Última actualización: November 1, 2026

🗺️ Ruta de cuatro años · Año 3, Otoño

Sobre este curso

Este curso gratuito tiene 10 unidades y 6 laboratorios. Son los totales reales, no un programa más largo recortado.

Una comprobación es un número o un resultado de código en una página de curso que un script vuelve a calcular antes de publicar. El número impreso y el recalculado tienen que coincidir.

> Este es el esquema de un curso gratuito de autoestudio escrito por Saving Planets. No es un curso universitario, no otorga créditos académicos y ninguna institución participa.
>
> Su alcance sigue un curso semestral de métodos numéricos de tercer año para ingenieros. Se basa en los temas y la profundidad de MIT 18.330 Introduction to Numerical Analysis, MIT 2.086 Numerical Computation for Mechanical Engineers y MIT 10.34 (gratis en MIT OpenCourseWare), y usa secciones gratuitas de cálculo de OpenStax, que enlazamos donde ayudan. Ninguno de esos autores, escuelas ni agencias respalda esta página.
>
> Lo que añadimos: cada unidad se vincula a un trabajo real con una fuente pública citada (el Global Forecast System y las supercomputadoras de NOAA, el registro de CO_2 de Mauna Loa, los modelos de aguas subterráneas del USGS y los modelos climáticos de la NASA), cada número de la página se vuelve a calcular con un script de verificación antes de publicarse, y cada laboratorio tiene una simulación gratuita o una hoja de cálculo.
>
> Síguelo en orden. Cada unidad tiene objetivos, ideas clave, ecuaciones, ejemplos paso a paso, práctica con respuestas completas, errores comunes, tarjetas de estudio y un cuestionario. Tu progreso se guarda solo en este navegador.

Cómo ayuda este curso a salvar el planeta

Los pronósticos del tiempo, las proyecciones climáticas y los planes de aguas subterráneas son métodos numéricos que se ejecutan en computadoras: las ecuaciones no se pueden resolver a mano, así que se dividen en mallas, pasos de tiempo y enormes sistemas lineales.

Saber cómo funcionan esos métodos, y cómo fallan, es lo que permite a los ingenieros juzgar un pronóstico o un modelo. Cada unidad termina con una sección breve con fuentes. Los valores que no provienen de una fuente se marcan como valores de ejemplo o de libro de texto.

Para docentes

Puedes enseñar este curso o dejar que un estudiante lo haga solo. Es gratis. Saving Planets no pone nota ni da crédito escolar.

- Esta página es el curso completo: 10 unidades y 6 laboratorios (MATH 340).
- Calcula 15 semanas, unas 6 a 9 horas por semana, incluidas las semanas de laboratorio.
- Sigue el calendario de 15 semanas. Lee la unidad, haz la práctica en papel y luego abre la respuesta. En una semana de laboratorio, haz el laboratorio o la versión en casa.
- Una comprobación es un número o un resultado de código en la página que un script vuelve a calcular antes de publicar. El número que ves y el recalculado tienen que coincidir.
- Usa Imprimir esta página, o descarga la guía de estudio en PDF. La hoja de fórmulas está cerca del final.
- Pregunta: ¿cómo ayuda esta unidad a las personas y al planeta? Cada unidad tiene un recuadro verde con un dato y su fuente.
- Copia la plantilla de guía docente y escribe el nombre de tu clase, el tiempo que tienes y las preguntas que harás. Abrir la plantilla de guía docente

Antes de empezar

Requisitos previos

- Cálculo I y II: derivadas, integrales y series de Taylor.
- Ecuaciones diferenciales: EDO de primer y segundo orden.
- Álgebra lineal: matrices, determinantes y valores propios.
- Introducción a la programación: bucles, funciones y arreglos (también sirve una hoja de cálculo).

Cómo estudiar

- Antes de calcular, estima la respuesta y decide qué precisión necesitas.
- Compara siempre con una respuesta exacta en un problema de prueba antes de confiar en un método en uno real.
- Sigue el error al reducir el paso a la mitad: el cociente te da el orden del método.
- Mantén las unidades en el SI y escribe el tamaño de paso con sus unidades.
- Cuidado al restar números casi iguales; reescribe la fórmula si puedes.
- Haz cada ejercicio en papel o en una hoja de cálculo antes de abrir la respuesta, y repite los cuestionarios unos días después.

Qué necesitas

- Una computadora o tableta para las simulaciones gratuitas de PhET Least-Squares Regression, Curve Fitting, Calculus Grapher y Projectile Motion.
- Software de hoja de cálculo (cualquiera gratuito sirve), o Python si lo conoces.

- El archivo de datos de CO_2 de Mauna Loa de la NOAA en un navegador web.
- Una calculadora.

Calendario sugerido de 15 semanas

Unas 6 a 9 horas por semana: lectura, problemas de práctica y, en las semanas de laboratorio, el laboratorio.

Semana	Unidad	Temas	Lectura
1	Errores, números de punto flotante y series de Taylor	Errores, punto flotante, series de Taylor; Laboratorio A	MIT 18.330
2	Raíces de ecuaciones: bisección, Newton y secante	Bisección e iteración de punto fijo	MIT 18.330
3	Raíces de ecuaciones: bisección, Newton y secante	Métodos de Newton y de la secante; Laboratorio B	OpenStax Calculus 1, 4.9
4	Sistemas lineales: eliminación gaussiana, LU y condicionamiento	Eliminación gaussiana, LU y condicionamiento	MIT 2.086
5	Métodos iterativos: Jacobi, Gauss–Seidel y convergencia	Jacobi, Gauss–Seidel y sistemas dispersos	MIT 18.330
6	Interpolación, splines y ajuste por mínimos cuadrados	Interpolación y splines	MIT 18.330
7	Interpolación, splines y ajuste por mínimos cuadrados	Mínimos cuadrados; Laboratorio C; práctica para el parcial	NOAA GML
8	Diferenciación numérica	Diferenciación numérica	MIT 18.330
9	Integración numérica	Integración numérica; Laboratorio D	OpenStax Calculus 2, 3.6
10	Ecuaciones diferenciales ordinarias: Euler, Runge–Kutta y estabilidad	Euler, Heun y RK4	MIT 10.34
11	Ecuaciones diferenciales ordinarias: Euler, Runge–Kutta y estabilidad	Estabilidad, rigidez y sistemas; Laboratorio E	MIT 10.34
12	Ecuaciones en derivadas parciales: diferencias finitas	Diferencias finitas para la ecuación del calor	MIT 2.086
13	Ecuaciones en derivadas parciales: diferencias finitas	Laplace, ondas y CFL; Laboratorio F	NOAA EMC

Semana	Unidad	Temas	Lectura
14	Optimización, valores propios y cómputo a gran escala	Optimización y método de la potencia	MIT 18.330
15	Optimización, valores propios y cómputo a gran escala	Cómputo a gran escala, verificación y validación; práctica para el examen final	NOAA; NASA GISS

Tu progreso

Marca las unidades y los laboratorios al terminarlos y haz los cuestionarios. El progreso y las puntuaciones se guardan solo en este navegador y nunca se nos envían.

Unidades

UNIDAD 1 · SEMANA 1

Errores, números de punto flotante y series de Taylor

Error absoluto y relativo, cifras significativas, números de punto flotante IEEE 754, épsilon de máquina, redondeo y cancelación, y error de truncamiento de las series de Taylor.

Objetivos de aprendizaje

Al terminar esta unidad podrás:

- Calcular el error absoluto y el relativo.
- Explicar el épsilon de máquina en precisión simple y doble.
- Detectar y corregir la cancelación catastrófica.
- Acotar el error de truncamiento con el siguiente término de Taylor.

Conceptos clave

- El error absoluto es |aproximado − exacto|; el error relativo divide entre |exacto|. El error relativo te dice cuántas cifras son correctas.
- Las computadoras guardan los números en punto flotante binario. La doble precisión tiene épsilon de máquina $2^{-52} \approx 2.22 \times 10^{-16}$ (unas 16 cifras); la simple precisión tiene $2^{-23} \approx 1.19 \times 10^{-7}$ (unas 7 cifras).
- La mayoría de los decimales, como 0.1, no tienen forma binaria exacta, así que 0.1 + 0.2 − 0.3 da aproximadamente 5.55×10^{-17} en lugar de 0.
- Restar números casi iguales hace perder cifras (cancelación catastrófica). Reescribir la fórmula algebraicamente suele resolverlo.
- El error de truncamiento proviene de cortar un proceso infinito, como una serie de Taylor. El primer término omitido estima el error.

Ecuaciones clave

$$e_{rel} = \frac{|\tilde{x} - x|}{|x|}$$

`e_rel=(| x-x|)/(|x|)`

Error relativo

$$\varepsilon_{mach} = 2^{-52} \approx 2.22 \times 10^{-16}$$

`_mach=2^-52≈2.22×10^-16`

Épsilon en doble precisión

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \dots$$

f(x+h)=f(x)+hf'(x)+(h^2)/(2)f''(x)+

Serie de Taylor

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

Evitar la cancelación

Ejemplos resueltos paso a paso

Ejemplo 1.1 Halla el error relativo de 22/7 como aproximación de π.

1. |22/7 − π| = 0.001264.
2. Divide entre π.

Respuesta: Error relativo = 4.02×10^{-4}, es decir, unas 3 cifras correctas.

Ejemplo 1.2 Calcula √(10⁸ + 1) − √(10⁸) de forma segura.

1. La resta directa cancela la mayoría de las cifras.
2. Use 1/(√(10⁸ + 1) + √(10⁸)).

Respuesta: 5.0×10^{-5} (más exactamente $4.99999999875 \times 10^{-5}$).

Ejemplo 1.3 Estima el error de e^0.1 ≈ 1 + 0.1.

1. El siguiente término es $0.1^2/2 = 0.005$.
2. El error verdadero es e^0.1 − 1.1.

Respuesta: Error = 0.00517, cercano a la estimación de 0.005.

Problemas de práctica

Resuelve cada uno primero en papel y luego comprueba.

1. ¿Cuántas cifras correctas da la doble precisión?

   Unas 16 ($\varepsilon = 2.22 \times 10^{-16}$).

2. Añade el término $0.1^3/6$ a e^0.1 ≈ 1.1. ¿Nuevo error?

1.71×10^{-4}.

3. ¿Por qué 0.1 + 0.2 − 0.3 no es exactamente 0 en una computadora?

   0.1 y 0.2 no tienen forma binaria exacta; el resultado es aproximadamente 5.55×10^{-17}.

4. ¿Cuál es el épsilon en precisión simple?

   $2^{-23} = 1.19 \times 10^{-7}$.

Ideas erróneas comunes

Mito: Las computadoras hacen aritmética exacta.

En realidad: Cada operación redondea al número de punto flotante más cercano.

Mito: Pasos más pequeños siempre significan menor error.

En realidad: El error de redondeo crece cuando los pasos se reducen.

Mito: El error relativo y el absoluto son lo mismo.

En realidad: El error relativo divide entre el tamaño verdadero.

Tarjetas de estudio

Error absoluto

|aproximado − exacto|.

