Ultimo aggiornamento: November 1, 2026

🗺️ Percorso di quattro anni · Anno 2, Primavera

Informazioni sul corso

Questo corso gratuito ha 10 unità e 6 laboratori. Sono i totali reali, non un programma più lungo accorciato.

Un controllo è un numero o un risultato di codice in una pagina del corso che uno script ricalcola prima della pubblicazione. Il numero stampato e quello ricalcolato devono coincidere.

> Questo è lo schema di un corso gratuito di autoapprendimento scritto da Saving Planets. Non è un corso universitario, non dà crediti accademici e nessuna scuola è coinvolta.
>
> Il suo ambito segue un corso semestrale di algebra lineare del secondo anno. È modellato sui temi e sulla profondità di MIT 18.06 Linear Algebra tenuto da Gilbert Strang (gratuito su MIT OpenCourseWare) e sui corsi di algebra lineare del secondo anno di Georgia Tech e Purdue, usando il testo gratuito di Georgia Tech Interactive Linear Algebra di Dan Margalit e Joseph Rabinoff e il libro gratuito Linear Algebra di Jim Hefferon, che colleghiamo dove aiutano. Nessuno di quegli autori o istituti approva questa pagina.
>
> Cosa aggiungiamo: ogni unità è collegata a un lavoro reale sul pianeta con una fonte pubblica citata (GPS, Landsat 9, satelliti del livello del mare della NASA, supercomputer meteorologici della NOAA, dati input–output e di riciclo dell'EPA, studi sugli edifici dell'USGS, spettrometro minerale EMIT della NASA), ogni numero della pagina viene ricalcolato da uno script di controllo prima della pubblicazione, e ogni laboratorio si svolge in un foglio di calcolo gratuito o su carta.
>
> Seguilo in ordine. Ogni unità ha obiettivi, idee chiave, equazioni, esempi passo per passo, esercizi con soluzioni complete, errori comuni, flashcard e un quiz. I tuoi progressi sono salvati solo in questo browser.

Come questo corso aiuta a salvare il pianeta

L'algebra lineare è il linguaggio dei dati sul pianeta. Un pixel satellitare è un vettore, una posizione GPS è la soluzione di un sistema lineare, una previsione meteo sono milioni di equazioni risolte più e più volte, e l'inquinamento di un'economia può essere tracciato con una sola matrice.

Le stesse poche idee, eliminazione, proiezione, autovalori e SVD, trasformano misure grezze in mappe di foreste, tendenze del livello del mare e polveri minerali. Ogni unità termina con una breve sezione con fonti. I valori che non provengono da una fonte sono indicati come valori di esempio.

Per gli insegnanti

Puoi insegnare questo corso, oppure lasciare che uno studente lo faccia da solo. È gratis. Saving Planets non dà un voto né crediti scolastici.

- Questa pagina è l'intero corso: 10 unità e 6 laboratori (MATH 230).
- Prevedi 15 settimane, circa 6–9 ore a settimana, comprese le settimane di laboratorio.
- Segui il calendario di 15 settimane. Leggi l'unità, fai la pratica su carta, poi apri la risposta. Nella settimana di laboratorio, fai il laboratorio o la versione a casa.
- Un controllo è un numero o un risultato di codice nella pagina che uno script ricalcola prima della pubblicazione. Il numero che vedi e quello ricalcolato devono coincidere.
- Usa Stampa questa pagina, oppure scarica la guida di studio PDF. Il formulario è verso la fine.
- Chiedi: in che modo questa unità aiuta le persone e il pianeta? Ogni unità ha un riquadro verde con un fatto e la sua fonte.
- Copia il modello di guida per insegnanti e scrivi il nome della classe, il tempo che hai e le domande che farai. Apri il modello di guida per insegnanti

Prima di iniziare

Prerequisiti

- Algebra delle superiori: risolvere due equazioni in due incognite e lavorare con le funzioni.
- Analisi I aiuta con limiti e derivate in alcuni esempi, ma per la maggior parte del corso non serve l'analisi.
- Dimestichezza con un foglio di calcolo; Introduzione alla programmazione aiuta per le versioni Python facoltative dei laboratori.
- Analisi III ed Equazioni differenziali si abbinano bene a questo corso ma non sono richiesti.

Come studiare

- Fai prima ogni calcolo a mano su piccoli esempi (2 × 2 e 3 × 3), poi controllalo con un foglio di calcolo o una calcolatrice.
- Pensa ad Ax in due modi: come prodotti scalari delle righe con x, e come combinazione delle colonne di A.
- Verifica ogni risposta: sostituisci x in Ax = b, moltiplica A per la sua inversa o verifica Av = λv.
- Tieni traccia delle dimensioni: una matrice m × n per una n × p dà m × p, e dimensioni che non combaciano indicano un errore.
- Fai disegni in 2D e 3D: rette, piani, proiezioni e stiramenti rendono le regole facili da ricordare.
- Fai ogni esercizio su carta prima di aprire la risposta e ripeti i quiz qualche giorno dopo.

Che cosa ti serve

- Un computer con un foglio di calcolo gratuito (le sue funzioni MMULT, MINVERSE, MDETERM e LINEST fanno il lavoro matriciale).
- Carta millimetrata, un righello, un goniometro e una matita.
- Facoltativo: Python gratuito con NumPy per le versioni più grandi dei laboratori.
- Uno spago e puntine o nastro adesivo per il laboratorio di trilaterazione, e una mappa stampata o un foglio di carta.
- Una foto in scala di grigi o una piccola griglia di numeri per il laboratorio di compressione delle immagini.

Programma suggerito di 15 settimane

Circa 6-9 ore a settimana: lettura, esercizi e, nelle settimane di laboratorio, il laboratorio.

Settimana	Unità	Argomenti	Lettura
1	Vettori: combinazioni lineari, lunghezze e prodotti scalari	Vettori, combinazioni lineari, span, lunghezza	MIT 18.06 L1; ILA 2.1–2.2
2	Vettori: combinazioni lineari, lunghezze e prodotti scalari	Prodotti scalari, angoli, ortogonalità; Laboratorio A; inizio dell'eliminazione	ILA 6.1
3	Sistemi di equazioni lineari ed eliminazione di Gauss	Eliminazione, forme a scala, insiemi di soluzioni; Laboratorio B	MIT 18.06 L2; ILA 1.1–1.3
4	Algebra delle matrici: moltiplicazione, inverse e fattorizzazione LU	Moltiplicazione di matrici, inverse, A = LU; Laboratorio C	MIT 18.06 L3–4; ILA 3.4–3.5
5	Modelli lineari: economia input–output (Leontief), reti e bilanciamento	Modelli input–output, reti, bilanciamento	Hefferon Topics; EPA USEEIO
6	Spazi vettoriali, sottospazi, indipendenza, base, rango e i quattro sottospazi fondamentali	Sottospazi, spazio delle colonne, nucleo, Ax = 0	MIT 18.06 L5–7; ILA 2.6
7	Spazi vettoriali, sottospazi, indipendenza, base, rango e i quattro sottospazi fondamentali	Indipendenza, base, dimensione, rango, quattro sottospazi; esercitazione di metà corso	MIT 18.06 L8–10; ILA 2.5, 2.7, 2.9
8	Ortogonalità, proiezioni, minimi quadrati e Gram–Schmidt	Ortogonalità e proiezioni	MIT 18.06 L14–15; ILA 6.3
9	Ortogonalità, proiezioni, minimi quadrati e Gram–Schmidt	Minimi quadrati, Gram–Schmidt, A = QR; Laboratorio D	MIT 18.06 L16–17; ILA 6.4–6.5

Settimana	Unità	Argomenti	Lettura
10	Determinanti: proprietà, cofattori, regola di Cramer e volume	Determinanti, cofattori, regola di Cramer, volume	MIT 18.06 L18–20; ILA 4.1–4.3
11	Autovalori e autovettori	Autovalori, autovettori, metodo delle potenze, modi	MIT 18.06 L21; ILA 5.1–5.2, 5.5
12	Diagonalizzazione, potenze di matrici, catene di Markov e sistemi dinamici lineari	Diagonalizzazione, catene di Markov, sistemi dinamici; Laboratorio E	MIT 18.06 L22–25; ILA 5.4, 5.6
13	La decomposizione ai valori singolari, l'analisi delle componenti principali e le matrici definite positive	Matrici definite positive e SVD	MIT 18.06 L27–29
14	La decomposizione ai valori singolari, l'analisi delle componenti principali e le matrici definite positive	Approssimazione a rango basso, PCA, numero di condizionamento; Laboratorio F	MIT 18.06 L29; sito del libro di Strang
15	Ripasso	Ripasso ed esercitazione finale	Tutte le unità

I tuoi progressi

Spunta unità e laboratori man mano che li finisci, e fai i quiz. Progressi e punteggi sono salvati solo in questo browser e non ci vengono mai inviati.

