Dernière mise à jour: November 1, 2026

🗺️ Parcours sur quatre ans · Année 2, Printemps

À propos de ce cours

Ce cours gratuit compte 10 unités et 6 travaux pratiques. Ce sont les vrais totaux, pas un programme plus long raccourci.

Un contrôle est un nombre ou un résultat de code sur une page de cours qu’un script recalcule avant publication. Le nombre affiché et le nombre recalculé doivent correspondre.

> Ceci est le plan d’un cours gratuit en autonomie rédigé par Saving Planets. Ce n’est pas un cours universitaire : il ne donne aucun crédit académique et aucun établissement n’y participe.
>
> Son contenu suit un cours de résistance des matériaux (mécanique des matériaux) d’un semestre de deuxième année. Il s’inspire des thèmes et du niveau de MIT 2.001 Mechanics and Materials I (sur MIT OpenCourseWare), Purdue ME 323 Mechanics of Materials et Georgia Tech COE 3001 Mechanics of Deformable Bodies, ainsi que du manuel gratuit OpenStax University Physics, que nous citons quand il est utile. Aucun de ces auteurs ou établissements ne cautionne cette page.
>
> Ce que nous ajoutons : chaque unité est reliée à un vrai travail dans l’énergie propre, les infrastructures ou le spatial avec une source publique citée (ponts, voitures plus légères, mâts, arbres et pales d’éoliennes, bois massif, réservoirs d’hydrogène, structures de fusées de la NASA), chaque nombre de la page est recalculé par un script de vérification avant sa mise en ligne, et chaque TP a une simulation gratuite ou une version maison peu coûteuse.
>
> Suivez-le dans l’ordre. Chaque unité comporte des objectifs, des notions clés, des équations, des exemples pas à pas, des exercices corrigés en détail, des erreurs fréquentes, des cartes mémoire et un quiz. Votre progression est enregistrée uniquement dans ce navigateur.

Comment ce cours aide à sauver la planète

La résistance des matériaux détermine la quantité de matière dont une structure a besoin. Utiliser juste assez d’acier, d’aluminium, de composite ou de bois, et pas plus, rend les voitures plus légères et plus efficaces, les éoliennes plus hautes, les bâtiments moins carbonés, et permet aux fusées d’emporter davantage en orbite.

C’est aussi ainsi que nous gardons sûr ce que nous avons construit : ponts, tours et réservoirs doivent porter leurs charges pendant des décennies sans plastifier, se fissurer par fatigue ni flamber. Chaque unité se termine par une courte section sourcée. Les valeurs qui ne proviennent

pas d'une source sont indiquées comme valeurs d'exemple, et les propriétés des matériaux sont des valeurs typiques de manuel.

Pour les enseignants

Vous pouvez enseigner ce cours, ou laisser un élève le faire seul. Il est gratuit. Saving Planets ne donne ni note ni crédit scolaire.

- Cette page est le cours entier : 10 unités et 6 travaux pratiques (ENGR 213).
- Prévoyez 15 semaines, environ 6 à 9 heures par semaine, y compris les semaines de travaux pratiques.
- Suivez le calendrier de 15 semaines. Lisez l'unité, faites les exercices sur papier, puis ouvrez la réponse. La semaine d'un TP, faites le TP ou la version à la maison.
- Un contrôle est un nombre ou un résultat de code sur la page qu'un script recalcule avant publication. Le nombre affiché et le nombre recalculé doivent correspondre.
- Utilisez Imprimer cette page, ou téléchargez le guide d'étude PDF. La feuille de formules est vers la fin.
- Demandez : en quoi cette unité aide-t-elle les gens et la planète ? Chaque unité a un encadré vert avec un fait sourcé.
- Copiez le modèle de guide enseignant et écrivez le nom de votre classe, le temps dont vous disposez et les questions que vous poserez. Ouvrir le modèle de guide enseignant

Avant de commencer

Prérequis

- Statique : diagrammes du corps libre, équilibre, centroïdes et moments quadratiques.
- Analyse I et II : dérivées et intégrales ; l'unité 9 intègre deux fois l'équation de la poutre.
- Physique I aide pour les ressorts, l'énergie et les unités.
- La dynamique n'est pas requise.

Comment étudier

- Commencez chaque problème par la statique : un diagramme du corps libre et l'effort, le couple ou le moment interne à la coupure.
- Demandez-vous ensuite comment la pièce se déforme : allongement, torsion ou flexion, et quelle formule correspond à cette déformation.
- Vérifiez que la formule s'applique : élasticité linéaire, petites déformations, parois minces ou éléments longs et élancés si nécessaire.
- Résolvez d'abord avec des symboles, puis introduisez les nombres SI (N, m, Pa), et vérifiez les unités : 1 MPa = 1 N/mm^2.

- Comparez la contrainte à la contrainte admissible du matériau et indiquez un coefficient de sécurité.
- Faites chaque exercice sur papier avant d'ouvrir la réponse, et refaites les quiz quelques jours plus tard.

Ce qu'il vous faut

- Un ordinateur ou une tablette pour les simulations PhET gratuites (elles fonctionnent dans un navigateur).
- Des élastiques, un sachet pour des pièces ou des rondelles, et une balance de cuisine (pour connaître chaque masse).
- Une règle en plastique de 30 cm, une deuxième règle ou un mètre ruban, et du ruban adhésif ou une pince pour la fixer au bord d'une table.
- Une tige en mousse ou un bout de frite de piscine et un marqueur pour les lignes de torsion.
- Des spaghettis secs et de petits poids pour le TP de flambement.
- Des lunettes de protection, l'appareil photo d'un smartphone et un tableur pour les graphiques et les ajustements.

Programme suggéré sur 15 semaines

Environ 6 à 9 heures par semaine : lecture, exercices et, les semaines de TP, le TP.

Semaine	Unité	Thèmes	Lecture
1	Contraintes : normale, de cisaillement et de matage ; contrainte admissible et coefficient de sécurité	Efforts internes, contraintes normale et de cisaillement	MIT 2.001; OpenStax UP1 12.3
2	Contraintes : normale, de cisaillement et de matage ; contrainte admissible et coefficient de sécurité	Contrainte de matage, contrainte admissible, coefficient de sécurité ; TP A	MIT 2.001
3	Déformation et comportement des matériaux : loi de Hooke, coefficient de Poisson et courbe contrainte–déformation	Déformation, courbe contrainte–déformation, loi de Hooke, coefficient de Poisson ; TP B	UP1 12.3–12.4
4	Éléments chargés axialement : déformation, barres hyperstatiques et contraintes thermiques	Déformation axiale, barres hyperstatiques, contraintes thermiques	UP2 1.3
5	Torsion des arbres circulaires et transmission de puissance	Formule de torsion, moment polaire, angle de torsion	MIT 2.001

Semaine	Unité	Thèmes	Lecture
6	Torsion des arbres circulaires et transmission de puissance	Transmission de puissance, dimensionnement des arbres ; TP C	MIT 2.001
7	Diagrammes d’effort tranchant et de moment fléchissant, et contraintes de flexion	Diagrammes d’effort tranchant et de moment fléchissant	MIT 2.001; UP1 12.2
8	Diagrammes d’effort tranchant et de moment fléchissant, et contraintes de flexion	Formule de flexion, module de flexion ; TP D ; entraînement de mi-parcours	MIT 2.001
9	Cisaillement transversal dans les poutres, flux de cisaillement et sections composées	Cisaillement transversal, flux de cisaillement, poutres reconstituées	MIT 2.001
10	Transformation des contraintes, cercle de Mohr, critères de rupture et fatigue	Transformation des contraintes, cercle de Mohr, critères de rupture, fatigue	MIT 2.001, 2.002
11	Réservoirs sous pression à paroi mince et sollicitations combinées	Réservoirs sous pression et sollicitations combinées	MIT 2.001
12	Flèche des poutres	Déformée, intégration, formules usuelles ; TP E	MIT 2.001
13	Flèche des poutres	Superposition et poutres hyperstatiques	MIT 2.001
14	Flambement des colonnes	Flambement des colonnes et facteurs d’abattement ; TP F	MIT 2.001
15	Révision	Révision et série d’exercices finale	Toutes les unités

Votre progression

Cochez les unités et les TP à mesure que vous les terminez, et faites les quiz. La progression et les scores sont enregistrés uniquement dans ce navigateur et ne nous sont jamais envoyés.

Unités

Contraintes : normale, de cisaillement et de matage ; contrainte admissible et coefficient de sécurité

Efforts internes obtenus en coupant un élément, contrainte normale moyenne dans les tiges, contrainte de cisaillement moyenne dans les axes et boulons (cisaillement simple et double), contrainte de matage, dimensionnement aux contraintes admissibles et coefficient de sécurité.

Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette unité, vous saurez :

- Trouver les efforts internes avec un diagramme du corps libre d'une section coupée.
- Calculer les contraintes moyennes normale, de cisaillement et de matage.
- Distinguer cisaillement simple et cisaillement double dans les assemblages.
- Dimensionner un élément à partir d'une contrainte admissible et d'un coefficient de sécurité.

Notions clés

- La contrainte est un effort interne par unité de surface. Son unité SI est le pascal (1 Pa = 1 N/m²) ; les ingénieurs utilisent le MPa, et 1 MPa = 1 N/mm².
- La contrainte normale σ = P/A agit perpendiculairement à une coupure ; la traction est positive et la compression négative.
- La contrainte de cisaillement moyenne τ = V/A agit dans le plan de la coupure. Un axe en cisaillement double a deux plans de coupure, donc chacun reprend V = P/2.
- La contrainte de matage σ_b = P/(td) est la pression de contact entre un boulon et le trou d'une plaque d'épaisseur t.
- Coefficient de sécurité FS = charge de rupture/charge admissible (ou contrainte de rupture/contrainte admissible). Le dimensionnement maintient la contrainte de service au plus à σ_allow = σ_fail/FS.

Équations clés

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

Contrainte normale moyenne

$$\tau_{\text{avg}} = \frac{V}{A}$$

`τ_avg=V/A`

Contrainte de cisaillement moyenne

$$\sigma_b = \frac{P}{t\,d}$$

σ_b=(P)/(t d)

Contrainte de matage

$$FS = \frac{\sigma_{\text{fail}}}{\sigma_{\text{allow}}}$$

FS=σ_failσ_allow

Coefficient de sécurité

Exemples résolus pas à pas

Exemple 1.1 Une tige d'acier de 20 mm de diamètre supporte une charge de traction de 50 kN. Trouvez la contrainte normale.

1. A = πd²/4 = π × 20²/4 = 314.2 mm².
2. σ = P/A = 50,000 N/314.2 mm².

Réponse : 159.2 MPa (traction).

Exemple 1.2 Un axe de 12 mm en cisaillement double porte une charge de 20 kN. Trouvez la contrainte de cisaillement moyenne dans l'axe.

1. Chacun des deux plans de cisaillement reprend V = 10 kN.
2. A = π × 12²/4 = 113.1 mm²; τ = 10,000/113.1.

Réponse : 88.4 MPa.

Exemple 1.3 Un tirant rond en acier doit porter 100 kN. L'acier plastifie à 250 MPa et le coefficient de sécurité vaut 2. Trouvez le plus petit diamètre.

1. σ_allow = 250/2 = 125 MPa.
2. A = P/σ_allow = 100000/125 = 800 mm².
3. d = √(4A/π).

Réponse : d = 31.9 mm (prendre 32 mm).

Exercices

Faites chacun d’abord sur papier, puis vérifiez.

1. Un poteau carré de 100 mm × 100 mm porte 200 kN en compression. Trouvez la contrainte.

   $\sigma = 200000/10000 = 20$ MPa (compression).

2. Un boulon de 10 mm en cisaillement simple porte 8 kN. Trouvez la contrainte de cisaillement moyenne.

   $A = 78.54$ mm²; $\tau = 101.9$ MPa.

3. Le même boulon de 10 mm traverse une plaque de 6 mm d’épaisseur. Trouvez la contrainte de matage.

   $\sigma_b = 8000/(6 \times 10) = 133$ MPa.

4. Une biellette rompt à 90 kN et travaille à 30 kN. Trouvez le coefficient de sécurité.

   $FS = 90/30 = 3$.

Idées reçues fréquentes

Idée reçue : La contrainte, c’est la même chose que la force.

En réalité : La contrainte est une force par unité de surface ; un fil fin et une barre épaisse soumis à la même force ont des contraintes très différentes.

Idée reçue : Un axe en cisaillement double porte toute la charge sur chaque plan.

En réalité : Chacun des deux plans en porte la moitié.

Idée reçue : Un coefficient de sécurité plus élevé est toujours meilleur.

En réalité : Il signifie aussi des pièces plus lourdes et plus chères ; les concepteurs choisissent FS d’après les normes et l’incertitude sur les charges et les matériaux.

Cartes mémoire

Contrainte normale

$\sigma = P/A$.

Contrainte de cisaillement

$\tau = V/A$.

Cisaillement double

Chaque plan porte $P/2$.

Contrainte de matage

$\sigma_b = P/(td)$.