Error relativo

Error absoluto / |exacto|.

Épsilon de máquina

$2^{-52} \approx 2.22 \times 10^{-16}$ en doble precisión.

Cancelación

Pérdida de cifras al restar números cercanos.

Error de truncamiento

Proviene de cortar un proceso infinito.

Precisión simple

Unas 7 cifras.

Cuestionario de autoevaluación

1. El épsilon en doble precisión es aproximadamente...

2.2×10^{-16}

10^{-7}

10^{-3}

0

$2.2 \times 10^{-16}. 2^{-52}.$

2. Restar números casi iguales provoca...

cancelación

desbordamiento

nada

resultados exactos

cancelación. Cifras perdidas.

3. El error de truncamiento proviene de...

cortar una serie

el almacenamiento binario

errores de tipeo

las unidades

cortar una serie. Definición.

4. El error relativo divide entre...

el valor verdadero

el paso

épsilon

10

el valor verdadero. Definición.

Repetir este cuestionario

Cómo ayuda esto a salvar el planeta

El Environmental Modeling Center de NOAA describe un pronóstico global acoplado de unos 3 km de resolución que ejecutó la dinámica atmosférica en precisión de 32 bits y todo lo demás en 64 bits, un equilibrio deliberado entre velocidad y precisión.

Esa es la elección de épsilon de esta unidad en la práctica: la precisión simple (unas 7 cifras) es más rápida y usa la mitad de memoria, así que los modeladores la usan donde el error que añade queda por debajo del error que el modelo ya tiene.

En Saving Planets: Observación de la Tierra · Introducción a la programación

Fuentes: NOAA Environmental Modeling Center: Global Forecast System (GFS) (https://www.emc.ncep.noaa.gov/emc/pages/numerical_forecast_systems/gfs.php)

Recursos de aprendizaje gratuitos

- MIT OpenCourseWare 18.330 Introduction to Numerical Analysis (primavera de 2012) (https://ocw.mit.edu/courses/18-330-introduction-to-numerical-analysis-spring-2012/): Clases gratuitas del MIT.
- MIT OpenCourseWare 2.086 Numerical Computation for Mechanical Engineers (otoño de 2014) (https://ocw.mit.edu/courses/2-086-numerical-computation-for-mechanical-engineers-fall-2014/): Curso gratuito del MIT.

☐ **Terminé esta unidad**

UNIDAD 2 · SEMANAS 2–3

Raíces de ecuaciones: bisección, Newton y secante

Acotamiento con bisección, método de Newton, método de la secante, iteración de punto fijo, orden de convergencia y criterios de parada.

Objetivos de aprendizaje

Al terminar esta unidad podrás:

- Hallar una raíz por bisección y predecir el número de pasos.
- Aplicar el método de Newton y reconocer la convergencia cuadrática.
- Usar el método de la secante cuando se desconoce la derivada.
- Elegir un criterio de parada.

Conceptos clave

- La bisección divide a la mitad un intervalo [a, b] donde f cambia de signo. Siempre converge, pero solo un dígito binario por paso: n ≥ log$_2$((b − a)/tol).
- El método de Newton sigue la recta tangente: x_{n+1} = x_n − f(x_n)/f'(x_n). Cerca de una raíz simple converge cuadráticamente, duplicando las cifras correctas en cada paso.
- El método de la secante reemplaza f' por la pendiente entre los dos últimos puntos. No necesita derivada y converge con orden de aproximadamente 1.618.
- Newton puede fallar si f' es casi cero o el inicio está lejos; un respaldo por acotamiento lo hace seguro.
- Detente cuando |x_{n+1} − x_n| y |f(x_n)| estén ambos por debajo de la tolerancia, y limita siempre el número de iteraciones.

Ecuaciones clave

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

```
x_n+1=x_n-(f(x_n))/(f'(x_n))
```

Método de Newton

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

```
x_n+1=x_n-f(x_n)_n-x_n-1f(x_n)-f(x_n-1)
```

Método de la secante

$$n \geq \log_2 \frac{b-a}{tol}$$

Pasos de bisección

$$|e_{n+1}| \approx C|e_n|^2$$

Convergencia cuadrática

Ejemplos resueltos paso a paso

Ejemplo 2.1 Usa la bisección en $f(x) = x^3 - x - 2$ en $[1, 2]$. Da los tres primeros puntos medios y la raíz.

1. $f(1) = -2$, $f(2) = 4$.
2. Puntos medios 1.5, 1.75, 1.625.

Respuesta: Raíz $x = 1.5214$.

Ejemplo 2.2 ¿Cuántos pasos de bisección reducen un intervalo de ancho 1 por debajo de 10^{-6}?

1. $\log_2(10^6) = 19.93$.

Respuesta: 20 pasos.

Ejemplo 2.3 Usa el método de Newton en $x^2 - 2$ desde $x_0 = 1$.

1. $x_1 = 1.5$, $x_2 = 1.41667$.
2. $x_3 = 1.414216$.

Respuesta: $x_3 = 1.414216$, ya 6 cifras correctas.

Problemas de práctica

Resuelve cada uno primero en papel y luego comprueba.

1. Aplica Newton a $x^3 - x - 2$ desde $x_0 = 1.5$. ¿Primer paso?

   1.52174.

2. Aplica el método de la secante a $x^2 - 2$ desde 1 y 2. ¿Tres primeras iteraciones?

   1.3333, 1.4000, 1.4146.

3. ¿Qué orden de convergencia tiene el método de la secante?

Aproximadamente 1.618.

4. ¿Por qué limitar el número de iteraciones?

   Un método puede diverger o entrar en ciclo.

Ideas erróneas comunes

Mito: Newton siempre converge.

En realidad: Puede diverger desde un mal inicio.

Mito: La bisección es rápida.

En realidad: Gana un bit por paso.

Mito: Un f(x) pequeño significa que x está cerca de la raíz.

En realidad: No si f es muy plana.

Tarjetas de estudio

Bisección

Dividir a la mitad un intervalo con cambio de signo.

Newton

$x - f/f'$.

Secante

Newton con una pendiente de dos puntos.

Convergencia cuadrática

Las cifras se duplican en cada paso.

Intervalo de acotamiento

Intervalo con un cambio de signo.

Criterio de parada

Paso y residuo por debajo de la tolerancia.

Cuestionario de autoevaluación

1. Newton converge...

cuadráticamente

linealmente

nunca

siempre cúbicamente

cuadráticamente. Cerca de una raíz simple.

2. La bisección necesita…

un cambio de signo

una derivada

una matriz

nada

un cambio de signo. Acotamiento.

3. La secante evita…

la derivada

f

la iteración

los puntos iniciales

la derivada. Pendiente a partir de dos puntos.

4. Pasos hasta 10^{-6} desde ancho 1 por bisección…

20

6

100

2

20. $\log_2 10^6$.

Repetir este cuestionario

Cómo ayuda esto a salvar el planeta

El USGS dice que MODFLOW se considera un estándar internacional para simular aguas subterráneas. Una de sus versiones, MODFLOW-NWT, usa una formulación de Newton-Raphson para mejorar la solución de problemas de flujo subterráneo no confinado.

Los acuíferos libres hacen no lineales las ecuaciones, porque el espesor saturado depende del nivel de agua que se busca. El método de Newton de esta unidad es lo que hace que esas simulaciones converjan de forma fiable.

En Saving Planets: Océanos · Cálculo I

Fuentes: USGS: MODFLOW and Related Programs (https://www.usgs.gov/mission-areas/water-resources/science/modflow-and-related-programs)

Recursos de aprendizaje gratuitos

- OpenStax Calculus Volume 1, 4.9 Método de Newton (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/4-9-newtons-method): Sección de libro de texto gratuita.
- MIT OpenCourseWare 18.330 Introduction to Numerical Analysis (primavera de 2012) (https://ocw.mit.edu/courses/18-330-introduction-to-numerical-analysis-spring-2012/): Clases gratuitas del MIT.

Ver la clase

Session 7: Solutions of Nonlinear Equations; Newton-Raphson Method (https://ocw.mit.edu/courses/10-34-numerical-methods-applied-to-chemical-engineering-fall-2015/resources/session-7-solutions-of-nonlinear-equations-newton-raphson-method/) (en inglés)

MIT 10.34 Numerical Methods Applied to Chemical Engineering (Fall 2015), MIT OpenCourseWare. Licencia: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Condiciones de uso (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Enlace solo para estudio gratuito; Saving Planets no está afiliado a esta universidad ni cuenta con su respaldo.

☐ **Terminé esta unidad**

Sistemas lineales: eliminación gaussiana, LU y condicionamiento

Eliminación gaussiana con pivoteo parcial, factorización LU, conteo de operaciones, el número de condición y cómo limita la precisión.

Objetivos de aprendizaje

Al terminar esta unidad podrás:

- Resolver un sistema 3 × 3 por eliminación.
- Explicar la factorización LU y su reutilización.
- Estimar el costo de la eliminación.
- Usar el número de condición para juzgar la precisión.

Conceptos clave

- La eliminación gaussiana reduce Ax = b a un sistema triangular superior y luego hace sustitución regresiva. El pivoteo parcial intercambia filas para usar el pivote más grande, lo que controla el error de redondeo.
- La factorización LU guarda la eliminación como A = LU. Una vez factorizada, cada nuevo lado derecho cuesta solo dos resoluciones triangulares.
- La eliminación cuesta unas $2n^3/3$ operaciones de punto flotante: duplicar n multiplica el trabajo por 8.
- El número de condición $\kappa(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$ mide la sensibilidad. Puedes perder unas $\log_{10} \kappa$ cifras de precisión.
- Nunca calcules A^{-1} para resolver un sistema; factoriza y resuelve.

Ecuaciones clave

$$A = LU$$

`A=LU`

Factorización LU

$$\text{cost} \approx \tfrac{2}{3} n^3$$

Operaciones de eliminación

$$\kappa(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$$

`(A)=\|A\|\|A^-1\|`

Número de condición

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le \kappa \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

Cota de error

Ejemplos resueltos paso a paso

Ejemplo 3.1 Resuelve 2x + y − z = 8, −3x − y + 2z = −11, −2x + y + 2z = −3.

1. Elimina x de las filas 2 y 3, luego y de la fila 3.
2. Haz la sustitución regresiva.

Respuesta: x = 2, y = 3, z = −1.

Ejemplo 3.2 Estima el costo de la eliminación para n = 1000.

1. 2 × 1000³/3.

Respuesta: Unas 6.67 × 10⁸ operaciones.

Ejemplo 3.3 Halla el número de condición en norma 2 de [[1, 1], [1, 1.0001]].

1. Las filas son casi paralelas.
2. κ = σ_max/σ_min.

Respuesta: κ ≈ 40,002, así que se pueden perder unas 4–5 cifras.

Problemas de práctica

Resuelve cada uno primero en papel y luego comprueba.

1. ¿Cuánto más trabajo es n = 2000 que n = 1000?

   8 veces.

2. ¿Operaciones de eliminación para n = 3?

   2 × 27/3 = 18.

3. ¿Por qué pivotear?

Para evitar dividir entre números pequeños y amplificar el redondeo.

