : À 0.0081 (0.81%) de sa largeur.

Exemple 10.2 Minimisez $f = (x - 3)^2$ par descente de gradient avec $\alpha = 0.1$ depuis $x = 0$. Où êtes-vous après 5 étapes ?

1. À chaque étape, $x - 3$ est multiplié par 0.8.
2. $x_5 = 3(1 - 0.8^5)$.

Réponse : $x_5 = 2.017$.

Exemple 10.3 Appliquez la méthode de la puissance à [[2, 1], [1, 2]] depuis (1, 0), 5 étapes.

1. v = (122, 121).
2. Quotient de Rayleigh.

Réponse : $\lambda \approx 2.99997$ (exact 3).

Exercices

Faites chacun d'abord sur papier, puis vérifiez.

1. Combien de temps prend une résolution dense à 10,000 inconnues ($2n^3/3$ flops) à 14.5 pétaflops ?

   $6.67 \times 10^{11} / 1.45 \times 10^{16} = 4.6 \times 10^{-5}$ s.

2. Vitesse combinée des deux ordinateurs de 14.5 pétaflops de la NOAA ?

29 pétaflops.

3. Capacité opérationnelle plus recherche (20 pétaflops) ?

   49 pétaflops.

4. Vérification ou validation : comparer un modèle aux données de Mauna Loa ?

   Validation.

Idées reçues fréquentes

Idée reçue : Un pas plus grand accélère toujours la descente de gradient.
En réalité : Il peut dépasser la cible et diverger.

Idée reçue : La méthode de la puissance trouve toutes les valeurs propres.
En réalité : Seulement la dominante.

Idée reçue : Un code qui converge est un modèle correct.
En réalité : Il doit encore être validé.

Cartes mémoire

Section dorée

L'intervalle se réduit d'un facteur 0.618.

Descente de gradient

$x - \alpha \nabla f$.

Méthode de la puissance

Valeur propre dominante.

Quotient de Rayleigh

$v^T Av / v^T v$.

Vérification

Résoudre correctement les équations.

Validation

Résoudre les bonnes équations.

Quiz d'autocontrôle

1. La section dorée réduit d'un facteur…

0.618

0.5

0.1

2

0.618. Nombre d’or.

2. La méthode de la puissance trouve…

la valeur propre dominante

toutes les racines

l’inverse

au déterminant

la valeur propre dominante. Multiplication répétée.

3. La validation compare avec…

les observations

le code

rien

epsilon

les observations. Confrontation au réel.

4. La descente de gradient se déplace…

vers le bas

vers le haut

au hasard

de côté

vers le bas. $-\nabla f$.

Refaire ce quiz

Comment cela aide à sauver la planète

La NOAA indique que ses supercalculateurs jumeaux météo et climat, Dogwood à Manassas (Virginie) et Cactus à Phoenix (Arizona), ont été mis à niveau en août 2023 à 14.5 pétaflops chacun ; ensemble, le système de prévision peut traiter 29 quadrillions de calculs par seconde. Avec des machines de recherche totalisant 20 pétaflops, la capacité de la NOAA est de 49 pétaflops, et plus de 20 modèles opérationnels de prévision numérique du temps tournent sur le système.

Le NASA GISS met librement à disposition le code de son modèle du système Terre ModelE, et son analyse des températures de surface GISTEMP est mise à jour vers le 10 de chaque mois. Le code et les données ouverts permettent à chacun de vérifier et valider les méthodes numériques de la science du climat.

Sur Saving Planets : Solutions · Introduction à la programmation

Sources : NOAA: NOAA completes upgrade to weather and climate supercomputer system (Aug. 10, 2023) (https://www.noaa.gov/news-release/noaa-completes-upgrade-to-weather-and-climate-supercomputer-system) · NASA GISS : modèle du système Terre GISS, ModelE (https://www.giss.nasa.gov/tools/modelE/) · NASA GISS: GISS Surface Temperature Analysis (GISTEMP v4) (https://data.giss.nasa.gov/gistemp/)

Ressources d’apprentissage gratuites

- MIT OpenCourseWare 18.330 Introduction to Numerical Analysis (printemps 2012) (https://ocw.mit.edu/courses/18-330-introduction-to-numerical-analysis-spring-2012/): Cours gratuits du MIT.
- MIT OpenCourseWare 10.34 Numerical Methods Applied to Chemical Engineering (automne 2015) (https://ocw.mit.edu/courses/10-34-numerical-methods-applied-to-chemical-engineering-fall-2015/): Cours gratuit du MIT.