Unità

Vettori: combinazioni lineari, lunghezze e prodotti scalari

Vettori in due, tre e n dimensioni, somma e moltiplicazione per scalare, combinazioni lineari e span, lunghezza, versori, prodotto scalare, angolo tra vettori, ortogonalità e le disuguaglianze di Cauchy–Schwarz e triangolare.

Obiettivi di apprendimento

Alla fine di questa unità saprai:

- Sommare, scalare e combinare vettori a mano e con disegni.
- Calcolare lunghezze, versori e prodotti scalari.
- Trovare l'angolo tra due vettori e verificare l'ortogonalità.
- Descrivere lo span di uno, due o tre vettori.

Concetti chiave

- Un vettore in $\mathbb{R}^n$ è una lista ordinata di n numeri. In 2D e 3D è una freccia; in dimensioni più alte è una lista, come gli 11 valori di banda di un pixel satellitare.
- Una combinazione lineare $c_1v_1 + c_2v_2 + \dots$ scala i vettori e li somma. Lo span è l'insieme di tutte le combinazioni lineari: una retta, un piano o tutto lo spazio.
- Lunghezza $\|v\| = \sqrt{(v \cdot v)}$. Dividendo per la lunghezza si ottiene un versore $u = v/\|v\|$ di lunghezza 1.
- Prodotto scalare $v \cdot w = v_1w_1 + v_2w_2 + \dots = \|v\|\|w\|\cos\theta$. Se $v \cdot w = 0$ i vettori sono ortogonali (perpendicolari).
- Cauchy–Schwarz: $|v \cdot w| \le \|v\|\|w\|$. Disuguaglianza triangolare: $\|v + w\| \le \|v\| + \|w\|$.

Equazioni chiave

$$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$$

\|v\|=_1^2+v_2^2+·s+v_n^2

Lunghezza

$$v \cdot w = v_1w_1 + \cdots + v_nw_n$$

v· w=v_1w_1+·s+v_nw_n

Prodotto scalare

$$\cos\theta = \frac{v \cdot w}{\|v\|\,\|w\|}$$

θ=(v· w)/(\|v\| \|w\|)

Angolo tra vettori

$$|v \cdot w| \leq \|v\| \, \|w\|$$

Disuguaglianza di Cauchy–Schwarz

Esempi svolti passo passo

Esempio 1.1 Trova la lunghezza di v = (3, 4) e il versore nella sua direzione.

1. $\|v\| = \sqrt{(3^2 + 4^2)} = \sqrt{25} = 5$.
2. u = v/5.

Risposta: $\|v\| = 5$, u = (0.6, 0.8).

Esempio 1.2 Trova l'angolo tra v = (3, 4) e w = (1, 2).

1. $v \cdot w = 3 + 8 = 11$.
2. $\|v\| = 5$, $\|w\| = \sqrt{5} = 2.236$.
3. $\cos \theta = 11/(5 \times 2.236) = 0.9839$.

Risposta: $\theta = 10.30°$.

Esempio 1.3 Scrivi 2(1, 0, 1) + 3(0, 1, 1) come un unico vettore. (2, 3, 4) appartiene allo span di questi due vettori?

1. 2(1, 0, 1) + 3(0, 1, 1) = (2, 3, 5).
2. Ogni combinazione $c_1(1, 0, 1) + c_2(0, 1, 1) = (c_1, c_2, c_1 + c_2)$, quindi la terza componente deve essere la somma delle prime due.

Risposta: (2, 3, 5); (2, 3, 4) non è nello span perché $2 + 3 \neq 4$.

Esercizi

Svolgi ciascuno prima su carta, poi controlla.

1. Trova $\|(1, 2, 2)\|$.

   $\sqrt{(1 + 4 + 4)} = 3$.

2. Trova $(1, 2, 3) \cdot (4, -5, 6)$.

4 − 10 + 18 = 12.

3. (2, −1) e (1, 2) sono ortogonali?

   Sì: 2 − 2 = 0.

4. Trova il versore nella direzione di (6, 8).

   ‖(6, 8)‖ = 10, quindi (0.6, 0.8).

Errori concettuali comuni

Mito: Il prodotto scalare è un vettore.
In realtà: È un solo numero (uno scalare).

Mito: $\|v + w\| = \|v\| + \|w\|$ sempre.
In realtà: Solo quando v e w puntano nello stesso verso; altrimenti è minore.

Mito: I vettori hanno senso solo in 2D o 3D.
In realtà: I vettori di dati possono avere centinaia di componenti; valgono le stesse regole.

Flashcard

Combinazione lineare

$c_1v_1 + c_2v_2 + \dots$

Span

Tutte le combinazioni lineari di un insieme di vettori.

Lunghezza

$\|v\| = \sqrt{(v \cdot v)}$.

Prodotto scalare

$v \cdot w = \Sigma\, v_i w_i = \|v\|\|w\|\cos\theta$.

Ortogonale

$v \cdot w = 0$.

Versore

$v/\|v\|$.

Quiz di autoverifica

1. ‖(3, 4)‖ è uguale a…

7

5

25

12

5. $\sqrt{(9 + 16)} = 5$.

2. v·w = 0 significa che i vettori sono...

paralleli

ortogonali

uguali

versori

ortogonali. $\cos \theta = 0$, quindi $\theta = 90°$.

3. Lo span di due vettori non paralleli in $\mathbb{R}^3$ è...

un punto

una retta

un piano

tutto $\mathbb{R}^3$

un piano. Due direzioni indipendenti riempiono un piano.

4. Raddoppiare v cambia $\|v\|$ di un fattore...

1

2

4

$\sqrt{2}$

2. $\|cv\| = |c|\|v\|$.

Rifai questo quiz

Come questo aiuta a salvare il pianeta

Ogni pixel di Landsat 9 è un vettore. Secondo l'USGS, l'Operational Land Imager 2 di Landsat 9 registra 9 bande spettrali a 30 m (15 m per la banda pancromatica) e il suo Thermal Infrared Sensor 2 registra 2 bande termiche a 100 m, così ogni punto al suolo diventa una lista di 11 numeri. I dati sono a 14 bit, $2^{14} = 16384$ livelli per banda, e Landsat 9 acquisisce circa 750 scene al giorno, tutte gratuite.

La salute di foreste e colture si legge dalla banda rossa (banda 4, 0.64–0.67 µm) e dalla banda del vicino infrarosso (banda 5, 0.85–0.88 µm). L'indice di vegetazione NDVI = (NIR − red)/(NIR + red) confronta due componenti del vettore pixel. Con riflettanze di esempio di 0.40 (NIR) e 0.08 (rosso), NDVI = 0.32/0.48 = 0.667, tipico di vegetazione sana; il suolo nudo dà valori vicini a zero.

Su Saving Planets: Osservazione della Terra · Deforestazione

Fonti: USGS: Landsat 9 (https://www.usgs.gov/landsat-missions/landsat-9) · Interactive Linear Algebra, 2.1 Vectors (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/vectors.html)

Risorse di apprendimento gratuite

- Interactive Linear Algebra, 2.1 Vectors (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/vectors.html): Testo gratuito con figure interattive.
- Interactive Linear Algebra, 6.1 Dot products and orthogonality (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/dot-product.html): Lunghezze, angoli e ortogonalità.
- MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra (Strang, Spring 2010) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/): Lezione 1: la geometria delle equazioni lineari.
- PhET: Vector Addition (https://phet.colorado.edu/en/simulations/vector-addition): Interattivo.

☐ **Ho finito questa unità**

Sistemi di equazioni lineari ed eliminazione di Gauss

Sistemi lineari visti per righe e per colonne, matrici aumentate, eliminazione fino alla forma a scala, sostituzione all'indietro, forma a scala ridotta, pivot e variabili libere, e quando un sistema ha una, nessuna o infinite soluzioni.

Obiettivi di apprendimento

Alla fine di questa unità saprai:

- Scrivere un sistema come Ax = b e come matrice aumentata.
- Risolvere sistemi per eliminazione e sostituzione all'indietro.
- Trovare la forma a scala ridotta e individuare pivot e variabili libere.
- Decidere se un sistema ha una, nessuna o infinite soluzioni.

Concetti chiave

- Vista per righe: ogni equazione è una retta (2D) o un piano (3D) e la soluzione è dove si incontrano. Vista per colonne: b è una combinazione delle colonne di A, con pesi x.
- Tre operazioni di riga non cambiano le soluzioni: scambiare righe, moltiplicare una riga per un numero non nullo e sommare a una riga un multiplo di un'altra.
- L'eliminazione produce una forma triangolare superiore (a scala); la sostituzione all'indietro risolve poi dal basso verso l'alto. I pivot sono i primi elementi non nulli di ogni riga.
- Una colonna senza pivot dà una variabile libera e infinite soluzioni. Una riga 0 = c con c ≠ 0 significa nessuna soluzione (incompatibile).
- Equazioni di distanza al quadrato come (x − a)² + (y − b)² = d² non sono lineari, ma sottraendone una da un'altra si eliminano x² e y² e restano equazioni lineari. È così che i problemi di posizionamento diventano sistemi lineari.