4. ¿Cifras perdidas con $\kappa = 10^8$ en doble precisión?

   Unas 8 de 16.

Ideas erróneas comunes

Mito: Usar A^{-1} para resolver sistemas.

En realidad: Factoriza y resuelve; es más barato y más preciso.

Mito: Un determinante pequeño significa mal condicionamiento.

En realidad: Usa el número de condición.

Mito: El pivoteo es opcional.

En realidad: Sin él, la eliminación puede fallar o perder precisión.

Tarjetas de estudio

Eliminación gaussiana

Reducir a forma triangular.

LU

$A = LU$.

Pivoteo

Intercambio de filas para la estabilidad.

Número de condición

$\|A\|\|A^{-1}\|$.

Sustitución hacia atrás

Resolver sistemas triangulares.

Coste

$\approx 2n^3/3$.

Cuestionario de autoevaluación

1. La eliminación cuesta aproximadamente...

$2n^3/3$

n

n^2

2^n

$2n^3/3$. Triple bucle.

2. LU ayuda cuando...

muchos lados derechos

n = 1

ninguna solución

nunca

muchos lados derechos. Reutilizar los factores.

3. Un κ grande significa...

sensible

fácil

siempre singular

simétrica

sensible. Amplifica los errores.

4. El pivoteo parcial elige...

el pivote más grande

el más pequeño

cero

al azar

el pivote más grande. Estabilidad.

Repetir este cuestionario

Cómo ayuda esto a salvar el planeta

El USGS dice que una característica clave de MODFLOW 6 es su capacidad de resolver varios modelos numéricos estrechamente acoplados en un único sistema de ecuaciones.

Su mapa de la profundidad del nivel freático en los Estados Unidos continentales salió de una simulación paralela de 256 dominios de modelo estrechamente acoplados en 256 núcleos de una supercomputadora del USGS. Cada dominio es un gran sistema lineal disperso como los de esta unidad.

En Saving Planets: Álgebra lineal · Océanos

Fuentes: USGS: MODFLOW and Related Programs (https://www.usgs.gov/mission-areas/water-resources/science/modflow-and-related-programs)

Recursos de aprendizaje gratuitos

- MIT OpenCourseWare 2.086 Numerical Computation for Mechanical Engineers (otoño de 2014) (https://ocw.mit.edu/courses/2-086-numerical-computation-for-mechanical-engineers-fall-2014/): Curso gratuito del MIT.
- MIT OpenCourseWare 10.34 Numerical Methods Applied to Chemical Engineering (otoño de 2015) (https://ocw.mit.edu/courses/10-34-numerical-methods-applied-to-chemical-engineering-fall-2015/): Curso gratuito del MIT.

Ver la clase

Lecture 3: Solving a Linear System (https://ocw.mit.edu/courses/18-085-computational-science-and-engineering-i-fall-2008/resources/lecture-3-solving-a-linear-system/) (en inglés)

MIT 18.085 Computational Science and Engineering I (Fall 2008), MIT OpenCourseWare. Licencia: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Condiciones de uso (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/).
Enlace solo para estudio gratuito; Saving Planets no está afiliado a esta universidad ni cuenta con su respaldo.

☐ **Terminé esta unidad**

Métodos iterativos: Jacobi, Gauss–Seidel y convergencia

Iteración de Jacobi y Gauss–Seidel, dominancia diagonal, la matriz de iteración y el radio espectral, sistemas dispersos y por qué los métodos iterativos escalan.

Objetivos de aprendizaje

Al terminar esta unidad podrás:

- Realizar pasos de Jacobi y Gauss–Seidel.
- Comprobar la dominancia diagonal.
- Usar el radio espectral para predecir la velocidad de convergencia.
- Explicar por qué los sistemas dispersos grandes usan iteración.

Conceptos clave

- Jacobi actualiza cada incógnita a partir de la iteración anterior; Gauss–Seidel usa los valores nuevos en cuanto se calculan.
- Si A es estrictamente diagonal dominante, ambos métodos convergen desde cualquier inicio.
- El error se reduce en cada paso aproximadamente por el radio espectral ρ de la matriz de iteración. Gauss–Seidel suele tener ρ_GS = ρ_J².
- Las mallas grandes dan matrices dispersas con solo unos pocos elementos no nulos por fila. Los métodos iterativos guardan solo esos elementos, mientras que la eliminación genera relleno.
- Detente cuando el residuo ‖b − Ax‖ sea pequeño en relación con ‖b‖.

Ecuaciones clave

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j^{(k)}\right)$$

```
x_i^(k+1)=1a_ii(b_i-_j ia_ijx_j^(k))
```

Jacobi

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

Dominancia diagonal

$$\|e_k\| \approx \rho^k \|e_0\|$$

Velocidad de convergencia

$$r = b - Ax$$

r=b-Ax

Residuo

Ejemplos resueltos paso a paso

Ejemplo 4.1 Haz dos pasos de Jacobi en 4x + y = 1, x + 3y = 2 desde (0, 0).

1. Paso 1: x = 1/4 = 0.25, y = 2/3 = 0.6667.
2. Paso 2: x = (1 − 0.6667)/4, y = (2 − 0.25)/3.

Respuesta: x = 0.0833, y = 0.5833 (exacto 0.0909, 0.6364).

Ejemplo 4.2 Haz dos pasos de Gauss–Seidel en el mismo sistema.

1. Paso 1: x = 0.25, y = (2 − 0.25)/3 = 0.5833.
2. Paso 2: x = 0.1042, y = 0.6319.

Respuesta: x = 0.1042, y = 0.6319, más cerca que Jacobi.

Ejemplo 4.3 Halla los radios espectrales de Jacobi y Gauss–Seidel para ese sistema.

1. ρ_J = √(1/12).
2. ρ_GS = ρ_J² = 1/12.

Respuesta: ρ_J = 0.289; ρ_GS = 0.0833.

Problemas de práctica

Resuelve cada uno primero en papel y luego comprueba.

1. ¿Es [[4, 1], [1, 3]] diagonal dominante?

   Sí: 4 > 1 y 3 > 1.

2. ¿Pasos de Gauss–Seidel (ρ = 0.0833) para reducir el error en 10^6?

   Unos 6 ($0.0833^6 = 3.35 \times 10^{-7}$).

3. ¿Tercera iteración de Gauss–Seidel?

x = 0.0920, y = 0.6360.

4. ¿Por qué no eliminar en una malla de un millón de incógnitas?

   El relleno usa demasiada memoria y tiempo.

Ideas erróneas comunes

Mito: La iteración siempre converge.

En realidad: Necesita ρ < 1.

Mito: Jacobi y Gauss–Seidel son lo mismo.

En realidad: Gauss–Seidel usa los valores nuevos de inmediato.

Mito: Un cambio pequeño entre pasos significa convergencia.

En realidad: Comprueba también el residuo.

Tarjetas de estudio

Jacobi

Actualizar todo con los valores anteriores.

Gauss–Seidel

Usar los valores nuevos de inmediato.

Radio espectral

El mayor |valor propio|.

Dominancia diagonal

|a_ii| > suma de la fila.

Disperso

Casi todo ceros.

Residuo

b − Ax.

Cuestionario de autoevaluación

1. Converge si...

ρ < 1

ρ > 1

n es par

A es singular

ρ < 1. El error se reduce.

2. Gauss–Seidel usa...

los valores más recientes

solo los valores anteriores

ningún valor

inversas

los valores más recientes. Definición.

3. Disperso significa...

casi todo ceros

densa

n pequeño

singular

casi todo ceros. Pocos elementos no nulos.

4. Suficiente para la convergencia...

dominancia diagonal

solo simetría

n = 2

nada

dominancia diagonal. Teorema.

Repetir este cuestionario

Cómo ayuda esto a salvar el planeta

El GFS de NOAA divide la atmósfera en 127 capas verticales con un espaciado horizontal de unos 13 km. Cada punto de la malla se acopla solo con sus vecinos, así que los sistemas que construyen esos modelos son enormes y dispersos.

Con una superficie terrestre de libro de texto de 5.1×10^8 km², una malla de 13 km tiene unos 3.0 millones de columnas y 383 millones de celdas. Sistemas de ese tamaño se manejan con métodos iterativos y otros métodos dispersos, no con eliminación simple.

En Saving Planets: Observación de la Tierra · Álgebra lineal

Fuentes: NOAA Environmental Modeling Center: Global Forecast System (GFS) (https://www.emc.ncep.noaa.gov/emc/pages/numerical_forecast_systems/gfs.php)

Recursos de aprendizaje gratuitos

- MIT OpenCourseWare 18.330 Introduction to Numerical Analysis (primavera de 2012) (https://ocw.mit.edu/courses/18-330-introduction-to-numerical-analysis-spring-2012/): Clases gratuitas del MIT.
- MIT OpenCourseWare 2.086 Numerical Computation for Mechanical Engineers (otoño de 2014) (https://ocw.mit.edu/courses/2-086-numerical-computation-for-mechanical-engineers-fall-2014/): Curso gratuito del MIT.

☐ **Terminé esta unidad**

UNIDAD 5 · SEMANAS 6–7

Interpolación, splines y ajuste por mínimos cuadrados

Interpolación lineal y polinómica, forma de Lagrange, el peligro de los polinomios de grado alto, splines cúbicos, y ajustes por mínimos cuadrados de rectas y polinomios con residuos.

Objetivos de aprendizaje

Al terminar esta unidad podrás:

- Interpolar linealmente entre puntos de datos.
- Construir un polinomio de Lagrange.
- Ajustar una recta por mínimos cuadrados e interpretar su pendiente.
- Elegir entre interpolación y ajuste.

Conceptos clave

- La interpolación pasa exactamente por los datos; el ajuste pasa cerca de datos ruidosos y minimiza la suma de los residuos al cuadrado.
- Un polinomio de grado n que pasa por n + 1 puntos es único. Los grados altos en puntos equiespaciados pueden oscilar violentamente cerca de los extremos (fenómeno de Runge).
- Los splines cúbicos unen trozos cúbicos con pendiente y curvatura coincidentes, dando curvas suaves sin oscilaciones bruscas.
- La recta de mínimos cuadrados resuelve las ecuaciones normales $A^TAc = A^Ty$. La pendiente es una tasa, con unidades.
- Grafica los residuos: un patrón en ellos significa que al modelo le falta algo, como curvatura.

Ecuaciones clave

$$y = y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}(y_1 - y_0)$$

```
y=y_0+(x-x_0)/(x_1-x_0)(y_1-y_0)
```

Interpolación lineal

$$p(x) = \sum_i y_i \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

```
p(x)=_i y_i_j i(x-x_j)/(x_i-x_j)
```

Forma de Lagrange

$$A^T A\, c = A^T y$$

```
A^TA c=A^Ty
```

Ecuaciones normales

$$\min \sum_i r_i^2$$

Mínimos cuadrados

Ejemplos resueltos paso a paso

Ejemplo 5.1 Las medias anuales de Mauna Loa de NOAA son 390.10 ppm (2010) y 414.21 ppm (2020). Interpola 2015.