Coefficient de sécurité

FS = rupture/admissible.

MPa

1 MPa = 1 N/mm².

Quiz d’autocontrôle

1. 1 MPa est égal à…

1 N/m²

1 N/mm²

1 kN/m²

1 N/cm²

1 N/mm². 10^6 N/m² = 1 N/mm².

2. Combien de plans de cisaillement a un axe en cisaillement double ?

1

2

3

4

2. Deux plans de coupure se partagent la charge.

3. Doubler le diamètre d’une tige change sa contrainte axiale (même charge) d’un facteur…

½

¼

2

4

¼. A croît comme d².

4. La contrainte de matage est…

P/(td)

P/A du boulon

V/A

Mc/I

P/(td). La pression de contact sur la surface projetée td.

Refaire ce quiz

Comment cela aide à sauver la planète

Les limites de contrainte décident quels ponts les camions peuvent franchir. L'ASCE Report Card for America's Infrastructure recense 623218 ponts aux États-Unis, dont 63085 étaient soumis à une limitation de charge en 2024, c'est-à-dire qu'ils restreignent le poids des véhicules pouvant les franchir en sécurité, soit environ 10.1 % de tous les ponts. L'ASCE avertit que des camions plus lourds que ceux prévus à la conception risquent de surcharger les éléments des ponts et de provoquer fatigue et fissuration du métal. Maintenir la contrainte de service sous la contrainte admissible, comme dans cette unité, est la façon dont les ingénieurs les évaluent et les réparent, et préserver un pont coûte moins cher que le remplacer.

Sur Saving Planets : Statique

Sources : ASCE Report Card for America's Infrastructure: Bridges (https://infrastructurereportcard.org/cat-item/bridges-infrastructure/) · OpenStax UP1, 12.3 Stress, strain and elastic modulus (https://openstax.org/books/university-physics-volume-1/pages/12-3-stress-strain-and-elastic-modulus)

Ressources d'apprentissage gratuites

- OpenStax UP1, 12.3 Stress, strain and elastic modulus (https://openstax.org/books/university-physics-volume-1/pages/12-3-stress-strain-and-elastic-modulus): Section de manuel gratuite.
- MIT OpenCourseWare 2.001 Mechanics and Materials I (https://ocw.mit.edu/courses/2-001-mechanics-materials-i-fall-2006/): Notes de cours du MIT sur les contraintes.
- PhET: Hooke's Law (https://phet.colorado.edu/en/simulations/hookes-law): Interactif.

☐ **J'ai terminé cette unité**

UNITÉ 2 · SEMAINE 3

Déformation et comportement des matériaux : loi de Hooke, coefficient de Poisson et courbe contrainte–déformation

Déformations normale et de cisaillement, essai de traction et diagramme contrainte–déformation, module d'Young, limite d'élasticité et résistance à la rupture, ductilité, coefficient de Poisson, module de cisaillement, énergie de déformation et rigidité spécifique.

Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette unité, vous saurez :

- Calculer les déformations normale et de cisaillement à partir des allongements.
- Lire E, la limite d'élasticité, la résistance à la rupture et la ductilité sur une courbe contrainte–déformation.
- Utiliser la loi de Hooke, le coefficient de Poisson et G = E/(2(1 + ν)).
- Comparer les matériaux par leur rigidité et leur résistance par unité de masse.

Notions clés

- La déformation normale ε = δ/L est un allongement par unité de longueur (sans dimension, souvent en μm/m). La déformation de cisaillement γ est la variation d'un angle droit, en radians.
- Dans le domaine élastique linéaire, la loi de Hooke s'applique : σ = Eε et τ = Gγ. E est le module d'Young, la pente de la courbe contrainte–déformation.
- Au-delà de la limite d'élasticité, le matériau se déforme plastiquement et ne revient pas ; la résistance à la rupture est la contrainte conventionnelle maximale, et les métaux ductiles subissent une striction avant de rompre.
- Étirer une barre l'amincit : déformation latérale = −ν × déformation axiale, avec un coefficient de Poisson ν d'environ 0.3 pour les métaux. Pour les matériaux isotropes, G = E/(2(1 + ν)).
- La rigidité spécifique E/ρ et la résistance spécifique σ/ρ comparent les matériaux par kilogramme ; c'est pourquoi l'aluminium, le magnésium et la fibre de carbone peuvent remplacer l'acier dans les structures légères.

Équations clés

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L}, \quad \sigma = E\varepsilon$$

Déformation et loi de Hooke

$$\varepsilon_{\text{lat}} = -\nu\,\varepsilon_{\text{axial}}$$

_lat=-ν _axial

Coefficient de Poisson

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

`G=(E)/(2(1+ν))`

Module de cisaillement

$$u_r = \frac{\sigma_Y^2}{2E}$$

`u_r=(σ_Y^2)/(2E)`

Module de résilience

Exemples résolus pas à pas

Exemple 2.1 Une barre d'acier de 2 m s'allonge de 1.2 mm sous une contrainte de 120 MPa. Trouvez la déformation et le module d'Young.

1. ε = 1.2/2000 = 6 × 10^{-4}.
2. E = σ/ε = 120 MPa/0.0006.

Réponse : ε = 600 μm/m; E = 200 GPa.

Exemple 2.2 Un alliage d'aluminium a E = 70 GPa et ν = 0.33. Trouvez son module de cisaillement.

1. G = E/(2(1 + ν)) = 70/2.66.

Réponse : G = 26.3 GPa.

Exemple 2.3 Une tige d'acier de 20 mm (ν = 0.3) a une déformation axiale de 0.001. De combien son diamètre change-t-il ?

1. Déformation latérale = −0.3 × 0.001 = −0.0003.
2. Δd = −0.0003 × 20 mm.

Réponse : Il diminue de 0.006 mm.

Exercices

Faites chacun d'abord sur papier, puis vérifiez.

1. Valeurs typiques : l'acier a E = 200 GPa et ρ = 7850 kg/m³ ; l'aluminium a E = 70 GPa et ρ = 2700 kg/m³. Comparez E/ρ.

   Acier 25.5 × 10^6 m²/s², aluminium 25.9 × 10^6 m²/s² : presque la même rigidité par kilogramme.

2. Une éprouvette de traction de longueur utile 50 mm mesure 62 mm à la rupture. Trouvez l'allongement à la rupture.

   (62 − 50)/50 = 24 % : un métal ductile.

3. Trouvez le module de résilience d'un acier avec σ_Y = 250 MPa et E = 200 GPa.

   u_r = 250^2/(2 × 200,000) = 0.156 MPa = 156 kJ/m³.

4. Valeurs d'exemple : une voiture qui fait 30 mpg est allégée de 10 %. Avec le chiffre de 6 % à 8 % du DOE, estimez sa nouvelle consommation.

   30 × 1.06 = 31.8 à 30 × 1.08 = 32.4 mpg (voiture d'exemple).

Idées reçues fréquentes

Idée reçue : Plus résistant signifie plus rigide.

En réalité : Résistance (limite d'élasticité) et rigidité (E) sont différentes ; la plupart des aciers ont E = 200 GPa quelle que soit leur résistance.

Idée reçue : La déformation a l'unité d'une longueur.

En réalité : C'est une longueur divisée par une longueur, sans dimension.

Idée reçue : Un matériau rompt à sa limite d'élasticité.

En réalité : La limite d'élasticité marque le début de la déformation permanente ; les métaux ductiles portent davantage jusqu'à la résistance à la rupture.

Cartes mémoire

Déformation normale

ε = δ/L.

Loi de Hooke

σ = Eε, τ = Gγ.

Coefficient de Poisson

ε_lat = −νε.

Module de cisaillement

G = E/(2(1 + ν)).

Limite d’élasticité ou résistance à la rupture

Début de l’écoulement plastique ou contrainte maximale.

Rigidité spécifique

E/ρ.

Quiz d’autocontrôle

1. Le module d’Young est la pente de…

charge en fonction du temps

contrainte en fonction de la déformation (partie élastique)

déformation en fonction de la température

force en fonction de la surface

contrainte en fonction de la déformation (partie élastique). $\sigma = E\varepsilon$.

2. Le coefficient de Poisson de la plupart des métaux vaut environ…

0.03

0.3

3

30

0.3. Environ 0.3.

3. G pour E = 200 GPa et ν = 0.25 vaut…

50 GPa

80 GPa

100 GPa

160 GPa

80 GPa. 200/2.5 = 80 GPa.

4. La déformation permanente commence à la…

résistance à la rupture

limite d’élasticité

point de rupture

limite de proportionnalité seulement pour le bois

limite d’élasticité. Limite d’élasticité.

Refaire ce quiz

Comment cela aide à sauver la planète

Choisir les matériaux selon leur rigidité et leur résistance par kilogramme économise du carburant. Le département de l’Énergie des États-Unis indique qu’une réduction de 10 % du poids d’un véhicule peut améliorer la consommation de 6 % à 8 %, et que remplacer la fonte et l’acier traditionnel par de l’acier à haute résistance, des alliages de magnésium et d’aluminium, de la fibre de carbone et des composites polymères peut réduire jusqu’à 50 % le poids de la caisse et du châssis. Le DOE ajoute que les matériaux légers sont particulièrement importants pour les véhicules électriques, où ils compensent le poids des batteries et des moteurs et peuvent augmenter l’autonomie tout électrique.

Sur Saving Planets : Chimie générale I

Sources : U.S. DOE: Lightweight materials for cars and trucks (https://www.energy.gov/eere/vehicles/lightweight-materials-cars-and-trucks) · OpenStax UP1, 12.4 Elasticity and plasticity (https://openstax.org/books/university-physics-volume-1/pages/12-4-elasticity-and-plasticity)

Ressources d’apprentissage gratuites

- OpenStax UP1, 12.3 Stress, strain and elastic modulus (https://openstax.org/books/university-physics-volume-1/pages/12-3-stress-strain-and-elastic-modulus): Section de manuel gratuite.
- OpenStax UP1, 12.4 Elasticity and plasticity (https://openstax.org/books/university-physics-volume-1/pages/12-4-elasticity-and-plasticity): Courbes contrainte–déformation.
- MIT OpenCourseWare 2.001 Mechanics and Materials I (https://ocw.mit.edu/courses/2-001-mechanics-materials-i-fall-2006/): Cours du MIT.

☐ **J’ai terminé cette unité**

Éléments chargés axialement : déformation, barres hyperstatiques et contraintes thermiques

Allongement des barres δ = PL/(AE), barres à plusieurs tronçons, barres hyperstatiques résolues par compatibilité, dilatation et contraintes thermiques, et concentrations de contraintes.

Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette unité, vous saurez :

- Calculer l'allongement de barres uniformes et étagées.
- Résoudre des problèmes axiaux hyperstatiques par l'équilibre et la compatibilité.
- Calculer la dilatation thermique et la contrainte dans une barre bloquée.
- Expliquer les concentrations de contraintes aux trous et aux congés.

Notions clés

- Une barre uniforme sous charge axiale s'allonge de δ = PL/(AE). Pour plusieurs tronçons, additionnez les δ : δ = Σ $P_i L_i/(A_i E_i)$.
- Si l'équilibre seul ne donne pas les efforts (hyperstatique), ajoutez une équation de compatibilité : comment les déformations doivent s'accorder.
- Une variation de température fait croître une barre libre de δ_T = αΔT L sans contrainte. Si la barre est bloquée, l'allongement est empêché et σ = −EαΔT apparaît.
- C'est pourquoi rails, pipelines, ponts et chaussées ont besoin de joints de dilatation.
- Trous, entailles et angles vifs augmentent la contrainte locale : σ_max = K σ_avg, où K est le coefficient de concentration de contraintes (souvent 2 à 3 pour un petit trou).

Équations clés

$$\delta = \frac{PL}{AE}$$

=PL/AE

Déformation axiale

$$\delta = \sum \frac{P_i L_i}{A_i E_i}$$

=(P_iL_i)/(A_iE_i)

Barre étagée

$$\delta_T = \alpha \, \Delta T \, L$$

_T=α Δ T L

Dilatation thermique

$$\sigma = -E\alpha\,\Delta T$$

Barre entièrement bloquée

Exemples résolus pas à pas

Exemple 3.1 Une tige d'acier de 3 m (E = 200 GPa) avec A = 500 mm² porte 60 kN. Trouvez son allongement.

1. δ = PL/(AE) = 60000 × 3000/(500 × 200000) en N et mm.

Réponse : 1.8 mm.

Exemple 3.2 Une barre d'acier (E = 200 GPa, α = 12 × 10⁻⁶/°C) est fixée entre deux murs rigides et chauffée de 40 °C. Trouvez la contrainte.

1. La dilatation libre serait αΔT L ; les murs la repoussent.
2. σ = −EαΔT = −200,000 × 12 × 10⁻⁶ × 40 MPa.

Réponse : 96 MPa en compression.

Exemple 3.3 Une barre uniforme encastrée aux deux extrémités porte une charge axiale P = 30 kN en un point situé à 1 m de l'extrémité A et à 2 m de l'extrémité B. Trouvez les deux réactions.