Equazioni chiave

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Forma matriciale

$$R_i \leftarrow R_i - \ell_{ij} R_j, \;\; \ell_{ij} = a_{ij}/a_{jj}$$

```
R_i R_i-_ijR_j,\ \ _ij=a_ij/a_jj
```

Passo di eliminazione e moltiplicatore

$$\text{solutions: one, none, or infinitely many}$$

I tre soli casi

$$d = c\,t$$

`d=c t`

Distanza dal tempo di viaggio del segnale (GPS)

Esempi svolti passo passo

Esempio 2.1 Risolvi x + y + z = 6, 2x + y − z = 1, x − y + 2z = 5.

1. $R_2 - 2R_1$: −y − 3z = −11. $R_3 - R_1$: −2y + z = −1.
2. $R_3 - 2R_2$: 7z = 21, quindi z = 3.
3. Sostituzione all'indietro: −y − 9 = −11 dà y = 2; poi x = 6 − 2 − 3 = 1.

Risposta: (x, y, z) = (1, 2, 3).

Esempio 2.2 Dei radiofari si trovano in (0, 0), (10, 0) e (0, 10) km. Un ricevitore misura distanze al quadrato di 25, 65 e 45 km². Trova la sua posizione.

1. Equazione 1 meno equazione 2: $x^2 + y^2 - [(x-10)^2 + y^2] = 25 - 65$, quindi 20x − 100 = −40.
2. Equazione 1 meno equazione 3: 20y − 100 = −20.
3. Risolvi le due equazioni lineari.

Risposta: (x, y) = (3, 4) km.

Esempio 2.3 Quante soluzioni hanno x + 2y = 3, 2x + 4y = 6? E x + 2y = 3, 2x + 4y = 7?

1. $R_2 - 2R_1$ dà 0 = 0 nel primo sistema: un pivot, una variabile libera.
2. Nel secondo, $R_2 - 2R_1$ dà 0 = 1.

Risposta: Infinite; nessuna.

Esercizi

Svolgi ciascuno prima su carta, poi controlla.

1. Risolvi x + y = 5, x − y = 1.

   Sommando si ottiene 2x = 6: x = 3, y = 2.

2. Un segnale di tipo GPS impiega 0.00505783 s ad arrivare. Quanta strada ha percorso a 299792458 m/s?

   d = ct = 1516299 m, circa 1516 km.

3. Trova la forma a scala ridotta di [[1, 2, 3], [2, 5, 8]] (aumentata).

   $R_2 - 2R_1 = [0, 1, 2]$; $R_1 - 2R_2 = [1, 0, -1]$: $x = -1$, $y = 2$.

4. Un sistema 3 × 5 ha 3 pivot. Quante variabili libere ci sono?

   5 − 3 = 2.

Errori concettuali comuni

Mito: Moltiplicare una riga per 0 è un'operazione di riga lecita.
In realtà: Distrugge informazione; il moltiplicatore deve essere non nullo.

Mito: Un sistema con più incognite che equazioni non ha soluzione.
In realtà: Se compatibile ne ha infinite; può anche essere incompatibile.

Mito: Una riga nulla significa nessuna soluzione.
In realtà: Solo una riga 0 = c con c ≠ 0 lo significa; 0 = 0 indica solo una variabile libera.

Flashcard

Matrice aumentata

[A | b].

Pivot

Primo elemento non nullo di una riga in forma a scala.

Variabile libera

Variabile la cui colonna non ha pivot.

RREF

Pivot uguali a 1, zeri sopra e sotto.

Incompatibile

Una riga 0 = c, c ≠ 0.

Sostituzione all'indietro

Risolvere il sistema triangolare dal basso verso l'alto.

Quiz di autoverifica

1. Una riga 0 0 0 | 5 in forma a scala significa...

una soluzione

nessuna soluzione

infinite

x = 5

nessuna soluzione. 0 = 5 è impossibile.

2. Quale NON è un'operazione di riga?

scambiare due righe

sommare a una riga un multiplo di un'altra

moltiplicare una riga per 3

elevare una riga al quadrato

elevare una riga al quadrato. Elevare al quadrato non è lineare.

3. Una colonna senza pivot dà...

una variabile libera

nessuna soluzione

solo un determinante nullo

una soluzione unica

una variabile libera. La sua variabile si può scegliere liberamente.

4. Nella vista per colonne, Ax = b chiede se b è...

ortogonale ad A

una combinazione delle colonne di A

una riga di A

un autovettore

una combinazione delle colonne di A. $Ax = x_1a_1 + x_2a_2 + \ldots$

Rifai questo quiz

Come questo aiuta a salvare il pianeta

Il GPS è una macchina di algebra lineare. GPS.gov riferisce che almeno 24 satelliti operativi sono disponibili il 95% del tempo e che 31 satelliti operativi sono in volo da più di un decennio, a circa 20200 km di quota, e ognuno compie due giri della Terra al giorno. Sono disposti su sei piani orbitali equidistanti così che gli utenti vedano almeno quattro satelliti da praticamente qualsiasi punto del pianeta.

L'attività di trilaterazione di GPS.gov spiega l'idea: distanza = velocità × tempo, con la velocità pari a quella della luce, 299792458 m/s, e le distanze da almeno 3 satelliti fissano una posizione 3D. Anche l'orologio di un ricevitore reale è incognito, quindi nel modello standard dei manuali le incognite sono x, y, z e lo scarto dell'orologio, quattro incognite che richiedono quattro satelliti; sottraendo le equazioni di distanza, come nell'esempio svolto, si ottiene un sistema lineare. Un errore d'orologio di un solo microsecondo sposterebbe una distanza di 299.8 m. Posizioni precise guidano trattori che spargono meno fertilizzante, navi su rotte efficienti e le stazioni di rilievo che misurano livello del mare e ghiaccio.

Su Saving Planets: Osservazione della Terra · Spazio

Fonti: GPS.gov: Space segment (https://www.gps.gov/space-segment) · GPS.gov: Trilateration (NOAA classroom activity) (https://www.gps.gov/trilateration)

Risorse di apprendimento gratuite

- Interactive Linear Algebra, 1.1 Systems of linear equations (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/systems-of-eqns.html): Sezione di testo gratuito.
- Interactive Linear Algebra, 1.2 Row reduction (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/row-reduction.html): Forme a scala passo dopo passo.
- MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra (Strang, Spring 2010) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/): Lezione 2: eliminazione con le matrici.
- Jim Hefferon, Linear Algebra (free text) (https://hefferon.net/linearalgebra/): Capitolo uno: sistemi lineari.

Guarda la lezione

Lecture 1: The geometry of linear equations (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/resources/lecture-1-the-geometry-of-linear-equations/) (in inglese)

MIT 18.06 Linear Algebra (Spring 2010), MIT OpenCourseWare. Licenza: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Condizioni d’uso (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Link fornito solo per lo studio gratuito; Saving Planets non è affiliato a questa università né approvato da essa.

- [ ] **Ho finito questa unità**

Algebra delle matrici: moltiplicazione, inverse e fattorizzazione LU

Prodotti matrice–vettore e matrice–matrice, le regole (e le non-regole) dell'algebra delle matrici, trasposte, matrici di eliminazione, l'inversa e Gauss–Jordan, la formula dell'inversa 2 × 2, A = LU e il costo dell'eliminazione.

Obiettivi di apprendimento

Alla fine di questa unità saprai:

- Moltiplicare matrici controllando che le dimensioni combacino.
- Trovare inverse con la formula 2 × 2 e con Gauss–Jordan.
- Fattorizzare A = LU e usarla per risolvere sistemi.
- Stimare il costo dell'eliminazione al crescere di n.

Concetti chiave

- $(AB)_{ij}$ = prodotto scalare della riga i di A con la colonna j di B. Una matrice m × n per una n × p è m × p. In generale AB ≠ BA.
- L'inversa A^{-1} soddisfa $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Esiste esattamente quando A ha n pivot (det A ≠ 0). $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ e $(AB)^T = B^TA^T$.
- Gauss–Jordan: ridurre per righe [A | I] a [I | A^{-1}].
- L'eliminazione senza scambi di righe registra i moltiplicatori in una L triangolare inferiore con uni sulla diagonale, ottenendo A = LU. Risolvi Lc = b, poi Ux = c; con L e U salvate, ogni nuovo termine noto costa poco.
- L'eliminazione su una matrice n × n costa circa $n^3/3$ operazioni di moltiplicazione–somma; risolvere con L e U salvate costa circa n^2 per termine noto.

Equazioni chiave

$$(AB)_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$$

```
(AB)_ij=_k a_ikb_kj
```

Prodotto di matrici

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

```
&b\\&d^-1=(1)/(ad-bc)&-b\\-c&a
```

Inversa 2 × 2

$$A = LU$$

A=LU

Fattorizzazione LU

$$\text{cost} \approx n^3/3$$

Numero di operazioni dell'eliminazione

Esempi svolti passo passo

Esempio 3.1 Trova AB e BA per A = [[1, 2], [3, 4]] e B = [[0, 1], [1, 0]].

