آخر تحديث: November 1, 2026

🗺️ خريطة طريق لأربع سنوات · السنة 3, الخريف

عن هذه الدورة

يتضمن هذا المقرر المجاني 10 وحدات و6 مختبرات. هذه الأعداد الحقيقية وليست منهجًا أطول جرى اختصاره.

التحقق هو رقم أو نتيجة برمجية في صفحة مقرر يعيد سكربت حسابها قبل النشر. يجب أن يطابق الرقم المعروض الرقم المعاد حسابه.

هذا مخطط دورة مجانية للتعلّم الذاتي كتبته Saving Planets. وهو ليس مقررًا جامعيًا، ولا يمنح ساعات معتمدة، ولا تشارك فيه أي مؤسسة تعليمية.

يتبع محتواه مقررًا فصليًا في الطرق العددية للسنة الثالثة للمهندسين. وهو مبني على موضوعات وعمق MIT 18.330 Introduction to Numerical Analysis وMIT 2.086 Numerical Computation for Mechanical Engineers وMIT 10.34 (مجانًا على MIT OpenCourseWare)، ويستخدم أقسامًا مجانية من حساب التفاضل والتكامل في OpenStax نربطها حيث تفيد. لا يؤيد أيٌّ من هؤلاء المؤلفين أو المدارس أو الجهات هذه الصفحة.

ما نضيفه: كل وحدة مرتبطة بعمل حقيقي مع مصدر عام موثّق (نظام Global Forecast System والحواسيب الفائقة لدى NOAA، وسجل CO_2 في ماونا لوا، ونماذج المياه الجوفية لدى USGS، ونماذج المناخ لدى NASA)، وكل رقم في الصفحة يُعاد حسابه بنص تحقق قبل النشر، ولكل مختبر محاكاة مجانية أو جدول بيانات.

تابعها بالترتيب. في كل وحدة أهداف وأفكار أساسية ومعادلات وأمثلة خطوة بخطوة وتمارين بإجابات كاملة وأخطاء شائعة وبطاقات تعليمية واختبار قصير. يُحفظ تقدّمك في هذا المتصفح فقط.

كيف تساعد هذه الدورة في إنقاذ الكوكب

تنبؤات الطقس وإسقاطات المناخ وخطط المياه الجوفية كلها طرق عددية تعمل على الحواسيب: لا يمكن حل المعادلات يدويًا، لذا تُقسَّم إلى شبكات وخطوات زمنية وأنظمة خطية ضخمة.

معرفة كيف تعمل هذه الطرق وكيف تفشل هي ما يمكّن المهندسين من الحكم على تنبؤ أو نموذج. تنتهي كل وحدة بقسم قصير موثّق بالمصادر. القيم التي لا تأتي من مصدر موسومة بأنها قيم مثال أو قيم من الكتب المدرسية.

للمعلمين

يمكنك تدريس هذا المقرر، أو أن يتابعه الطالب وحده. إنه مجاني. Saving Planets لا تمنح درجة ولا ساعات معتمدة.

- هذه الصفحة هي المقرر كاملًا: 10 وحدات و6 مختبرات (MATH 340).
- خطّط لخمسة عشر أسبوعًا، نحو 6 إلى 9 ساعات في الأسبوع، بما في ذلك أسابيع المختبر.

- اتبع جدول الخمسة عشر أسبوعًا. اقرأ الوحدة، حلّ التمارين على الورق، ثم افتح الإجابة. في أسبوع المختبر، نفّذ المختبر أو نسخته المنزلية.
- التحقق هو رقم أو نتيجة برمجية في الصفحة يعيد سكربت حسابها قبل النشر. يجب أن يطابق الرقم الظاهر الرقم المعاد حسابه.
- استخدم طباعة هذه الصفحة، أو نزّل دليل الدراسة PDF. ورقة القوانين قرب النهاية.
- اسأل: كيف تساعد هذه الوحدة الناس والكوكب؟ في كل وحدة مربع أخضر فيه حقيقة مع مصدرها.
- انسخ نموذج دليل المعلم واكتب اسم صفك والوقت المتاح والأسئلة التي ستطرحها. افتح نموذج دليل المعلم

قبل أن تبدأ

المتطلبات السابقة

- حساب التفاضل والتكامل I وII: المشتقات والتكاملات ومتسلسلات تايلور.
- المعادلات التفاضلية: المعادلات التفاضلية العادية من الرتبة الأولى والثانية.
- الجبر الخطي: المصفوفات والمحددات والقيم الذاتية.
- مقدمة في البرمجة: الحلقات والدوال والمصفوفات (يصلح جدول البيانات أيضًا).

كيف تذاكر

- قبل الحساب، قدّر الإجابة وحدد الدقة التي تحتاجها.
- قارن دائمًا بإجابة دقيقة في مسألة اختبار قبل أن تثق بطريقة في مسألة حقيقية.
- تتبّع الخطأ عند تنصيف الخطوة: النسبة تخبرك برتبة الطريقة.
- استخدم وحدات النظام الدولي واكتب حجم الخطوة مع وحداته.
- احذر من طرح أعداد متقاربة جدًا؛ أعد كتابة الصيغة إن أمكن.
- حل كل تمرين على الورق أو في جدول بيانات قبل فتح الإجابة، وأعد الاختبارات القصيرة بعد بضعة أيام.

ماذا تحتاج

- حاسوب أو جهاز لوحي لمحاكاة PhET المجانية Least-Squares Regression وCurve Fitting وCalculus Grapher وProjectile Motion.
- برنامج جداول بيانات (أي برنامج مجاني يصلح)، أو Python إن كنت تعرفها.
- ملف بيانات CO_2 في Mauna Loa من NOAA في متصفح ويب.
- آلة حاسبة.

جدول مقترح من 15 أسبوعًا

نحو 6 إلى 9 ساعات أسبوعيًا: قراءة وتمارين، وفي أسابيع المختبر، المختبر.

الأسبوع	الوحدة	الموضوعات	القراءة
1	الأخطاء وأعداد الفاصلة العائمة ومتسلسلات تايلور	الأخطاء، الفاصلة العائمة، متسلسلات تايلور؛ المختبر A	MIT 18.330
2	جذور المعادلات: التنصيف ونيوتن والقاطع	التنصيف وتكرار النقطة الثابتة	MIT 18.330

الأسبوع	الوحدة	الموضوعات	القراءة
3	جذور المعادلات: التنصيف ونيوتن والقاطع	طريقتا نيوتن والقاطع؛ المختبر B	OpenStax Calculus 1، 4.9
4	الأنظمة الخطية: حذف غاوس وتحليل LU والتكييف	حذف غاوس وتحليل LU والتكييف	MIT 2.086
5	الحلول التكرارية: جاكوبي وغاوس–زايدل والتقارب	جاكوبي وغاوس–زايدل والأنظمة المتناثرة	MIT 18.330
6	الاستيفاء والشرائح والملاءمة بالمربعات الصغرى	الاستيفاء والشرائح	MIT 18.330
7	الاستيفاء والشرائح والملاءمة بالمربعات الصغرى	المربعات الصغرى؛ المختبر C؛ تدريب لاختبار منتصف الفصل	NOAA GML
8	الاشتقاق العددي	الاشتقاق العددي	MIT 18.330
9	التكامل العددي	التكامل العددي؛ المختبر D	OpenStax Calculus 2، 3.6
10	المعادلات التفاضلية العادية: أويلر ورونغه–كوتا والاستقرار	أويلر وهيون وRK4	MIT 10.34
11	المعادلات التفاضلية العادية: أويلر ورونغه–كوتا والاستقرار	الاستقرار والصلابة والأنظمة؛ المختبر E	MIT 10.34
12	المعادلات التفاضلية الجزئية: الفروق المنتهية	الفروق المنتهية لمعادلة الحرارة	MIT 2.086
13	المعادلات التفاضلية الجزئية: الفروق المنتهية	لابلاس والموجات وCFL؛ المختبر F	NOAA EMC
14	التحسين والقيم الذاتية والحوسبة على نطاق واسع	التحسين وطريقة القوة	MIT 18.330
15	التحسين والقيم الذاتية والحوسبة على نطاق واسع	الحوسبة على نطاق واسع والتحقق والمصادقة؛ تدريب للاختبار النهائي	NOAA; NASA GISS

تقدّمك

ضع علامة على الوحدات والمختبرات عند إنهائها، وخض الاختبارات. يُحفظ التقدم ونتائج الاختبارات في هذا المتصفح فقط، ولا تُرسل إلينا أبدًا.

الوحدات

الأخطاء وأعداد الفاصلة العائمة ومتسلسلات تايلور

الخطأ المطلق والنسبي، والأرقام المعنوية، وأعداد الفاصلة العائمة IEEE 754، وإبسيلون الآلة، والتقريب والإلغاء، وخطأ البتر من متسلسلات تايلور.

أهداف التعلّم

في نهاية هذه الوحدة ستستطيع أن:

- حساب الخطأ المطلق والنسبي.
- شرح إبسيلون الآلة في الدقة المفردة والمزدوجة.
- اكتشاف الإلغاء الكارثي وإصلاحه.
- تحديد خطأ البتر بالحد التالي في متسلسلة تايلور.

المفاهيم الأساسية

- الخطأ المطلق هو |التقريبي − الدقيق|؛ والخطأ النسبي يقسم على |الدقيق|. يخبرك الخطأ النسبي بعدد الأرقام الصحيحة.
- تخزّن الحواسيب الأعداد بالفاصلة العائمة الثنائية. للدقة المزدوجة إبسيلون آلة $2^{-52} \approx 2.22 \times 10^{-16}$ (نحو 16 رقمًا)؛ وللدقة المفردة $2^{-23} \approx 1.19 \times 10^{-7}$ (نحو 7 أرقام).
- معظم الأعداد العشرية، مثل 0.1، ليس لها تمثيل ثنائي دقيق، لذا ينتج 0.1 + 0.2 − 0.3 نحو 5.55×10^{-17} بدلًا من 0.
- طرح أعداد متقاربة جدًا يُفقد أرقامًا (الإلغاء الكارثي). وإعادة كتابة الصيغة جبريًا تصلح ذلك غالبًا.
- ينشأ خطأ البتر من قطع عملية لانهائية، مثل متسلسلة تايلور. والحد الأول المحذوف يقدّر الخطأ.

المعادلات الأساسية

$$e_{rel} = \frac{|\tilde{x} - x|}{|x|}$$

e_rel=(| x-x|)/(|x|)

الخطأ النسبي

$$\varepsilon_{mach} = 2^{-52} \approx 2.22 \times 10^{-16}$$

_mach=2^-52≈2.22×10^-16

إبسيلون الدقة المزدوجة

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \dots$$

f(x+h)=f(x)+hf'(x)+(h^2)/(2)f''(x)+

متسلسلة تايلور

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

تجنّب الإلغاء

أمثلة محلولة خطوة بخطوة

مثال 1.1 أوجد الخطأ النسبي لـ22/7 كتقريب لـπ.

1. |22/7 − π| = 0.001264.
2. اقسم على π.

الإجابة: الخطأ النسبي $\approx 4.02 \times 10^{-4}$، أي نحو 3 أرقام صحيحة.

مثال 1.2 احسب $\sqrt{(10^8+1)}-\sqrt{(10^8)}$ بأمان.

1. الطرح المباشر يلغي معظم الأرقام.
2. Use $1/(\sqrt{(10^8+1)}+\sqrt{(10^8)})$.

الإجابة: $\approx 5.0 \times 10^{-5}$ (وبدقة أكبر $\approx 4.99999999875 \times 10^{-5}$).

مثال 1.3 قدّر خطأ e^0.1 ≈ 1 + 0.1.

1. الحد التالي هو $0.1^2/2 = 0.005$.
2. الخطأ الحقيقي هو e^0.1 − 1.1.

الإجابة: الخطأ 0.00517 ≈، قريب من التقدير 0.005.

تمارين

حلّ كلًّا منها على الورق أولًا، ثم تحقق.

1. كم رقمًا صحيحًا تعطي الدقة المزدوجة؟

   نحو $\varepsilon = 2.22 \times 10^{-16}$ 16.

2. أضف الحد $0.1^3/6$ إلى e^0.1 ≈ 1.1. ما الخطأ الجديد؟

   $\approx 1.71 \times 10^{-4}$.

3. لماذا لا يساوي 0.1 + 0.2 − 0.3 تمامًا على الحاسوب؟

ليس لـ0.1 و0.2 تمثيل ثنائي دقيق؛ والنتيجة نحو 5.55×10^{-17}.

4. ما إبسيلون الدقة المفردة؟

$2^{-23} = 1.19 \times 10^{-7}$.