☐ **J’ai terminé cette unité**

Exercices

Ces exercices sont dans chaque unité. Faites-les sur papier, puis ouvrez la réponse.

1. Erreurs, nombres à virgule flottante et séries de Taylor
   4 exercices
2. Racines d’équations : bissection, Newton et sécante
   4 exercices
3. Systèmes linéaires : élimination de Gauss, LU et conditionnement
   4 exercices
4. Solveurs itératifs : Jacobi, Gauss–Seidel et convergence
   4 exercices

5. Interpolation, splines et ajustement par moindres carrés
   4 exercices
6. Dérivation numérique
   4 exercices
7. Intégration numérique
   4 exercices
8. Équations différentielles ordinaires : Euler, Runge–Kutta et stabilité
   4 exercices
9. Équations aux dérivées partielles : différences finies
   4 exercices
10. Optimisation, valeurs propres et calcul à grande échelle
    4 exercices

Le laboratoire (Computation lab)

Le labo est la partie pratique du cours. Ici, il est gratuit et sert uniquement à s'entraîner, sans crédits.

Chaque TP se déroule dans une simulation gratuite ou un tableur : il n'y a donc aucun risque physique. Faites des pauses d'écran, tenez-vous bien assis et gardez les câbles hors des zones de passage.

Référence de sécurité : OSHA: Walking-working surfaces (slip, trip and fall hazards) (https://www.osha.gov/walking-working-surfaces)

Labo A : epsilon machine et série de Taylor dans un tableur

SEMAINE 1

Objectif : Trouvez l'epsilon machine par l'expérience et regardez une série de Taylor converger vers e.

$$e \approx \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}$$

```
e≈_k=0^n-1(1)/(k!)
```

Série de Taylor pour e

Mode opératoire

1. Dans une colonne, partez de 1 et divisez par deux à chaque ligne.
2. Dans la colonne suivante, testez si 1 + valeur > 1.
3. La dernière valeur qui passe est l'epsilon machine.
4. Sommez 1/k! pour 5 et 10 termes et comparez avec e.

Tableau de données

Grandeur	Valeur
Epsilon machine (double)	2.22×10^{-16}
e, 5 termes	2.70833
e, 10 termes	2.7182815
e	2.7182818

Valeurs calculées ; la plupart des tableurs utilisent la double précision.

Exemple de calcul

1. Diviser par deux 52 fois donne $2^{-52} = 2.22 \times 10^{-16}$.
2. 1 + 1 + ½ + ⅙ + 1/24 = 2.70833.

> **Sécurité**
>
> - Ordinateur uniquement.

Alternative à la maison ou virtuelle

- N'importe quel tableur convient.

MIT OpenCourseWare 18.330 Introduction to Numerical Analysis (printemps 2012) (https://ocw.mit.edu/courses/18-330-introduction-to-numerical-analysis-spring-2012/)

Lien avec la planète : La NOAA décrit une prévision avec la dynamique en précision 32 bits et tout le reste en 64 bits. NOAA Environmental Modeling Center : Global Forecast System (GFS) (https://www.emc.ncep.noaa.gov/emc/pages/numerical_forecast_systems/gfs.php)

- [ ] **J’ai terminé ce TP (réel ou virtuel)**

Labo B : bissection contre Newton

SEMAINE 3

Objectif : Résolvez cos x = x par bissection et par la méthode de Newton, et comptez les chiffres corrects à chaque étape.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\cos x_n - x_n}{-\sin x_n - 1}$$

```
x_n+1=x_n-( x_n-x_n)/(- x_n-1)
```

Newton pour cos x − x = 0

Mode opératoire

1. Encadrez la racine dans [0, 1].
2. Faites 20 étapes de bissection dans un tableur.
3. Lancez Newton depuis $x_0 = 1$.
4. Tracez $\log_{10}$ de l'erreur en fonction du numéro d'étape pour les deux.

Tableau de données

Pas de Newton	x
1	0.750364
2	0.739113
3	0.739085133
4	0.739085133

Valeurs calculées. La bissection demande environ 20 étapes pour 6 chiffres ; Newton en demande 3.