1. AB: riga 1 · colonne = (2, 1); riga 2 = (4, 3).
2. BA scambia le righe di A: [[3, 4], [1, 2]].

Risposta: AB = [[2, 1], [4, 3]], BA = [[3, 4], [1, 2]], quindi AB ≠ BA.

Esempio 3.2 Inverti A = [[4, 7], [2, 6]].

1. ad − bc = 24 − 14 = 10.
2. A^{-1} = (1/10)[[6, −7], [−2, 4]].

Risposta: A^{-1} = [[0.6, −0.7], [−0.2, 0.4]].

Esempio 3.3 Fattorizza A = [[2, 1], [6, 8]] come LU.

1. Moltiplicatore ℓ_{21} = 6/2 = 3.
2. $R_2 - 3R_1$ = [0, 5].

Risposta: L = [[1, 0], [3, 1]], U = [[2, 1], [0, 5]].

Esercizi

Svolgi ciascuno prima su carta, poi controlla.

1. Che dimensione ha una matrice 3 × 2 per una 2 × 4?

   3 × 4.

2. Inverti [[2, 1], [5, 3]].

   det = 1, inversa [[3, −1], [−5, 2]].

3. Circa quante operazioni richiede l'eliminazione per n = 1000?

   $n^3/3 \approx 3.33 \times 10^8$.

4. Se A e B sono invertibili, quanto vale $(AB)^{-1}$?

   $B^{-1}A^{-1}$.

Errori concettuali comuni

Mito: AB = BA.

In realtà: Il prodotto di matrici di solito non è commutativo.

Mito: $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

In realtà: L'ordine si inverte: $B^{-1}A^{-1}$.

Mito: I computer risolvono Ax = b calcolando A^{-1}.

In realtà: Fattorizzano A = LU (o simili); formare A^{-1} è più lento e meno accurato.

Flashcard

Identità

$AI = IA = A$.

Inversa

$AA^{-1} = I$.

Inversa 2 × 2

Scambia a e d; cambia segno a b e c; dividi per ad − bc.

Regola della trasposta

$(AB)^T = B^T A^T$.

LU

A = LU dall'eliminazione.

Costo

Circa $n^3/3$ per l'eliminazione.

Quiz di autoverifica

1. Una matrice 2 × 3 per una 3 × 5 è...

2 × 5

3 × 3

5 × 2

non definito

2 × 5. Dimensioni esterne.

2. Una matrice è invertibile esattamente quando ha...

nessuno zero

n pivot

una riga nulla

elementi uguali

n pivot. Un insieme completo di pivot.

3. Raddoppiare n moltiplica il costo dell'eliminazione per circa...

2

4

8

16

8. n^3 cresce di $2^3 = 8$ volte.

4. L in A = LU contiene...

i pivot

i moltiplicatori

l'inversa

gli autovalori

i moltiplicatori. Moltiplicatori sotto la diagonale, uni sulla diagonale.

Rifai questo quiz

Come questo aiuta a salvare il pianeta

Le previsioni meteo e climatiche sono, in sostanza, enormi calcoli di algebra lineare ripetuti molte volte al giorno. La NOAA ha comunicato nell'agosto 2023 che i suoi due supercomputer operativi gemelli, Dogwood a Manassas, in Virginia, e Cactus a Phoenix, in Arizona, sono stati potenziati del 20% fino a 14.5 petaflops ciascuno, così che insieme il sistema di previsione può eseguire 29 milioni di miliardi di calcoli al secondo, e che con i supercomputer di ricerca la capacità totale è di 49 petaflops.

La regola $n^3/3$ mostra perché la velocità conta. Come esempio, un sistema denso con n = 100000 incognite richiede circa 3.33×10^{14} operazioni; a 14.5×10^{15} operazioni al secondo sostenute sono circa 0.023 s, ma raddoppiare n moltiplica il lavoro per 8. I modelli reali usano matrici sparse e risolutori ingegnosi, ma è proprio questa crescita cubica che, secondo la NOAA, la potenza extra servirà a coprire: modelli a risoluzione più alta che migliorano previsioni e allerte.

Su Saving Planets: Introduzione alla programmazione · Soluzioni

Fonti: NOAA: NOAA completes upgrade to weather and climate supercomputer system (Aug. 10, 2023) (https://www.noaa.gov/news-release/noaa-completes-upgrade-to-weather-and-climate-supercomputer-system) · MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra (Strang, Spring 2010) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/)

Risorse di apprendimento gratuite

- Interactive Linear Algebra, 3.4 Matrix multiplication (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/matrix-multiplication.html): Sezione di testo gratuito.
- Interactive Linear Algebra, 3.5 Matrix inverses (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/matrix-inverses.html): Inverse e Gauss–Jordan.
- MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra (Strang, Spring 2010) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/): Lezioni 3–4: moltiplicazione, inverse e A = LU.
- MIT OpenCourseWare 18.06SC Linear Algebra (self-paced, Fall 2011) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06sc-linear-algebra-fall-2011/): Video di esercitazione su LU.

Guarda la lezione

Lecture 3: Multiplication and inverse matrices (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/resources/lecture-3-multiplication-and-inverse-matrices/) (in inglese)

MIT 18.06 Linear Algebra (Spring 2010), MIT OpenCourseWare. Licenza: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Condizioni d'uso (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Link fornito solo per lo studio gratuito; Saving Planets non è affiliato a questa università né approvato da essa.

- [ ] **Ho finito questa unità**

Modelli lineari: economia input–output (Leontief), reti e bilanciamento

Costruire modelli lineari da sistemi reali: il modello input–output di Leontief x = Ax + d e la sua soluzione x = (I − A)⁻¹d, modelli estesi all'ambiente che trasformano la spesa in emissioni, flussi su reti e bilanciamento delle equazioni chimiche.

Obiettivi di apprendimento

Alla fine di questa unità saprai:

- Impostare e risolvere un modello input–output di Leontief.
- Interpretare gli elementi di (I − A)⁻¹.
- Estendere un modello input–output con intensità di emissione per trovare un'impronta.
- Scrivere problemi di bilancio dei flussi e di bilancio chimico come sistemi lineari.

Concetti chiave

- In un modello input–output, la colonna j della matrice dei consumi A elenca ciò che il settore j acquista da ciascun settore per produrre un dollaro di output.
- L'output totale x deve coprire ciò che usano le industrie (Ax) più la domanda finale d: x = Ax + d, quindi (I − A)x = d e x = (I − A)⁻¹d.
- L'elemento (i, j) dell'inversa di Leontief (I − A)⁻¹ è l'output totale del settore i necessario, direttamente e attraverso tutte le filiere, per un dollaro di domanda finale rivolta al settore j.
- I modelli estesi all'ambiente moltiplicano l'output per una riga di intensità di emissione e (per esempio kg CO_2 per dollaro): impronta = e·x.
- Anche le leggi di conservazione danno equazioni lineari: il flusso entrante è uguale a quello uscente in ogni nodo di una rete, e gli atomi di ciascun elemento si bilanciano in una reazione chimica.

Equazioni chiave

$$\mathbf{x} = A\mathbf{x} + \mathbf{d}$$

Bilancio input–output

$$\mathbf{x} = (I - A)^{-1}\mathbf{d}$$

```
=(I-A)^-1
```

Soluzione di Leontief

$$\text{footprint} = \mathbf{e} \cdot \mathbf{x}$$

`footprint=·`

Modello esteso all’ambiente

$$\sum \text{in} = \sum \text{out}$$

`in= out`

Bilancio dei flussi in un nodo

Esempi svolti passo passo

Esempio 4.1 Un’economia a due settori ha A = [[0.2, 0.3], [0.1, 0.4]] e domanda finale d = (100, 50) (valori di esempio, milioni di $). Trova l’output totale.

1. I − A = [[0.8, −0.3], [−0.1, 0.6]], det = 0.48 − 0.03 = 0.45.
2. $(I - A)^{-1}$ = (1/0.45)[[0.6, 0.3], [0.1, 0.8]].
3. x = (1/0.45)(60 + 15, 10 + 40).

Risposta: x = (166.7, 111.1) milioni di $.

Esempio 4.2 Con intensità di emissione di esempio e = (0.5, 2.0) kg CO_2 per dollaro, trova l’impronta di quella domanda finale.

1. impronta = 0.5 × 166.7 + 2.0 × 111.1 (in kg per $ × milioni di $).

Risposta: 305.6 milioni di kg = 305.6 kt CO_2 (esempio).

Esempio 4.3 Bilancia x CH_4 + y O_2 → z CO_2 + w H_2O.