مفاهيم خاطئة شائعة

خرافة: الحواسيب تجري حسابًا دقيقًا.
في الحقيقة: كل عملية تُقرَّب إلى أقرب عدد بالفاصلة العائمة.

خرافة: الخطوات الأصغر تعني دائمًا خطأً أصغر.
في الحقيقة: يزداد خطأ التقريب كلما صغرت الخطوات.

خرافة: الخطأ النسبي والمطلق متماثلان.
في الحقيقة: الخطأ النسبي يقسم على المقدار الحقيقي.

بطاقات تعليمية

الخطأ المطلق

|التقريبي − الدقيق|.

الخطأ النسبي

الخطأ المطلق / |الدقيق|.

إبسيلون الآلة

$2^{-52} \approx 2.22 \times 10^{-16}$ في الدقة المزدوجة.

الإلغاء

فقدان الأرقام عند طرح أعداد متقاربة.

خطأ البتر

ينشأ من قطع عملية لانهائية.

الدقة المفردة

نحو 7 أرقام.

اختبار ذاتي

1. إبسيلون الدقة المزدوجة نحو...

2.2×10^{-16}

10^{-7}

10^{-3}

0

2.2×10^{-16}. 2^{-52}.

2. طرح أعداد متقاربة جدًا يسبب...

الإلغاء

الفيضان

لا شيء

نتائج دقيقة

الإلغاء. أرقام مفقودة.

3. ينشأ خطأ البتر من...

قطع متسلسلة

التخزين الثنائي

أخطاء الكتابة

الوحدات

قطع متسلسلة. التعريف.

4. الخطأ النسبي يقسم على...

القيمة الحقيقية

الخطوة

إبسيلون

10

القيمة الحقيقية. التعريف.

أعد هذا الاختبار

كيف يساعد هذا في إنقاذ الكوكب

يصف Environmental Modeling Center لدى NOAA تشغيلًا عالميًا مقترنًا للتنبؤ بدقة مكانية نحو 3 km نفّذ ديناميكا الغلاف الجوي بدقة 32 بت وكل ما عداها بدقة 64 بت، في موازنة مقصودة بين السرعة والدقة.

هذا هو اختيار إبسيلون في هذه الوحدة عمليًا: الدقة المفردة (نحو 7 أرقام) أسرع وتستهلك نصف الذاكرة، لذا يستخدمها مطوّرو النماذج حيث يبقى الخطأ الذي تضيفه أقل من خطأ النموذج نفسه.

على Saving Planets: رصد الأرض · مقدمة في البرمجة

المصادر: NOAA Environmental Modeling Center: Global Forecast System (GFS) (https://www.emc.ncep.noaa.gov/emc/pages/numerical_forecast_systems/gfs.php)

مصادر تعلّم مجانية

- MIT OpenCourseWare 18.330 Introduction to Numerical Analysis (ربيع 2012) (https://ocw.mit.edu/courses/18-330-introduction-to-numerical-analysis-spring-2012/): محاضرات MIT مجانية.
- MIT OpenCourseWare 2.086 Numerical Computation for Mechanical Engineers (خريف 2014) (https://ocw.mit.edu/courses/2-086-numerical-computation-for-mechanical-engineers-fall-2014/): مقرر MIT مجاني.

أنهيت هذه الوحدة

جذور المعادلات: التنصيف ونيوتن والقاطع

الحصر بالتنصيف، وطريقة نيوتن، وطريقة القاطع، وتكرار النقطة الثابتة، ورتبة التقارب، وقواعد التوقف.

أهداف التعلّم

في نهاية هذه الوحدة ستستطيع أن:

- إيجاد جذر بالتنصيف والتنبؤ بعدد الخطوات.
- تطبيق طريقة نيوتن والتعرّف على التقارب التربيعي.
- استخدام طريقة القاطع عندما تكون المشتقة مجهولة.
- اختيار قاعدة توقف.

المفاهيم الأساسية

- يقسم التنصيف الفترة [a, b] التي تغيّر فيها f إشارتها إلى نصفين. وهو يتقارب دائمًا، لكن برقم ثنائي واحد في كل خطوة: n ≥ log₂((b − a)/tol).
- تتبع طريقة نيوتن خط المماس: x_{n+1} = x_n − f(x_n)/f'(x_n). وقرب جذر بسيط تتقارب تربيعيًا، فتضاعف الأرقام الصحيحة في كل خطوة.
- تستبدل طريقة القاطع f' بالميل المار بآخر نقطتين. لا تحتاج إلى مشتقة وتتقارب برتبة نحو 1.618.
- قد تفشل طريقة نيوتن إذا كانت f' قريبة من الصفر أو كانت البداية بعيدة؛ والرجوع إلى الحصر يجعلها آمنة.
- توقّف عندما يكون |x_{n+1} − x_n| و|f(x_n)| كلاهما دون حد التسامح، وضع دائمًا حدًا أقصى لعدد التكرارات.

المعادلات الأساسية

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

```
x_n+1=x_n-(f(x_n))/(f'(x_n))
```

طريقة نيوتن

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

```
x_n+1=x_n-f(x_n)_n-x_n-1f(x_n)-f(x_n-1)
```

طريقة القاطع

$$n \geq \log_2 \frac{b-a}{tol}$$

خطوات التنصيف

$$|e_{n+1}| \approx C|e_n|^2$$

أمثلة محلولة خطوة بخطوة

مثال 2.1 استخدم التنصيف على $f(x) = x^3 - x - 2$ في $[1, 2]$. أعط أول ثلاث نقاط منتصف والجذر.

1. $f(1) = -2, f(2) = 4$.
2. نقاط المنتصف 1.5 و1.75 و1.625.

الإجابة: الجذر $x = 1.5214$.

مثال 2.2 كم خطوة تنصيف تقلّص فترة عرضها 1 إلى ما دون 10^{-6}؟

1. $\log_2(10^6) = 19.93$.

الإجابة: 20 خطوة.

مثال 2.3 استخدم طريقة نيوتن على $x^2 - 2$ بدءًا من $x_0 = 1$.

1. $x_1 = 1.5, x_2 = 1.41667$.
2. $x_3 = 1.414216$.

الإجابة: $x_3 = 1.414216$، أي 6 أرقام صحيحة بالفعل.

تمارين

حلّ كلًّا منها على الورق أولًا، ثم تحقق.

1. طبّق نيوتن على $x^3 - x - 2$ بدءًا من $x_0 = 1.5$. ما الخطوة الأولى؟

   1.52174.

2. طبّق طريقة القاطع على $x^2 - 2$ بدءًا من 1 و2. ما أول ثلاث تكرارات؟

   1.3333, 1.4000, 1.4146.

3. ما رتبة تقارب طريقة القاطع؟

   نحو 1.618.

4. لماذا نضع حدًا أقصى لعدد التكرارات؟

   قد تتباعد الطريقة أو تدور في حلقة.

مفاهيم خاطئة شائعة

خرافة: طريقة نيوتن تتقارب دائمًا.
في الحقيقة: قد تتباعد من بداية سيئة.

خرافة: التنصيف سريع.
في الحقيقة: يكسب بتًا واحدًا في كل خطوة.

خرافة: قيمة f(x) الصغيرة تعني أن x قريب من الجذر.
في الحقيقة: ليس إذا كانت f مسطحة جدًا.

بطاقات تعليمية

التنصيف

تنصيف فترة يحدث فيها تغيّر إشارة.

النيوتن

x − f/f'.

القاطع

نيوتن بميل من نقطتين.

التقارب التربيعي

تتضاعف الأرقام في كل خطوة.

فترة الحصر

فترة فيها تغيّر إشارة.

قاعدة التوقف

الخطوة والباقي دون حد التسامح.

اختبار ذاتي

1. تتقارب طريقة نيوتن...

تربيعيًا

خطيًا

أبدًا

تكعيبيًا دائمًا

تربيعيًا. قرب جذر بسيط.

2. يحتاج التنصيف إلى...

تغيّر في الإشارة

مشتقة

مصفوفة

لا شيء

تغيّر في الإشارة. الحصر.

3. يتجنب القاطع...

المشتقة

f

التكرار

نقاط البداية

المشتقة. ميل من نقطتين.

4. عدد خطوات التنصيف للوصول إلى 10^{-6} من عرض 1...

20

6

100

2

$\log_2 10^6$ .20

أعد هذا الاختبار

كيف يساعد هذا في إنقاذ الكوكب

تقول USGS إن MODFLOW يُعدّ معيارًا دوليًا لمحاكاة المياه الجوفية. وتستخدم إحدى نسخه، MODFLOW-NWT، صياغة نيوتن-رافسون لتحسين حل مسائل جريان المياه الجوفية غير المحصورة.

تجعل الطبقات المائية غير المحصورة المعادلات غير خطية، لأن السُمك المشبع يعتمد على منسوب الماء المطلوب حسابه. وطريقة نيوتن في هذه الوحدة هي ما يجعل تلك الحسابات تتقارب بموثوقية.

على Saving Planets: المحيطات · التفاضل والتكامل 1

المصادر: USGS: MODFLOW and Related Programs (https://www.usgs.gov/mission-areas/water-resources/science/modflow-and-related-programs)

مصادر تعلّم مجانية

- OpenStax Calculus Volume 1، 4.9 طريقة نيوتن (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/4-9-newtons-method): قسم من كتاب مدرسي مجاني.
- MIT OpenCourseWare 18.330 Introduction to Numerical Analysis (ربيع 2012) (https://ocw.mit.edu/courses/18-330-introduction-to-numerical-analysis-spring-2012/): محاضرات MIT مجانية.

شاهد المحاضرة

Session 7: Solutions of Nonlinear Equations; Newton-Raphson Method (https://ocw.mit.edu/courses/10-34-numerical-methods-applied-to-chemical-engineering-fall-2015/resources/session-7-solutions-of-nonlinear-equations-newton-raphson-method/) (باللغة الإنجليزية)

MIT 10.34 Numerical Methods Applied to Chemical Engineering (Fall 2015), MIT OpenCourseWare. الترخيص: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · شروط الاستخدام (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/).
الرابط للدراسة المجانية فقط؛ Saving Planets غير تابع لهذه الجامعة ولا يحظى بتأييدها.

أنهيت هذه الوحدة

الأنظمة الخطية: حذف غاوس وتحليل LU والتكييف

حذف غاوس مع الارتكاز الجزئي، وتحليل LU، وعدد العمليات، وعدد التكييف وكيف يحدّ من الدقة.

أهداف التعلّم

في نهاية هذه الوحدة ستستطيع أن:

- حل نظام 3 × 3 بالحذف.
- شرح تحليل LU وإعادة استخدامه.
- تقدير تكلفة الحذف.
- استخدام عدد التكييف للحكم على الدقة.

المفاهيم الأساسية

- يختزل حذف غاوس Ax = b إلى نظام مثلثي علوي، ثم يجري التعويض الخلفي. ويبدّل الارتكاز الجزئي الصفوف لاستخدام أكبر محور، مما يضبط خطأ التقريب.
- يخزّن تحليل LU عملية الحذف على صورة A = LU. وبعد التحليل، لا يكلّف كل طرف أيمن جديد سوى حلّين مثلثيين.
- يكلّف الحذف نحو $2n^3/3$ عملية بالفاصلة العائمة: مضاعفة n تضرب العمل في 8.
- يقيس عدد التكييف κ(A) = ‖A‖‖A⁻¹‖ الحساسية. ويمكن أن تفقد نحو $\log_{10} \kappa$ رقمًا من الدقة.
- لا تحسب A^{-1} أبدًا لحل نظام؛ بل حلّل ثم حُلّ.

المعادلات الأساسية

$$A = LU$$

A=LU

تحليل LU

$$\text{cost} \approx \tfrac{2}{3}n^3$$

عمليات الحذف

$$\kappa(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$$

(A)=\|A\|\|A^-1\|

عدد الشرط

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le \kappa \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

حد الخطأ

أمثلة محلولة خطوة بخطوة

مثال 3.1 حُلّ $2x + y - z = 8$، $-3x - y + 2z = -11$، $-2x + y + 2z = -3$.

1. احذف x من الصفين 2 و3، ثم y من الصف 3.
2. أجرِ التعويض الخلفي.

الإجابة: $x = 2, y = 3, z = -1$.

مثال 3.2 قدّر تكلفة الحذف عند $n = 1000$.

1. $2 \times 1000^3/3$.

الإجابة: نحو 6.67×10^8 عملية.

مثال 3.3 أوجد عدد التكييف بالمعيار 2 للمصفوفة $[[1, 1], [1, 1.0001]]$.