Exemple de calcul

1. $x_1 = 1 - (\cos 1 - 1)/(-\sin 1 - 1) = 0.750364$.
2. Racine 0.7390851.

> **Sécurité**
>
> - Ordinateur uniquement.

Alternative à la maison ou virtuelle

- N'importe quel tableur convient.

OpenStax Calculus Volume 1, 4.9 La méthode de Newton (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/4-9-newtons-method)

Lien avec la planète : L'USGS indique que MODFLOW-NWT utilise une formulation de Newton-Raphson pour l'écoulement souterrain en nappe libre. USGS : MODFLOW and Related Programs (https://www.usgs.gov/mission-areas/water-resources/science/modflow-and-related-programs)

- [ ] **J'ai terminé ce TP (réel ou virtuel)**

Labo C : ajuster la série de CO_2 de Mauna Loa

SEMAINE 7

Objectif : Ajustez des modèles linéaire et quadratique aux moyennes annuelles de Mauna Loa de la NOAA et jugez-les par leurs résidus.

$$A^T A\, c = A^T y$$

A^TA c=A^Ty

Moindres carrés

Mode opératoire

1. Explorez PhET Least-Squares Regression et Curve Fitting pour voir comment les résidus changent avec le modèle.
2. Ouvrez le fichier des moyennes annuelles de la NOAA et copiez les valeurs décennales 1960–2020.
3. Ajustez une droite et une parabole (LINEST du tableur ou courbe de tendance).
4. Prévoyez 2025 et comparez avec les 427.35 ppm de la NOAA.

Tableau de données

Modèle	Coefficient clé	Prévision 2025 (ppm)
Droite	pente 1.613 ppm/an	415.0
Quadratique	0.01338 ppm/an²	426.0
NOAA 2025	—	427.35

Données de la NOAA GML ; ajustements calculés.

Exemple de calcul

1. La droite sous-estime 2025 de 12.3 ppm.
2. La parabole est à moins de 1.3 ppm.

> **Sécurité**
>
> - Ordinateur uniquement.

Alternative à la maison ou virtuelle

- N’importe quel tableur convient.

PhET: Least-Squares Regression (https://phet.colorado.edu/en/simulations/least-squares-regression) · PhET : Curve Fitting (https://phet.colorado.edu/en/simulations/curve-fitting) · NOAA GML: Mauna Loa annual mean CO_2 data (https://gml.noaa.gov/webdata/ccgg/trends/co2/co2_annmean_mlo.txt)

Lien avec la planète : La NOAA indique que la moyenne mensuelle de Mauna Loa était de 426.07 ppm en septembre 2026. NOAA Global Monitoring Laboratory: Trends in atmospheric CO_2 (Mauna Loa) (https://gml.noaa.gov/ccgg/trends/)

☐ **J’ai terminé ce TP (réel ou virtuel)**

Labo D : trapèzes contre Simpson

SEMAINE 9

Objectif : Intégrez sin x de 0 à π avec les deux règles, divisez le pas par deux et mesurez l'ordre de l'erreur.

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = 2$$

```
_0^π x dx=2
```

Intégrale test

Mode opératoire

1. Utilisez PhET Calculus Grapher pour voir l'aire sous une courbe.
2. Créez des colonnes pour x, sin x et les poids des règles.
3. Calculez T et S pour n = 4, puis n = 8.
4. Trouvez les rapports d'erreur.

Tableau de données

Règle, n = 4	Estimation	Erreur
Trapèzes	1.89612	−0.10388
Simpson	2.00456	+0.00456

Valeurs calculées ; passer à n = 8 divise les erreurs par 4.03 et 16.9, proches des 4 et 16 théoriques.

Exemple de calcul

1. $T_4 = (\pi/4)(\sin \pi/4 + \sin \pi/2 + \sin 3\pi/4) = 1.89612$.
2. $S_4 = (\pi/12)(4 \sin \pi/4 + 2 \sin \pi/2 + 4 \sin 3\pi/4) = 2.00456$.

> **Sécurité**
>
> - Ordinateur uniquement.

Alternative à la maison ou virtuelle

- N'importe quel tableur convient.