1. Équilibre : R_A + R_B = 30 kN.
2. Compatibilité : l'allongement du tronçon A est égal au raccourcissement du tronçon B, donc R_A × 1 = R_B × 2.

Réponse : R_A = 20 kN, R_B = 10 kN.

Exercices

Faites chacun d'abord sur papier, puis vérifiez.

1. Un rail d'acier de 25 m se réchauffe de 30 °C sans être retenu. De combien s'allonge-t-il ?

   δ = 12 × 10⁻⁶ × 30 × 25,000 = 9 mm.

2. Une barre comprend un tronçon en aluminium (E = 70 GPa, A = 400 mm², L = 1 m) et un tronçon en acier (A = 200 mm², L = 0.5 m) en série, et porte 20 kN. Trouvez l'allongement total.

   0.714 + 0.250 = 0.964 mm.

3. Trouvez la déformation de l'aluminium à 100 MPa (E = 70 GPa).

   $\varepsilon = 100/70{,}000 = 1.43 \times 10^{-3}$.

4. Le DOE indique que la hauteur de moyeu des éoliennes terrestres a atteint environ 103.4 m en 2023 après une hausse de 83 % depuis 1998–1999. Quelle était la moyenne antérieure ?

   103.4/1.83 = 56.5 m.

Idées reçues fréquentes

Idée reçue : La dilatation thermique crée toujours une contrainte.
En réalité : Seulement quand la dilatation est empêchée.

Idée reçue : Une barre hyperstatique se résout avec l'équilibre seul.
En réalité : Il faut aussi des équations de compatibilité (déformations).

Idée reçue : Un petit trou compte à peine.
En réalité : Il peut tripler la contrainte locale, et c'est là que naissent les fissures de fatigue.

Cartes mémoire

Déformation axiale

$\delta = PL/(AE)$.

Barre étagée

Additionnez $PL/(AE)$ pour chaque tronçon.

Compatibilité

Les déformations doivent s'accorder.

Déformation thermique

$\alpha \Delta T$.

Contrainte thermique

$\sigma = -E\alpha\Delta T$ si entièrement bloquée.

Concentration de contraintes

$\sigma_{max} = K\sigma_{avg}$.

Quiz d'autocontrôle

1. Doubler la longueur d'une barre (même charge et même section) rend δ…

moitié

pareil

double

quatre fois plus grande

double. $\delta \propto L$.

2. Une barre bloquée que l'on chauffe est en…

traction

compression

aucune contrainte

cisaillement seulement

compression. Les appuis la repoussent.

3. Les problèmes hyperstatiques nécessitent…

l'équilibre seulement

la compatibilité des déformations

la dynamique

aucun diagramme du corps libre

la compatibilité des déformations. Plus d'inconnues que d'équations d'équilibre.

4. La contrainte thermique dans une barre entièrement bloquée ne dépend pas de…

E

α

ΔT

sa longueur

sa longueur. $\sigma = -E\alpha\Delta T$.

Refaire ce quiz

Comment cela aide à sauver la planète

Les éoliennes plus hautes captent un vent plus fort mais exigent des mâts plus hauts. Le département de l'Énergie des États-Unis indique que la hauteur de moyeu des éoliennes terrestres de grande puissance a augmenté de 83 % depuis 1998–1999 pour atteindre environ 103.4 mètres en 2023, plus haut que la statue de la Liberté, et que la hauteur de moyeu en mer devrait atteindre environ 150 mètres d'ici 2035. Le vent est généralement plus fort en altitude. Le DOE note que les diamètres des mâts sont difficiles à transporter par camion sous les ponts ; il soutient donc les mâts construits sur place, y compris le soudage en spirale pour limiter l'acier coûteux. Chaque mât est une colonne chargée axialement qui doit porter le poids situé au-dessus en restant sous sa contrainte admissible.

Sur Saving Planets : Physique II

Sources : U.S. DOE: Wind turbines, the bigger the better (https://www.energy.gov/eere/articles/wind-turbines-bigger-better) · OpenStax UP2, 1.3 Thermal expansion (https://openstax.org/books/university-physics-volume-2/pages/1-3-thermal-expansion)

Ressources d'apprentissage gratuites

- OpenStax UP2, 1.3 Thermal expansion (https://openstax.org/books/university-physics-volume-2/pages/1-3-thermal-expansion): Section de manuel gratuite.
- OpenStax UP1, 12.3 Stress, strain and elastic modulus (https://openstax.org/books/university-physics-volume-1/pages/12-3-stress-strain-and-elastic-modulus): Déformation axiale.
- MIT OpenCourseWare 2.001 Mechanics and Materials I (https://ocw.mit.edu/courses/2-001-mechanics-materials-i-fall-2006/): Cours du MIT.

☐ **J'ai terminé cette unité**

Torsion des arbres circulaires et transmission de puissance

Déformation et contrainte de cisaillement dans les arbres circulaires en torsion, moment quadratique polaire des arbres pleins et creux, angle de torsion, puissance et couple, dimensionnement des arbres et arbres hyperstatiques.

Objectifs d’apprentissage

À la fin de cette unité, vous saurez :

- Calculer la contrainte de cisaillement avec τ = Tρ/J.
- Calculer l’angle de torsion φ = TL/(GJ).
- Convertir puissance et vitesse en couple avec P = Tω.
- Dimensionner des arbres pleins et creux et expliquer pourquoi les arbres creux économisent de la matière.

Notions clés

- Dans un arbre circulaire en torsion, les sections planes restent planes et la déformation de cisaillement croît linéairement depuis le centre : γ = ρφ/L.
- La contrainte de cisaillement est τ = Tρ/J, maximale à la surface extérieure : τ_max = Tc/J.
- Moment quadratique polaire : J = πd⁴/32 pour un arbre plein et J = π(d_o⁴ − d_i⁴)/32 pour un arbre creux.
- Angle de torsion φ = TL/(GJ) en radians ; pour plusieurs tronçons, additionnez-les.
- Puissance P = Tω. Les arbres lents transmettent des couples énormes pour la même puissance, c’est pourquoi un multiplicateur accélère la rotation d’une éolienne avant la génératrice.

Équations clés

$$\tau = \frac{T\rho}{J}, \quad \tau_{\max} = \frac{Tc}{J}$$

`τ=(Tρ)/(J), τ_=Tc/J`

Formule de torsion

$$J = \frac{\pi d^4}{32}, \quad J = \frac{\pi\left(d_o^4 - d_i^4\right)}{32}$$

`J=(π d^4)/(32), J=(π(d_o^4-d_i^4))/(32)`

Moment quadratique polaire

$$\phi = \frac{TL}{GJ}$$

=TL/GJ

Angle de torsion

$$P = T\omega$$

Puissance

Exemples résolus pas à pas

Exemple 4.1 Un arbre plein en acier de 50 mm transmet un couple de 1.5 kN·m. Trouvez la contrainte de cisaillement maximale.

1. J = π × 0.05⁴/32 = 6.136 × 10⁻⁷ m⁴.
2. τ_max = Tc/J = 1500 × 0.025/6.136 × 10⁻⁷.

Réponse : 61.1 MPa.

Exemple 4.2 Le même arbre mesure 2 m avec G = 80 GPa. Trouvez l'angle de torsion.

1. φ = TL/(GJ) = 1500 × 2/(80 × 10⁹ × 6.136 × 10⁻⁷).

Réponse : 0.0611 rad = 3.50°.

Exemple 4.3 Un moteur fournit 50 kW à 1500 tr/min. Dimensionnez un arbre plein pour une contrainte de cisaillement admissible de 40 MPa.

1. ω = 1500 × 2π/60 = 157.1 rad/s ; T = P/ω = 318.3 N·m.
2. τ = 16T/(πd³) donne d = (16T/(πτ))^(1/3).

Réponse : d = 34.3 mm (prendre 35 mm).

Exercices

Faites chacun d'abord sur papier, puis vérifiez.

1. Un arbre creux (d_o = 60 mm, d_i = 40 mm) transmet 2 kN·m. Trouvez τ_max.

   J = 1.021 × 10⁻⁶ m⁴; τ = 2000 × 0.03/J = 58.8 MPa.

2. Comparez cet arbre creux à un arbre plein de 60 mm : quelle fraction de la matière et de la rigidité J conserve-t-il ?

Section 1 − (40/60)² = 55.6 % ; J 1 − (40/60)⁴ = 80.2 %.

3. Un arbre plein de 30 mm transmet 500 N·m. Trouvez τ_max.

   τ = 16T/(πd³) = 94.3 MPa.

4. Valeurs d'exemple : le rotor d'une éolienne de 3.4 MW tourne à 12 tr/min (valeur d'exemple). Trouvez le couple sur son arbre principal.

   ω = 1.257 rad/s ; T = P/ω = 2.71 MN·m (vitesse d'exemple).

Idées reçues fréquentes

Idée reçue : La contrainte de cisaillement est uniforme dans un arbre.

En réalité : Elle est nulle au centre et maximale à la surface.

Idée reçue : Couple et puissance, c'est la même chose.

En réalité : P = Tω : la même puissance à basse vitesse exige beaucoup plus de couple.

Idée reçue : Un arbre creux est beaucoup plus faible.

En réalité : La matière près du centre est peu sollicitée ; l'enlever allège pour une faible perte de J.

Cartes mémoire

Formule de torsion

τ = Tρ/J.

J plein

πd⁴/32.

J creux

π(d_o⁴ − d_i⁴)/32.

Angle de torsion

φ = TL/(GJ).

Puissance

P = Tω.

Dimensionnement d'un arbre

d = (16T/(ππτ))^(1/3).

Quiz d'autocontrôle

1. Dans un arbre plein, la contrainte de cisaillement maximale se trouve…

au centre

à la surface extérieure

à mi-rayon

partout de la même façon

à la surface extérieure. $\tau \propto \rho$.

2. Doubler le diamètre d'un arbre plein multiplie J par…

2

4

8

16

16. $J \propto d^4$.

3. L'angle de torsion est proportionnel à…

G

J

L

1/L

L. $\varphi = TL/(GJ)$.

4. Un multiplicateur qui accélère un arbre 100 fois (sans pertes) change le couple d'un facteur…

100

1/100

1

10

1/100. $P = T\omega$ est constant.

Refaire ce quiz

Comment cela aide à sauver la planète

Une éolienne transmet sa puissance par un arbre en torsion. Le département de l'Énergie des États-Unis explique que le rotor est relié à la génératrice soit directement, dans une éolienne à entraînement direct, soit par un arbre et une série d'engrenages qui accélèrent la rotation et permettent une génératrice physiquement plus petite. Le DOE indique aussi que la puissance moyenne des éoliennes nouvellement installées aux États-Unis a atteint 3.4 MW en 2023. Comme la puissance est le couple multiplié par la vitesse, un grand rotor lent impose des millions de newton-mètres à son arbre principal, et les formules de torsion de cette unité servent à le dimensionner.

Sur Saving Planets : Dynamique

Sources : DOE des États-Unis : comment fonctionnent les éoliennes ? (en anglais) (https://www.energy.gov/eere/wind/how-do-wind-turbines-work) · U.S. DOE: Wind turbines, the bigger the better (https://www.energy.gov/eere/articles/wind-turbines-bigger-better)

Ressources d'apprentissage gratuites

- MIT OpenCourseWare 2.001 Mechanics and Materials I (https://ocw.mit.edu/courses/2-001-mechanics-materials-i-fall-2006/): Cours du MIT sur la torsion.
- OpenStax UP1, 10.6 Torque (https://openstax.org/books/university-physics-volume-1/pages/10-6-torque): Section de manuel gratuit sur le moment d'une force.
- PhET: Torque (https://phet.colorado.edu/en/simulations/torque): Interactif.

☐ **J'ai terminé cette unité**

Diagrammes d’effort tranchant et de moment fléchissant, et contraintes de flexion

Effort tranchant et moment fléchissant internes dans les poutres, les relations dV/dx = −w et dM/dx = V, diagrammes d’effort tranchant et de moment, formule de flexion σ = My/I, module de flexion et formes de poutres efficaces.

Objectifs d’apprentissage

À la fin de cette unité, vous saurez :

- Tracer les diagrammes d’effort tranchant et de moment pour les charges courantes.
- Utiliser dV/dx = −w et dM/dx = V pour vérifier les diagrammes.
- Calculer la contrainte de flexion avec σ = My/I.
- Choisir des sections efficaces avec le module de flexion S = I/c.

Notions clés

- Coupez une poutre : l’effort tranchant V et le moment M internes maintiennent le morceau en équilibre. Les pentes suivent dV/dx = −w et dM/dx = V, donc M est maximal là où V s’annule.
- La flexion pure garde les sections planes ; déformation et contrainte croissent linéairement depuis l’axe neutre, qui passe par le centroïde.
- La formule de flexion est σ = −My/I ; la plus grande contrainte est σ_max = Mc/I = M/S, où S = I/c est le module de flexion.
- Pour un rectangle, I = bh³/12, donc la hauteur compte bien plus que la largeur : une planche posée sur chant est bien plus rigide et résistante qu’à plat.
- Les poutres en I et les tubes creux placent la matière loin de l’axe neutre, ce qui donne un grand I pour peu de masse.