1. الصفوف شبه متوازية.
2. $\kappa = \sigma_{max}/\sigma_{min}$.

الإجابة: $\kappa \approx 40{,}002$، لذا قد يُفقد نحو 4–5 أرقام.

تمارين

حلّ كلًّا منها على الورق أولًا، ثم تحقق.

1. كم يزيد العمل عند $n = 2000$ مقارنة بـ$n = 1000$؟

   8 أضعاف.

2. عمليات الحذف عند $n = 3$؟

   $2 \times 27/3 = 18$.

3. لماذا الارتكاز؟

   لتجنّب القسمة على أعداد صغيرة وتضخيم التقريب.

4. كم رقمًا يُفقد عند $\kappa = 10^8$ في الدقة المزدوجة؟

   نحو 8 من 16.

مفاهيم خاطئة شائعة

خرافة: استخدام A^{-1} لحل الأنظمة.
في الحقيقة: حلّل ثم حُلّ؛ فذلك أرخص وأدق.

خرافة: المحدد الصغير يعني سوء التكييف.
في الحقيقة: استخدم عدد التكييف.

خرافة: الارتكاز اختياري.
في الحقيقة: من دونه قد يفشل الحذف أو يفقد الدقة.

بطاقات تعليمية

حذف غاوس

الاختزال إلى صورة مثلثية.

LU

$A = LU$.

الارتكاز

تبديل الصفوف من أجل الاستقرار.

عدد الشرط

$\|A\|\|A^{-1}\|$.

التعويض العكسي

حل الأنظمة المثلثية.

التكلفة

$\approx 2n^3/3$.

اختبار ذاتي

1. يكلّف الحذف نحو…

$2n^3/3$

n

n^2

2^n

$2n^3/3$. حلقة ثلاثية.

2. يفيد LU عندما…

تتعدد الأطراف اليمنى

n = 1

لا حل

أبدًا

تتعدد الأطراف اليمنى. إعادة استخدام العوامل.

3. κ الكبير يعني...

حساس

سهل

منفرد دائمًا

متناظرة

حساس. يضخّم الأخطاء.

4. يختار الارتكاز الجزئي...

أكبر محور

الأصغر

صفر

عشوائيًا

أكبر محور. الاستقرار.

أعد هذا الاختبار

كيف يساعد هذا في إنقاذ الكوكب

تقول USGS إن من السمات الأساسية لـMODFLOW 6 قدرته على حل عدة نماذج عددية مترابطة بإحكام في نظام معادلات واحد.

جاءت خريطتها لعمق منسوب المياه الجوفية عبر الولايات المتحدة القارية من محاكاة متوازية لـ256 نطاق نموذج مترابطًا بإحكام على 256 نواة في حاسوب فائق لدى USGS. وكل نطاق نظام خطي متناثر كبير مثل أنظمة هذه الوحدة.

على Saving Planets: الجبر الخطي · المحيطات

المصادر: USGS: MODFLOW and Related Programs (https://www.usgs.gov/mission-areas/water-resources/science/modflow-and-related-programs)

مصادر تعلّم مجانية

- MIT OpenCourseWare 2.086 Numerical Computation for Mechanical Engineers (خريف 2014) (https://ocw.mit.edu/courses/2-086-numerical-computation-for-mechanical-engineers-fall-2014/): مقرر MIT مجاني.
- MIT OpenCourseWare 10.34 Numerical Methods Applied to Chemical Engineering (خريف 2015) (https://ocw.mit.edu/courses/10-34-numerical-methods-applied-to-chemical-engineering-fall-2015/): مقرر MIT مجاني.

شاهد المحاضرة

Lecture 3: Solving a Linear System (https://ocw.mit.edu/courses/18-085-computational-science-and-engineering-i-fall-2008/resources/lecture-3-solving-a-linear-system/) (باللغة الإنجليزية)

MIT 18.085 Computational Science and Engineering I (Fall 2008), MIT OpenCourseWare. الترخيص: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · شروط الاستخدام (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). الرابط للدراسة المجانية فقط؛ Saving Planets غير تابع لهذه الجامعة ولا يحظى بتأييدها.

☐ **أنهيت هذه الوحدة**

الحلول التكرارية: جاكوبي وغاوس–زايدل والتقارب

تكرار جاكوبي وغاوس–زايدل، والهيمنة القطرية، ومصفوفة التكرار ونصف القطر الطيفي، والأنظمة المتناثرة ولماذا تتوسع الطرق التكرارية.

أهداف التعلّم

في نهاية هذه الوحدة ستستطيع أن:

- تنفيذ خطوات جاكوبي وغاوس–زايدل.
- اختبار الهيمنة القطرية.
- استخدام نصف القطر الطيفي للتنبؤ بسرعة التقارب.
- شرح سبب استخدام التكرار في الأنظمة المتناثرة الكبيرة.

المفاهيم الأساسية

- يحدّث جاكوبي كل مجهول من التكرار السابق؛ ويستخدم غاوس–زايدل القيم الجديدة فور حسابها.
- إذا كانت A ذات هيمنة قطرية صارمة، تتقارب الطريقتان من أي بداية.
- يتقلص الخطأ في كل خطوة بنحو نصف القطر الطيفي ρ لمصفوفة التكرار. وغالبًا ما يكون لغاوس–زايدل ρ_GS = ρ_J².
- تنتج الشبكات الكبيرة مصفوفات متناثرة فيها عناصر غير صفرية قليلة في كل صف. تخزّن الطرق التكرارية تلك العناصر فقط، بينما يُحدث الحذف امتلاءً.
- توقّف عندما يكون الباقي ‖b − Ax‖ صغيرًا نسبةً إلى ‖b‖.

المعادلات الأساسية

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j^{(k)}\right)$$

```
x_i^(k+1)=1a_ii(b_i-_j ia_ijx_j^(k))
```

جاكوبي

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

الهيمنة القطرية

$$\|e_k\| \approx \rho^k \|e_0\|$$

معدل التقارب

$$r = b - Ax$$

```
r=b-Ax
```

أمثلة محلولة خطوة بخطوة

مثال 4.1 نفّذ خطوتي جاكوبي على $4x + y = 1$، $x + 3y = 2$ بدءًا من $(0, 0)$.

1. الخطوة 1: $x = 1/4 = 0.25$، $y = 2/3 = 0.6667$.
2. الخطوة 2: $x = (1 - 0.6667)/4$، $y = (2 - 0.25)/3$.

الإجابة: $x = 0.0833$، $y = 0.5833$ (القيمة الدقيقة 0.0909، 0.6364).

مثال 4.2 نفّذ خطوتي غاوس–زايدل على النظام نفسه.

1. الخطوة 1: $x = 0.25$، $y = (2 - 0.25)/3 = 0.5833$.
2. الخطوة 2: $x = 0.1042$، $y = 0.6319$.

الإجابة: $x = 0.1042$، $y = 0.6319$، أقرب من جاكوبي.

مثال 4.3 أوجد نصفي القطر الطيفيين لجاكوبي وغاوس–زايدل لهذا النظام.

1. $\rho_J = \sqrt{(1/12)}$.
2. $\rho_{GS} = \rho_J^2 = 1/12$.

الإجابة: $\rho_J = 0.289$; $\rho_{GS} = 0.0833$.

تمارين

حلّ كلًّا منها على الورق أولًا، ثم تحقق.

1. هل $[[4, 1], [1, 3]]$ ذات هيمنة قطرية؟

   نعم: $|4| > |1|$ و$|3| > |1|$.

2. كم خطوة غاوس–زايدل ($\rho = 0.0833$) لتقليص الخطأ بمعامل 10^6؟

   نحو 6 ($0.0833^6 = 3.35 \times 10^{-7}$).

3. التكرار الثالث لغاوس–زايدل؟

   $x = 0.0920,\ y = 0.6360$.

4. لماذا لا نستخدم الحذف على شبكة بمليون مجهول؟

يستهلك الامتلاء ذاكرة ووقتًا أكثر مما ينبغي.

مفاهيم خاطئة شائعة

خرافة: التكرار يتقارب دائمًا.
في الحقيقة: يتطلب $\rho < 1$.

خرافة: جاكوبي وغاوس–زايدل متماثلان.
في الحقيقة: يستخدم غاوس–زايدل القيم الجديدة فورًا.

خرافة: التغير الصغير بين الخطوات يعني التقارب.
في الحقيقة: تحقق من الباقي أيضًا.

بطاقات تعليمية

جاكوبي

تحديث الكل من القيم القديمة.

غاوس–زايدل

استخدام القيم الجديدة فورًا.

نصف القطر الطيفي

أكبر |قيمة ذاتية|.

الهيمنة القطرية

$|a_{ii}|$ > مجموع الصف.

متناثر

معظمها أصفار.

الباقي

$b - Ax$.

اختبار ذاتي

1. يتقارب إذا...

$\rho < 1$

$\rho > 1$

كان n زوجيًا

كانت A منفردة

$\rho < 1$. يتقلص الخطأ.

2. يستخدم غاوس–زايدل…

أحدث القيم

القيم القديمة فقط

لا قيم

المعكوسات

أحدث القيم. التعريف.

3. المتناثر يعني…

معظمها أصفار

كثيف

n صغير

منفردة

معظمها أصفار. عناصر غير صفرية قليلة.

4. كافٍ للتقارب…

الهيمنة القطرية

التماثل وحده

n = 2

لا شيء

الهيمنة القطرية. مبرهنة.

أعد هذا الاختبار

كيف يساعد هذا في إنقاذ الكوكب

يقسّم GFS لدى NOAA الغلاف الجوي إلى 127 طبقة رأسية بتباعد أفقي نحو 13 km. وكل نقطة شبكة ترتبط بجيرانها فقط، لذا تكون الأنظمة التي تبنيها هذه النماذج ضخمة ومتناثرة.

بمساحة سطح أرض قياسية من الكتب المدرسية تبلغ $5.1 \times 10^8\ \text{km}^2$، تضم شبكة 13 km نحو 3.0 ملايين عمود و383 مليون خلية. وتُعالَج أنظمة بهذا الحجم بالطرق التكرارية وغيرها من الطرق المتناثرة، لا بالحذف البسيط.

على Saving Planets: رصد الأرض · الجبر الخطي

المصادر: NOAA Environmental Modeling Center: Global Forecast System (GFS) (https://www.emc.ncep.noaa.gov/emc/pages/numerical_forecast_systems/gfs.php)

مصادر تعلّم مجانية

- MIT OpenCourseWare 18.330 Introduction to Numerical Analysis (ربيع 2012) (https://ocw.mit.edu/courses/18-330-introduction-to-numerical-analysis-spring-2012/): محاضرات MIT مجانية.
- MIT OpenCourseWare 2.086 Numerical Computation for Mechanical Engineers (خريف 2014) (https://ocw.mit.edu/courses/2-086-numerical-computation-for-mechanical-engineers-fall-2014/): مقرر MIT مجاني.

أنهيت هذه الوحدة

الاستيفاء والشرائح والملاءمة بالمربعات الصغرى

الاستيفاء الخطي ومتعدد الحدود، وصيغة لاغرانج، وخطر كثيرات الحدود العالية الدرجة، والشرائح التكعيبية، وملاءمة خط أو كثيرة حدود بالمربعات الصغرى مع البواقي.

أهداف التعلّم

في نهاية هذه الوحدة ستستطيع أن:

- الاستيفاء الخطي بين نقاط البيانات.
- بناء كثيرة حدود لاغرانج.
- ملاءمة خط بالمربعات الصغرى وتفسير ميله.
- الاختيار بين الاستيفاء والملاءمة.

المفاهيم الأساسية

- يمر الاستيفاء بالبيانات تمامًا؛ أما الملاءمة فتمر قرب البيانات المشوشة وتقلّل مجموع مربعات البواقي.
- كثيرة الحدود من الدرجة n المارة بـ n + 1 نقطة وحيدة. والدرجات العالية على نقاط متساوية التباعد قد تتذبذب بشدة قرب الأطراف (ظاهرة رونغه).
- تربط الشرائح التكعيبية قطعًا تكعيبية متطابقة الميل والانحناء، فتعطي منحنيات ناعمة بلا تأرجحات عنيفة.
- يحل خط المربعات الصغرى المعادلات الطبيعية $A^{\mathsf{T}}Ac = A^{\mathsf{T}}y$. والميل معدّل له وحدات.
- ارسم البواقي: وجود نمط فيها يعني أن النموذج يفتقد شيئًا، مثل الانحناء.