PhET : Calculus Grapher (https://phet.colorado.edu/en/simulations/calculus-grapher) · OpenStax Calculus Volume 2, 3.6 Intégration numérique (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/3-6-numerical-integration)

Lien avec la planète : La NOAA construit chaque moyenne mensuelle de Mauna Loa à partir de moyennes journalières fondées sur des moyennes horaires. NOAA Global Monitoring Laboratory: Trends in atmospheric CO_2 (Mauna Loa) (https://gml.noaa.gov/ccgg/trends/)

☐ **J'ai terminé ce TP (réel ou virtuel)**

Labo E : ordres d’erreur d’Euler et de RK4

SEMAINE 11

Objectif : Résolvez y' = −y jusqu’à t = 1 avec plusieurs pas et confirmez la convergence d’ordre un et d’ordre quatre.

$$y(1) = e^{-1} = 0.367879$$

`y(1)=e^-1=0.367879`

Réponse exacte

Mode opératoire

1. Créez une colonne d’Euler pour h = 0.2, 0.1 et 0.05.
2. Créez un bloc RK4 pour h = 0.2 et 0.1.
3. Notez l’erreur à t = 1.
4. Comparez les rapports d’erreur quand h est divisé par deux ; essayez ensuite le même solveur sur le cas sans traînée de PhET Projectile Motion.

Tableau de données

Méthode, h	Erreur à t = 1
Euler, 0.2	−0.0402
Euler, 0.1	−0.0192
Euler, 0.05	−0.00939
RK4, 0.2	5.80×10^{-6}
RK4, 0.1	3.33×10^{-7}

Valeurs calculées. L’erreur d’Euler est divisée par deux avec h ; celle de RK4 baisse d’environ 17 (proche de $2^4 = 16$).

Exemple de calcul

1. Euler h = 0.1 : $0.9^{10} - e^{-1} = -0.0192$.
2. Rapport RK4 $5.80 \times 10^{-6} / 3.33 \times 10^{-7} = 17.4$.

> **Sécurité**
>
> - Ordinateur uniquement.

Alternative à la maison ou virtuelle

- N’importe quel tableur convient.

PhET : Projectile Motion (https://phet.colorado.edu/en/simulations/projectile-motion) · MIT OpenCourseWare 10.34 Numerical Methods Applied to Chemical Engineering (automne 2015) (https://ocw.mit.edu/courses/10-34-numerical-methods-applied-to-chemical-engineering-fall-2015/)

Lien avec la planète : Le GFS de la NOAA tourne quatre fois par jour et prévoit jusqu’à 16 jours à l’avance. NOAA Environmental Modeling Center : Global Forecast System (GFS) (https://www.emc.ncep.noaa.gov/emc/pages/numerical_forecast_systems/gfs.php)

- [ ] **J’ai terminé ce TP (réel ou virtuel)**

Labo F : l’équation de la chaleur et sa limite de stabilité

SEMAINE 13

Objectif : Appliquez le schéma explicite de la chaleur à une barre avec un point chaud et voyez ce qui se passe au-dessus de r = ½.

$$u_i^{n+1} = u_i^n + r(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$$

```
u_i^n+1=u_i^n+r(u_i+1^n-2u_i^n+u_i-1^n)
```

Schéma explicite

Mode opératoire

1. Placez 7 nœuds avec les extrémités à 0 et le nœud central à 100 (valeurs d’exemple).
2. Avancez avec r = 0.25 pendant 10 pas.
3. Recommencez avec r = 0.6.
4. Décrivez les deux résultats.

Tableau de données

Cas	Valeur centrale après 1 pas	Après 10 pas
r = 0.25	50.0	16.7
r = 0.6	−20.0	290.5

Valeurs calculées. Avec r = 0.6, les valeurs oscillent et croissent : le schéma est instable.

Exemple de calcul

1. r = 0.25: 100 + 0.25(0 − 200 + 0) = 50.
2. r = 0.6: 100 + 0.6(−200) = −20.

> **Sécurité**
>
> - Ordinateur uniquement.

Alternative à la maison ou virtuelle

- N’importe quel tableur convient.