1. C: x = z. H: 4x = 2w. O: 2y = 2z + w.
2. Poni x = 1: z = 1, w = 2, y = 2.

Risposta: CH_4 + 2 O_2 → CO_2 + 2 H_2O.

Esercizi

Svolgi ciascuno prima su carta, poi controlla.

1. Nel modello svolto, quanto output del settore 1 richiede in totale 1 $ di domanda finale per il settore 2?

Elemento (1, 2) di $(I - A)^{-1} = 0.3/0.45 = 0.667$.

2. Un'economia a un solo settore usa 0.25 del proprio output. Quale output totale soddisfa una domanda di 300?

   $x = 300/(1 - 0.25) = 400$.

3. Un nodo ha flussi entranti 40 e 25 e un flusso uscente f_1 più un flusso uscente di 30. Trova f_1.

   $f_1 = 65 - 30 = 35$.

4. Bilancia $H_2 + O_2 \rightarrow H_2O$.

   $2\ H_2 + O_2 \rightarrow 2\ H_2O$.

Errori concettuali comuni

Mito: L'output totale è uguale alla domanda finale.

In realtà: Le industrie consumano anche l'output l'una dell'altra, quindi x è maggiore di d.

Mito: L'impronta deriva solo dal settore da cui si acquista.

In realtà: L'inversa di Leontief somma tutti i fornitori a monte.

Mito: Qualsiasi A dà un'economia sensata.

In realtà: Le somme delle colonne devono essere minori di 1 perché $(I - A)^{-1}$ abbia elementi non negativi.

Flashcard

Matrice dei consumi

Input per dollaro di output.

Modello di Leontief

$x = Ax + d$.

Inversa di Leontief

$(I - A)^{-1}$, fabbisogni totali.

Modello esteso

impronta = $e \cdot x$.

Bilancio dei flussi

Entrata = uscita in ogni nodo.

Sistema omogeneo

$Ax = 0$.

Quiz di autoverifica

1. La soluzione di Leontief è...

$x = Ad$

$x = (I - A)^{-1}d$

$x = A^{-1}d$

$x = d - A$

$x = (I - A)^{-1}d$. Da $x = Ax + d$.

2. La colonna j di A descrive...

ciò che vende il settore j

ciò che acquista il settore j per dollaro di output

la domanda finale

le emissioni

ciò che acquista il settore j per dollaro di output. Input per unità di output.

3. In un modello esteso, un'impronta è...

$e \cdot x$

$e + x$

$\det A$

x/e

$e \cdot x$. Intensità per output, sommata.

4. Bilanciare un'equazione chimica è un...

problema non lineare

sistema lineare omogeneo

determinante

problema agli autovalori

sistema lineare omogeneo. Il conteggio degli atomi dà Ax = 0.

Rifai questo quiz

Come questo aiuta a salvare il pianeta

L'EPA statunitense usa proprio questo modello per tracciare l'inquinamento attraverso l'economia. Secondo l'EPA, i suoi modelli USEEIO combinano dati sulle transazioni economiche tra 389 settori industriali con dati ambientali su quei settori, che coprono uso di suolo, acqua, energia e minerali, inquinamento atmosferico, nutrienti e sostanze tossiche, per valutare gli impatti di beni e servizi. L'EPA li descrive come utili per il calcolo dell'impronta di carbonio, e supportano il suo lavoro di gestione sostenibile dei materiali.

Una matrice dei consumi a 389 settori ha $389^2 = 151321$ elementi, troppi per il calcolo a mano ma facili per i metodi di eliminazione e LU dell'unità 3. L'inversa di Leontief è ciò che permette a una città, un'azienda o una famiglia di vedere le emissioni nascoste nelle sue filiere, non solo ai cancelli della fabbrica.

Su Saving Planets: Soluzioni · Chimica Generale I

Fonti: U.S. EPA: US Environmentally-Extended Input-Output (USEEIO) models (https://www.epa.gov/land-research/us-environmentally-extended-input-output-useeio-models) · Interactive Linear Algebra, 1.1 Systems of linear equations (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/systems-of-eqns.html)

Risorse di apprendimento gratuite

- U.S. EPA: US Environmentally-Extended Input-Output (USEEIO) models (https://www.epa.gov/land-research/us-environmentally-extended-input-output-useeio-models): I modelli input–output estesi all'ambiente dell'EPA.
- Jim Hefferon, Linear Algebra (free text) (https://hefferon.net/linearalgebra/): Argomento: analisi input–output di Leontief.
- MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra (Strang, Spring 2010) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/): Lezioni ed esercizi sulle applicazioni.
- Interactive Linear Algebra, 1.2 Row reduction (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/row-reduction.html): Risolvere i sistemi.

☐ **Ho finito questa unità**

Spazi vettoriali, sottospazi, indipendenza, base, rango e i quattro sottospazi fondamentali

Spazi vettoriali e sottospazi, spazio delle colonne e nucleo, risoluzione completa di Ax = 0 e Ax = b, indipendenza lineare, base e dimensione, rango, teorema del rango e i quattro sottospazi fondamentali di Strang.

Obiettivi di apprendimento

Alla fine di questa unità saprai:

- Verificare se un insieme è un sottospazio.
- Trovare basi per lo spazio delle colonne e il nucleo di una matrice.
- Verificare l'indipendenza lineare di vettori.
- Usare il teorema del rango e le dimensioni dei quattro sottospazi fondamentali.

Concetti chiave

- Un sottospazio contiene il vettore nullo ed è chiuso rispetto alla somma e alla moltiplicazione per scalari. Rette e piani passanti per l'origine sono sottospazi; quelli che non passano per l'origine no.
- Spazio delle colonne C(A): tutti gli Ax, l'insieme dei b per cui Ax = b è risolubile. Nucleo N(A): tutti gli x con Ax = 0.
- I vettori sono linearmente indipendenti se l'unica combinazione che dà zero è quella con tutti i coefficienti nulli. Una base è un insieme generatore indipendente; ogni base di uno spazio ha lo stesso numero di vettori, la sua dimensione.
- Rango r = numero di pivot = dim C(A). Teorema del rango: r + dim N(A) = n, il numero di colonne.
- Quattro sottospazi fondamentali di una matrice m × n di rango r: C(A) (dim r) e N(A^T) (dim m − r) in $\mathbb{R}^m$; C(A^T) (dim r) e N(A) (dim n − r) in $\mathbb{R}^n$. N(A) è ortogonale allo spazio delle righe.

Equazioni chiave

$$C(A) = \{A\mathbf{x}\},\ \ N(A) = \{\mathbf{x} : A\mathbf{x} = 0\}$$

`C(A)=\,\ \ N(A)=\:A=0\`

Spazio delle colonne e nucleo

$$r + \dim N(A) = n$$

`r+ N(A)=n`

Teorema del rango

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_n$$

Soluzione completa di Ax = b

$$\dim N(A^T) = m - r$$

`N(A^T)=m-r`

Nucleo sinistro

Esempi svolti passo passo

Esempio 5.1 Trova il rango e una base del nucleo di A = [[1, 2, 3], [2, 4, 6], [1, 0, 1]].

1. $R_2 - 2R_1 = 0$; $R_3 - R_1 = [0, -2, -2]$. Due pivot, quindi r = 2.
2. Ax = 0: x + z = 0 e −2y − 2z = 0, con z libera.
3. Prendi z = 1: x = −1, y = −1.

Risposta: r = 2, N(A) generato da (−1, −1, 1); dim N(A) = 3 − 2 = 1.

Esempio 5.2 (1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9) sono indipendenti?

1. Riduci per righe la matrice con queste colonne: $R_2 - 2R_1$ e $R_3 - 3R_1$ danno le righe [0, −3, −6] e [0, −6, −12], che sono multiple.
2. Solo due pivot.

Risposta: No: (7, 8, 9) = 2(4, 5, 6) − (1, 2, 3).

Esempio 5.3 Una matrice 5 × 8 ha rango 3. Indica le dimensioni dei suoi quattro sottospazi fondamentali.

1. C(A) e $C(A^T)$: r = 3.
2. N(A): n − r = 8 − 3; $N(A^T)$: m − r = 5 − 3.

Risposta: 3, 3, 5 e 2.

Esercizi

Svolgi ciascuno prima su carta, poi controlla.

1. La retta $y = 2x + 1$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$?

   No: non contiene (0, 0).

2. Una matrice 4×4 ha un nucleo di dimensione 2. Qual è il suo rango?

   $4 - 2 = 2$.

3. Qual è la dimensione dello spazio delle matrici 2×2?

   4.

4. 4 vettori in $\mathbb{R}^3$ possono essere indipendenti?

   No: al massimo 3.

Errori concettuali comuni

Mito: Ogni piano in $\mathbb{R}^3$ è un sottospazio.
In realtà: Solo i piani passanti per l'origine.

Mito: Il rango conta gli elementi non nulli.
In realtà: Conta i pivot (colonne indipendenti).

Mito: Il nucleo vive nello stesso spazio di b.
In realtà: N(A) sta in $\mathbb{R}^n$ (lato x); b sta in $\mathbb{R}^m$.