المعادلات الأساسية

$$y = y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}(y_1 - y_0)$$

```
y=y_0+(x-x_0)/(x_1-x_0)(y_1-y_0)
```

الاستيفاء الخطي

$$p(x) = \sum_{i} y_i \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

```
p(x)=_i y_i_j i(x-x_j)/(x_i-x_j)
```

صيغة لاغرانج

$$A^{T}A\,c = A^{T}y$$

```
A^TA c=A^Ty
```

المعادلات الطبيعية

$$\min \sum_{i} r_i^2$$

أمثلة محلولة خطوة بخطوة

مثال 5.1 المتوسطان السنويان لماونا لوا لدى NOAA هما 390.10 ppm (2010) و414.21 ppm (2020). استوفِ قيمة 2015.

1. $y = 390.10 + 0.5 \times 24.11$.

الإجابة: 402.16 ppm؛ وقيمة NOAA لعام 2015 هي 401.01، لذا ينحني السجل إلى الأعلى.

مثال 5.2 لائم خطًا بالمربعات الصغرى للقيم العقدية 1960–2020 (316.91، 325.68، 338.76، 354.45، 369.71، 390.10، 414.21 ppm).

1. حُلّ المعادلات الطبيعية لإيجاد الميل والمقطع.

الإجابة: الميل 1.613 ppm في السنة؛ ويتنبأ الخط بـ415.0 ppm لعام 2025.

مثال 5.3 لائم بدلًا من ذلك دالة تربيعية في t = السنة − 1960.

1. المربعات الصغرى بالأعمدة 1 وt وt².

الإجابة: $c = 316.84 + 0.810t + 0.01338t^2$؛ وتتنبأ بـ426.0 ppm لعام 2025، قريبًا من 427.35 لدى NOAA.

تمارين

حلّ كلًّا منها على الورق أولًا، ثم تحقق.

1. متوسط النمو 2010–2020 من القيم العقدية؟

   2.41 ppm في السنة.

2. متوسط النمو 2000–2010؟

   2.04 ppm في السنة.

3. لماذا يقلل الخط المستقيم من تقدير 2025؟

   النمو يتسارع؛ والبواقي تنحني.

4. الاستيفاء أم الملاءمة لبيانات مختبر مشوشة؟

.Fit

مفاهيم خاطئة شائعة

خرافة: كثيرات الحدود الأعلى درجة تلائم دائمًا أفضل.
في الحقيقة: قد تتذبذب بين النقاط.

خرافة: قيمة R^2 الجيدة تعني نموذجًا جيدًا.
في الحقيقة: تحقق من نمط البواقي.

خرافة: الاستكمال الخارجي آمن مثل الاستيفاء.
في الحقيقة: إنه أخطر بكثير.

بطاقات تعليمية

الاستيفاء

يمر بالبيانات تمامًا.

المربعات الصغرى

تقليل مربعات البواقي.

الشريحة

تكعيبية متقطعة وناعمة.

رونغه

تذبذبات الملاءمات عالية الدرجة.

الباقي

البيانات ناقص النموذج.

المعادلات الطبيعية

$A^TAc = A^Ty$.

اختبار ذاتي

1. تقلّل المربعات الصغرى...

مجموع مربعات البواقي

الخطأ الأقصى

الميل

الدرجة

مجموع مربعات البواقي. التعريف.

2. ظاهرة رونغه هي...

التذبذب عند الأطراف

الإلغاء

التباعد

الارتكاز

التذبذب عند الأطراف. كثيرات حدود عالية الدرجة.

3. الشرائح هي...

تكعيبيات متقطعة

خطوط مفردة

عشوائيًا

متسلسلة تايلور

تكعيبيات متقطعة. التعريف.

4. المعادلات الطبيعية هي...

$A^TAc = A^Ty$

$Ax = 0$

LU

$f = 0$

$A^TAc = A^Ty$. المربعات الصغرى.

أعد هذا الاختبار

كيف يساعد هذا في إنقاذ الكوكب

تفيد NOAA بأن سجل ماونا لوا، الذي بدأه C. David Keeling من Scripps في مارس 1958، هو أطول سجل لقياسات CO_2 المباشرة في الغلاف الجوي. وبلغ المتوسط الشهري 426.07 ppm في سبتمبر 2026، ارتفاعًا من 424.37 ppm في سبتمبر 2025.

ارتفعت المتوسطات السنوية لدى NOAA من 316.91 ppm في 1960 إلى 427.35 ppm في 2025. ويظهر المنحنى الصاعد في بواقي هذه الوحدة: الخط المستقيم يخطئه، والدالة التربيعية تلائمه.

على Saving Planets: الحلول · رصد الأرض

المصادر: NOAA Global Monitoring Laboratory: Trends in atmospheric CO_2 (Mauna Loa) (https://gml.noaa.gov/ccgg/trends/) · NOAA GML: Mauna Loa annual mean CO_2 data (https://gml.noaa.gov/webdata/ccgg/trends/co2/co2_annmean_mlo.txt)

مصادر تعلّم مجانية

- PhET: Least-Squares Regression (https://phet.colorado.edu/en/simulations/least-squares-regression): وفّق الخطوط بشكل تفاعلي.
- PhET: Curve Fitting (https://phet.colorado.edu/en/simulations/curve-fitting): ملاءمات كثيرات الحدود تفاعليًا.

شاهد المحاضرة

Lecture 11: Least Squares (part 2) (https://ocw.mit.edu/courses/18-085-computational-science-and-engineering-i-fall-2008/resources/lecture-11-least-squares-part-2/) (باللغة الإنجليزية)

MIT 18.085 Computational Science and Engineering I (Fall 2008), MIT OpenCourseWare. الترخيص: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · شروط الاستخدام (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use). الرابط للدراسة المجانية فقط؛ Saving Planets غير تابع لهذه الجامعة ولا يحظى بتأييدها.

☐ **أنهيت هذه الوحدة**

الاشتقاق العددي

الفروق الأمامية والخلفية والمركزية، وخطأ البتر فيها، والتوازن مع خطأ التقريب وأفضل حجم خطوة، والمشتقات الثانية، واستكمال ريتشاردسون.

أهداف التعلّم

في نهاية هذه الوحدة ستستطيع أن:

- تطبيق الفروق الأمامية والمركزية.
- تحديد رتبة كل صيغة.
- اختيار حجم خطوة يوازن بين البتر والتقريب.
- تقدير مشتقة ثانية.

المفاهيم الأساسية

- للفرق الأمامي (f(x + h) − f(x))/h خطأ يتناسب مع h (الرتبة الأولى).
- للفرق المركزي (f(x + h) − f(x − h))/(2h) خطأ يتناسب مع h² (الرتبة الثانية)، لذا يقلّل تنصيف h الخطأ بمعامل 4.
- يزداد خطأ التقريب مثل ε/h كلما صغر h. وأفضل h للفروق الأمامية نحو 10^{-8} × 1.49 ≈ √ε؛ وللفروق المركزية نحو × 6.06 ≈ (1/3)^ε 10^{-6}.
- المشتقة الثانية هي (f(x + h) − 2f(x) + f(x − h))/h²، وهي أيضًا من الرتبة الثانية.
- يجمع استكمال ريتشاردسون حجمي خطوة لإلغاء حد الخطأ الرئيسي.

المعادلات الأساسية

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

الفرق الأمامي

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

الفرق المركزي

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

الفرق الثاني

$$h_{opt} \approx \sqrt{\varepsilon}$$

أفضل خطوة أمامية

أمثلة محلولة خطوة بخطوة

مثال 6.1 قدّر مشتقة $\sin x$ عند $x = 1$ بفرق أمامي، $h = 0.1$.

1. $(\sin 1.1 - \sin 1)/0.1$.

الإجابة: 0.4974؛ القيمة الدقيقة $\cos 1 = 0.5403$؛ الخطأ -0.0429.

مثال 6.2 أعد ذلك بفرق مركزي.

1. $(\sin 1.1 - \sin 0.9)/0.2$.

الإجابة: 0.5394؛ الخطأ -0.00090، أصغر بنحو 47.7 مرة.

مثال 6.3 أوجد أفضل خطوة للفرق الأمامي في الدقة المزدوجة.

1. $h \approx \sqrt{(2.22 \times 10^{-16})}$.

الإجابة: $h \approx 1.49 \times 10^{-8}$.

تمارين

حلّ كلًّا منها على الورق أولًا، ثم تحقق.

1. نصّف h في فرق مركزي. ما الخطأ؟

   نحو ¼ قدره.

2. نصّف h في فرق أمامي. ما الخطأ؟

   نحو ½ قدره.

3. أفضل خطوة للفرق المركزي في الدقة المزدوجة؟

   نحو $\varepsilon^{\wedge}(1/3) = 6.06 \times 10^{-6}$.

4. لماذا لا نستخدم $h = 10^{-15}$؟

   يهيمن خطأ التقريب ε/h.

مفاهيم خاطئة شائعة

خرافة: h الأصغر أفضل دائمًا.

في الحقيقة: تحت القيمة المثلى يتغلّب التقريب.

خرافة: الفروق الأمامية والمركزية متساوية الدقة.

في الحقيقة: المركزي من الرتبة الثانية.

خرافة: اشتقاق بيانات مشوشة سهل.

في الحقيقة: تضخّم الفروق التشويش؛ نعّم البيانات أو لائمها أولًا.

بطاقات تعليمية

الفرق الأمامي

الرتبة الأولى.

الفرق المركزي

الرتبة الثانية.

الفرق الثاني

$f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)$ مقسومًا على h^2.

h الأمثل

$\approx \varepsilon^{1/3}$ للفرق الأمامي.

ريتشاردسون

إلغاء الخطأ الرئيسي.

الرتبة

أسّ h في الخطأ.

اختبار ذاتي

1. خطأ الفرق المركزي ∝...

h^2

h

$1/h$

h^3 دائمًا

h^2. متماثل.

2. الفرق الأمامي من الرتبة ...

أولًا

الثانية

صفر

الرابعة

أولًا. الخطأ ∝ h.

3. أفضل h أمامي نحو...

٤٧

٤

1

0.1

٤٧. التوازن.

4. التشويش في البيانات ... بأخذ الفروق.

يتضخّم

يُزال

يتنصّف

دون تغيير

يتضخّم. يقسم على h.

أعد هذا الاختبار

كيف يساعد هذا في إنقاذ الكوكب

تقول NOAA إن GFS ينتج مخرجات كل ساعة خلال أول 120 ساعة، ثم كل 3 ساعات للأيام 5 إلى 16. ويأخذ المتنبئون والنماذج اللاحقة فروق تلك المخرجات للحصول على معدلات مثل ميل الضغط ومعدل الهطول.

تبيّن هذه الوحدة لماذا تهم الخطوة الزمنية للمخرجات المحفوظة: المعدل المأخوذ من قيم كل 3 ساعات بفرق مركزي أدق بكثير من فرق أحادي الجانب على الفترة نفسها.

على GOES-19 :Saving Planets · التفاضل والتكامل 1

المصادر: NOAA Environmental Modeling Center: Global Forecast System (GFS) (https://www.emc.ncep.noaa.gov/emc/pages/numerical_forecast_systems/gfs.php)

مصادر تعلّم مجانية

- MIT OpenCourseWare 18.330 Introduction to Numerical Analysis (ربيع 2012) (https://ocw.mit.edu/courses/18-330-introduction-to-numerical-analysis-spring-2012/): محاضرات MIT مجانية.
- PhET: Calculus Grapher (https://phet.colorado.edu/en/simulations/calculus-grapher): المشتقات تفاعليًا.

أنهيت هذه الوحدة

التكامل العددي

قاعدتا شبه المنحرف وسيمبسون، والقواعد المركّبة ورتب الخطأ، واستكمال رومبرغ، وتربيع غاوس، وتكامل البيانات المقيسة.

أهداف التعلّم

في نهاية هذه الوحدة ستستطيع أن:

- تطبيق قاعدتي شبه المنحرف وسيمبسون المركّبتين.
- التنبؤ بكيفية تناقص الخطأ مع n.
- استخدام رومبرغ لتحسين نتيجة.
- تطبيق تربيع غاوس ذي النقطتين 2.

المفاهيم الأساسية

- تصل قاعدة شبه المنحرف النقاط بخطوط مستقيمة. ويتناقص خطؤها مثل h²: مضاعفة n تقسمه على 4.
- تلائم قاعدة سيمبسون قطوعًا مكافئة عبر أزواج من الفترات (n زوجي). ويتناقص خطؤها مثل h⁴: مضاعفة n تقسمه على 16.
- استكمال رومبرغ: T₂ₙ + (T₂ₙ − Tₙ)/3 يلغي خطأ h² في قاعدة شبه المنحرف (ويساوي قاعدة سيمبسون).
- يختار تربيع غاوس أفضل النقاط: نقطتان 2 عند ±1/√3 تكاملان التكعيبيات تمامًا.
- للبيانات المقيسة بتباعد ثابت، طبّق قاعدة شبه المنحرف أو سيمبسون مباشرة على العينات.