1. y = 390.10 + 0.5 × 24.11.

Respuesta: 402.16 ppm; el valor de NOAA para 2015 es 401.01, así que el registro se curva hacia arriba.

Ejemplo 5.2 Ajusta una recta por mínimos cuadrados a los valores por década 1960–2020 (316.91, 325.68, 338.76, 354.45, 369.71, 390.10, 414.21 ppm).

1. Resuelve las ecuaciones normales para la pendiente y la ordenada al origen.

Respuesta: Pendiente 1.613 ppm por año; la recta predice 415.0 ppm para 2025.

Ejemplo 5.3 Ajusta en cambio una cuadrática en t = año − 1960.

1. Mínimos cuadrados con columnas 1, t, t^2.

Respuesta: c = 316.84 + 0.810t + 0.01338t^2; predice 426.0 ppm para 2025, cerca de los 427.35 de NOAA.

Problemas de práctica

Resuelve cada uno primero en papel y luego comprueba.

1. ¿Crecimiento medio 2010–2020 a partir de los valores por década?

   2.41 ppm por año.

2. ¿Crecimiento medio 2000–2010?

   2.04 ppm por año.

3. ¿Por qué la recta subestima 2025?

   El crecimiento se acelera; los residuos se curvan.

4. ¿Interpolar o ajustar datos de laboratorio ruidosos?

   Fit.

Ideas erróneas comunes

Mito: Los polinomios de mayor grado siempre ajustan mejor.
En realidad: Pueden oscilar entre los puntos.

Mito: Un buen R^2 significa un buen modelo.
En realidad: Revisa el patrón de los residuos.

Mito: La extrapolación es tan segura como la interpolación.
En realidad: Es mucho más arriesgada.

Tarjetas de estudio

Interpolación

Exactamente por los datos.

Mínimos cuadrados

Minimizar los residuos al cuadrado.

Spline

Cúbica a trozos y suave.

Runge

Oscilaciones de los ajustes de grado alto.

Residuo

Datos menos modelo.

Ecuaciones normales

$A^TAc = A^Ty$.

Cuestionario de autoevaluación

1. Los mínimos cuadrados minimizan...

la suma de los residuos al cuadrado

el error máximo

la pendiente

el grado

la suma de los residuos al cuadrado. Definición.

2. El fenómeno de Runge es...

la oscilación en los extremos

cancelación

una divergencia

el pivoteo

la oscilación en los extremos. Polinomios de grado alto.

3. Los splines son...

cúbicas a trozos

rectas únicas

al azar

Serie de Taylor

cúbicas a trozos. Definición.

4. Las ecuaciones normales son...

$A^TAc = A^Ty$

$Ax = 0$

LU

$f = 0$

$A^TAc = A^Ty$. Mínimos cuadrados.

Repetir este cuestionario

Cómo ayuda esto a salvar el planeta

NOAA informa que el registro de Mauna Loa, iniciado por C. David Keeling de Scripps en marzo de 1958, es el registro más largo de mediciones directas de CO_2 en la atmósfera. La media mensual fue de 426.07 ppm en septiembre de 2026, frente a 424.37 ppm en septiembre de 2025.

Las medias anuales de NOAA subieron de 316.91 ppm en 1960 a 427.35 ppm en 2025. La curva ascendente aparece en los residuos de esta unidad: una recta no la capta y una cuadrática sí la ajusta.

En Saving Planets: Soluciones · Observación de la Tierra

Fuentes: NOAA Global Monitoring Laboratory: Trends in atmospheric CO_2 (Mauna Loa) (https://gml.noaa.gov/ccgg/trends/) · NOAA GML: Mauna Loa annual mean CO_2 data (https://gml.noaa.gov/webdata/ccgg/trends/co2/co2_annmean_mlo.txt)

Recursos de aprendizaje gratuitos

- PhET: Least-Squares Regression (https://phet.colorado.edu/en/simulations/least-squares-regression): Ajusta rectas de forma interactiva.
- PhET: Curve Fitting (https://phet.colorado.edu/en/simulations/curve-fitting): Ajustes polinómicos interactivos.

Ver la clase

Lecture 11: Least Squares (part 2) (https://ocw.mit.edu/courses/18-085-computational-science-and-engineering-i-fall-2008/resources/lecture-11-least-squares-part-2/) (en inglés)

MIT 18.085 Computational Science and Engineering I (Fall 2008), MIT OpenCourseWare. Licencia: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Condiciones de uso (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/).
Enlace solo para estudio gratuito; Saving Planets no está afiliado a esta universidad ni cuenta con su respaldo.

☐ **Terminé esta unidad**

Diferenciación numérica

Diferencias hacia adelante, hacia atrás y centradas, su error de truncamiento, el equilibrio con el error de redondeo y el mejor tamaño de paso, segundas derivadas y extrapolación de Richardson.

Objetivos de aprendizaje

Al terminar esta unidad podrás:

- Aplicar diferencias hacia adelante y centradas.
- Indicar el orden de cada fórmula.
- Elegir un paso que equilibre truncamiento y redondeo.
- Estimar una segunda derivada.

Conceptos clave

- La diferencia hacia adelante (f(x + h) − f(x))/h tiene un error proporcional a h (primer orden).
- La diferencia centrada (f(x + h) − f(x − h))/(2h) tiene un error proporcional a h² (segundo orden), así que reducir h a la mitad divide el error entre 4.
- El error de redondeo crece como ε/h al reducirse h. Para diferencias hacia adelante el mejor h es aproximadamente √ε ≈ 1.49 × 10⁻⁸; para diferencias centradas, unos ε^(1/3) ≈ 6.06 × 10⁻⁶.
- La segunda derivada es (f(x + h) − 2f(x) + f(x − h))/h², también de segundo orden.
- La extrapolación de Richardson combina dos tamaños de paso para cancelar el término de error principal.

Ecuaciones clave

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Diferencia hacia adelante

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

Diferencia centrada

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

Segunda diferencia

$$h_{opt} \approx \sqrt{\varepsilon}$$

Ejemplos resueltos paso a paso

Ejemplo 6.1 Estima la derivada de sin x en x = 1 con una diferencia hacia adelante, h = 0.1.

1. (sin 1.1 − sin 1)/0.1.

Respuesta: 0.4974; exacto cos 1 = 0.5403; error −0.0429.

Ejemplo 6.2 Repite con una diferencia centrada.

1. (sin 1.1 − sin 0.9)/0.2.

Respuesta: 0.5394; error −0.00090, unas 47.7 veces menor.

Ejemplo 6.3 Halla el mejor paso de diferencia hacia adelante en doble precisión.

1. $h \approx \sqrt{(2.22 \times 10^{-16})}$.

Respuesta: $h \approx 1.49 \times 10^{-8}$.

Problemas de práctica

Resuelve cada uno primero en papel y luego comprueba.

1. Reduce h a la mitad en una diferencia centrada. ¿Error?

   Aproximadamente ¼ del tamaño.

2. Reduce h a la mitad en una diferencia hacia adelante. ¿Error?

   Aproximadamente ½ del tamaño.

3. ¿Mejor paso de diferencia centrada en doble precisión?

   Aproximadamente ε^(1/3) = 6.06×10^{-6}.

4. ¿Por qué no usar $h = 10^{-15}$?

   Domina el error de redondeo ε/h.

Ideas erróneas comunes

Mito: Un h más pequeño siempre es mejor.

En realidad: Por debajo del óptimo, gana el redondeo.

Mito: Las diferencias hacia adelante y centradas son igual de precisas.

En realidad: La centrada es de segundo orden.

Mito: Derivar datos ruidosos es fácil.

En realidad: Las diferencias amplifican el ruido; suaviza o ajusta primero.

Tarjetas de estudio

Diferencia hacia adelante

Primer orden.

Diferencia centrada

Segundo orden.

Segunda diferencia

$f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)$ entre h^2.

h óptimo

$\approx \sqrt{\varepsilon}$ para la diferencia hacia adelante.

Richardson

Cancelar el error principal.

Orden

Exponente de h en el error.

Cuestionario de autoevaluación

1. Error de la diferencia centrada $\propto$...

h^2

h

1/h

siempre h^3

h^2. Simétrica.

2. La diferencia hacia adelante es de orden ...

primero

segundo

cero

cuarto

primero. Error ∝ h.

3. El mejor h hacia adelante es aproximadamente…

√ε

ε

1

0.1

√ε. Equilibrio.

4. El ruido de los datos se … al diferenciar.

amplifica

elimina

reduce a la mitad

igual

amplifica. Divide entre h.

Repetir este cuestionario

Cómo ayuda esto a salvar el planeta

NOAA dice que el GFS produce salidas horarias durante las primeras 120 horas y luego cada 3 horas para los días 5 a 16. Los pronosticadores y los modelos posteriores toman diferencias de esas salidas para obtener tasas como la tendencia de presión y la intensidad de lluvia.

Esta unidad muestra por qué importa el paso de tiempo de la salida guardada: una tasa obtenida de valores cada 3 horas con una diferencia centrada es mucho más precisa que una diferencia unilateral en el mismo intervalo.

En Saving Planets: GOES-19 · Cálculo I

Fuentes: NOAA Environmental Modeling Center: Global Forecast System (GFS) (https://www.emc.ncep.noaa.gov/emc/pages/numerical_forecast_systems/gfs.php)

Recursos de aprendizaje gratuitos

- MIT OpenCourseWare 18.330 Introduction to Numerical Analysis (primavera de 2012) (https://ocw.mit.edu/courses/18-330-introduction-to-numerical-analysis-spring-2012/): Clases gratuitas del MIT.
- PhET: Calculus Grapher (https://phet.colorado.edu/en/simulations/calculus-grapher): Derivadas de forma interactiva.

☐ **Terminé esta unidad**

Integración numérica

Reglas del trapecio y de Simpson, reglas compuestas y órdenes de error, extrapolación de Romberg, cuadratura gaussiana e integración de datos medidos.

Objetivos de aprendizaje

Al terminar esta unidad podrás:

- Aplicar las reglas compuestas del trapecio y de Simpson.
- Predecir cómo disminuye el error con n.
- Usar Romberg para mejorar un resultado.
- Aplicar la cuadratura gaussiana de 2 puntos.

Conceptos clave

- La regla del trapecio une los puntos con rectas. Su error decrece como h^2: duplicar n lo divide entre 4.
- La regla de Simpson ajusta parábolas en pares de intervalos (n par). Su error decrece como h^4: duplicar n lo divide entre 16.
- Extrapolación de Romberg: $T_{2n} + (T_{2n} - T_n)/3$ cancela el error h^2 de la regla del trapecio (equivale a la regla de Simpson).
- La cuadratura gaussiana elige los mejores puntos: 2 puntos en $\pm 1/\sqrt{3}$ integran exactamente las cúbicas.
- Para datos medidos con espaciado fijo, aplica directamente la regla del trapecio o de Simpson a las muestras.