Équations clés

$$\frac{dV}{dx} = -w, \quad \frac{dM}{dx} = V$$

`dV/dx=-w, dM/dx=V`

Charge, effort tranchant et moment

$$\sigma = -\frac{My}{I}, \quad \sigma_{\max} = \frac{Mc}{I} = \frac{M}{S}$$

`σ=-My/I, σ_=Mc/I=M/S`

Formule de flexion

$$I = \frac{bh^3}{12}, \quad I = \frac{\pi d^4}{64}$$

I=(bh^3)/(12), I=(π d^4)/(64)

Rectangle et cercle

$$M_{\max} = \frac{PL}{4}, \quad M_{\max} = \frac{wL^2}{8}$$

M_=PL/4, M_=(wL^2)/(8)

Appuis simples : charge centrée, charge répartie

Exemples résolus pas à pas

Exemple 5.1 Une poutre sur appuis simples de 4 m porte une charge de 10 kN à mi-portée. Trouvez les réactions et le moment maximal.

1. Par symétrie, chaque réaction vaut 5 kN ; V = ±5 kN.
2. M_max = PL/4 à mi-portée.

Réponse : 10 kN·m.

Exemple 5.2 La poutre est un rectangle de 100 mm de large × 200 mm de haut. Trouvez la contrainte de flexion maximale.

1. I = 0.1 × 0.2³/12 = 6.667 × 10⁻⁵ m⁴; c = 0.1 m.
2. σ = Mc/I = 10,000 × 0.1/6.667 × 10⁻⁵.

Réponse : 15 MPa (traction en bas, compression en haut).

Exemple 5.3 Une poutre sur appuis simples de 6 m porte 5 kN/m sur toute sa longueur. Trouvez V_max et M_max.

1. Réactions wL/2 = 15 kN chacune.
2. M_max = wL²/8 à mi-portée, où V = 0.

Réponse : V_max = 15 kN ; M_max = 22.5 kN·m.

Exercices

Faites chacun d’abord sur papier, puis vérifiez.

1. Une console de 2 m porte 3 kN à son extrémité. Trouvez le plus grand moment et où il agit.

   M = 3 × 2 = 6 kN·m à l’encastrement.

2. Une planche de 200 mm × 50 mm est posée sur chant au lieu d’à plat. De quel facteur I augmente-t-il ?

   $(200/50)^2 = 16$ fois.

3. Une tige circulaire pleine de 40 mm supporte M = 500 N·m. Trouvez σ_max.

   $\sigma = 32M/(\pi d^3) = 79.6$ MPa.

4. Valeurs d’exemple : le centre d’essais du NREL peut appliquer 84 MN·m à un pied de pale. Si une section de pied avait un S d’exemple de 0.4 m^3, quelle contrainte de flexion cela produirait-il ?

   $\sigma = M/S = 84/0.4 = 210$ MPa (section d’exemple).

Idées reçues fréquentes

Idée reçue : Le moment maximal est toujours sous la plus grande charge.
En réalité : Il est là où V s’annule, ce qui peut être ailleurs.

Idée reçue : La contrainte de flexion est uniforme sur la section.
En réalité : Elle est nulle sur l’axe neutre et maximale en haut et en bas.

Idée reçue : Largeur et hauteur aident autant l’une que l’autre.
En réalité : I croît comme h^3 mais seulement comme b.

Cartes mémoire

Effort tranchant–moment

$dM/dx = V$; $dV/dx = -w$.

Formule de flexion

$\sigma = My/I$.

Module de flexion

$S = I/c$; $\sigma = M/S$.

I d’un rectangle

$bh^3/12$.

Charge centrée

$M_{max} = PL/4$.

Charge répartie

$M_{max} = wL^2/8$.

Quiz d’autocontrôle

1. dM/dx est égal à…

w

V

σ

EI

V. La pente du diagramme des moments est l’effort tranchant.

2. L’axe neutre passe par…

la fibre supérieure

le centroïde

l’appui

toujours le centre de cisaillement

le centroïde. Pour la flexion pure d’une poutre élastique linéaire.

3. Doubler la hauteur d’une poutre rectangulaire multiplie I par…

2

4

8

16

8. h^3.

4. M_max pour une poutre sur appuis simples sous charge répartie w vaut…

wL/2

$wL^2/8$

$wL^2/2$

$PL/4$

$wL^2/8$. Résultat classique.

Refaire ce quiz

Comment cela aide à sauver la planète

Les pales d'éoliennes sont d'immenses poutres en console, et on les fait fléchir exprès avant qu'elles ne tournent. La fiche du NREL sur le Wind Technology Testing Center de Boston, construit avec le département de l'Énergie des États-Unis et le Massachusetts Clean Energy Center, décrit la seule installation américaine alors capable de tester des pales jusqu'à 90 mètres de long. Les essais statiques tirent les pales horizontalement et verticalement pour mesurer la flèche et les déformations, en appliquant un moment fléchissant allant jusqu'à 84 méganewton-mètres. La formule de flexion de cette unité transforme ce moment en contrainte, qui décide si une pale obtient sa certification.

Sur Saving Planets : Statique

Sources : NREL: Building state-of-the-art wind technology testing facilities (fact sheet) (https://docs.nlr.gov/docs/fy12osti/53581.pdf)

Ressources d'apprentissage gratuites

- MIT OpenCourseWare 2.001 Mechanics and Materials I (https://ocw.mit.edu/courses/2-001-mechanics-materials-i-fall-2006/): Cours du MIT sur les poutres.
- OpenStax UP1, 12.2 Examples of static equilibrium (https://openstax.org/books/university-physics-volume-1/pages/12-2-examples-of-static-equilibrium): Section de manuel gratuit sur l'équilibre.
- PhET : Balancing Act (https://phet.colorado.edu/en/simulations/balancing-act): Moments, interactif.

J'ai terminé cette unité

Cisaillement transversal dans les poutres, flux de cisaillement et sections composées

Contrainte de cisaillement due aux charges transversales, formule du cisaillement τ = VQ/(It), cisaillement dans les sections rectangulaires et circulaires, flux de cisaillement dans les poutres reconstituées et collées, espacement des fixations, et poutres en deux matériaux.

Objectifs d’apprentissage

À la fin de cette unité, vous saurez :

- Calculer Q et la contrainte de cisaillement τ = VQ/(It).
- Utiliser τ_max = 1.5V/A pour les rectangles et 4V/(3A) pour les cercles.
- Trouver le flux de cisaillement q = VQ/I et l’espacement des clous, des boulons ou la résistance de la colle dans les poutres reconstituées.
- Expliquer comment des poutres en couches travaillent ensemble.

Notions clés

- Une poutre dont le moment varie subit aussi un cisaillement sur des plans horizontaux ; c’est pourquoi une pile de planches libres glisse et fléchit bien plus qu’un bloc collé.
- La formule du cisaillement τ = VQ/(It) utilise Q = A'ȳ', le moment statique par rapport à l’axe neutre de la surface au-delà de la coupure.
- Dans un rectangle, la contrainte de cisaillement est parabolique, nulle en haut et en bas et égale à 1.5V/A sur l’axe neutre.
- Le flux de cisaillement q = VQ/I est l’effort par unité de longueur que doit reprendre un joint de colle ou une rangée de fixations ; espacement des fixations s = F_fastener/q.
- Dans la plupart des poutres longues, la flexion est déterminante ; dans les poutres courtes et hautes et dans le bois, le cisaillement peut l’être.

Équations clés

$$\tau = \frac{VQ}{It}, \quad Q = A'\bar{y}'$$

τ=VQ/It, Q=A' y'

Formule du cisaillement

$$\tau_{\max} = \frac{3V}{2A}$$

τ_=3V/2A

Rectangle

$$\tau_{\max} = \frac{4V}{3A}$$

τ_=4V/3A

Cercle plein

$$q = \frac{VQ}{I}, \quad s = \frac{F}{q}$$

q=VQ/I, s=F/q

Flux de cisaillement et espacement des fixations

Exemples résolus pas à pas

Exemple 6.1 Une poutre rectangulaire de 100 mm × 200 mm subit V = 15 kN. Trouvez la contrainte de cisaillement maximale.

1. A = 0.02 m².
2. τ_max = 1.5V/A = 1.5 × 15000/0.02.

Réponse : 1.125 MPa sur l'axe neutre.

Exemple 6.2 Deux planches de 150 mm × 50 mm sont collées à plat l'une sur l'autre pour former une poutre de 150 mm de large × 100 mm de haut soumise à V = 10 kN. Trouvez la contrainte de cisaillement que doit reprendre la colle.

1. I = 0.15 × 0.1³/12 = 1.25 × 10⁻⁵ m⁴.
2. Q = 0.15 × 0.05 × 0.025 = 1.875 × 10⁻⁴ m³.
3. q = VQ/I = 150 N/mm; τ = q/b = 150/150.

Réponse : τ = 1.0 MPa (comme 1.5V/A).

Exemple 6.3 Les deux mêmes planches sont clouées à la place, sous V = 2 kN, et chaque clou peut reprendre 900 N. Trouvez l'espacement des clous.

1. q = VQ/I = 2000 × 1.875 × 10⁻⁴/1.25 × 10⁻⁵ = 30 N/mm.
2. s = F/q = 900/30.

Réponse : 30 mm.

Exercices

Faites chacun d’abord sur papier, puis vérifiez.

1. Un arbre plein de 50 mm subit V = 10 kN. Trouvez τ_{max}.

   A = 1963 mm²; $\tau = 4V/(3A) = 6.79$ MPa.

2. Un rectangle de 50 mm × 100 mm subit V = 5 kN. Trouvez τ_{max}.

   1.5 × 5000/5000 = 1.5 MPa.

3. Pour une poutre rectangulaire sur appuis simples avec charge centrée, montrez que $\sigma_{max}/\tau_{max} = 2L/h$, et évaluez-le pour L/h = 10.

   $\sigma = 1.5PL/(bh^2)$, $\tau = 0.75P/(bh)$, rapport 2L/h = 20 : la flexion gouverne les poutres longues.

4. Valeurs d’exemple : les matériaux d’un immeuble de hauteur moyenne représentent 1000 t CO_2e d’émissions intrinsèques. Avec la fourchette de 13 % à 26.5 % de l’article du Forest Service, estimez l’économie avec le bois massif.

   130 à 265 t CO_2e (immeuble d’exemple).

Idées reçues fréquentes

Idée reçue : La contrainte de cisaillement est maximale en haut et en bas, comme la contrainte de flexion.

En réalité : Elle y est nulle et maximale sur l’axe neutre.

Idée reçue : Q est le moment d’inertie.

En réalité : Q est un moment statique (m³) ; I est un moment quadratique (m⁴).

Idée reçue : La colle doit seulement tenir les planches ensemble verticalement.

En réalité : Elle doit reprendre le flux de cisaillement horizontal q.

Cartes mémoire

Formule du cisaillement

$\tau = VQ/(It)$.

Moment statique Q

$A'\bar{y}'$ au-delà de la coupure.

Rectangle

$\tau_{max} = 1.5V/A$.

Cercle

$\tau_{max} = 4V/(3A)$.

Flux de cisaillement

$q = VQ/I$.

Espacement des fixations

$s = F/q$.

Quiz d’autocontrôle

1. Pour un rectangle, τ_max vaut…

V/A

1.5V/A

2V/A

4V/(3A)

1.5V/A. Répartition parabolique.

2. Le flux de cisaillement a pour unité…

N/m^2

N/m

N·m

m^3

N/m. Force par longueur.

3. Q est…

$A'\bar{y}'$

$bh^3/12$

VQ/I

Mc/I

$A'\bar{y}'$. Le moment statique de la surface au-delà de la coupure.

4. Diviser par deux l’espacement des clous permet à la poutre de reprendre combien de cisaillement en plus ?

pareil

deux fois plus

quatre fois plus grande

moitié

deux fois plus. q = F/s double.

Refaire ce quiz

Comment cela aide à sauver la planète

Des couches de bois collées qui reprennent le flux de cisaillement bâtissent des villes moins carbonées. Un article de 2022 publié par le Forest Products Laboratory de l’USDA Forest Service explique que le bois lamellé-croisé est à l’avant-garde du mouvement du bois massif, qui permet de construire des bâtiments en bois plus hauts, et que plusieurs études montrent que remplacer l’acier et le béton par du bois massif dans les immeubles de hauteur moyenne peut réduire de 13 % à 26.5 % les émissions liées à la fabrication, au transport et à la mise en œuvre des matériaux. Les auteurs insistent aussi sur les garde-fous pour qu’une demande accrue de bois ne nuise pas au carbone ni à la santé des forêts. Les joints de colle entre les couches doivent reprendre le flux de cisaillement de cette unité.