المعادلات الأساسية

$$T_n = h\left[\tfrac{1}{2}f_0 + f_1 + \cdots + f_{n-1} + \tfrac{1}{2}f_n\right]$$

```
T_n=h[12f_0+f_1++f_n-1+12f_n]
```

قاعدة شبه المنحرف

$$S_n = \tfrac{h}{3}\left[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + \cdots + 4f_{n-1} + f_n\right]$$

```
S_n= h3[f_0+4f_1+2f_2++4f_n-1+f_n]
```

قاعدة سيمبسون

$$\int_{-1}^{1} f \approx f(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}) + f(\tfrac{1}{\sqrt{3}})$$

غاوس بنقطتين 2

$$E_T \propto h^2,\ E_S \propto h^4$$

رتب الخطأ

أمثلة محلولة خطوة بخطوة

مثال 7.1 قدّر $\int_0^1 e^x\,dx$ بقاعدة شبه المنحرف، $n = 4$.

1. $h = 0.25$؛ اجمع القيم الموزونة.

الإجابة: $T_4 = 1.72722$؛ القيمة الدقيقة $1.71828 = e - 1$؛ الخطأ 0.00894.

مثال 7.2 أعد ذلك بقاعدة سيمبسون، $n = 4$.

1. الأوزان 1، 4، 2، 4، 1 مضروبة في $h/3$.

الإجابة: $S_4 = 1.718319$؛ الخطأ 3.70×10^{-5}.

مثال 7.3 استخدم تربيع غاوس بنقطتين 2 على التكامل نفسه.

1. حوّل $[0, 1]$ إلى $[-1, 1]$: النقطتان $0.5 \pm 0.5/\sqrt{3}$، ووزن كل منهما ½.

الإجابة: 1.717896؛ الخطأ -3.85×10^{-4} بقيمتين 2 فقط للدالة.

تمارين

حلّ كلًّا منها على الورق أولًا، ثم تحقق.

1. خطأ شبه المنحرف عند $n = 8$؟

   0.00224، نحو ¼ خطأ $n = 4$.

2. رومبرغ من T_4 وT_8؟

   1.718284.

3. قاعدة سيمبسون عند $n = 2$؟

   1.718861.

4. لماذا يجب أن يكون n زوجيًا في سيمبسون؟

   تستخدم أزواجًا من الفترات.

مفاهيم خاطئة شائعة

خرافة: تعمل قاعدة سيمبسون مع أي n.

في الحقيقة: يجب أن يكون n زوجيًا.

خرافة: زيادة النقاط تفيد دائمًا بالقدر نفسه.

في الحقيقة: القواعد الأعلى رتبة تتحسن أسرع بكثير.

خرافة: يمكن أن تكون نقاط غاوس في أي مكان.

في الحقيقة: إنها جذور ثابتة لكثيرات حدود ليجاندر.

بطاقات تعليمية

شبه المنحرف

الخطأ ∝ h^2.

سيمبسون

الخطأ ∝ h^4.

رومبرغ

استكمال نتائج شبه المنحرف.

تربيع غاوس

نقاط وأوزان مثلى.

القاعدة المركّبة

التطبيق على فترات جزئية كثيرة.

n زوجي

ضروري لسيمبسون.

اختبار ذاتي

1. خطأ سيمبسون ∝...

h^4

h^2

h

1

h^4. الرتبة الرابعة.

2. مضاعفة n في قاعدة شبه المنحرف تقسم الخطأ على...

4

2

16

1

.4. h^2

3. غاوس بنقطتين 2 دقيق لـ...

التكعيبيات

كل الدوال

الخطوط فقط

لا شيء

التكعيبيات. الدرجة 1 − 2n.

4. يلغي رومبرغ...

الخطأ الرئيسي

كل خطأ

التقريب

f

الخطأ الرئيسي. الاستكمال.

أعد هذا الاختبار

كيف يساعد هذا في إنقاذ الكوكب

توضح NOAA أن كل متوسط شهري في ماونا لوا هو متوسط متوسطات يومية، وهذه بدورها مبنية على متوسطات ساعية، باستخدام الساعات ذات ظروف «الخلفية» فقط.

المتوسط تكامل مقسوم على الفترة، لذا فإن بناء المتوسطات الشهرية من القيم الساعية تكامل عددي، أي فكرة شبه المنحرف من هذه الوحدة مطبّقة على قياسات حقيقية.

على Saving Planets: التفاضل والتكامل 2 · الحلول

المصادر: NOAA Global Monitoring Laboratory: Trends in atmospheric CO_2 (Mauna Loa) (https://gml.noaa.gov/ccgg/trends/)

مصادر تعلّم مجانية

- OpenStax Calculus Volume 2، 3.6 التكامل العددي (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/3-6-numerical-integration): قسم من كتاب مدرسي مجاني.
- PhET: Calculus Grapher (https://phet.colorado.edu/en/simulations/calculus-grapher): التكاملات تفاعليًا.

شاهد المحاضرة

Session 13: ODE-IVP and Numerical Integration 1 (https://ocw.mit.edu/courses/10-34-numerical-methods-applied-to-chemical-engineering-fall-2015/resources/session-13-ode-ivp-and-numerical-integration-1/) (باللغة الإنجليزية)

MIT 10.34 Numerical Methods Applied to Chemical Engineering (Fall 2015), MIT OpenCourseWare. الترخيص: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · شروط الاستخدام (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/).
الرابط للدراسة المجانية فقط؛ Saving Planets غير تابع لهذه الجامعة ولا يحظى بتأييدها.

أنهيت هذه الوحدة

المعادلات التفاضلية العادية: أويلر ورونغه–كوتا والاستقرار

طريقة أويلر، وطريقة هيون، ورونغه–كوتا من الرتبة الرابعة، والخطأ المحلي والكلي، وحدود الاستقرار، والمعادلات الصلبة والطرق الضمنية، وأنظمة المعادلات التفاضلية العادية.

أهداف التعلّم

في نهاية هذه الوحدة ستستطيع أن:

- التقدّم بمعادلة تفاضلية عادية بطريقتي أويلر وRK4.
- ربط حجم الخطوة بالخطأ الكلي.
- إيجاد حد الاستقرار الصريح لـy' = −λy.
- التعرّف على المسائل الصلبة.

المفاهيم الأساسية

- لطريقة أويلر y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n) خطأ كلي يتناسب مع h (الرتبة الأولى).
- تستخدم رونغه–كوتا من الرتبة الرابعة (RK4) أربع عينات للميل في كل خطوة؛ ويتناقص خطؤها الكلي مثل h^4.
- بالنسبة لـy' = −λy، تكون طريقة أويلر الصريحة مستقرة فقط إذا كان h < 2/λ. وخارج ذلك ينمو الحل العددي مع أن الحل الحقيقي يضمحل.
- للمسائل الصلبة أجزاء سريعة جدًا وأخرى بطيئة جدًا. وتبقى الطرق الضمنية مثل أويلر الخلفية مستقرة بخطوات كبيرة.
- تتحول المعادلات التفاضلية العادية ذات الرتب الأعلى إلى أنظمة من الرتبة الأولى تحلّها الطرق نفسها.

المعادلات الأساسية

$$y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n)$$

y_n+1=y_n+hf(t_n,y_n)

أويلر

$$y_{n+1} = y_n + \tfrac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

y_n+1=y_n+ h6(k_1+2k_2+2k_3+k_4)

RK4

$$h < \frac{2}{\lambda}$$

استقرار أويلر لـy' = −λy

$$y_{n+1} = y_n + h f(t_{n+1}, y_{n+1})$$

y_n+1=y_n+hf(t_n+1,y_n+1)

أمثلة محلولة خطوة بخطوة

مثال 8.1 حُلّ $y' = -y$، $y(0) = 1$ حتى $t = 1$ بطريقة أويلر، $h = 0.1$.

1. كل خطوة تضرب في 0.9.
2. $y(1) \approx 0.9^{10}$.

الإجابة: 0.34868 مقابل القيمة الدقيقة 0.36788؛ الخطأ -0.0192.

مثال 8.2 نفّذ خطوة RK4 واحدة بـ$h = 0.1$ على المسألة نفسها.

1. $k_1 = -1$, $k_2 = -0.95$, $k_3 = -0.9525$, $k_4 = -0.90475$.

الإجابة: $y(0.1) = 0.9048375$ مقابل القيمة الدقيقة 0.9048374.

مثال 8.3 تبرد قهوة وفق $T' = -0.1(T - 20)$ من $90\ ^\circ\text{C}$ (قيم مثال). استخدم أويلر بـ$h = 1$ min لمدة 10 min.

1. في كل خطوة يتقلص $T - 20$ بمعامل 0.9.

الإجابة: $44.41\ ^\circ\text{C}$ مقابل القيمة الدقيقة $45.75\ ^\circ\text{C}$.

تمارين

حلّ كلًّا منها على الورق أولًا، ثم تحقق.

1. أويلر بـ$h = 0.05$ حتى $t = 1$ على $y' = -y$؟

   $0.95^{20} = 0.35849$، والخطأ نحو النصف.

2. حد الاستقرار لـ$y' = -50y$ بطريقة أويلر؟

   $h < 0.04$.

3. خطوة هيون واحدة بـ$h = 0.1$ على $y' = -y$؟

   0.905.

4. كيف تحل $y'' = -y$ بهذه الطرق؟

   اكتبها على صورة $y' = v$، $v' = -y$.

مفاهيم خاطئة شائعة

خرافة: الخطوة الأصغر مستقرة دائمًا.

في الحقيقة: فقط دون الحد، ويزداد التقريب مع كثرة الخطوات.

خرافة: RK4 دقيقة تمامًا.

في الحقيقة: خطؤها صغير لكنه ليس صفرًا.

خرافة: الطرق الضمنية أبطأ دائمًا.

في الحقيقة: في المسائل الصلبة تكون أسرع بكثير إجمالًا.

بطاقات تعليمية

أويلر

صريحة من الرتبة الأولى.

RK4

الرتبة الرابعة، 4 ميول.

الاستقرار

الأخطاء لا تنمو.

صلب

مقاييس سريعة وبطيئة معًا.

أويلر الخلفية

ضمنية، مستقرة جدًا.

النظام

رتبة أعلى ← رتبة أولى.

اختبار ذاتي

1. الخطأ الكلي لأويلر ∝...

h

h^4

h^2

1

h. الرتبة الأولى.

2. تستخدم RK4 ... ميول.

4

1

2

10

4. من k_1 إلى k_4.

3. أويلر مستقرة لـ$y' = -\lambda y$ إذا...

$h < 2/\lambda$

$h > 2/\lambda$

أي h

$\lambda < 0$

$h < 2/\lambda$. التضخيم $|1 - h\lambda| < 1$.

4. المسائل الصلبة تفضّل...

الطرق الضمنية

أويلر

التنصيف

سيمبسون

الطرق الضمنية. الاستقرار.

أعد هذا الاختبار

كيف يساعد هذا في إنقاذ الكوكب

تقول NOAA إن GFS يعمل أربع مرات يوميًا ويتنبأ حتى 16 يومًا مقدمًا. وتصف صفحة EMC أيضًا تشغيلًا بحثيًا مقترنًا بدقة 3 km استغرق نحو 40,000 ثانية من وقت الحاسوب لكل تنبؤ مدته 24 ساعة، باستخدام 233 عقدة.

هذا نحو 11.1 ساعة حوسبة لكل يوم تنبؤ، أي أن النموذج عمل أسرع من الزمن الحقيقي بنحو 2.16 مرة فقط. وكل تنبؤ حلّ بخطوات زمنية لمعادلات تفاضلية عادية وجزئية، والخطوة المستقرة هي ما يحدد التكلفة.

على Saving Planets: المعادلات التفاضلية · GOES-19

المصادر: NOAA Environmental Modeling Center: Global Forecast System (GFS) (https://www.emc.ncep.noaa.gov/emc/pages/numerical_forecast_systems/gfs.php)

مصادر تعلّم مجانية

- MIT OpenCourseWare 10.34 Numerical Methods Applied to Chemical Engineering (خريف 2015) (https://ocw.mit.edu/courses/10-34-numerical-methods-applied-to-chemical-engineering-fall-2015/): مقرر MIT مجاني.
- PhET: Projectile Motion (https://phet.colorado.edu/en/simulations/projectile-motion): قارن بحلّالك.