Ecuaciones clave

$$T_n = h\left[\tfrac{1}{2}f_0 + f_1 + \cdots + f_{n-1} + \tfrac{1}{2}f_n\right]$$

```
T_n=h[12f_0+f_1++f_n-1+12f_n]
```

Regla del trapecio

$$S_n = \tfrac{h}{3}\left[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + \cdots + 4f_{n-1} + f_n\right]$$

```
S_n= h3[f_0+4f_1+2f_2++4f_n-1+f_n]
```

Regla de Simpson

$$\int_{-1}^{1} f \approx f\left(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Gauss de 2 puntos

$$E_T \propto h^2,\ E_S \propto h^4$$

Órdenes de error

Ejemplos resueltos paso a paso

Ejemplo 7.1 Estima $\int_0^1 e^x\,dx$ con la regla del trapecio, n = 4.

1. h = 0.25; suma los valores ponderados.

Respuesta: T_4 = 1.72722; exacto e − 1 = 1.71828; error 0.00894.

Ejemplo 7.2 Repite con la regla de Simpson, n = 4.

1. Pesos 1, 4, 2, 4, 1 por h/3.

Respuesta: S_4 = 1.718319; error 3.70×10^{-5}.

Ejemplo 7.3 Usa la cuadratura gaussiana de 2 puntos en la misma integral.

1. Lleva [0, 1] a [−1, 1]: puntos 0.5 ± 0.5/√3, peso ½ cada uno.

Respuesta: 1.717896; error -3.85×10^{-4} con solo 2 valores de la función.

Problemas de práctica

Resuelve cada uno primero en papel y luego comprueba.

1. ¿Error del trapecio con n = 8?

   0.00224, aproximadamente ¼ del error con n = 4.

2. ¿Romberg a partir de T_4 y T_8?

   1.718284.

3. ¿Regla de Simpson con n = 2?

   1.718861.

4. ¿Por qué n debe ser par en Simpson?

   Usa pares de intervalos.

Ideas erróneas comunes

Mito: Simpson funciona para cualquier n.

En realidad: n debe ser par.

Mito: Más puntos siempre ayudan por igual.

En realidad: Las reglas de mayor orden ganan mucho más rápido.

Mito: Los puntos de Gauss pueden estar en cualquier lugar.

En realidad: Son raíces fijas de los polinomios de Legendre.

Tarjetas de estudio

Trapecio

Error $\propto h^2$.

Simpson

Error $\propto h^4$.

Romberg

Extrapolar los resultados del trapecio.

Cuadratura gaussiana

Puntos y pesos óptimos.

Regla compuesta

Aplicar en muchos subintervalos.

n par

Necesario para Simpson.

Cuestionario de autoevaluación

1. Error de Simpson $\propto$...

h^4

h^2

h

1

h^4. Cuarto orden.

2. Duplicar n en la regla del trapecio divide el error entre...

4

2

16

1

4. h^2.

3. Gauss de 2 puntos es exacta para...

cúbicas

todas las funciones

solo rectas

nada

cúbicas. Grado 2n − 1.

4. Romberg cancela...

el error principal

todo error

el redondeo

f

el error principal. Extrapolación.

Repetir este cuestionario

Cómo ayuda esto a salvar el planeta

NOAA explica que cada media mensual de Mauna Loa es el promedio de medias diarias, que a su vez se basan en promedios horarios, usando solo las horas con condiciones de “fondo”.

Un promedio es una integral dividida entre el intervalo, así que construir medias mensuales a partir de valores horarios es integración numérica, la idea del trapecio de esta unidad aplicada a mediciones reales.

En Saving Planets: Cálculo II · Soluciones

Fuentes: NOAA Global Monitoring Laboratory: Trends in atmospheric CO_2 (Mauna Loa) (https://gml.noaa.gov/ccgg/trends/)

Recursos de aprendizaje gratuitos

- OpenStax Calculus Volume 2, 3.6 Integración numérica (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/3-6-numerical-integration): Sección de libro de texto gratuita.
- PhET: Calculus Grapher (https://phet.colorado.edu/en/simulations/calculus-grapher): Integrales de forma interactiva.

Ver la clase

Session 13: ODE-IVP and Numerical Integration 1 (https://ocw.mit.edu/courses/10-34-numerical-methods-applied-to-chemical-engineering-fall-2015/resources/session-13-ode-ivp-and-numerical-integration-1/) (en inglés)

MIT 10.34 Numerical Methods Applied to Chemical Engineering (Fall 2015), MIT OpenCourseWare. Licencia: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Condiciones de uso (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Enlace solo para estudio gratuito; Saving Planets no está afiliado a esta universidad ni cuenta con su respaldo.

☐ **Terminé esta unidad**

UNIDAD 8 · SEMANAS 10–11

Ecuaciones diferenciales ordinarias: Euler, Runge–Kutta y estabilidad

Método de Euler, método de Heun, Runge–Kutta de cuarto orden, error local y global, límites de estabilidad, ecuaciones rígidas y métodos implícitos, y sistemas de EDO.

Objetivos de aprendizaje

Al terminar esta unidad podrás:

- Avanzar una EDO con Euler y RK4.
- Relacionar el tamaño de paso con el error global.
- Hallar el límite de estabilidad explícito para y' = −λy.
- Reconocer problemas rígidos.

Conceptos clave

- El método de Euler y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n) tiene un error global proporcional a h (primer orden).
- Runge–Kutta de cuarto orden (RK4) usa cuatro muestras de pendiente por paso; su error global decrece como h^4.
- Para y' = −λy, Euler explícito solo es estable si h < 2/λ. Fuera de eso, la solución numérica crece aunque la verdadera decae.
- Los problemas rígidos tienen partes muy rápidas y muy lentas. Los métodos implícitos como Euler implícito siguen siendo estables con pasos grandes.
- Las EDO de orden superior se convierten en sistemas de primer orden, que los mismos métodos resuelven.

Ecuaciones clave

$$y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n)$$

```
y_n+1=y_n+hf(t_n,y_n)
```

Euler

$$y_{n+1} = y_n + \tfrac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

```
y_n+1=y_n+ h6(k_1+2k_2+2k_3+k_4)
```

RK4

$$h < \frac{2}{\lambda}$$

Estabilidad de Euler para y' = −λy

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1})$$

y_n+1=y_n+hf(t_n+1,y_n+1)

Euler implícito

Ejemplos resueltos paso a paso

Ejemplo 8.1 Resuelve y' = −y, y(0) = 1 hasta t = 1 con Euler, h = 0.1.

1. Cada paso multiplica por 0.9.
2. y(1) ≈ 0.9^{10}.

Respuesta: 0.34868 frente a 0.36788 exacto; error −0.0192.

Ejemplo 8.2 Da un paso RK4 de h = 0.1 en el mismo problema.

1. $k_1 = -1$, $k_2 = -0.95$, $k_3 = -0.9525$, $k_4 = -0.90475$.

Respuesta: y(0.1) = 0.9048375 frente a 0.9048374 exacto.

Ejemplo 8.3 Un café se enfría según T' = −0.1(T − 20) desde 90 °C (valores de ejemplo). Usa Euler con h = 1 min durante 10 min.

1. En cada paso, T − 20 se multiplica por 0.9.

Respuesta: 44.41 °C frente a 45.75 °C exacto.

Problemas de práctica

Resuelve cada uno primero en papel y luego comprueba.

1. ¿Euler con h = 0.05 hasta t = 1 en y' = −y?

   0.95^{20} = 0.35849, error aproximadamente la mitad.

2. ¿Límite de estabilidad para y' = −50y con Euler?

   h < 0.04.

3. ¿Un paso de Heun de h = 0.1 en y' = −y?

   0.905.

4. ¿Cómo resuelves y'' = −y con estos métodos?

   Escríbela como y' = v, v' = −y.

Ideas erróneas comunes

Mito: Un paso más pequeño siempre es estable.

En realidad: Solo por debajo del límite, y el redondeo crece con muchos pasos.

Mito: RK4 es exacto.

En realidad: Su error es pequeño pero no nulo.

Mito: Los métodos implícitos siempre son más lentos.

En realidad: Para problemas rígidos son mucho más rápidos en total.

Tarjetas de estudio

Euler

Explícito de primer orden.

RK4

Cuarto orden, 4 pendientes.

Estabilidad

Los errores no crecen.

Rígido

Escalas rápidas y lentas a la vez.

Euler implícito

Implícito, muy estable.

Sistema

Orden superior → primer orden.

Cuestionario de autoevaluación

1. Error global de Euler ∝...

h

h^4

h^2

1

h. Primer orden.

2. RK4 usa … pendientes.

4

1

2

10

4. k_1 a k_4.

3. Euler es estable para y' = −λy si…

$h < 2/\lambda$

$h > 2/\lambda$

cualquier h

$\lambda < 0$

$h < 2/\lambda$. Amplificación $|1 - h\lambda| < 1$.

4. Los problemas rígidos favorecen…

los métodos implícitos

Euler

la bisección

Simpson

los métodos implícitos. Estabilidad.

Repetir este cuestionario

Cómo ayuda esto a salvar el planeta

NOAA dice que el GFS se ejecuta cuatro veces al día y pronostica hasta 16 días. La página del EMC describe también una corrida de investigación acoplada a 3 km que tomó unos 40,000 segundos de cómputo por cada pronóstico de 24 horas, usando 233 nodos.

Eso son unas 11.1 horas de cómputo por día de pronóstico, así que el modelo corrió solo unas 2.16 veces más rápido que el tiempo real. Cada pronóstico es una solución de EDO y EDP paso a paso en el tiempo, y el paso estable fija el costo.

En Saving Planets: Ecuaciones diferenciales · GOES-19

Fuentes: NOAA Environmental Modeling Center: Global Forecast System (GFS) (https://www.emc.ncep.noaa.gov/emc/pages/numerical_forecast_systems/gfs.php)

Recursos de aprendizaje gratuitos

- MIT OpenCourseWare 10.34 Numerical Methods Applied to Chemical Engineering (otoño de 2015) (https://ocw.mit.edu/courses/10-34-numerical-methods-applied-to-chemical-engineering-fall-2015/): Curso gratuito del MIT.
- PhET: Projectile Motion (https://phet.colorado.edu/en/simulations/projectile-motion): Compara con tu solucionador.

Ver la clase

Session 18: Differential Algebraic Equations 2 (https://ocw.mit.edu/courses/10-34-numerical-methods-applied-to-chemical-engineering-fall-2015/resources/session-18-differential-algebraic-equations-2/) (en inglés)

MIT 10.34 Numerical Methods Applied to Chemical Engineering (Fall 2015), MIT OpenCourseWare. Licencia: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Condiciones de uso (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Enlace solo para estudio gratuito; Saving Planets no está afiliado a esta universidad ni cuenta con su respaldo.

☐ **Terminé esta unidad**

UNIDAD 9 · SEMANAS 12–13

Ecuaciones en derivadas parciales: diferencias finitas

Mallas y plantillas, la ecuación del calor explícita y su límite de estabilidad, esquemas implícito y de Crank–Nicolson, la ecuación de Laplace y su solución iterativa, la condición CFL para ondas, y el costo de la resolución.