Flashcard

Sottospazio

Contiene 0; chiuso rispetto a + e alla moltiplicazione per scalari.

Spazio delle colonne

All Ax.

Nucleo

Tutti gli x con Ax = 0.

Base

Insieme generatore indipendente.

Rango

Numero di pivot.

Teorema del rango

r + dim N(A) = n.

Quiz di autoverifica

1. Il teorema del rango dice che r + dim N(A) è uguale al...

m

n

m + n

r

n. Numero di colonne.

2. Ax = b è risolubile esattamente quando b sta in...

N(A)

C(A)

$N(A^T)$

$C(A^T)$

C(A). b deve essere una combinazione delle colonne.

3. Il nucleo è ortogonale...

allo spazio delle colonne

lo spazio delle righe

b

il nucleo sinistro

lo spazio delle righe. Ogni riga per x dà 0.

4. Quanti vettori ha una base di $\mathbb{R}^3$?

2

3

4

un numero qualsiasi

3. Dimensione 3.

Rifai questo quiz

Come questo aiuta a salvare il pianeta

La dimensione conta le incognite, e previsioni migliori ne richiedono di più. La NOAA ha detto che il potenziamento dei supercomputer del 2023 avrebbe permesso al Global Forecast System statunitense di migliorare la risoluzione orizzontale da 13 km a 9 km, aiutando a vedere e simulare fenomeni a scala più piccola.

Una griglia con passo h ha circa $(1/h)^2$ colonne per unità di area, quindi passare da 13 km a 9 km moltiplica il numero di colonne della griglia per $(13/9)^2 = 2.09$. Ognuna di queste colonne porta temperatura, vento, umidità e pressione a molti livelli, così il vettore di stato di una previsione vive in uno spazio di dimensione enormemente maggiore, e le matrici che lo aggiornano crescono di conseguenza.

Su Saving Planets: Analisi III · Equazioni differenziali

Fonti: NOAA: NOAA completes upgrade to weather and climate supercomputer system (Aug. 10, 2023) (https://www.noaa.gov/news-release/noaa-completes-upgrade-to-weather-and-climate-supercomputer-system) · Interactive Linear Algebra, 2.7 Basis and dimension (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/dimension.html)

Risorse di apprendimento gratuite

- Interactive Linear Algebra, 2.6 Subspaces (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/subspaces.html): Sezione di testo gratuito.
- Interactive Linear Algebra, 2.5 Linear independence (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/linear-independence.html): Test di indipendenza.
- Interactive Linear Algebra, 2.9 The rank theorem (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/rank-thm.html): Rango e nullità.
- MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra (Strang, Spring 2010) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/): Lezioni 5–10: spazi, rango e i quattro sottospazi.

Guarda la lezione

Lecture 10: The four fundamental subspaces (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/resources/lecture-10-the-four-fundamental-subspaces/) (in inglese)

MIT 18.06 Linear Algebra (Spring 2010), MIT OpenCourseWare. Licenza: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Condizioni d'uso (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Link fornito solo per lo studio gratuito; Saving Planets non è affiliato a questa università né approvato da essa.

- [ ] **Ho finito questa unità**

Ortogonalità, proiezioni, minimi quadrati e Gram–Schmidt

Vettori e sottospazi ortogonali, proiezione su una retta e su un sottospazio, le equazioni normali $A^TA\hat{x} = A^Tb$, adattamento di rette e curve ai dati con i minimi quadrati, basi ortonormali, Gram–Schmidt e $A = QR$.

Obiettivi di apprendimento

Alla fine di questa unità saprai:

- Proiettare un vettore su una retta e su uno spazio delle colonne.
- Adattare una retta ai dati con le equazioni normali.
- Costruire una base ortonormale con Gram–Schmidt.
- Spiegare perché i minimi quadrati sono una proiezione.

Concetti chiave

- La proiezione di b sulla retta per a è $p = (a\cdot b/a\cdot a)\,a$; l'errore $e = b - p$ è ortogonale ad a.
- Quando $Ax = b$ non ha soluzione (più equazioni che incognite, dati rumorosi), si sceglie $\hat{x}$ in modo che $\|b - A\hat{x}\|$ sia il più piccolo possibile. L'errore deve essere ortogonale a C(A), il che dà le equazioni normali $A^TA\hat{x} = A^Tb$.
- Per una retta $y = C + Dt$ per i punti (t_i, y_i), le colonne di A sono una colonna di uni e i valori t_i.
- I vettori ortonormali q_i soddisfano $q_i\cdot q_j = 0$ $(i \neq j)$ e $\|q_i\| = 1$. Se Q ha colonne ortonormali, $Q^TQ = I$ e le proiezioni diventano $p = QQ^Tb$.
- Gram–Schmidt sottrae a ogni nuovo vettore le sue proiezioni sui precedenti, poi normalizza. Il risultato è $A = QR$ con R triangolare superiore.

Equazioni chiave

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\,\mathbf{a}$$

Proiezione su una retta

$$A^TA\hat{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b}$$

`A^TA=A^T`

Equazioni normali

$$P = A(A^TA)^{-1}A^T$$

`P=A(A^TA)^-1A^T`

Matrice di proiezione

$$A = QR$$

A=QR

Fattorizzazione di Gram–Schmidt

Esempi svolti passo passo

Esempio 6.1 Proietta b = (2, 3) su a = (1, 1).

1. a·b = 5, a·a = 2.
2. p = 2.5(1, 1); e = b − p = (−0.5, 0.5), ed e·a = 0.

Risposta: p = (2.5, 2.5).

Esempio 6.2 Adatta y = C + Dt a (0, 1), (1, 2), (2, 4) con i minimi quadrati.

1. A ha righe (1, 0), (1, 1), (1, 2); A^TA = [[3, 3], [3, 5]], A^Tb = (7, 10).
2. det = 6; C = (5 × 7 − 3 × 10)/6, D = (3 × 10 − 3 × 7)/6.

Risposta: C = 0.833, D = 1.5: y = 0.833 + 1.5t.

Esempio 6.3 Applica Gram–Schmidt a a_1 = (1, 1, 0), a_2 = (1, 0, 1).

1. q_1 = (1, 1, 0)/√2.
2. $a_2 - (a_2 \cdot q_1)q_1$ = (1, 0, 1) − ½(1, 1, 0) = (0.5, −0.5, 1), di lunghezza √1.5 = 1.225.

Risposta: q_1 = (0.707, 0.707, 0), q_2 = (0.408, −0.408, 0.816).

Esercizi

Svolgi ciascuno prima su carta, poi controlla.

1. Proietta (3, 4) su (1, 0).

   (3, 0).

2. Scrivi le equazioni normali per adattare y = Dt (senza intercetta) a (1, 2), (2, 3).

   Σt² D = Σty: 5D = 8, D = 1.6.

3. Q = [[0, 1], [1, 0]] è ortogonale?

Sì: $Q^TQ = I$.

4. Se b è già in C(A), qual è l'errore ai minimi quadrati?

   Zero: $p = b$.

Errori concettuali comuni

Mito: I minimi quadrati risolvono $Ax = b$ esattamente.

In realtà: Trovano l'$A\hat{x}$ più vicino quando non esiste una soluzione esatta.

Mito: Qualsiasi base rende facili le proiezioni.

In realtà: Le basi ortonormali sì; altrimenti serve $(A^TA)^{-1}$.

Mito: Un adattamento rettilineo significa che i dati sono lineari.

In realtà: Controlla i residui; una curva può adattarsi meglio (aggiungi una colonna t^2).

Flashcard

Proiezione su una retta

$p = (a \cdot b / a \cdot a)a$.

Equazioni normali

$A^TA\hat{x} = A^Tb$.

Matrice di proiezione

$P = A(A^TA)^{-1}A^T$.

Ortonormale

$q_i \cdot q_j = 0$, $\|q_i\| = 1$.

Gram–Schmidt

Sottrarre le proiezioni, normalizzare.

QR

$A = QR$.

Quiz di autoverifica

1. Le equazioni normali sono...

$Ax = b$

$A^TA\hat{x} = A^Tb$

$AA^Tx = b$

$A^Tx = b$

$A^TA\hat{x} = A^Tb$. Errore ortogonale a C(A).

2. Il vettore errore dei minimi quadrati è ortogonale...

b

allo spazio delle colonne

al nucleo

$\hat{x}$

allo spazio delle colonne. È questo che lo rende il più corto.

3. Per Q con colonne ortonormali, Q^TQ =...

0

Q

I

QQ^T

I. Prodotti scalari 0 o 1.

4. Gram–Schmidt produce...

A = LU

A = QR

$A = PDP^{-1}$

$A = U\Sigma V^T$

A = QR. Q ortonormale, R triangolare.