شاهد المحاضرة

Session 18: Differential Algebraic Equations 2 (https://ocw.mit.edu/courses/10-34-numerical-methods-applied-to-chemical-engineering-fall-2015/resources/session-18-differential-algebraic-equations-2/) (باللغة الإنجليزية)

MIT 10.34 Numerical Methods Applied to Chemical Engineering (Fall 2015), MIT OpenCourseWare. الترخيص: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · شروط الاستخدام (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/).
الرابط للدراسة المجانية فقط؛ Saving Planets غير تابع لهذه الجامعة ولا يحظى بتأييدها.

☐ **أنهيت هذه الوحدة**

المعادلات التفاضلية الجزئية: الفروق المنتهية

الشبكات والقوالب، ومعادلة الحرارة الصريحة وحد استقرارها، والمخططات الضمنية ومخطط كرانك–نيكلسون، ومعادلة لابلاس وحلها التكراري، وشرط CFL للموجات، وتكلفة الدقة.

أهداف التعلّم

في نهاية هذه الوحدة ستستطيع أن:

- كتابة قوالب الفروق المنتهية لمعادلتي الحرارة ولابلاس.
- تطبيق حد الاستقرار الصريح r ≤ ½.
- شرح شرط CFL.
- تقدير كيف تنمو التكلفة مع الدقة.

المفاهيم الأساسية

- استبدل المشتقات بفروق على شبكة. بالنسبة لـ u_t = αu_xx، المخطط الصريح هو u_i^{n+1} = u_i^n + r(u_{i+1}^n − 2u_i^n + u_{i−1}^n) حيث r = αΔt/Δx².
- مخطط الحرارة الصريح مستقر فقط إذا كان r ≤ ½، لذا فإن تنصيف Δx يجبر Δt على النقصان بمعامل 4.
- المخططات الضمنية ومخطط كرانك–نيكلسون مستقرة لأي Δt لكنها تحتاج إلى حل خطي في كل خطوة.
- تعطي معادلة لابلاس u_xx + u_yy = 0 قالبًا من 5 نقاط؛ ويحلها جاكوبي أو غاوس–زايدل (الوحدة 4).
- للموجات والجريان، يربط شرط CFL c Δt/Δx ≤ 1 الخطوة الزمنية بتباعد الشبكة. وتحسين شبكة أفقية 2D بمعامل k يكلّف نحو k² أضعاف الأعمدة وk أضعاف الخطوات الزمنية.

المعادلات الأساسية

$$r = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} \le \frac{1}{2}$$

r=(αΔ t)/(Δ x^2)12

استقرار الحرارة الصريح

$$u_{i,j} = \tfrac{1}{4}\left(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}\right)$$

u_i,j=14(u_i+1,j+u_i-1,j+u_i,j+1+u_i,j-1)

لابلاس بـ5 نقاط

$$\frac{c \Delta t}{\Delta x} \le 1$$

شرط CFL

$$\text{cost} \propto k^3$$

أمثلة محلولة خطوة بخطوة

مثال 9.1 أوجد أكبر خطوة زمنية صريحة مستقرة لـ $\alpha = 1.0 \times 10^{-4}\ \text{m}^2/\text{s}$ و $\Delta x = 0.01\ \text{m}$ (قيم مثال).

1. $\Delta t \le 0.5 \Delta x^2 / \alpha$.

الإجابة: $\Delta t \le 0.5\ \text{s}$.

مثال 9.2 تخطط NOAA لتحسين GFS من 13 km إلى 9 km. قدّر التغير في عدد الأعمدة الأفقية.

1. $(13/9)^2$.

الإجابة: نحو 2.09 ضعف الأعمدة.

مثال 9.3 مع خطوة زمنية محدودة بشرط CFL، قدّر الزيادة الكلية في التكلفة.

1. $(13/9)^3$.

الإجابة: نحو 3.01 ضعف العمل.

تمارين

حلّ كلًّا منها على الورق أولًا، ثم تحقق.

1. نصّف Δx في مخطط الحرارة الصريح. ما الحد الجديد لـ Δt؟

   ¼ قدره.

2. عدد الأعمدة على شبكة عالمية بدقة 13 km (الأرض $5.1 \times 10^8\ \text{km}^2$، قيمة الكتب المدرسية)؟

   نحو 3.02 مليون.

3. عدد الخلايا مع 127 طبقة؟

   نحو 3.83×10^8.

4. عدد الخلايا بدقة 9 km مع 127 طبقة؟

   نحو 8.0×10^8.

مفاهيم خاطئة شائعة

خرافة: أي خطوة زمنية تصلح إذا كانت الشبكة دقيقة.

في الحقيقة: الشبكات الأدق تتطلب خطوات صريحة أصغر.

خرافة: المخططات الضمنية أدق دائمًا.

في الحقيقة: إنها أكثر استقرارًا، لا أدق تلقائيًا.

خرافة: مضاعفة الدقة تضاعف التكلفة.

في الحقيقة: في 2D مع الزمن تكون نحو 8×.

بطاقات تعليمية

القالب

نمط النقاط المجاورة.

r

$a\Delta t/\Delta x^2$.

CFL

$c\Delta t/\Delta x \le 1$.

كرانك–نيكلسون

ضمني، من الرتبة الثانية.

اللابلاسي بـ5 نقاط

متوسط الجيران.

تكلفة الدقة

$k^3 \approx$ لتحسين بمعامل k.

اختبار ذاتي

1. استقرار الحرارة الصريح...

$r \le ½$

$r \le 2$

أي r

$r \ge 1$

$r \le ½$. فون نويمان.

2. يربط CFL...

Δt وΔx

u و α

ε و n

y و x

Δt وΔx. سرعة المعلومات.

3. يستخدم قالب لابلاس ... نقاط.

5

2

9 دائمًا

1

5. المركز 4 +.

4. كرانك–نيكلسون...

مستقر دون شروط

صريح

غير مستقرة

من الرتبة الأولى

مستقر دون شروط. متوسط ضمني.

أعد هذا الاختبار

كيف يساعد هذا في إنقاذ الكوكب

كان الهدف من ترقية الحواسيب الفائقة لدى NOAA في 2023 تمكين GFS من الانتقال إلى دقة أفقية تبلغ تسعة كيلومترات، مقارنةً بـ13 في النسخة الحالية، كي تُرى الظواهر الأصغر حجمًا وتُحاكى.

يبيّن قياس هذه الوحدة لماذا احتاج ذلك إلى حواسيب جديدة: 2.09 ضعف الأعمدة، ومع خطوة زمنية محدودة بشرط CFL، نحو 3 أضعاف العمل لكل تنبؤ.

على Saving Planets: ميكانيكا الموائع · الديناميكا الحرارية

المصادر: NOAA: NOAA completes upgrade to weather and climate supercomputer system (Aug. 10, 2023) (https://www.noaa.gov/news-release/noaa-completes-upgrade-to-weather-and-climate-supercomputer-system) · NOAA Environmental Modeling Center: Global Forecast System (GFS) (https://www.emc.ncep.noaa.gov/emc/pages/numerical_forecast_systems/gfs.php)

مصادر تعلّم مجانية

- MIT OpenCourseWare 2.086 Numerical Computation for Mechanical Engineers (خريف 2014) (https://ocw.mit.edu/courses/2-086-numerical-computation-for-mechanical-engineers-fall-2014/): مقرر MIT مجاني.
- MIT OpenCourseWare 18.330 Introduction to Numerical Analysis (ربيع 2012) (https://ocw.mit.edu/courses/18-330-introduction-to-numerical-analysis-spring-2012/): محاضرات MIT مجانية.

شاهد المحاضرة

Session 22: Partial Differential Equations 1 (https://ocw.mit.edu/courses/10-34-numerical-methods-applied-to-chemical-engineering-fall-2015/resources/session-22-partial-differential-equations-1/) (باللغة الإنجليزية)

MIT 10.34 Numerical Methods Applied to Chemical Engineering (Fall 2015), MIT OpenCourseWare. الترخيص: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · شروط الاستخدام (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/).
الرابط للدراسة المجانية فقط؛ Saving Planets غير تابع لهذه الجامعة ولا يحظى بتأييدها.

أنهيت هذه الوحدة

التحسين والقيم الذاتية والحوسبة على نطاق واسع

البحث بالنسبة الذهبية، والانحدار التدرجي وطريقة نيوتن للتصغير، وطريقة القوة للقيم الذاتية، وعدد العمليات، والحوسبة المتوازية، والتحقق من النماذج والمصادقة عليها.

أهداف التعلّم

في نهاية هذه الوحدة ستستطيع أن:

- تصغير دالة 1D بالبحث بالنسبة الذهبية.
- تطبيق الانحدار التدرجي واختيار خطوة.
- إيجاد قيمة ذاتية مهيمنة بطريقة القوة.
- تقدير زمن التشغيل من عدد العمليات وسرعة الآلة.

المفاهيم الأساسية

- يقلّص البحث بالنسبة الذهبية الفترة بمعامل 0.618 في كل خطوة دون مشتقات.
- يتجه الانحدار التدرجي نحو الأسفل: x ← x − α ∇f. وقيمة α الكبيرة جدًا تتباعد؛ والصغيرة جدًا تزحف.
- تحل طريقة نيوتن للتصغير ∇f = 0 باستخدام مصفوفة هيس؛ وتتقارب تربيعيًا قرب القيمة الصغرى.
- تضرب طريقة القوة في A مرارًا؛ فيصطف المتجه مع المتجه الذاتي المهيمن، ويعطي حاصل رايلي قيمته الذاتية.
- يسأل التحقق هل يحل الكود المعادلات بشكل صحيح؛ وتسأل المصادقة هل هي المعادلات الصحيحة، بمقارنتها بالرصد.

المعادلات الأساسية

$$\tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$$

```
τ=(5-1)/(2)≈0.618
```

معامل النسبة الذهبية

$$x_{k+1} = x_k - \alpha \nabla f(x_k)$$

```
x_k+1=x_k-α f(x_k)
```

الانحدار التدرجي

$$\lambda \approx \frac{v^T A v}{v^T v}$$

حاصل رايلي

$$t = \frac{\text{flops}}{\text{flop rate}}$$

t= rate

زمن التشغيل

أمثلة محلولة خطوة بخطوة

مثال 10.1 بكم يقلّص البحث بالنسبة الذهبية الفترة في 10 خطوات؟

1. 0.618^{10}.

الإجابة: إلى (0.81%) 0.0081 من عرضها.

مثال 10.2 صغّر $f = (x - 3)^2$ بالانحدار التدرجي مع $\alpha = 0.1$ بدءًا من $x = 0$. أين تكون بعد 5 خطوات؟

1. في كل خطوة يتقلص $x - 3$ بمعامل 0.8.
2. $x_5 = 3(1 - 0.8^5)$.

الإجابة: $x_5 = 2.017$.

مثال 10.3 طبّق طريقة القوة على [[2, 1], [1, 2]] من (1, 0)، 5 خطوات.

1. $v = (122, 121)$.
2. حاصل رايلي.

الإجابة: $\lambda \approx 2.99997$ (القيمة الدقيقة 3).

تمارين

حلّ كلًّا منها على الورق أولًا، ثم تحقق.

1. كم يستغرق حل كثيف بـ10,000 مجهول ($2n^3/3$ flops) بسرعة 14.5 بيتافلوبس؟

   $6.67 \times 10^{11} / 1.45 \times 10^{16} = 4.6 \times 10^{-5}$ s.

2. السرعة المجمّعة لحاسوبَي NOAA بقدرة 14.5 بيتافلوبس لكل منهما؟

   29 بيتافلوبس.

3. القدرة التشغيلية مع البحثية (20 بيتافلوبس)؟

   49 بيتافلوبس.

4. تحقق أم مصادقة: مقارنة نموذج ببيانات ماونا لوا؟

مصادقة.

مفاهيم خاطئة شائعة

خرافة: الخطوة الأكبر تسرّع الانحدار التدرجي دائمًا.
في الحقيقة: قد يتجاوز الهدف ويتباعد.

خرافة: طريقة القوة تجد كل القيم الذاتية.
في الحقيقة: المهيمنة فقط.

خرافة: الكود المتقارب نموذج صحيح.
في الحقيقة: لا يزال يحتاج إلى مصادقة.

بطاقات تعليمية

النسبة الذهبية

تتقلص الفترة بمعامل 0.618.

الانحدار التدرجي

.fx − α

طريقة القوة

القيمة الذاتية المهيمنة.

حاصل رايلي

.vᵀAv/vᵀv

التحقق

حل المعادلات بشكل صحيح.

التحقق

حل المعادلات الصحيحة.