Objetivos de aprendizaje

Al terminar esta unidad podrás:

- Escribir plantillas de diferencias finitas para las ecuaciones del calor y de Laplace.
- Aplicar el límite de estabilidad explícito r ≤ ½.
- Explicar la condición CFL.
- Estimar cómo crece el costo con la resolución.

Conceptos clave

- Reemplaza las derivadas por diferencias en una malla. Para u_t = αu_xx, el esquema explícito es u_i^{n+1} = u_i^n + r(u_{i+1}^n − 2u_i^n + u_{i−1}^n) con r = αΔt/Δx².
- El esquema explícito del calor solo es estable si r ≤ ½, así que reducir Δx a la mitad obliga a dividir Δt entre 4.
- Los esquemas implícito y de Crank–Nicolson son estables para cualquier Δt, pero necesitan resolver un sistema lineal en cada paso.
- La ecuación de Laplace u_xx + u_yy = 0 da una plantilla de 5 puntos; Jacobi o Gauss–Seidel (Unidad 4) la resuelven.
- Para ondas y flujo, la condición CFL c Δt/Δx ≤ 1 vincula el paso de tiempo con el espaciado de la malla. Refinar una malla horizontal 2D por un factor k cuesta unas k² veces más columnas y k veces más pasos de tiempo.

Ecuaciones clave

$$r = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}$$

r=(αΔ t)/(Δ x^2)12

Estabilidad explícita del calor

$$u_{i,j} = \tfrac{1}{4}\left(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}\right)$$

u_i,j=14(u_i+1,j+u_i-1,j+u_i,j+1+u_i,j-1)

Laplace de 5 puntos

$$\frac{c\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

Condición CFL

$$\text{cost} \propto k^3$$

Refinamiento horizontal por k

Ejemplos resueltos paso a paso

Ejemplo 9.1 Halla el mayor paso de tiempo explícito estable para α = 1.0 × 10⁻⁴ m²/s y Δx = 0.01 m (valores de ejemplo).

1. $\Delta t \leq 0.5\Delta x^2/\alpha$.

Respuesta: $\Delta t \leq 0.5$ s.

Ejemplo 9.2 NOAA planea refinar el GFS de 13 km a 9 km. Estima el cambio en las columnas horizontales.

1. $(13/9)^2$.

Respuesta: Unas 2.09 veces más columnas.

Ejemplo 9.3 Incluyendo un paso de tiempo limitado por CFL, estima el aumento total del costo.

1. $(13/9)^3$.

Respuesta: Unas 3.01 veces el trabajo.

Problemas de práctica

Resuelve cada uno primero en papel y luego comprueba.

1. Reduce Δx a la mitad en el esquema explícito del calor. ¿Nuevo límite de Δt?

   ¼ del tamaño.

2. ¿Columnas en una malla global de 13 km (Tierra 5.1 × 10⁸ km², libro de texto)?

Unos 3.02 millones.

3. ¿Celdas con 127 capas?

   Unas 3.83×10^8.

4. ¿Celdas a 9 km con 127 capas?

   Unas 8.0×10^8.

Ideas erróneas comunes

Mito: Cualquier paso de tiempo sirve si la malla es fina.

En realidad: Las mallas más finas necesitan pasos explícitos más pequeños.

Mito: Los esquemas implícitos siempre son más precisos.

En realidad: Son más estables, no automáticamente más precisos.

Mito: Duplicar la resolución duplica el costo.

En realidad: En 2D más el tiempo, es unas 8×.

Tarjetas de estudio

Plantilla

Patrón de puntos vecinos.

r

$\alpha \Delta t / \Delta x^2$.

CFL

$c\Delta t/\Delta x \le 1$.

Crank–Nicolson

Implícito, segundo orden.

Laplaciano de 5 puntos

Promedio de los vecinos.

Costo de la resolución

$\approx k^3$ para un refinamiento por k.

Cuestionario de autoevaluación

1. Estabilidad explícita del calor…

$r \le \frac{1}{2}$

$r \le 2$

cualquier r

r ≥ 1

r ≤ ½. Von Neumann.

2. La CFL vincula...

Δt y Δx

α y u

n y ε

x e y

Δt y Δx. Velocidad de la información.

3. La plantilla de Laplace usa ... puntos.

5

2

siempre 9

1

5. Centro + 4.

4. Crank–Nicolson es...

incondicionalmente estable

explícito

inestable

de primer orden

incondicionalmente estable. Promedio implícito.

Repetir este cuestionario

Cómo ayuda esto a salvar el planeta

La actualización de supercomputadoras de NOAA de 2023 debía permitir que el GFS pasara a una resolución horizontal de nueve kilómetros, frente a 13 en la versión actual, para ver y simular fenómenos de menor escala.

El escalado de esta unidad muestra por qué hacían falta computadoras nuevas: 2.09 veces más columnas y, con un paso de tiempo limitado por CFL, unas 3 veces el trabajo por cada pronóstico.

En Saving Planets: Mecánica de fluidos · Termodinámica

Fuentes: NOAA: NOAA completes upgrade to weather and climate supercomputer system (Aug. 10, 2023) (https://www.noaa.gov/news-release/noaa-completes-upgrade-to-weather-and-climate-supercomputer-system) · NOAA Environmental Modeling Center: Global Forecast System (GFS) (https://www.emc.ncep.noaa.gov/emc/pages/numerical_forecast_systems/gfs.php)

Recursos de aprendizaje gratuitos

- MIT OpenCourseWare 2.086 Numerical Computation for Mechanical Engineers (otoño de 2014) (https://ocw.mit.edu/courses/2-086-numerical-computation-for-mechanical-engineers-fall-2014/): Curso gratuito del MIT.
- MIT OpenCourseWare 18.330 Introduction to Numerical Analysis (primavera de 2012) (https://ocw.mit.edu/courses/18-330-introduction-to-numerical-analysis-spring-2012/): Clases gratuitas del MIT.

Ver la clase

Session 22: Partial Differential Equations 1 (https://ocw.mit.edu/courses/10-34-numerical-methods-applied-to-chemical-engineering-fall-2015/resources/session-22-partial-differential-equations-1/) (en inglés)

MIT 10.34 Numerical Methods Applied to Chemical Engineering (Fall 2015), MIT OpenCourseWare. Licencia: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Condiciones de uso (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Enlace solo para estudio gratuito; Saving Planets no está afiliado a esta universidad ni cuenta con su respaldo.

☐ **Terminé esta unidad**

UNIDAD 10 · SEMANAS 14–15

Optimización, valores propios y cómputo a gran escala

Búsqueda de la sección áurea, descenso de gradiente y método de Newton para minimización, el método de la potencia para valores propios, conteo de operaciones, cómputo paralelo, y verificación y validación de modelos.

Objetivos de aprendizaje

Al terminar esta unidad podrás:

- Minimizar una función 1D por búsqueda de la sección áurea.
- Aplicar el descenso de gradiente y elegir un paso.
- Hallar un valor propio dominante con el método de la potencia.
- Estimar el tiempo de ejecución a partir del conteo de operaciones y la velocidad de la máquina.

Conceptos clave

- La búsqueda de la sección áurea reduce un intervalo por 0.618 en cada paso sin derivadas.
- El descenso de gradiente baja por la pendiente: x ← x − α∇f. Un α demasiado grande diverge; uno demasiado pequeño avanza muy lento.
- El método de Newton para minimización resuelve ∇f = 0 usando la hessiana; converge cuadráticamente cerca del mínimo.
- El método de la potencia multiplica repetidamente por A; el vector se alinea con el vector propio dominante, y el cociente de Rayleigh da su valor propio.
- La verificación pregunta si el código resuelve bien las ecuaciones; la validación pregunta si son las ecuaciones correctas, comparando con observaciones.

Ecuaciones clave

$$\tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$$

`τ=(5-1)/(2)≈0.618`

Factor de la razón áurea

$$x_{k+1} = x_k - \alpha \nabla f(x_k)$$

`x_k+1=x_k-α f(x_k)`

Descenso de gradiente

$$\lambda \approx \frac{v^T A v}{v^T v}$$

Cociente de Rayleigh

$$t = \frac{\text{flops}}{\text{flop rate}}$$

`t= rate`

Tiempo de ejecución

Ejemplos resueltos paso a paso

Ejemplo 10.1 ¿Cuánto reduce un intervalo la búsqueda de la sección áurea en 10 pasos?

1. 0.618^{10}.

Respuesta: A 0.0081 (0.81%) de su ancho.

Ejemplo 10.2 Minimiza $f = (x - 3)^2$ por descenso de gradiente con $\alpha = 0.1$ desde $x = 0$. ¿Dónde estás tras 5 pasos?

1. En cada paso, $x - 3$ se reduce por 0.8.
2. $x_5 = 3(1 - 0.8^5)$.

Respuesta: $x_5 = 2.017$.

Ejemplo 10.3 Aplica el método de la potencia a [[2, 1], [1, 2]] desde (1, 0), 5 pasos.

1. v = (122, 121).
2. Cociente de Rayleigh.

Respuesta: $\lambda \approx 2.99997$ (exacto 3).

Problemas de práctica

Resuelve cada uno primero en papel y luego comprueba.

1. ¿Cuánto tarda una resolución densa de 10,000 incógnitas ($2n^3/3$ flops) a 14.5 petaflops?

   $6.67 \times 10^{11} / 1.45 \times 10^{16} = 4.6 \times 10^{-5}$ s.

2. ¿Velocidad combinada de los dos computadores de 14.5 petaflops de NOAA?

29 petaflops.

3. ¿Capacidad operativa más investigación (20 petaflops)?

   49 petaflops.

4. ¿Verificación o validación: comparar un modelo con datos de Mauna Loa?

   Validación.

Ideas erróneas comunes

Mito: Un paso mayor siempre acelera el descenso de gradiente.
En realidad: Puede pasarse y diverger.

Mito: El método de la potencia halla todos los valores propios.
En realidad: Solo el dominante.

Mito: Un código que converge es un modelo correcto.
En realidad: Aún necesita validación.

Tarjetas de estudio

Sección áurea

El intervalo se reduce por 0.618.

Descenso de gradiente

$x - \alpha \nabla f$.

Método de la potencia

Valor propio dominante.

Cociente de Rayleigh

$v^T Av / v^T v$.

Verificación

Resolver bien las ecuaciones.

Validación

Resolver las ecuaciones correctas.

Cuestionario de autoevaluación

1. La sección áurea reduce por...

0.618

0.5

0.1

2

0.618. Razón áurea.

2. El método de la potencia halla...

el valor propio dominante

todas las raíces

la inversa

el determinante

el valor propio dominante. Multiplicación repetida.

3. La validación compara con...

las observaciones

el código

nada

épsilon

las observaciones. Contraste con la realidad.

4. El descenso de gradiente se mueve...

cuesta abajo

cuesta arriba

al azar

de lado

cuesta abajo. $-\nabla f$.

Repetir este cuestionario

Cómo ayuda esto a salvar el planeta

NOAA informa que sus supercomputadoras gemelas de tiempo y clima, Dogwood en Manassas (Virginia) y Cactus en Phoenix (Arizona), se actualizaron en agosto de 2023 a 14.5 petaflops cada una, de modo que juntas el sistema de pronóstico puede procesar 29 mil billones de cálculos por segundo. Con máquinas de investigación que suman 20 petaflops, la capacidad de NOAA es de 49 petaflops, y más de 20 modelos operativos de predicción numérica del tiempo se ejecutan en el sistema.