Rifai questo quiz

Come questo aiuta a salvare il pianeta

L'innalzamento del livello del mare si misura adattando curve a dati satellitari rumorosi. La NASA riferisce che gli altimetri satellitari, TOPEX/Poseidon, Jason-1, -2 e -3 e ora Sentinel-6 Michael Freilich, seguono il livello medio globale del mare dal 1993, che da allora è salito di 114.4 mm, e che il ritmo di crescita è passato da 0.08 pollici l'anno (0.20 cm l'anno) nel 1993 a 0.17 pollici l'anno (0.44 cm l'anno) oggi, circa 2.2 volte più veloce.

Un adattamento rettilineo ai minimi quadrati dà un ritmo medio; aggiungere una colonna t^2 ad A adatta una curva la cui pendenza variabile misura l'accelerazione descritta dalla NASA. Il Laboratorio D adatta dati di esempio con l'andamento della serie NASA usando esattamente le equazioni normali di questa unità.

Su Saving Planets: Oceani · Osservazione della Terra

Fonti: NASA: Global mean sea level (Vital Signs) (https://sealevel.nasa.gov/vital-signs/global-mean-sea-level/) · Interactive Linear Algebra, 6.5 The method of least squares (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/least-squares.html)

Risorse di apprendimento gratuite

- Interactive Linear Algebra, 6.3 Orthogonal projection (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/projections.html): Sezione di testo gratuito.
- Interactive Linear Algebra, 6.5 The method of least squares (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/least-squares.html): I minimi quadrati per immagini.
- Interactive Linear Algebra, 6.4 Orthogonal sets (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/orthogonal-sets.html): Gram–Schmidt.
- MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra (Strang, Spring 2010) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/): Lezioni 14–17: ortogonalità, proiezioni, minimi quadrati, Gram–Schmidt.

Guarda la lezione

Lecture 16: Projection matrices and least squares (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/resources/lecture-16-projection-matrices-and-least-squares/) (in inglese)

MIT 18.06 Linear Algebra (Spring 2010), MIT OpenCourseWare. Licenza: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Condizioni d'uso (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Link fornito solo per lo studio gratuito; Saving Planets non è affiliato a questa università né approvato da essa.

☐ **Ho finito questa unità**

Determinanti: proprietà, cofattori, regola di Cramer e volume

Il determinante dalle sue proprietà, il calcolo per eliminazione e per sviluppo in cofattori, det(AB) = det A det B, il criterio di invertibilità, la regola di Cramer e il determinante come fattore di scala di area o volume di un'applicazione lineare.

Obiettivi di apprendimento

Alla fine di questa unità saprai:

- Calcolare determinanti 2 × 2 e 3 × 3 per cofattori e per eliminazione.
- Usare le proprietà dei determinanti rispetto alle operazioni sulle righe.
- Risolvere piccoli sistemi con la regola di Cramer.
- Interpretare |det A| come fattore di scala di area o volume.

Concetti chiave

- det A ≠ 0 esattamente quando A è invertibile. Il determinante di una matrice triangolare è il prodotto dei suoi elementi diagonali, quindi det A = ± (prodotto dei pivot).
- Operazioni sulle righe: uno scambio cambia il segno, moltiplicare una riga per c moltiplica det per c, e sommare a una riga un multiplo di un'altra lascia det invariato.
- det(AB) = det A · det B, det(A^T) = det A e det(A^{-1}) = 1/det A.
- Sviluppo in cofattori lungo una riga: det A = Σ $a_{ij}C_{ij}$ con $C_{ij} = (-1)^{i+j}$ per il minore. Regola di Cramer: x_i = det(B_i)/det A, dove B_i ha b nella colonna i.
- Un'applicazione lineare x ↦ Ax moltiplica le aree (2D) o i volumi (3D) per |det A|; un determinante negativo inverte anche l'orientamento.

Equazioni chiave

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

&b\&d=ad-bc

Determinante 2 × 2

$$\det(AB) = \det A \, \det B$$

(AB)= A B

Regola del prodotto

$$x_i = \frac{\det B_i}{\det A}$$

```
x_i=( B_i)/( A)
```

Regola di Cramer

$$\operatorname{area}(AS) = |\det A| \operatorname{area}(S)$$

```
area(AS)=| A| area(S)
```

Fattore di scala delle aree

Esempi svolti passo passo

Esempio 7.1 Trova det [[1, 2, 0], [0, 1, 3], [2, 0, 1]] per cofattori lungo la riga 1.

1. 1 × (1 × 1 − 3 × 0) = 1.
2. − 2 × (0 × 1 − 3 × 2) = −2 × (−6) = 12.
3. + 0 × (...) = 0.

Risposta: det = 13.

Esempio 7.2 Risolvi 2x + y = 5, x + 3y = 10 con la regola di Cramer.

1. det A = 6 − 1 = 5.
2. x = det[[5, 1], [10, 3]]/5 = (15 − 10)/5.
3. y = det[[2, 5], [1, 10]]/5 = (20 − 5)/5.

Risposta: x = 1, y = 3.

Esempio 7.3 Trova l’area del parallelogramma di lati (3, 0) e (1, 2).

1. Area = |det [[3, 1], [0, 2]]| = |6 − 0|.

Risposta: 6 unità quadrate.

Esercizi

Svolgi ciascuno prima su carta, poi controlla.

1. det [[3, 1], [2, 4]]?

   12 − 2 = 10.

2. det [[2, 0, 1], [1, 3, 2], [1, 1, 1]]?

   $2(3 - 2) - 0 + 1(1 - 3) = 0$, quindi è singolare.

3. Se det A = 4 per una A 3 × 3, quanto vale det(2A)?

   $2^3 \times 4 = 32$.

4. Se det A = 5, quanto vale $\det(A^{-1})$?

   $1/5 = 0.2$.

Errori concettuali comuni

Mito: det(A + B) = det A + det B.

In realtà: Falso in generale; solo det(AB) si separa.

Mito: det(2A) = 2 det A.

In realtà: Per n × n, $\det(2A) = 2^n \det A$.

Mito: Lo sviluppo in cofattori è il metodo veloce.

In realtà: Richiede circa n! passi; l'eliminazione circa $n^3/3$.

Flashcard

det 2 × 2

ad − bc.

Invertibilità

det A ≠ 0.

Regola del prodotto

det(AB) = det A det B.

Scambio di righe

Cambia il segno.

Regola di Cramer

$x_i = \det B_i / \det A$.

Fattore d'area

|det A|.

Quiz di autoverifica

1. Scambiare due righe moltiplica det per...

0

1

−1

2

−1. Il segno cambia.

2. det A = 0 significa che A è...

ortogonali

singolare

simmetrica

l'identità

singolare. Non invertibile.

3. Il det di una matrice triangolare è...

la traccia

il prodotto della diagonale

zero

la somma della diagonale

il prodotto della diagonale. Sviluppa lungo la diagonale.

4. Un'applicazione con det = 3 cambia le aree di un fattore...

1/3

3

9

√3

3. |det A|.

Rifai questo quiz

Come questo aiuta a salvare il pianeta

Trasformare pixel in superficie a terra è un determinante. L'USGS indica per Landsat 9 bande multispettrali a 30 m e una banda pancromatica a 15 m. L'applicazione dagli indici di pixel (i, j) alle coordinate a terra è, localmente, una matrice; per una griglia allineata da 30 m è diag(30, 30) m, con determinante 900, quindi ogni pixel copre 900 m². La griglia pancromatica da 15 m ha determinante 225 m², così quattro pixel pancromatici stanno in un pixel multispettrale.

Contare i pixel classificati come foresta e moltiplicare per questo fattore di scala è il modo in cui le serie satellitari misurano la perdita di foresta in ettari (1 ha = 10000 m², circa 11.1 pixel Landsat). Quando un'immagine viene ruotata o deformata per adattarla a una mappa, il determinante della nuova matrice mantiene corretta l'area.

Su Saving Planets: Deforestazione · Osservazione della Terra

Fonti: USGS: Landsat 9 (https://www.usgs.gov/landsat-missions/landsat-9) · Interactive Linear Algebra, 4.3 Determinants and volumes (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/determinants-volumes.html)

Risorse di apprendimento gratuite

- Interactive Linear Algebra, 4.1 Determinants: definition (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/determinants-definitions-properties.html): Sezione di testo gratuito.
- Interactive Linear Algebra, 4.3 Determinants and volumes (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/determinants-volumes.html): Significato geometrico.
- MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra (Strang, Spring 2010) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/): Lezioni 18–20: determinanti, cofattori, regola di Cramer.
- Jim Hefferon, Linear Algebra (free text) (https://hefferon.net/linearalgebra/): Capitolo quattro: determinanti.

Guarda la lezione

Lecture 20: Cramer's rule, inverse matrix, and volume (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/resources/lecture-20-cramers-rule-inverse-matrix-and-volume/) (in inglese)

MIT 18.06 Linear Algebra (Spring 2010), MIT OpenCourseWare. Licenza: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Condizioni d'uso (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Link fornito solo per lo studio gratuito; Saving Planets non è affiliato a questa università né approvato da essa.