اختبار ذاتي

1. تقلّص النسبة الذهبية بمعامل...

0.618

0.5

0.1

2

0.618. النسبة الذهبية.

2. تجد طريقة القوة...

القيمة الذاتية المهيمنة

كل الجذور

المعكوس

المحدِّد

القيمة الذاتية المهيمنة. ضرب متكرر.

3. تقارن المصادقة بـ...

الرصد

الكود

لا شيء

إبسيلون

الرصد. اختبار الواقع.

4. يتحرك الانحدار التدرجي...

نزولًا

صعودًا

عشوائيًا

جانبيًا

نزولًا. −∇f.

أعد هذا الاختبار

كيف يساعد هذا في إنقاذ الكوكب

تفيد NOAA بأن حاسوبيها الفائقين التوأمين للطقس والمناخ، Dogwood في ماناساس بولاية فرجينيا وCactus في فينيكس بولاية أريزونا، رُقّيا في أغسطس 2023 إلى 14.5 بيتافلوبس لكل منهما، فيستطيع نظام التنبؤ معًا معالجة 29 كوادريليون عملية

حسابية في الثانية. ومع آلات بحثية مجموعها 20 بيتافلوبس، تبلغ قدرة NOAA 49 بيتافلوبس، ويعمل على النظام أكثر من 20 نموذجًا تشغيليًا للتنبؤ العددي بالطقس.

يتيح NASA GISS مجانًا كود نموذجه لنظام الأرض ModelE، ويُحدَّث تحليله لحرارة السطح GISTEMP نحو اليوم 10 من كل شهر. ويتيح الكود والبيانات المفتوحة لأي شخص التحقق من الطرق العددية وراء علم المناخ والمصادقة عليها.

على Saving Planets: الحلول · مقدمة في البرمجة

المصادر: NOAA: NOAA completes upgrade to weather and climate supercomputer system (Aug. 10, 2023) (https://www.noaa.gov/news-release/noaa-completes-upgrade-to-weather-and-climate-supercomputer-system) · NASA GISS: نموذج نظام الأرض ModelE (https://www.giss.nasa.gov/tools/modelE/) · NASA GISS: GISS Surface Temperature Analysis (GISTEMP v4) (https://data.giss.nasa.gov/gistemp/)

مصادر تعلّم مجانية

- MIT OpenCourseWare 18.330 Introduction to Numerical Analysis (ربيع 2012) (https://ocw.mit.edu/courses/18-330-introduction-to-numerical-analysis-spring-2012/): محاضرات MIT مجانية.
- MIT OpenCourseWare 10.34 Numerical Methods Applied to Chemical Engineering (خريف 2015) (https://ocw.mit.edu/courses/10-34-numerical-methods-applied-to-chemical-engineering-fall-2015/): مقرر MIT مجاني.

أنهيت هذه الوحدة

مجموعات المسائل

هذه التمارين داخل كل وحدة. حلّها على الورق أولًا، ثم افتح الإجابة.

1. الأخطاء وأعداد الفاصلة العائمة ومتسلسلات تايلور
   4 مسائل
2. جذور المعادلات: التنصيف ونيوتن والقاطع
   4 مسائل
3. الأنظمة الخطية: حذف غاوس وتحليل LU والتكييف
   4 مسائل
4. الحلول التكرارية: جاكوبي وغاوس–زايدل والتقارب
   4 مسائل
5. الاستيفاء والشرائح والملاءمة بالمربعات الصغرى
   4 مسائل
6. الاشتقاق العددي
   4 مسائل
7. التكامل العددي
   4 مسائل
8. المعادلات التفاضلية العادية: أويلر ورونغه–كوتا والاستقرار
   4 مسائل
9. المعادلات التفاضلية الجزئية: الفروق المنتهية
   4 مسائل
10. التحسين والقيم الذاتية والحوسبة على نطاق واسع
    4 مسائل

المختبر (Computation lab)

المختبر هو الجزء العملي من المقرر. وهو هنا مجاني وللتدريب فقط، دون ساعات معتمدة.

يُجرى كل مختبر في محاكاة مجانية أو جدول بيانات، فلا توجد مخاطر مادية. خذ فترات راحة من الشاشة، واجلس بوضعية سليمة، وأبعد الكابلات عن الممرات.

مرجع السلامة: OSHA: Walking-working surfaces (slip, trip and fall hazards) (https://www.osha.gov/walking-working-surfaces)

المختبر A: إبسيلون الآلة ومتسلسلة تايلور في جدول بيانات

الأسبوع 1

الهدف: أوجد إبسيلون الآلة تجريبيًا وراقب متسلسلة تايلور تتقارب إلى e.

$$e \approx \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}$$

e≈_k=0^n-1(1)/(k!)

متسلسلة تايلور لـe

الإجراء

1. في عمود، ابدأ من 1 ونصّف في كل صف.
2. في العمود التالي، اختبر هل + 1 القيمة 1 <.
3. آخر قيمة تجتاز الاختبار هي إبسيلون الآلة.
4. اجمع 1/k! لـ5 و10 حدود وقارن بـe.

جدول البيانات

الكمية	القيمة
إبسيلون الآلة (مزدوجة)	2.22 × 10⁻¹⁶
e، 5 حدود	2.70833
e، 10 حدود	2.7182815
e	2.7182818

قيم محسوبة؛ تستخدم معظم جداول البيانات الدقة المزدوجة.

مثال حسابي

1. التنصيف 52 مرة يعطي 2.22 × 10⁻¹⁶ = 2⁻⁵².
2. 1 + 1 + ½ + 1/24 = 2.70833 +.

السلامة

- حاسوب فقط.

بديل منزلي أو افتراضي

- أي برنامج جداول بيانات يفي بالغرض.

MIT OpenCourseWare 18.330 Introduction to Numerical Analysis (ربيع 2012) (https://ocw.mit.edu/courses/18-330-introduction-to-numerical-analysis-spring-2012/)

الصلة بالكوكب: تصف NOAA تشغيل تنبؤ تكون فيه الديناميكا بدقة 32 بت وكل ما عداها بدقة 64 بت. NOAA Environmental Modeling Center: Global Forecast System (GFS) (https://www.emc.ncep.noaa.gov/emc/pages/numerical_forecast_systems/gfs.php)

☐ **أكملت هذا المختبر (عمليًا أو افتراضيًا)**

المختبر B: التنصيف مقابل نيوتن

الأسبوع 3

الهدف: حل cos x = x بالتنصيف وبطريقة نيوتن، وعدّ الأرقام الصحيحة في كل خطوة.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\cos x_n - x_n}{-\sin x_n - 1}$$

```
x_n+1=x_n-( x_n-x_n)/(- x_n-1)
```

نيوتن لـ cos x − x = 0

الإجراء

1. احصر الجذر في [0, 1].
2. نفّذ 20 خطوة تنصيف في جدول بيانات.
3. شغّل نيوتن من $x_0 = 1$.
4. ارسم $\log_{10}$ للخطأ مقابل رقم الخطوة لكليهما.

جدول البيانات

خطوة نيوتن	x
1	0.750364
2	0.739113
3	0.739085133
4	0.739085133

قيم محسوبة. يحتاج التنصيف إلى نحو 20 خطوة لـ6 أرقام؛ ويحتاج نيوتن إلى 3.

مثال حسابي

1. $x_1 = 1 - (\cos 1 - 1)/(-\sin 1 - 1) = 0.750364$.
2. الجذر 0.7390851.

السلامة

- حاسوب فقط.

بديل منزلي أو افتراضي

- أي برنامج جداول بيانات يفي بالغرض.

OpenStax Calculus Volume 1، 4.9 طريقة نيوتن (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/4-9-newtons-method)

الصلة بالكوكب: تقول USGS إن MODFLOW-NWT يستخدم صياغة نيوتن–رافسون لجريان المياه الجوفية غير المحصورة.
USGS: MODFLOW and Related Programs (https://www.usgs.gov/mission-areas/water-resources/science/modflow-and-related-programs)

☐ **أكملت هذا المختبر (عمليًا أو افتراضيًا)**

المختبر C: ملاءمة سجل CO_2 في ماونا لوا

الأسبوع 7

الهدف: لائم نموذجًا خطيًا وآخر تربيعيًا مع المتوسطات السنوية لماونا لوا من NOAA واحكم عليهما بباقيهما.

$$A^T A\,c = A^T y$$

A^TA c=A^Ty

المربعات الصغرى

الإجراء

1. استكشف PhET Least-Squares Regression وCurve Fitting لترى كيف تتغير البواقي مع النموذج.
2. افتح ملف المتوسطات السنوية من NOAA وانسخ قيم العقود 1960–2020.
3. لائم خطًا مستقيمًا ودالة تربيعية (LINEST في جدول البيانات أو خط الاتجاه).
4. تنبأ بقيمة 2025 وقارنها بقيمة NOAA البالغة 427.35 ppm.

جدول البيانات

النموذج	المعامل الرئيسي	تنبؤ 2025 (ppm)
المستقيم	الميل 1.613 ppm/سنة	415.0
تربيعي	0.01338 ppm/سنة²	426.0
NOAA 2025	—	427.35

البيانات من NOAA GML؛ الملاءمات محسوبة.

مثال حسابي

1. يقلل الخط تقدير 2025 بمقدار 12.3 ppm.
2. التربيعي ضمن 1.3 ppm.

السلامة

- حاسوب فقط.

بديل منزلي أو افتراضي

- أي برنامج جداول بيانات يفي بالغرض.

PhET: Least-Squares Regression (https://phet.colorado.edu/en/simulations/least-squares-regression) · PhET: Curve Fitting (https://phet.colorado.edu/en/simulations/curve-fitting) · NOAA GML: Mauna Loa annual mean CO_2 data (https://gml.noaa.gov/webdata/ccgg/trends/co2/co2_annmean_mlo.txt)

الصلة بالكوكب: تفيد NOAA بأن المتوسط الشهري في ماونا لوا كان 426.07 ppm في سبتمبر 2026. NOAA Global Monitoring Laboratory: Trends in atmospheric CO_2 (Mauna Loa) (https://gml.noaa.gov/ccgg/trends/)

☐ **أكملت هذا المختبر (عمليًا أو افتراضيًا)**

المختبر D: شبه المنحرف مقابل سيمبسون

الأسبوع 9

الهدف: كامل sin x من 0 إلى π بالقاعدتين، ونصّف الخطوة وقِس رتبة الخطأ.

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = 2$$

```
_0^π x dx=2
```

تكامل الاختبار

الإجراء

1. استخدم PhET Calculus Grapher لترى المساحة تحت منحنى.
2. أنشئ أعمدة لـx وsin x وأوزان القاعدتين.
3. احسب T وS لـn = 4، ثم n = 8.
4. أوجد نسب الخطأ.

جدول البيانات

القاعدة، n = 4	التقدير	الخطأ
شبه المنحرف	1.89612	−0.10388
سيمبسون	2.00456	+0.00456

قيم محسوبة؛ المضاعفة إلى n = 8 تقلل الخطأين بمعاملي 4.03 و16.9، قريبًا من القيمتين النظريتين 4 و16.

مثال حسابي

1. $T_4 = (\pi/4)(\sin \pi/4 + \sin \pi/2 + \sin 3\pi/4) = 1.89612$.
2. $S_4 = (\pi/12)(4 \sin \pi/4 + 2 \sin \pi/2 + 4 \sin 3\pi/4) = 2.00456$.

السلامة

- حاسوب فقط.

بديل منزلي أو افتراضي

- أي برنامج جداول بيانات يفي بالغرض.

PhET: Calculus Grapher (https://phet.colorado.edu/en/simulations/calculus-grapher) · OpenStax Calculus Volume 2، 3.6 التكامل العددي (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/3-6-numerical-integration)

الصلة بالكوكب: تبني NOAA كل متوسط شهري في ماونا لوا من متوسطات يومية مبنية على متوسطات ساعية. NOAA Global Monitoring Laboratory: Trends in atmospheric CO_2 (Mauna Loa) (/https://gml.noaa.gov/ccgg/trends)

- [ ] أكملت هذا المختبر (عمليًا أو افتراضيًا)

المختبر E: رتب خطأ أويلر وRK4

الأسبوع 11

الهدف: حل y' = −y حتى t = 1 بعدة أحجام خطوة وتأكد من التقارب من الرتبتين الأولى والرابعة.

$$y(1) = e^{-1} = 0.367879$$

y(1)=e^-1=0.367879

الإجابة الدقيقة

الإجراء

1. أنشئ عمود أويلر لـh = 0.2 و0.1 و0.05.
2. أنشئ كتلة RK4 لـh = 0.2 و0.1.
3. سجّل الخطأ عند t = 1.
4. قارن نسب الخطأ عند تنصيف h؛ ثم جرّب الحلّال نفسه على حالة انعدام السحب في PhET Projectile Motion.