Sur Saving Planets : Forêts

Sources : USDA Forest Service: What is the impact of mass timber utilization on climate and forests? (2022) (https://research.fs.usda.gov/treesearch/63853)

Ressources d’apprentissage gratuites

- MIT OpenCourseWare 2.001 Mechanics and Materials I (https://ocw.mit.edu/courses/2-001-mechanics-materials-i-fall-2006/): Cours du MIT sur les poutres.
- OpenStax UP1, 12.3 Stress, strain and elastic modulus (https://openstax.org/books/university-physics-volume-1/pages/12-3-stress-strain-and-elastic-modulus): Contrainte de cisaillement et module de cisaillement.

☐ **J’ai terminé cette unité**

Transformation des contraintes, cercle de Mohr, critères de rupture et fatigue

Contraintes planes sur des plans tournés, contraintes principales et cisaillement maximal, cercle de Mohr, critères de plasticité de Tresca et de von Mises, et introduction à la fatigue sous chargement répété.

Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette unité, vous saurez :

- Transformer un état de contraintes planes à n'importe quel angle et trouver les contraintes et plans principaux.
- Tracer et utiliser le cercle de Mohr.
- Appliquer les critères de Tresca et de von Mises pour trouver un coefficient de sécurité.
- Expliquer la fatigue et pourquoi des pièces peuvent rompre bien en dessous de leur résistance statique.

Notions clés

- Un même état de contraintes paraît différent selon le plan. Tourner de θ change σ et τ, mais certains plans ont un cisaillement nul : les plans principaux.
- Les contraintes principales sont $\sigma_{1,2}$ = (σx + σy)/2 ± R, avec R = √(((σx − σy)/2)² + τxy²). Le cisaillement maximal dans le plan vaut R, sur des plans à 45° des plans principaux.
- Le cercle de Mohr représente (σ, τ) pour chaque plan : centre en (σx + σy)/2, rayon R. Un angle θ sur l'élément correspond à 2θ sur le cercle.
- Les métaux ductiles plastifient par cisaillement. Tresca : la plus grande contrainte de cisaillement atteint σ_Y/2. Von Mises : σ_vm = √(σ_1^2 − $\sigma_1\sigma_2$ + σ_2^2) atteint σ_Y (il colle un peu mieux aux essais).
- Un chargement répété fait croître des fissures à partir de petits défauts, si bien que des pièces peuvent rompre après des millions de cycles sous des contraintes bien inférieures à la limite d'élasticité. Les concepteurs utilisent des courbes S–N et testent des pièces complètes sur toute leur durée de vie en cycles.

Équations clés

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

```
σ_1,2=(σ_x+σ_y)/(2)((σ_x-σ_y)/(2))^2+τ_xy^2
```

Contraintes principales

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

`2θ_p=2τ_xyσ_x-σ_y`

Angle principal

$$\sigma_{vm} = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}$$

`σ_vm=σ_1^2-σ_1σ_2+σ_2^2`

Von Mises (contraintes planes)

$$\sigma_{vm} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$$

`σ_vm=σ^2+3τ^2`

Normale plus cisaillement (arbres, poutres)

Exemples résolus pas à pas

Exemple 7.1 En un point, σx = 80 MPa, σy = −40 MPa et τxy = 30 MPa. Trouvez les contraintes principales, l'angle principal et le cisaillement maximal dans le plan.

1. Centre = 20 MPa ; R = √(60² + 30²) = 67.1 MPa.
2. σ_1 = 20 + 67.1; σ_2 = 20 − 67.1.
3. tan 2θ_p = 60/120 = 0.5.

Réponse : σ_1 = 87.1 MPa, σ_2 = −47.1 MPa, θ_p = 13.3°, τ_max = 67.1 MPa.

Exemple 7.2 Pour cet état de contraintes, trouvez la contrainte de von Mises et le coefficient de sécurité pour un acier avec σ_Y = 250 MPa.

1. σ_vm = √(87.1² − (87.1)(−47.1) + 47.1²).
2. FS = 250/σ_vm.

Réponse : σ_vm = 117.9 MPa; FS = 2.12.

Exemple 7.3 Utilisez Tresca pour le même point.

1. σ_1 et σ_2 sont de signes opposés, donc τ_abs max = (σ_1 − σ_2)/2 = 67.1 MPa.
2. FS = (σ_Y/2)/τ_max = 125/67.1.

Réponse : FS = 1.86 (Tresca est un peu plus conservatif).

Exercices

Faites chacun d'abord sur papier, puis vérifiez.

1. La surface d'un arbre est en cisaillement pur, $\tau = 50$ MPa. Trouvez les contraintes principales et leurs plans.

   $\sigma_1 = 50$ MPa, $\sigma_2 = -50$ MPa, sur des plans à 45°.

2. Une barre est en traction simple à 100 MPa. Trouvez la contrainte de cisaillement maximale et son plan.

   $\tau_max = 50$ MPa sur des plans à 45°.

3. Un arbre subit $\sigma = 60$ MPa en flexion et $\tau = 40$ MPa en torsion. Trouvez la contrainte de von Mises.

   $\sigma_vm = \sqrt{(60^2 + 3 \times 40^2)} = 91.7$ MPa.

4. Valeurs d'exemple : une pièce effectue un cycle par seconde pendant 20 ans. Combien de cycles de charge cela fait-il ?

   $20 \times 365.25 \times 86400 = 6.31 \times 10^8$ cycles.

Idées reçues fréquentes

Idée reçue : La plus grande contrainte est toujours σx ou σy.
En réalité : Les contraintes principales sur des plans tournés peuvent être plus grandes.

Idée reçue : Un angle θ sur l'élément vaut θ sur le cercle de Mohr.
En réalité : Il vaut 2θ sur le cercle.

Idée reçue : Si une pièce résiste une fois à une charge, elle y résiste pour toujours.
En réalité : Les charges répétées peuvent faire croître des fissures de fatigue bien en dessous de la résistance statique.

Cartes mémoire

Contraintes principales

Centre ± R.

Rayon du cercle de Mohr

$R = \sqrt{(((\sigma x - \sigma y)/2)^2 + \tau^2)}$.

Cisaillement maximal dans le plan

Tresca

τ_max = R, à 45°.

τ_max = σ_Y/2 à la plastification.

Von Mises

$\sqrt{(\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)}$.

Fatigue

Rupture après de nombreux cycles sous la limite d'élasticité.

Quiz d'autocontrôle

1. Sur les plans principaux, la contrainte de cisaillement est…

maximal

zéro

égale à σ_1

R

zéro. Définition.

2. Les plans de cisaillement maximal dans le plan sont à quel angle des plans principaux ?

30°

45°

60°

90°

45°. 90° sur le cercle.

3. Von Mises pour une contrainte uniaxiale σ vaut…

σ/2

σ

√3σ

2σ

$\sigma . \sigma_2 = 0$.

4. La rupture par fatigue est due à…

une seule grande charge

des cycles de charge répétés

la température seule

de la couleur

des cycles de charge répétés. Les fissures croissent cycle après cycle.

Refaire ce quiz

Comment cela aide à sauver la planète

Une pale d'éolienne doit survivre à des décennies de flexions alternées. La fiche du NREL sur le Wind Technology Testing Center explique que les essais de fatigue font travailler les pales des millions de fois pour simuler ce qu'une pale subit durant sa vie sur une éolienne, à l'aide du système d'excitation résonante du NREL, avec jusqu'à 21 mètres de débattement d'un extrême à l'autre de la pointe, pour reproduire en quelques mois plus de 20 ans de charges cycliques sur site. Contraintes combinées, critères de rupture et fatigue, tous dans cette unité, décident si une pale est validée.

Sur Saving Planets : Statique

Sources : NREL: Building state-of-the-art wind technology testing facilities (fact sheet) (https://docs.nlr.gov/docs/fy12osti/53581.pdf)

Ressources d'apprentissage gratuites

- MIT OpenCourseWare 2.001 Mechanics and Materials I (https://ocw.mit.edu/courses/2-001-mechanics-materials-i-fall-2006/): Cours du MIT sur la transformation des contraintes.
- MIT OpenCourseWare 2.002 Mechanics and Materials II (https://ocw.mit.edu/courses/2-002-mechanics-and-materials-ii-spring-2004/): Cours du MIT sur la plasticité, la rupture et la fatigue.

☐ **J'ai terminé cette unité**

Réservoirs sous pression à paroi mince et sollicitations combinées

Contraintes circonférentielle et axiale dans les cylindres minces, contrainte dans les sphères minces, épaisseur de paroi requise, et combinaison des contraintes axiales, de flexion, de torsion et de pression en un point.

Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette unité, vous saurez :

- Calculer les contraintes circonférentielle et axiale dans les cylindres et sphères à paroi mince.
- Trouver l'épaisseur de paroi requise pour une pression et une contrainte admissible.
- Superposer en un point les contraintes axiales, de flexion, de torsion et de pression.
- Trouver les contraintes principales et de von Mises sous sollicitations combinées.

Notions clés

- Un réservoir est à paroi mince quand r/t vaut environ 10 ou plus ; la contrainte dans la paroi est alors presque uniforme dans l'épaisseur.
- Cylindre : contrainte circonférentielle σ_h = pr/t, contrainte axiale σ_a = pr/(2t). La contrainte circonférentielle est le double de l'axiale, c'est pourquoi les tuyaux en surpression se fendent dans le sens de la longueur.
- Sphère : σ = pr/(2t) dans toutes les directions, donc une sphère a besoin de la moitié de l'épaisseur d'un cylindre de même rayon.
- Sous sollicitations combinées, additionnez en un point les contraintes dues à chaque charge (superposition), puis utilisez le cercle de Mohr ou un critère de rupture.
- Les unités comptent : 1 bar = 0.1 MPa et 1 psi = 6894.757 Pa (NIST).

Équations clés

$$\sigma_h = \frac{pr}{t}, \quad \sigma_a = \frac{pr}{2t}$$

`σ_h=pr/t, σ_a=pr/2t`

Cylindre mince

$$\sigma = \frac{pr}{2t}$$

`σ=pr/2t`

Sphère mince

$$\sigma = \frac{P}{A} \pm \frac{Mc}{I}$$

σ=P/AMc/I

Axial plus flexion

$$t = \frac{pr}{\sigma_{\text{allow}}}$$

t=σ_allow

Paroi de cylindre requise

Exemples résolus pas à pas

Exemple 8.1 Valeurs d'exemple : une bouteille d'hydrogène de rayon intérieur 150 mm et de paroi 15 mm contient 700 bar (70 MPa). Trouvez les contraintes circonférentielle et axiale.

1. r/t = 10, estimation en paroi mince.
2. σ_h = pr/t = 70 × 10; σ_a = σ_h/2.

Réponse : σ_h = 700 MPa, σ_a = 350 MPa (réservoir d'exemple, d'où l'emploi de composite en fibre de carbone pour ces réservoirs).

Exemple 8.2 Une sphère de même rayon, même paroi et même pression : trouvez la contrainte.

1. σ = pr/(2t).

Réponse : 350 MPa, la moitié de la contrainte circonférentielle du cylindre.

Exemple 8.3 Un poteau plein de 100 mm porte une charge de compression de 10 kN et un moment fléchissant de 3 kN·m. Trouvez les plus grandes contraintes de compression et de traction.

1. P/A = 10000/7854 mm² = 1.27 MPa en compression.
2. Mc/I = 32M/(πd³) = 30.6 MPa.

Réponse : 31.8 MPa en compression sur une face ; 29.3 MPa en traction sur l'autre.

Exercices

Faites chacun d'abord sur papier, puis vérifiez.

1. La conception d’un réservoir passe de 350 bar à 700 bar à rayon et contrainte admissible identiques. Comment l’épaisseur de paroi doit-elle changer ?

   t = pr/σ : elle double.

2. Valeurs d’exemple : une bouteille de gaz a r = 150 mm, t = 3 mm et p = 2 MPa. Trouvez σ_h et σ_a.

   σ_h = 100 MPa; σ_a = 50 MPa.

3. Trouvez l’épaisseur de paroi d’un cylindre avec p = 35 MPa, r = 200 mm et σ_allow = 600 MPa.

   t = 35 × 200/600 = 11.7 mm.

4. Convertissez les 10000 psi du DOE en MPa avec le facteur du NIST.

   10000 × 6894.757 Pa = 68.9 MPa, environ 700 bar.

Idées reçues fréquentes

Idée reçue : Les contraintes circonférentielle et axiale sont égales dans un cylindre.
En réalité : La contrainte circonférentielle est le double de la contrainte axiale.

Idée reçue : Les formules de paroi mince valent pour tout réservoir.
En réalité : Seulement quand r/t vaut environ 10 ou plus.

Idée reçue : On peut additionner des contraintes de charges différentes en des points différents.
En réalité : Superposez au même point et dans la même direction.

Cartes mémoire

Contrainte circonférentielle

σ_h = pr/t.

Contrainte axiale

σ_a = pr/(2t).

Sphère

σ = pr/(2t).

Paroi mince

r/t ≳ 10.

Superposition

Additionnez les contraintes en un point.

bar et psi

1 bar = 0.1 MPa ; 1 psi = 6894.757 Pa.