NASA GISS ofrece libremente el código de su modelo del sistema Tierra ModelE, y su análisis de temperatura superficial GISTEMP se actualiza hacia el día 10 de cada mes. El código y los datos abiertos permiten a cualquiera verificar y validar los métodos numéricos de la ciencia del clima.

En Saving Planets: Soluciones · Introducción a la programación

Fuentes: NOAA: NOAA completes upgrade to weather and climate supercomputer system (Aug. 10, 2023) (https://www.noaa.gov/news-release/noaa-completes-upgrade-to-weather-and-climate-supercomputer-system) · NASA GISS: modelo del sistema Tierra GISS, ModelE (https://www.giss.nasa.gov/tools/modelE/) · NASA GISS: GISS Surface Temperature Analysis (GISTEMP v4) (https://data.giss.nasa.gov/gistemp/)

Recursos de aprendizaje gratuitos

- MIT OpenCourseWare 18.330 Introduction to Numerical Analysis (primavera de 2012) (https://ocw.mit.edu/courses/18-330-introduction-to-numerical-analysis-spring-2012/): Clases gratuitas del MIT.
- MIT OpenCourseWare 10.34 Numerical Methods Applied to Chemical Engineering (otoño de 2015) (https://ocw.mit.edu/courses/10-34-numerical-methods-applied-to-chemical-engineering-fall-2015/): Curso gratuito del MIT.

☐ **Terminé esta unidad**

Problemas

Estos problemas están dentro de cada unidad. Hazlos en papel y luego abre la respuesta.

1. Errores, números de punto flotante y series de Taylor
   4 problemas
2. Raíces de ecuaciones: bisección, Newton y secante
   4 problemas
3. Sistemas lineales: eliminación gaussiana, LU y condicionamiento
   4 problemas
4. Métodos iterativos: Jacobi, Gauss–Seidel y convergencia
   4 problemas

5. Interpolación, splines y ajuste por mínimos cuadrados
   4 problemas
6. Diferenciación numérica
   4 problemas
7. Integración numérica
   4 problemas
8. Ecuaciones diferenciales ordinarias: Euler, Runge–Kutta y estabilidad
   4 problemas
9. Ecuaciones en derivadas parciales: diferencias finitas
   4 problemas
10. Optimización, valores propios y cómputo a gran escala
    4 problemas

El laboratorio (Computation lab)

El laboratorio es la parte práctica del curso. Aquí es gratuito y solo para practicar, sin créditos.

Cada práctica se hace en una simulación gratuita o una hoja de cálculo, así que no hay riesgos físicos. Haz pausas de pantalla, siéntate con buena postura y mantén los cables fuera de las zonas de paso.

Referencia de seguridad: OSHA: Walking-working surfaces (slip, trip and fall hazards) (https://www.osha.gov/walking-working-surfaces)

Laboratorio A: épsilon de máquina y serie de Taylor en una hoja de cálculo

SEMANA 1

Objetivo: Halla el épsilon de máquina experimentalmente y observa una serie de Taylor converger a e.

$$e \approx \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}$$

e≈_k=0^n-1(1)/(k!)

Serie de Taylor para e

Procedimiento

1. En una columna, empieza en 1 y divide a la mitad en cada fila.
2. En la columna siguiente, prueba si 1 + valor > 1.
3. El último valor que pasa es el épsilon de máquina.
4. Suma 1/k! para 5 y 10 términos y compara con e.

Tabla de datos

Magnitud	Valor
Épsilon de máquina (doble)	2.22×10^{-16}
e, 5 términos	2.70833
e, 10 términos	2.7182815
e	2.7182818

Valores calculados; la mayoría de las hojas de cálculo usan doble precisión.

Cálculo de ejemplo

1. Dividir a la mitad 52 veces da $2^{-52} = 2.22 \times 10^{-16}$.
2. 1 + 1 + ½ + ⅛ + 1/24 = 2.70833.

> **Seguridad**
>
> - Solo ordenador.

Alternativa en casa o virtual

- Sirve cualquier hoja de cálculo.

MIT OpenCourseWare 18.330 Introduction to Numerical Analysis (primavera de 2012) (https://ocw.mit.edu/courses/18-330-introduction-to-numerical-analysis-spring-2012/)

Vínculo con el planeta: NOAA describe una corrida de pronóstico con la dinámica en precisión de 32 bits y todo lo demás en 64 bits. NOAA Environmental Modeling Center: Global Forecast System (GFS) (https://www.emc.ncep.noaa.gov/emc/pages/numerical_forecast_systems/gfs.php)

- [ ] **Completé este laboratorio (real o virtual)**

Laboratorio B: bisección frente a Newton

SEMANA 3

Objetivo: Resuelve cos x = x por bisección y por el método de Newton, y cuenta los dígitos correctos en cada paso.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\cos x_n - x_n}{-\sin x_n - 1}$$

```
x_n+1=x_n-( x_n-x_n)/(- x_n-1)
```

Newton para cos x − x = 0

Procedimiento

1. Acota la raíz en [0, 1].
2. Ejecuta 20 pasos de bisección en una hoja de cálculo.
3. Ejecuta Newton desde x_0 = 1.
4. Grafica $\log_{10}$ del error frente al número de paso para ambos.

Tabla de datos

Paso de Newton	x
1	0.750364
2	0.739113
3	0.739085133
4	0.739085133

Valores calculados. La bisección necesita unos 20 pasos para 6 dígitos; Newton necesita 3.

Cálculo de ejemplo

1. x_1 = 1 − (cos 1 − 1)/(−sin 1 − 1) = 0.750364.
2. Raíz 0.7390851.

> **Seguridad**
>
> - Solo ordenador.

Alternativa en casa o virtual

- Sirve cualquier hoja de cálculo.

OpenStax Calculus Volume 1, 4.9 Método de Newton (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/4-9-newtons-method)

Vínculo con el planeta: El USGS dice que MODFLOW-NWT usa una formulación de Newton-Raphson para el flujo subterráneo no confinado. USGS: MODFLOW and Related Programs (https://www.usgs.gov/mission-areas/water-resources/science/modflow-and-related-programs)

- [ ] **Completé este laboratorio (real o virtual)**

Laboratorio C: ajuste del registro de CO_2 de Mauna Loa

SEMANA 7

Objetivo: Ajusta modelos lineal y cuadrático a las medias anuales de Mauna Loa de NOAA y júzgalos por sus residuos.

$$A^T A\, c = A^T y$$

A^TA c=A^Ty

Mínimos cuadrados

Procedimiento

1. Explora PhET Least-Squares Regression y Curve Fitting para ver cómo cambian los residuos con el modelo.
2. Abre el archivo de medias anuales de NOAA y copia los valores de década 1960–2020.
3. Ajusta una recta y una cuadrática (LINEST de la hoja o línea de tendencia).
4. Predice 2025 y compara con los 427.35 ppm de NOAA.

Tabla de datos

Modelo	Coeficiente clave	Predicción 2025 (ppm)
Recta	pendiente 1.613 ppm/año	415.0
Cuadrático	0.01338 ppm/año²	426.0
NOAA 2025	—	427.35

Datos de NOAA GML; ajustes calculados.

Cálculo de ejemplo

1. La recta subestima 2025 en 12.3 ppm.
2. La cuadrática queda a menos de 1.3 ppm.

> **Seguridad**
>
> - Solo ordenador.

Alternativa en casa o virtual

- Sirve cualquier hoja de cálculo.

PhET: Least-Squares Regression (https://phet.colorado.edu/en/simulations/least-squares-regression) · PhET: Curve Fitting (https://phet.colorado.edu/en/simulations/curve-fitting) · NOAA GML: Mauna Loa annual mean CO_2 data

(https://gml.noaa.gov/webdata/ccgg/trends/co2/co2_annmean_mlo.txt)

Vínculo con el planeta: NOAA informa que la media mensual de Mauna Loa fue 426.07 ppm en septiembre de 2026. NOAA Global Monitoring Laboratory: Trends in atmospheric CO_2 (Mauna Loa) (https://gml.noaa.gov/ccgg/trends/)

- [ ] **Completé este laboratorio (real o virtual)**

Laboratorio D: trapecio frente a Simpson

SEMANA 9

Objetivo: Integra sin x de 0 a π con ambas reglas, reduce el paso a la mitad y mide el orden del error.

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = 2$$

```
_0^π x dx=2
```

Integral de prueba

Procedimiento

1. Usa PhET Calculus Grapher para ver el área bajo una curva.
2. Crea columnas para x, sin x y los pesos de las reglas.
3. Calcula T y S para n = 4, luego n = 8.
4. Halla los cocientes de error.

Tabla de datos

Regla, n = 4	Estimación	Error
Trapecio	1.89612	−0.10388
Simpson	2.00456	+0.00456

Valores calculados; duplicar a n = 8 reduce los errores por 4.03 y 16.9, cerca de los 4 y 16 teóricos.

Cálculo de ejemplo

1. $T_4 = (\pi/4)(\sin \pi/4 + \sin \pi/2 + \sin 3\pi/4) = 1.89612$.
2. $S_4 = (\pi/12)(4 \sin \pi/4 + 2 \sin \pi/2 + 4 \sin 3\pi/4) = 2.00456$.

> **Seguridad**
>
> - Solo ordenador.

Alternativa en casa o virtual

- Sirve cualquier hoja de cálculo.

PhET: Calculus Grapher (https://phet.colorado.edu/en/simulations/calculus-grapher) · OpenStax Calculus Volume 2, 3.6 Integración numérica (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/3-6-numerical-integration)

Vínculo con el planeta: NOAA construye cada media mensual de Mauna Loa a partir de medias diarias basadas en promedios horarios. NOAA Global Monitoring Laboratory: Trends in atmospheric CO_2 (Mauna Loa) (https://gml.noaa.gov/ccgg/trends/)

- [ ] **Completé este laboratorio (real o virtual)**

Laboratorio E: órdenes de error de Euler y RK4

SEMANA 11

Objetivo: Resuelve y' = −y hasta t = 1 con varios pasos y confirma la convergencia de primer y cuarto orden.

$$y(1) = e^{-1} = 0.367879$$

`y(1)=e^-1=0.367879`

Respuesta exacta

Procedimiento

1. Crea una columna de Euler para h = 0.2, 0.1 y 0.05.
2. Crea un bloque RK4 para h = 0.2 y 0.1.
3. Anota el error en t = 1.
4. Compara los cocientes de error al reducir h a la mitad; luego prueba el mismo solucionador en el caso sin arrastre de PhET Projectile Motion.

Tabla de datos

Método, h	Error en t = 1
Euler, 0.2	−0.0402
Euler, 0.1	−0.0192
Euler, 0.05	−0.00939
RK4, 0.2	5.80×10^{-6}
RK4, 0.1	3.33×10^{-7}

Valores calculados. El error de Euler se reduce a la mitad con h; el de RK4 cae unas 17 veces (cerca de $2^4 = 16$).