MIT OpenCourseWare 2.086 Numerical Computation for Mechanical Engineers (automne 2014) (https://ocw.mit.edu/courses/2-086-numerical-computation-for-mechanical-engineers-fall-2014/)

Lien avec la planète : La NOAA prévoyait de faire passer le GFS de 13 km à 9 km de résolution après sa mise à niveau de 2023. NOAA: NOAA completes upgrade to weather and climate supercomputer

system (Aug. 10, 2023) (https://www.noaa.gov/news-release/noaa-completes-upgrade-to-weather-and-climate-supercomputer-system)

- [ ] **J’ai terminé ce TP (réel ou virtuel)**

Séries d’entraînement aux examens

Chronométrez-vous : environ 10 minutes par problème. Comparez ensuite avec les solutions complètes.

Série d’exercices de mi-parcours (unités 1–5)

1. Trouvez l’erreur relative de 3.14 comme approximation de π.
    1. $|3.14 - \pi|/\pi$.

    Réponse : 5.07×10^{-4}.

2. Faites deux pas de Newton sur $x^2 - 5$ depuis $x_0 = 2$.
    1. $x_1 = 2 - (-1)/4$.
    2. $x_2 = 2.25 - 0.0625/4.5$.

    Réponse : $x_1 = 2.25$; $x_2 = 2.23611$.

3. Combien d’étapes de bissection réduisent un intervalle de largeur 4 sous 10^{-3} ?
    1. $\log_2(4000) = 11.97$.

    Réponse : 12 étapes.

4. Combien de travail d’élimination en plus pour n = 500 que pour n = 100 ?
    1. $(500/100)^3$.

    Réponse : 125 fois.

5. Interpolez le CO_2 de Mauna Loa pour 2023 à partir des moyennes annuelles NOAA de 2020 (414.21) et 2025 (427.35).
    1. 414.21 + 0.6 × 13.14.

    Réponse : 422.09 ppm (la valeur NOAA pour 2023 est 421.08).

Série d’entraînement finale (toutes les unités)

1. Estimez $\int_0^2 x^2\,dx$ par la règle des trapèzes, n = 2.
    1. h = 1: 0.5 × 0 + 1 + 0.5 × 4.

Réponse : 3 (exact 2.667).

2. Recommencez avec la règle de Simpson, n = 2.

    1. (1/3)(0 + 4 + 4).

    Réponse : 2.667, exact pour une parabole.

3. Faites deux pas d'Euler de h = 0.1 sur y' = −2y, y(0) = 1.

    1. 0.8^2.

    Réponse : 0.64 (exact 0.670).

4. Trouvez le plus grand pas de temps explicite de la chaleur pour α = 2 × 10⁻⁵ m²/s, Δx = 0.005 m.

    1. $0.5 \times 0.005^2 / 2 \times 10^{-5}$.

    Réponse : 0.625 s.

5. Estimez la dérivée de e^x en 0 par différence centrée, h = 0.01.

    1. (e^0.01 − e^−0.01)/0.02.

    Réponse : 1.0000167.

6. De combien la recherche par section dorée réduit-elle un intervalle en 20 étapes ?

    1. 0.618^{20}.

    Réponse : À 6.6 × 10⁻⁵ de sa largeur.

Fiche de formules

$$e_{rel} = |\tilde{x} - x|/|x|,\ \varepsilon_{mach} = 2^{-52} \qquad x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n),\ n \geq \log_2((b-a)/tol)$$

$$A = LU,\ \text{cost} \approx \tfrac{2}{3}n^3,\ \kappa = \|A\|\|A^{-1}\| \qquad \|e_k\| \approx \rho^k \|e_0\|$$

$$A^T A c = A^T y \qquad f' \approx (f(x+h) - f(x-h))/(2h),\ h_{opt} \approx \sqrt{\varepsilon}$$

$$T_n :\ E \propto h^2,\ S_n :\ E \propto h^4 \qquad y_{n+1} = y_n + hf,\ h < 2/\lambda$$

$$r = \alpha \Delta t/\Delta x^2 \leq \tfrac{1}{2},\ c\Delta t/\Delta x \leq 1 \qquad x_{k+1} = x_k - \alpha \nabla f,\ \lambda \approx v^T A v / v^T v$$

Constantes

Constante	Valeur
Double précision (IEEE 754)	epsilon machine $2^{-52} = 2.22 \times 10^{-16}$, environ 16 chiffres significatifs
Simple précision (IEEE 754)	epsilon machine $2^{-23} = 1.19 \times 10^{-7}$, environ 7 chiffres significatifs
e	2.718281828
π	3.141592654
Superficie de la Terre (valeur de manuel)	5.1×10^8 km^2
1 pétaflop	10^{15} opérations en virgule flottante par seconde

Source : NIST Guide to the SI, Appendix B.9: conversion factors (https://www.nist.gov/pml/special-publication-811/nist-guide-si-appendix-b-conversion-factors/nist-guide-si-appendix-b9)

Textes et simulations gratuits

Utilisez ces cours, sections de manuels et simulations gratuits en parallèle du cours.