Quiz d’autocontrôle

1. La contrainte circonférentielle dans un cylindre mince vaut…

pr/(2t)

pr/t

pt/r

2pr/t

pr/t. Équilibre d’un demi-anneau.

2. La contrainte dans la paroi d’une sphère comparée à la contrainte circonférentielle d’un cylindre (mêmes p, r, t) vaut…

deux fois plus

égaux

moitié

un quart

moitié. pr/(2t).

3. Un tuyau en surpression se fend généralement…

sur sa circonférence

dans le sens de la longueur

seulement aux extrémités

jamais

dans le sens de la longueur. La contrainte circonférentielle est la plus grande.

4. 700 bar, c’est environ…

7 MPa

70 MPa

700 MPa

0.7 MPa

70 MPa. 1 bar = 0.1 MPa.

Refaire ce quiz

Comment cela aide à sauver la planète

L'hydrogène peut alimenter camions, bus et industrie sans émissions de carbone au point d'utilisation, mais il faut le stocker. Le département de l'Énergie des États-Unis explique que l'hydrogène a la plus forte énergie par unité de masse de tous les carburants mais une très faible énergie par unité de volume ; le stocker sous forme gazeuse exige donc généralement des réservoirs haute pression à 350–700 bar (5000–10000 psi), tandis que le stocker sous forme liquide exige des températures cryogéniques, car il bout à −252.8 °C à pression ambiante. La formule de la contrainte circonférentielle de cette unité montre pourquoi ces réservoirs ont besoin de parois très résistantes et légères.

Sur Saving Planets : Chimie générale I

Sources : U.S. DOE: Hydrogen storage (https://www.energy.gov/eere/fuelcells/hydrogen-storage) · NIST Guide to the SI, Appendix B.9: conversion factors (https://www.nist.gov/pml/special-publication-811/nist-guide-si-appendix-b-conversion-factors/nist-guide-si-appendix-b9)

Ressources d'apprentissage gratuites

- MIT OpenCourseWare 2.001 Mechanics and Materials I (https://ocw.mit.edu/courses/2-001-mechanics-materials-i-fall-2006/): Cours du MIT sur les réservoirs sous pression.
- MIT OpenCourseWare 2.002 Mechanics and Materials II (https://ocw.mit.edu/courses/2-002-mechanics-and-materials-ii-spring-2004/): Cours de suite du MIT.

☐ **J'ai terminé cette unité**

Flèche des poutres

La déformée et EI v'' = M, l'intégration avec conditions aux limites, les formules usuelles de flèche, la superposition, les limites de service et les poutres hyperstatiques.

Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette unité, vous saurez :

- Intégrer EI v'' = M avec les conditions aux limites pour trouver pente et flèche.
- Utiliser les formules usuelles de flèche et la superposition.
- Vérifier la flèche par rapport à une limite de service comme L/360.
- Résoudre des consoles appuyées et d'autres poutres hyperstatiques.

Notions clés

- Pour de petites pentes, la déformée obéit à EI d²v/dx² = M(x). Intégrez deux fois et utilisez les appuis pour fixer les constantes (v = 0 aux articulations ; v = 0 et v' = 0 à un encastrement).
- EI est la rigidité en flexion : un matériau plus rigide (E) ou une section plus haute (I) donne des flèches plus petites.
- Résultats usuels : console avec charge en bout δ = PL³/(3EI) ; appuis simples avec charge centrée PL³/(48EI) ; avec charge répartie 5wL⁴/(384EI).
- Les flèches dues à des charges séparées s'additionnent (superposition) tant que la poutre reste élastique linéaire.
- Un appui supplémentaire rend la poutre hyperstatique ; retirez-le, calculez la flèche à cet endroit et choisissez la réaction qui l'annule.

Équations clés

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = M(x)$$

`EI(d^2v)/(dx^2)=M(x)`

Déformée

$$\delta = \frac{PL^3}{3EI}, \quad \delta = \frac{wL^4}{8EI}$$

`=(PL^3)/(3EI), =(wL^4)/(8EI)`

Console : charge en bout, charge répartie

$$\delta = \frac{PL^3}{48EI}, \quad \delta = \frac{5wL^4}{384EI}$$

=(PL^3)/(48EI), =(5wL^4)/(384EI)

Appuis simples : charge centrée, charge répartie

$$R_B = \frac{3wL}{8}$$

R_B=3wL/8

Console appuyée, charge répartie

Exemples résolus pas à pas

Exemple 9.1 Une console en acier de 2 m (E = 200 GPa, I = 8 × 10⁻⁶ m⁴) porte 1 kN en bout. Trouvez la flèche en bout.

1. δ = PL³/(3EI) = 1000 × 8/(3 × 200 × 10⁹ × 8 × 10⁻⁶).

Réponse : 1.67 mm.

Exemple 9.2 Une poutre en acier sur appuis simples de 6 m (I = 1 × 10⁻⁴ m⁴) porte 10 kN/m. Trouvez la flèche à mi-portée et comparez à L/360.

1. δ = 5wL⁴/(384EI) = 5 × 10,000 × 1296/(384 × 200 × 10⁹ × 10⁻⁴).
2. L/360 = 16.7 mm.

Réponse : 8.44 mm, dans la limite.

Exemple 9.3 La même poutre est encastrée en A et appuyée en B. Trouvez la réaction de l’appui.

1. Retirez l’appui : flèche en bout de console wL⁴/(8EI).
2. La force d’appui R_B donne R_BL³/(3EI) vers le haut ; égalez les deux.

Réponse : R_B = 3wL/8 = 22.5 kN.

Exercices

Faites chacun d’abord sur papier, puis vérifiez.

1. La longueur d’une console est doublée avec la même charge en bout. De quel facteur la flèche en bout augmente-t-elle ?

   2³ = 8 fois.

2. Une poutre en bois sur appuis simples ($E = 10$ GPa, $I = 5 \times 10^{-5}$ m^4, $L = 4$ m) porte 5 kN à mi-portée. Trouvez δ.

   $PL^3/(48EI) = 13.3$ mm.

3. Une console en acier de 3 m ($I = 1 \times 10^{-5}$ m^4) porte 2 kN/m. Trouvez la flèche en bout.

   $wL^4/(8EI) = 10.1$ mm.

4. Le DOE indique que la surface balayée par les rotors a augmenté d'environ 670 % depuis 1998–1999. Si la surface balayée croît comme le carré du diamètre, de quel facteur le diamètre moyen a-t-il augmenté ?

   Surface balayée ×7.7, donc diamètre × $\sqrt{7.7} = 2.77$.

Idées reçues fréquentes

Idée reçue : La flèche croît proportionnellement à la longueur.

En réalité : Elle croît comme L^3 ou L^4.

Idée reçue : Un acier plus résistant fléchit moins.

En réalité : La flèche dépend de E, qui est à peu près le même pour tous les aciers.

Idée reçue : Si une poutre est assez résistante, elle convient.

En réalité : Elle doit aussi être assez rigide : des planchers qui rebondissent ou des pales qui heurtent le mât sont des défaillances en service.

Cartes mémoire

Déformée

$EIv'' = M$.

Console, charge en bout

$PL^3/(3EI)$.

Appuis simples, charge centrée

$PL^3/(48EI)$.

Appuis simples, charge répartie

$5wL^4/(384EI)$.

Superposition

Additionnez les flèches de chaque charge.

Aptitude au service

Limite telle que $L/360$.

Quiz d'autocontrôle

1. Flèche en bout d'une console chargée à son extrémité :

$PL^3/(3EI)$

$PL^3/(48EI)$

$PL^2/(2EI)$

$5wL^4/(384EI)$

$PL^3/(3EI)$. Résultat classique.

2. EI s'appelle…

module de flexion

rigidité en flexion

moment polaire

flux de cisaillement

rigidité en flexion. Résistance à la déformation en flexion.

3. À un encastrement…

$v = 0$ seulement

$v = 0$ et $v' = 0$

$M = 0$

$V = 0$

$v = 0$ et $v' = 0$. Ni flèche ni rotation.

4. Doubler la portée d'une poutre sur appuis simples sous charge répartie multiplie δ par…

4

8

16

2

16. L^4.

Refaire ce quiz

Comment cela aide à sauver la planète

Des pales plus longues captent plus de vent, mais fléchissent aussi davantage. Le département de l'Énergie des États-Unis indique que le diamètre moyen des rotors des éoliennes nouvellement installées aux États-Unis dépassait 133.8 mètres en 2023, que 98 % des nouvelles éoliennes cette année-là avaient des rotors de 115 mètres ou plus, et que la surface balayée a augmenté d'environ 670 % depuis 1998–1999, ce qui permet de produire plus d'électricité même là où le vent est plus faible. Le DOE note que les pales ne peuvent être ni pliées ni courbées une fois fabriquées, ce qui limite le transport routier, et il étudie des pales plus fines et plus souples. La théorie de la flèche des poutres permet aux concepteurs d'éviter qu'une pale souple ne heurte le mât.

Sur Saving Planets : Physique II

Sources : U.S. DOE: Wind turbines, the bigger the better (https://www.energy.gov/eere/articles/wind-turbines-bigger-better)

Ressources d'apprentissage gratuites

- MIT OpenCourseWare 2.001 Mechanics and Materials I (https://ocw.mit.edu/courses/2-001-mechanics-materials-i-fall-2006/): Cours du MIT sur la flèche des poutres.
- OpenStax Calculus Volume 1, 5.5 Substitution (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/5-5-substitution): Révision gratuite d'analyse pour intégrer la déformée.

☐ **J'ai terminé cette unité**

Flambement des colonnes

Stabilité et charge critique, formule d’Euler pour les colonnes biarticulées, longueur de flambement pour d’autres conditions d’appui, élancement et contrainte critique, flambement inélastique, imperfections, et coques minces avec facteurs d’abattement.

Objectifs d’apprentissage

À la fin de cette unité, vous saurez :

- Expliquer l’équilibre stable, neutre et instable des colonnes.
- Calculer les charges critiques d’Euler avec les coefficients de longueur de flambement.
- Utiliser l’élancement pour distinguer flambement et plastification.
- Expliquer pourquoi imperfections et facteurs d’abattement comptent pour les coques minces comme les réservoirs de fusées.

Notions clés

- Une colonne élancée peut céder brusquement en fléchissant latéralement sous une charge bien inférieure à la charge d’écrasement. Cette charge est la charge critique P_cr.
- Euler : P_cr = π²EI/(KL)². K = 1 pour articulé–articulé, 2 pour encastré–libre, 0.5 pour encastré–encastré et environ 0.7 pour encastré–articulé.
- Le flambement utilise le plus petit I de la section : une colonne flambe autour de son axe faible.
- Contrainte critique σ_cr = π²E/(KL/r)², avec le rayon de giration r = √(I/A). Si σ_cr dépasse la limite d’élasticité, la colonne courte plastifie d’abord ; entre les deux, c’est le flambement inélastique.
- Les coques cylindriques minces, comme les réservoirs de fusées, sont très sensibles aux moindres imperfections ; les concepteurs multiplient donc la charge de flambement idéale par un facteur d’abattement tiré d’essais.

Équations clés

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E I}{(K L)^2}$$

`P_cr=(π^2EI)/((KL)^2)`

Charge critique d’Euler

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(K L / r)^2}, \quad r = \sqrt{I/A}$$

`σ_cr=(π^2E)/((KL/r)^2), r=/A`

Contrainte critique

$$K = 1,\ 2,\ 0.5,\ 0.7$$

```
K=1,\ 2,\ 0.5,\ 0.7
```

Biarticulée, encastrée–libre, encastrée–encastrée, encastrée–articulée

Exemples résolus pas à pas

Exemple 10.1 Une colonne en acier biarticulée (E = 200 GPa) mesure 3 m avec I = 2 × 10⁻⁶ m⁴. Trouvez P_cr.

1. P_cr = π² × 200 × 10⁹ × 2 × 10⁻⁶/3².

Réponse : 438.6 kN.

Exemple 10.2 La même colonne est encastrée à la base et libre en tête. Trouvez P_cr.

1. K = 2, donc KL = 6 m et P_cr est divisée par 4.

Réponse : 109.7 kN.

Exemple 10.3 Une tige d'acier pleine de 50 mm, longue de 2 m et articulée aux deux extrémités, a σ_Y = 250 MPa. Flambe-t-elle ou plastifie-t-elle d'abord ?

1. r = d/4 = 12.5 mm; KL/r = 2000/12.5 = 160.
2. σ_cr = π² × 200,000/160² MPa.

Réponse : σ_cr = 77.1 MPa < 250 MPa : elle flambe d'abord.

Exercices

Faites chacun d'abord sur papier, puis vérifiez.

1. La longueur d'une colonne est doublée. Qu'arrive-t-il à P_cr ?

   Elle tombe au quart.

2. Comment une colonne encastrée–encastrée se compare-t-elle à une colonne biarticulée de même longueur ?

   K = 0.5, donc P_cr est 4 fois plus grande.