جدول البيانات

الطريقة، h	الخطأ عند t = 1
أويلر، 0.2	−0.0402
أويلر، 0.1	−0.0192
أويلر، 0.05	−0.00939
RK4, 0.2	5.80×10^{-6}
RK4, 0.1	3.33×10^{-7}

قيم محسوبة. يتنصف خطأ أويلر مع h؛ ويهبط خطأ RK4 بنحو 17 (قرب $2^4 = 16$).

مثال حسابي

1. أويلر h = 0.1: $0.9^{10} - e^{-1} = -0.0192$.
2. نسبة RK4 $5.80 \times 10^{-6} / 3.33 \times 10^{-7} = 17.4$.

السلامة

- حاسوب فقط.

بديل منزلي أو افتراضي

- أي برنامج جداول بيانات يفي بالغرض.

MIT OpenCourseWare · PhET: Projectile Motion (https://phet.colorado.edu/en/simulations/projectile-motion) 10.34 Numerical Methods Applied to Chemical Engineering (خريف 2015) (https://ocw.mit.edu/courses/10-34-numerical-methods-applied-to-chemical-engineering-fall-2015/)

الصلة بالكوكب: يعمل GFS لدى NOAA أربع مرات يوميًا ويتنبأ حتى 16 يومًا مقدمًا. NOAA Environmental Modeling Center: Global Forecast System (GFS) (https://www.emc.ncep.noaa.gov/emc/pages/numerical_forecast_systems/gfs.php)

☐ **أكملت هذا المختبر (عمليًا أو افتراضيًا)**

المختبر F: معادلة الحرارة وحد استقرارها

الأسبوع 13

الهدف: طبّق مخطط الحرارة الصريح على قضيب فيه بقعة ساخنة وشاهد ما يحدث فوق r = ½.

$$u_i^{n+1} = u_i^n + r(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$$

```
u_i^n+1=u_i^n+r(u_i+1^n-2u_i^n+u_i-1^n)
```

المخطط الصريح

الإجراء

1. ضع 7 عقد طرفاها عند 0 والعقدة الوسطى عند 100 (قيم مثال).
2. تقدّم بـr = 0.25 لـ10 خطوات.
3. كرر مع r = 0.6.
4. صف النتيجتين.

جدول البيانات

الحالة	القيمة الوسطى بعد خطوة 1	بعد 10 خطوات
r = 0.25	50.0	16.7
r = 0.6	−20.0	290.5

قيم محسوبة. مع r = 0.6 تتذبذب القيم وتنمو: المخطط غير مستقر.

مثال حسابي

1. r = 0.25: 100 + 0.25(0 − 200 + 0) = 50.
2. r = 0.6: 100 + 0.6(−200) = −20.

السلامة

- حاسوب فقط.

بديل منزلي أو افتراضي

- أي برنامج جداول بيانات يفي بالغرض.

MIT OpenCourseWare 2.086 Numerical Computation for Mechanical Engineers (خريف 2014) (https://ocw.mit.edu/courses/2-086-numerical-computation-for-mechanical-engineers-fall-2014/)

الصلة بالكوكب: خططت NOAA لنقل GFS من دقة 13 km إلى 9 km بعد ترقية 2023. NOAA: NOAA completes upgrade to weather and climate supercomputer system (Aug. 10, 2023) (https://www.noaa.gov/news-release/noaa-completes-upgrade-to-weather-and-climate-supercomputer-system)

☐ **أكملت هذا المختبر (عمليًا أو افتراضيًا)**

مجموعات تدريب للامتحان

وقّت نفسك: نحو 10 دقائق لكل مسألة. ثم قارن بالحلول الكاملة.

مجموعة تمارين منتصف الفصل (الوحدات 5–1)

1. أوجد الخطأ النسبي لـ3.14 كتقريب لـπ.

   1. $|3.14 - \pi|/\pi$.

الإجابة: 5.07×10^{-4}.

2. نفّذ خطوتي نيوتن على $x^2 - 5$ من $x_0 = 2$.

   1. $x_1 = 2 - (-1)/4$.
   2. $x_2 = 2.25 - 0.0625/4.5$.

الإجابة: $x_1 = 2.25$; $x_2 = 2.23611$.

3. كم خطوة تنصيف تقلّص فترة عرضها 4 إلى ما دون 10^{-3}؟

   1. $\log_2(4000) = 11.97$.

الإجابة: 12 خطوة.

4. كم يزيد عمل الحذف لـ$n = 500$ عن $n = 100$؟

   1. $(500/100)^3$.

الإجابة: 125 مرة.

5. استكمل داخليًا CO_2 في ماونا لوا لعام 2023 من متوسطي NOAA السنويين لعامي 2020 (414.21) و2025 (427.35).

   1. $414.21 + 0.6 \times 13.14$.

الإجابة: 422.09 ppm (قيمة NOAA لعام 2023 هي 421.08).

مجموعة التدريب النهائية (كل الوحدات)

1. قدّر $\int_0^2 x^2\,dx$ بقاعدة شبه المنحرف، $n = 2$.

   1. $h = 1: 0.5 \times 0 + 1 + 0.5 \times 4$.

الإجابة: 3 (القيمة الدقيقة 2.667).

2. كرر بقاعدة سيمبسون، $n = 2$.

1. (1/3)(0 + 4 + 4).

الإجابة: 2.667، دقيق لدالة تربيعية.

3. نفّذ خطوتي أويلر بـh = 0.1 على y' = −2y، y(0) = 1.

1. 0.8².

الإجابة: 0.64 (القيمة الدقيقة 0.670).

4. أوجد أكبر خطوة زمنية صريحة للحرارة لـα = 2 × 10⁻⁵ m²/s، Δx = 0.005 m.

1. 0.5 × 0.005²/2 × 10⁻⁵.

الإجابة: 0.625 s.

5. قدّر مشتقة eˣ عند 0 بالفرق المركزي، h = 0.01.

1. (e^0.01 − e^−0.01)/0.02.

الإجابة: 1.0000167.

6. بكم يقلّص البحث بالنسبة الذهبية الفترة في 20 خطوة؟

1. 0.618²⁰.

الإجابة: إلى 6.6 × 10⁻⁵ من عرضها.

ورقة الصيغ

$$e_{rel} = |\tilde{x} - x|/|x|,\ \varepsilon_{mach} = 2^{-52}$$

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n),\ n \geq \log_2((b-a)/tol)$$

$$A = LU,\ \text{cost} \approx \tfrac{2}{3}n^3,\ \kappa = \|A\|\|A^{-1}\|$$

$$\|e_k\| \approx \rho^k \|e_0\|$$

$$A^T A c = A^T y$$

$$f' \approx (f(x+h) - f(x-h))/(2h),\ h_{opt} \approx \sqrt{\varepsilon}$$

$$T_n:\ E \propto h^2,\ S_n:\ E \propto h^4$$

$$y_{n+1} = y_n + hf,\ h < 2/\lambda$$

$$r = \alpha \Delta t/\Delta x^2 \leq \tfrac{1}{2},\ c\Delta t/\Delta x \leq 1$$

$$x_{k+1} = x_k - \alpha \nabla f,\ \lambda \approx v^T A v / v^T v$$

الثوابت

الثابت	القيمة
الدقة المزدوجة (IEEE 754)	إبسيلون الآلة 2.22 × 10⁻¹⁶ = 2⁻⁵²، نحو 16 رقمًا معنويًا

الثابت	القيمة
الدقة المفردة (IEEE 754)	إبسيلون الآلة $2^{-23} = 1.19 \times 10^{-7}$، نحو 7 أرقام معنوية
e	2.718281828
π	3.141592654
مساحة سطح الأرض (قيمة الكتب المدرسية)	$5.1 \times 10^{8}\ \text{km}^2$
1 بيتافلوب	10^{15} عملية فاصلة عائمة في الثانية

المصدر: NIST Guide to the SI, Appendix B.9: conversion factors (https://www.nist.gov/pml/special-publication-811/nist-guide-si-appendix-b-conversion-factors/nist-guide-si-appendix-b9)

نصوص ومحاكاة مجانية

استخدم هذه المحاضرات وأقسام الكتب والمحاكاة المجانية إلى جانب المقرر.

- MIT OpenCourseWare 18.330 Introduction to Numerical Analysis (ربيع 2012) (https://ocw.mit.edu/courses/18-330-introduction-to-numerical-analysis-spring-2012/): محاضرات ومسائل مجانية في التحليل العددي من MIT.
- MIT OpenCourseWare 2.086 Numerical Computation for Mechanical Engineers (خريف 2014) (https://ocw.mit.edu/courses/2-086-numerical-computation-for-mechanical-engineers-fall-2014/): مقرر مجاني من MIT في الحوسبة الهندسية.
- MIT OpenCourseWare 10.34 Numerical Methods Applied to Chemical Engineering (خريف 2015) (https://ocw.mit.edu/courses/10-34-numerical-methods-applied-to-chemical-engineering-fall-2015/): مقرر مجاني من MIT في الطرق العددية التطبيقية.
- OpenStax Calculus Volume 2، 3.6 التكامل العددي (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/3-6-numerical-integration): قسم من كتاب مدرسي مجاني.
- OpenStax Calculus Volume 1، 4.9 طريقة نيوتن (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/4-9-newtons-method): قسم من كتاب مدرسي مجاني.
- PhET: Least-Squares Regression (https://phet.colorado.edu/en/simulations/least-squares-regression): وفّق الخطوط بشكل تفاعلي.

مسرد المصطلحات

الخطأ المطلق
مقدار الفرق عن القيمة الحقيقية.

التنصيف
إيجاد الجذور بتنصيف فترة يتغير فيها الإشارة.

شرط CFL
حد الخطوة الزمنية $c\Delta t/\Delta x \le 1$.

الإلغاء الكارثي
فقدان الأرقام عند طرح أعداد متقاربة.

عدد الشرط

مقدار تضخيم المسألة لأخطاء المدخلات.

كرانك–نيكلسون
مخطط زمني ضمني من الرتبة الثانية.

الهيمنة القطرية
كل عنصر قطري يفوق بقية صفه.

تربيع غاوس
تكامل بنقاط وأوزان مثلى.

غاوس–زايدل
حلّال تكراري يستخدم القيم الجديدة فورًا.

تحليل LU
A = LU، حذف قابل لإعادة الاستخدام.

المربعات الصغرى
ملاءمة تصغّر مجموع مربعات البواقي.

إبسيلون الآلة
الفجوة بين 1 والعدد العائم التالي.

طريقة نيوتن
إيجاد الجذور على امتداد المماسات.

طريقة القوة
ضرب متكرر لإيجاد القيمة الذاتية المهيمنة.

رونغ–كوتا (RK4)
حلّال معادلات تفاضلية عادية من الرتبة الرابعة.

قاعدة سيمبسون
تكامل من الرتبة الرابعة بالقطوع المكافئة.

الشريحة
منحنى تكعيبي أملس متعدد القطع.

معادلة صلبة
معادلة تفاضلية عادية بأجزاء سريعة جدًا وبطيئة جدًا.

خطأ البتر
خطأ ناتج عن قطع عملية لانهائية.

التحقق
فحص نموذج مقابل الرصد.

معايير التقييم الذاتي

لا تُمنح درجة ولا ساعات معتمدة. استخدم هذا لتقيّم بصدق أين أنت في كل وحدة.

المستوى	كيف يبدو
4 · إتقان	يختار طريقة تناسب الدقة المطلوبة، ويختبرها على مسألة معلومة الإجابة، ويقيس رتبتها، ويشرح حدود استقرارها.
3 · متمكن	يحل مسائل التدريب مع هفوات عرضية في حجم الخطوة أو الوحدات.
2 · قيد التطور	يتبع الأمثلة المحلولة لكنه لا يميّز خطأ القطع من خطأ التقريب.
1 · مبتدئ	يطبّق الصيغ دون التحقق من الخطأ أو الاستقرار؛ ويحتاج إلى مراجعة الوحدة.

الأوزان المقترحة إذا أردت درجة

الجزء	الوزن
تمارين	20%
المختبرات	25%
مجموعة تدريب منتصف الفصل	25%
مجموعة التدريب النهائية	30%

استهدف المستوى 3 أو أعلى في كل وحدة قبل الانتقال إلى الدورة التالية.

دورات ذات صلة

- ميكانيكا المدارات AERO 340
- الاحتمالات والإحصاء MATH 350
- الديناميكا الهوائية 1 AERO 310
- كل الدورات