- MIT OpenCourseWare 18.330 Introduction to Numerical Analysis (printemps 2012) (https://ocw.mit.edu/courses/18-330-introduction-to-numerical-analysis-spring-2012/): Cours et exercices gratuits d'analyse numérique du MIT.
- MIT OpenCourseWare 2.086 Numerical Computation for Mechanical Engineers (automne 2014) (https://ocw.mit.edu/courses/2-086-numerical-computation-for-mechanical-engineers-fall-2014/): Cours gratuit du MIT sur le calcul en ingénierie.
- MIT OpenCourseWare 10.34 Numerical Methods Applied to Chemical Engineering (automne 2015) (https://ocw.mit.edu/courses/10-34-numerical-methods-applied-to-chemical-engineering-fall-2015/): Cours gratuit du MIT sur les méthodes numériques appliquées.
- OpenStax Calculus Volume 2, 3.6 Intégration numérique (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/3-6-numerical-integration): Section de manuel gratuite.
- OpenStax Calculus Volume 1, 4.9 La méthode de Newton (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/4-9-newtons-method): Section de manuel gratuite.
- PhET: Least-Squares Regression (https://phet.colorado.edu/en/simulations/least-squares-regression): Ajuster des droites en interactif.

Glossaire

Erreur absolue
Taille de l'écart à la vraie valeur.

Dichotomie

Recherche de racine en divisant par deux un intervalle à changement de signe.

Condition CFL
Limite de pas de temps $c\Delta t/\Delta x \leq 1$.

Annulation catastrophique
Perte de chiffres en soustrayant des nombres proches.

Conditionnement
Combien un problème amplifie les erreurs d'entrée.

Crank–Nicolson
Schéma temporel implicite du second ordre.

Dominance diagonale
Chaque terme diagonal l'emporte sur le reste de sa ligne.

Quadrature de Gauss
Intégration avec des points et des poids optimaux.

Gauss–Seidel
Solveur itératif utilisant immédiatement les nouvelles valeurs.

Factorisation LU
$A = LU$, élimination réutilisable.

Moindres carrés
Ajustement minimisant la somme des carrés des résidus.

Epsilon machine
Écart entre 1 et le flottant suivant.

Méthode de Newton
Recherche de racine le long des tangentes.

Méthode de la puissance
Multiplication répétée pour trouver la valeur propre dominante.

Runge–Kutta (RK4)
Solveur d'EDO du quatrième ordre.

Méthode de Simpson
Intégration du quatrième ordre par paraboles.

Spline
Courbe cubique par morceaux lisse.

Équation raide
EDO avec des parties très rapides et très lentes.

Erreur de troncature
Erreur due à l'arrêt d'un processus infini.

Validation
Confronter un modèle aux observations.

Grille d’autoévaluation

Aucune note ni aucun crédit ne sont attribués. Utilisez cette grille pour juger honnêtement où vous en êtes dans chaque unité.

Niveau	À quoi cela ressemble
4 · Maîtrise	Choisit une méthode selon la précision requise, la teste sur un problème à réponse connue, mesure son ordre et explique ses limites de stabilité.
3 · Compétent	Résout les exercices avec des erreurs occasionnelles de pas ou d’unités.
2 · En progression	Suit les exemples résolus mais ne distingue pas l’erreur de troncature de l’erreur d’arrondi.
1 · Débutant	Applique des formules sans vérifier l’erreur ni la stabilité ; doit revoir l’unité.

Pondération suggérée si vous voulez une note

Partie	Poids
Exercices	20%
Travaux pratiques	25%
Série d’entraînement de mi-parcours	25%
Série d’entraînement finale	30%

Visez le niveau 3 ou mieux dans chaque unité avant de passer au cours suivant.

Cours associés

- Mécanique orbitale AERO 340
- Probabilités et statistiques MATH 350
- Aérodynamique I AERO 310
- Tous les cours