3. La NASA décrit une charge d'essai allant jusqu'à 750000 livres. Convertissez en méganewtons avec le facteur du NIST.

   750,000 × 4.448222 N = 3.34 MN.

4. Valeurs d'exemple : la NASA a constaté que supprimer les surépaisseurs de soudure peut augmenter la capacité portante jusqu'à 28 %. Que porterait un cylindre d'exemple de 10 MN ?

   10 × 1.28 = 12.8 MN (cylindre d'exemple).

Idées reçues fréquentes

Idée reçue : Les colonnes cèdent quand la contrainte atteint la limite d'élasticité.
En réalité : Les colonnes élancées flambent sous une contrainte bien plus faible.

Idée reçue : Une colonne flambe autour de son axe fort.
En réalité : Elle flambe autour de l'axe de plus petit I.

Idée reçue : La charge d'Euler est ce que portera une vraie colonne.
En réalité : Les imperfections et les charges excentrées la réduisent, surtout pour les coques minces.

Cartes mémoire

Charge d'Euler

$P_{cr} = \pi^2 EI/(KL)^2$.

Longueur de flambement

K = 1, 2, 0.5, 0.7.

Rayon de giration

$r = \sqrt{(I/A)}$.

Contrainte critique

$\pi^2 E/(KL/r)^2$.

Axe faible

Le plus petit I est déterminant.

Facteur d'abattement

Réduction issue d'essais pour les coques minces.

Quiz d'autocontrôle

1. La P_{cr} d'Euler est proportionnelle à…

L

1/L

1/L^2

L^2

1/L^2. $\pi^2EI/(KL)^2$.

2. K pour une colonne encastrée–libre (mât) :

0.5

0.7

1

2

2. Longueur de flambement 2L.

3. L'élancement est…

KL/r

r/L

I/A

E/σ_Y

KL/r. La longueur de flambement divisée par le rayon de giration.

4. Un facteur d'abattement tient compte de…

la température

la sensibilité aux imperfections des coques minces

de la peinture

la gravité

la sensibilité aux imperfections des coques minces. Les coques réelles flambent en dessous de la théorie idéale.

Refaire ce quiz

Comment cela aide à sauver la planète

Des fusées plus légères lancent les satellites qui observent le climat de la Terre, et le flambement fixe la légèreté possible de leurs réservoirs. Le NASA Engineering and Safety Center indique que son équipe Shell Buckling Knockdown Factor a réexaminé des facteurs d'abattement qui n'avaient pas été mis à jour depuis l'ère Apollo des années 1960. Huit essais à échelle réduite et deux à pleine échelle sur des cylindres métalliques ont conduit à de nouveaux facteurs d'abattement utilisés sur l'étage central du Space Launch System, avec des gains de masse et de coût. Lors d'un essai, un cylindre de 8 pieds de diamètre chargé jusqu'à 750000 livres a flambé à moins de 2.5 % de la prédiction de l'ingénieur, et les premiers résultats ont montré que supprimer les surépaisseurs de soudure peut augmenter la capacité portante jusqu'à 28 %.

Sur Saving Planets : Introduction à l'ingénierie aérospatiale

Sources : NASA NESC: Shell Buckling Knockdown Factor project (https://www.nasa.gov/centers-and-facilities/nesc/proving-management-skills-on-the-shell-buckling-knockdown-factor-project/)

Ressources d'apprentissage gratuites

- MIT OpenCourseWare 2.001 Mechanics and Materials I (https://ocw.mit.edu/courses/2-001-mechanics-materials-i-fall-2006/): Cours du MIT sur le flambement.
- NASA NESC: Shell Buckling Knockdown Factor project (https://www.nasa.gov/centers-and-facilities/nesc/proving-management-skills-on-the-shell-buckling-knockdown-factor-project/): Comment la NASA teste le flambement des cylindres de fusées.

☐ **J'ai terminé cette unité**

Exercices

Ces exercices sont dans chaque unité. Faites-les sur papier, puis ouvrez la réponse.

1. Contraintes : normale, de cisaillement et de matage ; contrainte admissible et coefficient de sécurité
   4 exercices
2. Déformation et comportement des matériaux : loi de Hooke, coefficient de Poisson et courbe contrainte–déformation
   4 exercices
3. Éléments chargés axialement : déformation, barres hyperstatiques et contraintes thermiques
   4 exercices

4. Torsion des arbres circulaires et transmission de puissance
   4 exercices
5. Diagrammes d’effort tranchant et de moment fléchissant, et contraintes de flexion
   4 exercices
6. Cisaillement transversal dans les poutres, flux de cisaillement et sections composées
   4 exercices
7. Transformation des contraintes, cercle de Mohr, critères de rupture et fatigue
   4 exercices
8. Réservoirs sous pression à paroi mince et sollicitations combinées
   4 exercices
9. Flèche des poutres
   4 exercices
10. Flambement des colonnes
    4 exercices

Le laboratoire (Materials lab)

Le labo est la partie pratique du cours. Ici, il est gratuit et sert uniquement à s’entraîner, sans crédits.

Chaque TP peut se faire dans une simulation gratuite ou avec des objets du quotidien. Les élastiques tendus et les spaghettis qui cassent peuvent être projetés : portez des lunettes, gardez des charges faibles et éloignez le visage des pièces chargées.

Référence de sécurité : OSHA: Hand and power tools (https://www.osha.gov/hand-power-tools)

TP A : Loi de Hooke et raideur

SEMAINE 2

Objectif : Chargez un ressort (ou un élastique) par paliers, montrez que l'allongement croît proportionnellement à la force et trouvez la raideur k.

$$F = kx, \quad U = \tfrac{1}{2}kx^2$$

F=kx, U=12kx^2

Ressort linéaire et énergie stockée

Mode opératoire

1. Ouvrez PhET Hooke's Law, choisissez un ressort et réglez sa constante ; appliquez des forces par paliers égaux et notez le déplacement.
2. À la maison : suspendez un sachet à un élastique et ajoutez des pièces de masse connue (F = mg), en mesurant l'allongement à la règle à chaque fois.
3. Tracez F en fonction de x et ajustez une droite passant par l'origine ; la pente est k.
4. Déchargez palier par palier et notez si l'élastique revient à sa longueur initiale.

Tableau de données

F (N)	x (mm) pour k = 50 N/m
0.5	10
1.0	20
1.5	30
2.0	40

Valeurs d'exemple pour un ressort avec k = 50 N/m ; votre propre ressort donne votre pente.

Exemple de calcul

1. k = F/x = 0.5 N/0.010 m = 50 N/m sur chaque ligne.
2. Énergie stockée à 2 N : U = ½ × 50 × 0.04² = 0.04 J.

> **Sécurité**
>
> - Portez des lunettes ; un élastique tendu peut revenir brutalement.

Alternative à la maison ou virtuelle

- L'étape avec l'élastique est la version à la maison.

PhET: Hooke's Law (https://phet.colorado.edu/en/simulations/hookes-law)

Lien avec la planète : Des essais de raideur comme celui-ci, à plus grande échelle, servent aux ingénieurs à qualifier chaque boulon, câble et élément de pont. ASCE Report Card for America's Infrastructure: Bridges (https://infrastructurereportcard.org/cat-item/bridges-infrastructure/)

☐ **J'ai terminé ce TP (réel ou virtuel)**

TP B : Contrainte, déformation et module d’un élastique

SEMAINE 3

Objectif : Transformez force et allongement en contrainte et déformation, estimez un module et voyez où la réponse cesse d’être linéaire.

$$\sigma = \frac{F}{A}, \quad \varepsilon = \frac{\delta}{L_0}, \quad E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

σ=F/A, =()/(L_0), E=(σ)/()

Contrainte et déformation conventionnelles

Mode opératoire

1. Mesurez la largeur et l’épaisseur d’un élastique plat à la règle (ou comptez des couches d’épaisseur connue) et sa longueur au repos L_0.
2. Suspendez des masses connues et notez l’allongement δ pour chacune.
3. Calculez σ et ε et tracez σ en fonction de ε. Ajustez la partie initiale rectiligne pour estimer E.
4. Continuez d’ajouter de petites masses et notez où la courbe s’infléchit : le caoutchouc n’est pas linéaire aux grandes déformations.

Tableau de données

F (N)	δ (mm)	σ (MPa)	ε
1	8	0.667	0.10
2	16	1.333	0.20
3	24	2.000	0.30

Valeurs d’exemple pour un élastique avec A = 1.5 mm² et L_0 = 80 mm dans son domaine quasi linéaire.

Exemple de calcul

1. σ = 1 N/1.5 mm² = 0.667 MPa; ε = 8/80 = 0.10.
2. E = 0.667/0.10 = 6.67 MPa, environ 30000 fois moins rigide que l’acier (200 GPa).

> **Sécurité**
>
> - Portez des lunettes et orientez l’élastique loin des visages ; arrêtez avant qu’il ne casse.

Alternative à la maison ou virtuelle

- Tout ce labo se fait à la maison.

PhET : Masses and Springs (https://phet.colorado.edu/en/simulations/masses-and-springs)

Lien avec la planète : Connaître la rigidité et la résistance par kilogramme permet de choisir des caisses de voiture plus légères, et le DOE associe une réduction de poids de 10 % à une amélioration de 6 % à 8 % de la consommation. U.S. DOE: Lightweight materials for cars and trucks (https://www.energy.gov/eere/vehicles/lightweight-materials-cars-and-trucks)

- [ ] **J’ai terminé ce TP (réel ou virtuel)**

TP C : Torsion d’une tige en mousse

SEMAINE 6

Objectif : Tordez une tige en mousse avec un couple connu, mesurez l’angle de torsion et vérifiez que φ croît proportionnellement à T comme dans φ = TL/(GJ).

$$\phi = \frac{TL}{GJ}, \quad J = \frac{\pi d^4}{32}$$

=TL/GJ, J=(π d^4)/(32)

Angle de torsion d’une tige pleine

Mode opératoire

1. Tracez une ligne droite le long d’une tige pleine en mousse et marquez deux anneaux distants de 0.5 m.
2. Maintenez une extrémité fixe et appliquez un couple avec un bras de levier et un poids connu (T = F × bras).
3. Photographiez la ligne et lisez l’angle de torsion entre les anneaux ; répétez pour trois couples.
4. Tracez φ en fonction de T ; la pente est L/(GJ). Observez la spirale que devient la ligne droite : c’est la déformation de cisaillement.

Tableau de données

T (N·m)	φ (°)
0.1	4.67
0.2	9.34
0.3	14.0

Valeurs calculées pour une tige d’exemple avec d = 50 mm, L = 0.5 m et G = 1 MPa.

Exemple de calcul

1. $J = \pi \times 0.05^4/32 = 6.136 \times 10^{-7}$ m⁴.
2. $\varphi = 0.2 \times 0.5/(10^6 \times 6.136 \times 10^{-7}) = 0.163$ rad = 9.34°.
3. Déformation de cisaillement en surface $\gamma = c\varphi/L = 0.025 \times 0.163/0.5 = 0.00815$.

> **Sécurité**
>
> - Gardez des poids légers et bas, au-dessus d’une surface souple.

Alternative à la maison ou virtuelle

- Tout ce labo se fait à la maison.

PhET: Torque (https://phet.colorado.edu/en/simulations/torque)

Lien avec la planète : Les arbres d'éoliennes subissent le même type de torsion, des millions de fois plus grande. DOE des États-Unis : comment fonctionnent les éoliennes ? (en anglais) (https://www.energy.gov/eere/wind/how-do-wind-turbines-work)

☐ **J'ai terminé ce TP (réel ou virtuel)**

TP D : La forme compte, une règle à plat et sur chant

SEMAINE 8

Objectif : Chargez une règle en console posée à plat puis sur chant et comparez flèche et contrainte avec I = bh³/12.

$$I = \frac{bh^3}{12}, \quad \delta = \frac{PL^3}{3EI}, \quad \sigma = \frac{Mc}{I}$$

```
I=(bh^3)/(12), =(PL^3)/(3EI), σ=Mc/I
```

Forme de section et flexion d'une console

Mode opératoire

1. Fixez une règle en plastique de 30 mm × 3 mm à plat sur une table avec 250 mm en porte-à-faux.
2. Suspendez une charge de 0.5 N (environ 51 g) à l'extrémité et mesurez la flèche avec une deuxième règle.
3. Tournez la règle sur chant (serrez-la entre deux livres) et recommencez avec la même charge.
4. Comparez le rapport des flèches au rapport des valeurs de I.

Tableau de données

Orientation	I (m⁴)	δ à 0.5 N (mm)	σ_max (MPa)
À plat (h = 3 mm)	6.75 × 10⁻¹¹	12.9	2.78
Sur chant (h = 30 mm)	6.75 × 10⁻⁹	0.129	0.278

Valeurs calculées pour une règle en plastique d'exemple avec E = 3 GPa.

Exemple de calcul

1. Rapport des I = (30/3)² = 100, donc la flèche sur chant est 100 fois plus petite.
2. M = 0.5 × 0.25 = 0.125 N·m ; à plat σ = 0.125 × 0.0015/6.75 × 10⁻¹¹ = 2.78 MPa.