Cálculo de ejemplo

1. Euler h = 0.1: $0.9^{10} - e^{-1} = -0.0192$.
2. Cociente RK4 $5.80 \times 10^{-6} / 3.33 \times 10^{-7} = 17.4$.

> **Seguridad**
>
> - Solo ordenador.

Alternativa en casa o virtual

- Sirve cualquier hoja de cálculo.

PhET: Projectile Motion (https://phet.colorado.edu/en/simulations/projectile-motion) · MIT OpenCourseWare 10.34 Numerical Methods Applied to Chemical Engineering (otoño de 2015) (https://ocw.mit.edu/courses/10-34-numerical-methods-applied-to-chemical-engineering-fall-2015/)

Vínculo con el planeta: El GFS de NOAA se ejecuta cuatro veces al día y pronostica hasta 16 días. NOAA Environmental Modeling Center: Global Forecast System (GFS) (https://www.emc.ncep.noaa.gov/emc/pages/numerical_forecast_systems/gfs.php)

- [ ] **Completé este laboratorio (real o virtual)**

Laboratorio F: la ecuación del calor y su límite de estabilidad

SEMANA 13

Objetivo: Aplica el esquema explícito del calor a una barra con un punto caliente y mira qué pasa por encima de r = ½.

$$u_i^{n+1} = u_i^n + r(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$$

```
u_i^n+1=u_i^n+r(u_i+1^n-2u_i^n+u_i-1^n)
```

Esquema explícito

Procedimiento

1. Pon 7 nodos con los extremos en 0 y el nodo central en 100 (valores de ejemplo).
2. Avanza con r = 0.25 durante 10 pasos.
3. Repite con r = 0.6.
4. Describe ambos resultados.

Tabla de datos

Caso	Valor central tras 1 paso	Tras 10 pasos
r = 0.25	50.0	16.7
r = 0.6	−20.0	290.5

Valores calculados. Con r = 0.6 los valores oscilan y crecen: el esquema es inestable.

Cálculo de ejemplo

1. r = 0.25: 100 + 0.25(0 − 200 + 0) = 50.
2. r = 0.6: 100 + 0.6(−200) = −20.

> **Seguridad**
>
> - Solo ordenador.

Alternativa en casa o virtual

- Sirve cualquier hoja de cálculo.

MIT OpenCourseWare 2.086 Numerical Computation for Mechanical Engineers (otoño de 2014) (https://ocw.mit.edu/courses/2-086-numerical-computation-for-mechanical-engineers-fall-2014/)

Vínculo con el planeta: NOAA planeaba pasar el GFS de 13 km a 9 km de resolución tras su actualización de 2023. NOAA: NOAA completes upgrade to weather and climate supercomputer

system (Aug. 10, 2023) (https://www.noaa.gov/news-release/noaa-completes-upgrade-to-weather-and-climate-supercomputer-system)

- [ ] **Completé este laboratorio (real o virtual)**

Series de práctica para exámenes

Cronométrate: unos 10 minutos por problema. Luego compara con las soluciones completas.

Ejercicios de práctica para el parcial (unidades 1–5)

1. Halla el error relativo de 3.14 como aproximación de π.
    1. $|3.14 - \pi|/\pi$.

    Respuesta: 5.07×10^{-4}.

2. Da dos pasos de Newton sobre $x^2 - 5$ desde $x_0 = 2$.
    1. $x_1 = 2 - (-1)/4$.
    2. $x_2 = 2.25 - 0.0625/4.5$.

    Respuesta: $x_1 = 2.25$; $x_2 = 2.23611$.

3. ¿Cuántos pasos de bisección reducen un intervalo de ancho 4 por debajo de 10^{-3}?
    1. $\log_2(4000) = 11.97$.

    Respuesta: 12 pasos.

4. ¿Cuánto más trabajo de eliminación supone n = 500 que n = 100?
    1. $(500/100)^3$.

    Respuesta: 125 veces.

5. Interpola el CO_2 de Mauna Loa para 2023 a partir de las medias anuales de NOAA de 2020 (414.21) y 2025 (427.35).
    1. 414.21 + 0.6 × 13.14.

    Respuesta: 422.09 ppm (el valor de NOAA para 2023 es 421.08).

Serie de práctica final (todas las unidades)

1. Estima $\int_0^2 x^2\,dx$ con la regla del trapecio, n = 2.
    1. h = 1: 0.5 × 0 + 1 + 0.5 × 4.

Respuesta: 3 (exacto 2.667).

2. Repite con la regla de Simpson, n = 2.

    1. (1/3)(0 + 4 + 4).

    Respuesta: 2.667, exacto para una cuadrática.

3. Da dos pasos de Euler de h = 0.1 sobre y' = −2y, y(0) = 1.

    1. 0.8^2.

    Respuesta: 0.64 (exacto 0.670).

4. Halla el mayor paso de tiempo explícito del calor para α = 2 × 10^{-5} m^2/s, Δx = 0.005 m.

    1. $0.5 \times 0.005^2/2 \times 10^{-5}$.

    Respuesta: 0.625 s.

5. Estima la derivada de e^x en 0 por diferencia central, h = 0.01.

    1. (e^0.01 − e^−0.01)/0.02.

    Respuesta: 1.0000167.

6. ¿Cuánto reduce un intervalo la búsqueda de la sección áurea en 20 pasos?

    1. 0.618^{20}.

    Respuesta: A 6.6 × 10^{-5} de su ancho.

Hoja de fórmulas

$$e_{rel} = |\tilde{x} - x|/|x|,\ \varepsilon_{mach} = 2^{-52} \qquad x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n),\ n \geq \log_2((b-a)/tol)$$

$$A = LU,\ \text{cost} \approx \tfrac{2}{3}n^3,\ \kappa = \|A\|\|A^{-1}\| \qquad \|e_k\| \approx \rho^k \|e_0\|$$

$$A^T A c = A^T y \qquad f' \approx (f(x+h) - f(x-h))/(2h),\ h_{opt} \approx \sqrt{\varepsilon}$$

$$T_n:\ E \propto h^2,\ S_n:\ E \propto h^4 \qquad y_{n+1} = y_n + hf,\ h < 2/\lambda$$

$$r = \alpha \Delta t/\Delta x^2 \leq \tfrac{1}{2},\ c\Delta t/\Delta x \leq 1 \qquad x_{k+1} = x_k - \alpha \nabla f,\ \lambda \approx v^T A v / v^T v$$

Constantes

Constante	Valor
Doble precisión (IEEE 754)	épsilon de máquina $2^{-52} = 2.22 \times 10^{-16}$, unas 16 cifras significativas
Precisión simple (IEEE 754)	épsilon de máquina $2^{-23} = 1.19 \times 10^{-7}$, unas 7 cifras significativas
e	2.718281828
π	3.141592654
Superficie de la Tierra (valor de libro de texto)	5.1×10^8 km^2
1 petaflop	10^{15} operaciones de coma flotante por segundo

Fuente: NIST Guide to the SI, Appendix B.9: conversion factors (https://www.nist.gov/pml/special-publication-811/nist-guide-si-appendix-b-conversion-factors/nist-guide-si-appendix-b9)

Textos y simulaciones gratuitos

Usa estas clases, secciones de libros y simulaciones gratuitas junto con el curso.

- MIT OpenCourseWare 18.330 Introduction to Numerical Analysis (primavera de 2012) (https://ocw.mit.edu/courses/18-330-introduction-to-numerical-analysis-spring-2012/): Clases y ejercicios gratuitos de análisis numérico del MIT.
- MIT OpenCourseWare 2.086 Numerical Computation for Mechanical Engineers (otoño de 2014) (https://ocw.mit.edu/courses/2-086-numerical-computation-for-mechanical-engineers-fall-2014/): Curso gratuito del MIT de computación para ingeniería.
- MIT OpenCourseWare 10.34 Numerical Methods Applied to Chemical Engineering (otoño de 2015) (https://ocw.mit.edu/courses/10-34-numerical-methods-applied-to-chemical-engineering-fall-2015/): Curso gratuito del MIT de métodos numéricos aplicados.
- OpenStax Calculus Volume 2, 3.6 Integración numérica (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/3-6-numerical-integration): Sección de libro de texto gratuita.
- OpenStax Calculus Volume 1, 4.9 Método de Newton (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/4-9-newtons-method): Sección de libro de texto gratuita.
- PhET: Least-Squares Regression (https://phet.colorado.edu/en/simulations/least-squares-regression): Ajusta rectas de forma interactiva.

Glosario

Error absoluto
Tamaño de la diferencia respecto al valor verdadero.

Bisección

Búsqueda de raíces dividiendo a la mitad un intervalo con cambio de signo.

Condición CFL
Límite del paso de tiempo $c\Delta t/\Delta x \le 1$.

Cancelación catastrófica
Pérdida de cifras al restar números cercanos.

Número de condición
Cuánto amplifica un problema los errores de entrada.

Crank–Nicolson
Esquema temporal implícito de segundo orden.

Dominancia diagonal
Cada elemento diagonal supera al resto de su fila.

Cuadratura de Gauss
Integración con puntos y pesos óptimos.

Gauss–Seidel
Solucionador iterativo que usa los valores nuevos de inmediato.

Factorización LU
$A = LU$, eliminación reutilizable.

Mínimos cuadrados
Ajuste que minimiza la suma de los residuos al cuadrado.

Épsilon de máquina
Distancia entre 1 y el siguiente flotante.

Método de Newton
Búsqueda de raíces a lo largo de rectas tangentes.

Método de la potencia
Multiplicación repetida para hallar el valor propio dominante.

Runge–Kutta (RK4)
Solucionador de EDO de cuarto orden.

Regla de Simpson
Integración de cuarto orden con parábolas.

Spline
Curva cúbica suave a trozos.

Ecuación rígida
EDO con partes muy rápidas y muy lentas.

Error de truncamiento
Error por cortar un proceso infinito.

Validación
Contrastar un modelo con observaciones.

Rúbrica de autoevaluación

No se otorga nota ni crédito. Úsala para valorar con honestidad dónde estás en cada unidad.

Nivel	Cómo se ve
4 · Dominio	Elige un método según la precisión necesaria, lo prueba en un problema de respuesta conocida, mide su orden y explica sus límites de estabilidad.
3 · Competente	Resuelve los ejercicios con fallos ocasionales en el tamaño del paso o las unidades.
2 · En desarrollo	Sigue los ejemplos resueltos pero no distingue el error de truncamiento del de redondeo.
1 · Inicial	Aplica fórmulas sin comprobar el error ni la estabilidad; necesita repasar la unidad.

Ponderación sugerida si quieres una nota

Parte	Peso
Problemas de práctica	20%
Prácticas	25%
Serie de práctica de mitad de curso	25%
Serie de práctica final	30%

Apunta al nivel 3 o superior en cada unidad antes de pasar al siguiente curso.

Cursos relacionados

- Mecánica orbital AERO 340
- Probabilidad y estadística MATH 350
- Aerodinámica I AERO 310
- Todos los cursos