> **Sécurité**
>
> - Ne surchargez pas la règle ; le plastique peut casser.

Alternative à la maison ou virtuelle

- Tout ce labo se fait à la maison.

PhET : Balancing Act (https://phet.colorado.edu/en/simulations/balancing-act)

Lien avec la planète : Placer la matière loin de l'axe neutre, c'est ainsi que pales, poutres et mâts économisent de la matière. NREL: Building state-of-the-art wind technology testing facilities (fact sheet) (https://docs.nlr.gov/docs/fy12osti/53581.pdf)

- [ ] **J'ai terminé ce TP (réel ou virtuel)**

TP E : Flèche d’une console et module d’Young

SEMAINE 12

Objectif : Mesurez la flèche en bout en fonction de la charge pour une règle à plat en console et déduisez le module d’Young de $\delta = PL^3/(3EI)$.

$$E = \frac{L^3}{3I\,(\delta/P)}$$

E=(L^3)/(3I (/P))

À partir de la pente de δ en fonction de P

Mode opératoire

1. Utilisez la règle à plat du TP D avec 250 mm en porte-à-faux.
2. Suspendez 0.25, 0.5 et 1.0 N à l’extrémité et notez la flèche à chaque fois.
3. Tracez δ en fonction de P et ajustez une droite passant par l’origine.
4. Calculez E à partir de la pente et comparez à une valeur typique du plastique.

Tableau de données

P (N)	δ (mm)
0.25	6.43
0.50	12.9
1.00	25.7

Valeurs calculées pour une règle en plastique d’exemple avec E = 3 GPa, b = 30 mm, h = 3 mm.

Exemple de calcul

1. Pente $\delta/P = 25.7$ mm/N.
2. $E = 0.25^3/(3 \times 6.75 \times 10^{-11} \times 0.0257) = 3.0$ GPa.

> **Sécurité**
>
> - Gardez des charges faibles et rattrapez-les si elles glissent.

Alternative à la maison ou virtuelle

- Tout ce labo se fait à la maison.

PhET: Hooke’s Law (https://phet.colorado.edu/en/simulations/hookes-law)

Lien avec la planète : Les pales d'éoliennes plus longues et plus souples sont conçues avec la même formule de flèche. U.S. DOE: Wind turbines, the bigger the better (https://www.energy.gov/eere/articles/wind-turbines-bigger-better)

- [ ] **J'ai terminé ce TP (réel ou virtuel)**

TP F : Flambement de spaghettis

SEMAINE 14

Objectif : Trouvez la charge qui fait flamber des brins de spaghettis secs de différentes longueurs et vérifiez que P_cr diminue comme 1/L².

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E I}{L^2}, \quad I = \frac{\pi d^4}{64}$$

`P_cr=(π^2EI)/(L^2), I=(π d^4)/(64)`

Colonne biarticulée

Mode opératoire

1. Coupez des brins de 100, 150 et 200 mm. Placez chacun debout sur une balance de cuisine et appuyez lentement dessus avec un objet plat.
2. Notez la plus forte indication de la balance au moment où le brin se courbe latéralement (convertissez les grammes en newtons).
3. Répétez trois fois par longueur et faites la moyenne.
4. Tracez P_cr en fonction de 1/L² ; la droite doit passer près de l'origine.

Tableau de données

L (mm)	P_cr (N)
100	1.526
150	0.678
200	0.381

Valeurs calculées pour un brin d'exemple avec d = 1.8 mm et E = 3 GPa ; les vrais spaghettis varient.

Exemple de calcul

1. I = π × 1.8⁴/64 = 0.515 mm⁴ = 5.153 × 10⁻¹³ m⁴.
2. P_cr à 0.1 m = π² × 3 × 10⁹ × 5.153 × 10⁻¹³/0.01 = 1.526 N (environ 156 g sur la balance).
3. Doubler L de 100 à 200 mm divise P_cr par 4.

> **Sécurité**
>
> - Portez des lunettes ; les spaghettis cassent en morceaux pointus.

Alternative à la maison ou virtuelle

- Tout ce labo se fait à la maison.

OpenStax UP1, 12.4 Elasticity and plasticity (https://openstax.org/books/university-physics-volume-1/pages/12-4-elasticity-and-plasticity)

Lien avec la planète : La NASA teste au flambement des cylindres de fusée en taille réelle pour fixer des facteurs d'abattement qui économisent de la masse. NASA NESC: Shell Buckling Knockdown Factor project (https://www.nasa.gov/centers-and-facilities/nesc/proving-management-skills-on-the-shell-buckling-knockdown-factor-project/)

- [ ] **J'ai terminé ce TP (réel ou virtuel)**

Séries d'entraînement aux examens

Chronométrez-vous : environ 10 minutes par problème. Comparez ensuite avec les solutions complètes.

Série d'exercices de mi-parcours (unités 1–5)

1. Une tige d'acier de 16 mm porte 30 kN en traction. Trouvez la contrainte.

    1. $A = \pi \times 16^2/4 = 201.1\ mm^2$.

    Réponse : 149.2 MPa.

2. Une barre d'aluminium (E = 70 GPa) de 1.5 m avec A = 300 mm^2 porte 12 kN. Trouvez son allongement.

    1. $\delta = PL/(AE)$.

    Réponse : 0.857 mm.

3. Une barre d'acier (E = 200 GPa, $\alpha = 12 \times 10^{-6}/°C$) est maintenue entre des murs rigides et chauffée de 25 °C. Trouvez la contrainte.

    1. $\sigma = E\alpha\Delta T$.

    Réponse : 60 MPa en compression.

4. Un arbre plein de 40 mm transmet 800 N·m. Trouvez τ_max.

    1. $\tau = 16T/(\pi d^3)$.

    Réponse : 63.7 MPa.

5. Une poutre sur appuis simples de 5 m, de 120 mm de large × 240 mm de haut, porte 4 kN/m. Trouvez σ_max.

    1. $M = wL^2/8 = 12.5\ kN{\cdot}m$; $I = 1.382 \times 10^{-4}\ m^4$.

Réponse : 10.9 MPa.

Série d’entraînement finale (toutes les unités)

1. Une poutre rectangulaire de 80 mm × 160 mm subit V = 12 kN. Trouvez τ_max.

    1. τ = 1.5V/A.

    Réponse : 1.41 MPa.

2. Trouvez les contraintes principales pour σx = 50 MPa, σy = 10 MPa, τxy = 15 MPa.

    1. Centre 30 MPa ; R = √(20² + 15²) = 25 MPa.

    Réponse : σ_1 = 55 MPa, σ_2 = 5 MPa.

3. Un cylindre mince a r = 0.5 m, t = 10 mm et p = 2 MPa. Trouvez σ_h et σ_a.

    1. pr/t et pr/(2t).

    Réponse : 100 MPa et 50 MPa.

4. Une console en acier de 1.5 m (I = 4 × 10⁻⁶ m⁴) porte 2 kN en bout. Trouvez la flèche en bout.

    1. δ = PL³/(3EI).

    Réponse : 2.81 mm.

5. Une colonne en acier biarticulée de 4 m a I = 5 × 10⁻⁶ m⁴. Trouvez P_cr.

    1. π²EI/L².

    Réponse : 616.9 kN.

6. Un point d’un arbre a σ = 80 MPa et τ = 30 MPa. Trouvez la contrainte de von Mises.

    1. √(σ² + 3τ²).

    Réponse : 95.4 MPa.

Fiche de formules

$$\sigma = P/A,\ \tau = V/A,\ \sigma_b = P/(td)$$

$$\varepsilon = \delta/L,\ \sigma = E\varepsilon,\ G = E/(2(1+\nu))$$

$$\delta = PL/(AE),\ \delta_T = \alpha \Delta T L$$

$$\tau = T\rho/J,\ \phi = TL/(GJ),\ J = \pi d^4/32$$

$$P = T\omega$$

$$dM/dx = V,\ dV/dx = -w$$

$$\sigma = My/I,\ I = bh^3/12$$

$$\tau = VQ/(It),\ q = VQ/I$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \sqrt{(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{vm} = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}$$

$$\sigma_h = pr/t,\ \sigma_a = pr/(2t)$$

$$EIv'' = M$$

$$\delta = PL^3/(3EI),\ PL^3/(48EI),\ 5wL^4/(384EI)$$

$$P_{cr} = \pi^2 EI/(KL)^2$$

Constantes

Constante	Valeur
1 mégapascal (MPa)	10^6 Pa = 1 N/mm²
1 bar	10^5 Pa = 0.1 MPa
1 psi (lbf/in²)	6894.757 Pa
1 livre-force (lbf)	4.448222 N
1 tour par minute	0.1047198 rad/s
Acier typique (valeurs de manuel)	E = 200 GPa, G = 80 GPa, ν = 0.3, α = 12 × 10^{-6}/°C, limite d'élasticité environ 250 MPa
Alliage d'aluminium typique (valeurs de manuel)	E = 70 GPa, G = 26 GPa, ν = 0.33, α = 23 × 10^{-6}/°C

Source : NIST Guide to the SI, Appendix B.9: conversion factors (https://www.nist.gov/pml/special-publication-811/nist-guide-si-appendix-b-conversion-factors/nist-guide-si-appendix-b9)

Textes et simulations gratuits

Utilisez ces manuels, cours et simulations gratuits en parallèle du cours.

- MIT OpenCourseWare 2.001 Mechanics and Materials I (https://ocw.mit.edu/courses/2-001-mechanics-materials-i-fall-2006/): Notes de cours, exercices et examens gratuits du MIT.
- MIT OpenCourseWare 2.002 Mechanics and Materials II (https://ocw.mit.edu/courses/2-002-mechanics-and-materials-ii-spring-2004/): Cours de suite gratuit du MIT : plasticité, rupture et fatigue.
- OpenStax University Physics Volume 1, 12.3 Stress, strain and elastic modulus (https://openstax.org/books/university-physics-volume-1/pages/12-3-stress-strain-and-elastic-modulus): Introduction gratuite aux contraintes

et déformations dans un manuel.

- OpenStax University Physics Volume 1, 12.4 Elasticity and plasticity (https://openstax.org/books/university-physics-volume-1/pages/12-4-elasticity-and-plasticity): Plasticité, écoulement plastique et rupture.
- PhET: Hooke's Law (https://phet.colorado.edu/en/simulations/hookes-law): Ressorts, raideur et énergie.
- PhET : Masses and Springs (https://phet.colorado.edu/en/simulations/masses-and-springs): Raideur et allongement.

Glossaire

Contrainte de matage
Pression de contact entre une fixation et une plaque, P/(td).

Déformée
Forme déformée de l'axe neutre d'une poutre.

Coefficient de sécurité
Charge de rupture divisée par la charge admissible.

Fatigue
Rupture sous chargement répété, souvent sous la limite d'élasticité.

Rigidité en flexion
EI, la résistance d'une poutre à la déformation en flexion.

Contrainte circonférentielle
Contrainte circonférentielle pr/t dans un cylindre sous pression.

Facteur d'abattement
Réduction, tirée d'essais, de la charge de flambement idéale des coques minces.

Axe neutre
Ligne de contrainte de flexion nulle passant par le centroïde.

Coefficient de Poisson
Rapport entre déformation latérale et déformation axiale, avec un signe moins.

Moment quadratique polaire
J, la résistance d'un arbre à la torsion.

Contraintes principales
Contraintes normales sur les plans de cisaillement nul.

Module de flexion
S = I/c.

Flux de cisaillement
Effort de cisaillement par unité de longueur, VQ/I.

Élancement
KL/r d'une colonne.

Déformation
Variation de longueur par unité de longueur.

Contrainte
Effort interne par unité de surface.

Contrainte de von Mises
Contrainte équivalente comparée à la limite d'élasticité.

Limite d'élasticité
Contrainte à laquelle commence la déformation permanente.

Module d'Young
E, pente de la droite élastique contrainte–déformation.

Grille d'autoévaluation

Aucune note ni aucun crédit ne sont attribués. Utilisez cette grille pour juger honnêtement où vous en êtes dans chaque unité.

Niveau	À quoi cela ressemble
4 · Maîtrise	Trouve les efforts internes avec un diagramme du corps libre, choisit le bon modèle de déformation, vérifie les hypothèses (élastique, paroi mince, élancé) et donne les contraintes avec un coefficient de sécurité.
3 · Compétent	Résout les exercices avec quelques erreurs occasionnelles d'unité ou de signe.
2 · En progression	Suit les exemples résolus mais confond I, J et Q ou oublie la compatibilité.
1 · Débutant	Remplace les nombres dans les formules sans diagrammes ; doit revoir l'unité.

Pondération suggérée si vous voulez une note

Partie	Poids
Exercices	25%
Travaux pratiques	20%
Série d'entraînement de mi-parcours	25%
Série d'entraînement finale	30%

Visez le niveau 3 ou mieux dans chaque unité avant de passer au cours suivant.

Cours associés

- Dynamique ENGR 212

- Algèbre linéaire MATH 230
- Analyse III MATH 210
- Tous les cours