☐ **Ho finito questa unità**

Autovalori e autovettori

Gli autovettori come direzioni che una matrice si limita ad allungare, l'equazione caratteristica det(A − λI) = 0, le verifiche con traccia e determinante, gli autovalori di matrici speciali, autovalori complessi e rotazioni, il metodo delle potenze e i modi propri delle strutture in vibrazione.

Obiettivi di apprendimento

Alla fine di questa unità saprai:

- Trovare gli autovalori da det(A − λI) = 0 e gli autovettori dal nucleo di A − λI.
- Verificare gli autovalori con traccia e determinante.
- Riconoscere autovalori reali, multipli e complessi.
- Usare il metodo delle potenze per trovare l'autovalore dominante.

Concetti chiave

- Av = λv con v ≠ 0: l'autovettore v mantiene la direzione ed è scalato dall'autovalore λ.
- Gli autovalori sono le radici di det(A − λI) = 0, un polinomio di grado n. Per ogni λ, gli autovettori riempiono il nucleo di A − λI.
- Verifiche: la somma degli autovalori è la traccia (somma della diagonale) e il loro prodotto è det A.
- Le matrici simmetriche hanno autovalori reali e autovettori ortogonali. Le matrici di rotazione hanno autovalori complessi. Le matrici triangolari mostrano gli autovalori sulla diagonale.
- Metodo delle potenze: moltiplica ripetutamente un vettore iniziale per A e riscala; si allinea con l'autovettore del |λ| più grande. Per le vibrazioni, Kv = ω²Mv dà le frequenze proprie ω e le forme modali v.

Equazioni chiave

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

Equazione agli autovalori

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

```
(A- I)=0
```

Equazione caratteristica

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = \operatorname{tr} A, \;\; \lambda_1 \cdots \lambda_n = \det A$$

```
_1+·s+_n=,\ \ _1·s_n= A
```

Verifiche con traccia e determinante

$$K\mathbf{v} = \omega^2 M\mathbf{v}$$

K=ω^2M

Modi propri di una struttura

Esempi svolti passo passo

Esempio 8.1 Trova autovalori e autovettori di A = [[2, 1], [1, 2]].

1. det(A − λI) = (2 − λ)² − 1 = λ² − 4λ + 3 = 0.
2. λ = 3: A − 3I = [[−1, 1], [1, −1]] dà v = (1, 1). λ = 1: v = (1, −1).
3. Verifica: 3 + 1 = 4 = traccia; 3 × 1 = 3 = det.

Risposta: λ = 3 con (1, 1); λ = 1 con (1, −1).

Esempio 8.2 Trova gli autovalori di [[4, 1], [2, 3]].

1. λ² − 7λ + 10 = 0 (traccia 7, det 10).
2. (λ − 5)(λ − 2) = 0.

Risposta: λ = 5 e λ = 2.

Esempio 8.3 Un edificio di esempio a due piani ha masse di piano uguali m e rigidezza di piano k, con K/m = (k/m)[[2, −1], [−1, 1]] e k/m = 100 s⁻². Trova la frequenza fondamentale.

1. Autovalori di [[2, −1], [−1, 1]]: λ = (3 ± √5)/2 = 0.382 e 2.618.
2. ω_1^2 = 100 × 0.382 = 38.2 s⁻², ω_1 = 6.18 rad/s.
3. $f_1 = \omega_1/(2\pi)$, $T_1 = 1/f_1$.

Risposta: f_1 = 0.984 Hz, periodo T_1 = 1.02 s (valori di esempio).

Esercizi

Svolgi ciascuno prima su carta, poi controlla.

1. Autovalori di [[5, 0], [0, −2]]?

   5 e −2 (diagonale).

2. Una matrice 3 × 3 ha autovalori 1, 2, 3. Trova traccia e determinante.

Traccia 6, det 6.

3. Autovalori della rotazione di 90° [[0, −1], [1, 0]]?

   $\lambda^2 + 1 = 0$: $\lambda = \pm i$.

4. Se $Av = 4v$, quanto vale A^2v?

   16v.

Errori concettuali comuni

Mito: Il vettore nullo è un autovettore.
In realtà: Gli autovettori devono essere non nulli.

Mito: La riduzione per righe conserva gli autovalori.
In realtà: Li cambia; usa $\det(A - \lambda I)$.

Mito: Ogni matrice reale ha autovalori reali.
In realtà: Le rotazioni ne danno di complessi; le matrici simmetriche sono il caso sicuro.

Flashcard

Autovettore

$Av = \lambda v$, $v \neq 0$.

Equazione caratteristica

$\det(A - \lambda I) = 0$.

Verifica con la traccia

$\Sigma\lambda$ = traccia.

Verifica con il determinante

$\Pi\lambda = \det A$.

Metodo delle potenze

La moltiplicazione ripetuta trova l’autovettore dominante.

Modi propri

$Kv = \omega^2 Mv$.

Quiz di autoverifica

1. Gli autovalori di una matrice triangolare sono...

i suoi pivot dopo gli scambi

i suoi elementi diagonali

tutti 1

le sue somme per riga

i suoi elementi diagonali. $\det(A - \lambda I)$ è un prodotto di termini diagonali.

2. La somma degli autovalori è uguale...

al determinante

la traccia

al rango

n

la traccia. Verifica con la traccia.

3. Il metodo delle potenze trova...

l'autovalore più piccolo

l'autovalore dominante

al determinante

l'inversa

l'autovalore dominante. Vince il $|\lambda|$ più grande.

4. Le matrici simmetriche hanno...

autovalori complessi

autovalori reali e autovettori ortogonali

determinante nullo

nessun autovettore

autovalori reali e autovettori ortogonali. Teorema spettrale.

Rifai questo quiz

Come questo aiuta a salvare il pianeta

Gli ingegneri sismici leggono gli edifici attraverso i loro autovalori. Uno studio USGS di Mehmet Çelebi (2022) ha usato i periodi fondamentali e le percentuali di smorzamento critico di 41 edifici alti in diversi paesi. Ha trovato una chiara tendenza lineare tra altezza dell'edificio e periodo fondamentale per edifici in acciaio e in cemento armato, pur con una grande dispersione dovuta a progetti strutturali diversi, e uno smorzamento critico nettamente inferiore al 3%, in linea con altri studi recenti sugli edifici alti.

Il periodo fondamentale è fissato dal più piccolo autovalore del problema rigidezza–massa, come nell'esempio dell'edificio a due piani. Uno smorzamento basso significa che un edificio alto può oscillare a lungo quando onde sismiche di lungo periodo coincidono con quel periodo; per questo gli edifici strumentati e i loro modi misurati guidano città più sicure e durature.

Su Saving Planets: Equazioni differenziali · Dinamica

Fonti: USGS: Preliminary study of correlation of natural periods and damping percentages of tall buildings in several countries (Çelebi, 2022) (https://www.usgs.gov/publications/preliminary-study-correlation-natural-periods-and-damping-percentages-tall-buildings) · Interactive Linear Algebra, 5.1 Eigenvalues and eigenvectors (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/eigenvectors.html)

Risorse di apprendimento gratuite

- Interactive Linear Algebra, 5.1 Eigenvalues and eigenvectors (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/eigenvectors.html): Sezione di testo gratuito.
- Interactive Linear Algebra, 5.2 The characteristic polynomial (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/characteristic-polynomial.html): Trovare gli autovalori.
- Interactive Linear Algebra, 5.5 Complex eigenvalues (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/complex-eigenvalues.html): Rotazione e scalatura.
- MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra (Strang, Spring 2010) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/): Lezione 21: autovalori e autovettori.

☐ **Ho finito questa unità**

Diagonalizzazione, potenze di matrici, catene di Markov e sistemi dinamici lineari

Diagonalizzare $A = PDP^{-1}$, calcolare rapidamente le potenze A^k, matrici simmetriche e teorema spettrale $A = Q\Lambda Q^T$, matrici di Markov (stocastiche) e stati stazionari, e il comportamento a lungo termine di $x_{k+1} = Ax_k$.

Obiettivi di apprendimento

Alla fine di questa unità saprai:

- Diagonalizzare una matrice con n autovettori indipendenti.
- Calcolare A^k e prevedere il comportamento a lungo termine di $x_{k+1} = Ax_k$.
- Trovare lo stato stazionario di una catena di Markov.
- Usare il teorema spettrale per le matrici simmetriche.

Concetti chiave

- Se A ha n autovettori indipendenti (le colonne di P), allora $A = PDP^{-1}$ con gli autovalori sulla diagonale di D, e $A^k = PD^kP^{-1}$.
- Scrivi $x_0 = c_1v_1 + \dots + c_nv_n$. Allora $x_k = A^kx_0 = c_1\lambda_1^kv_1 + \dots + c_n\lambda_n^kv_n$; il $|\lambda|$ più grande domina al crescere di k.
- Una matrice di Markov ha elementi non negativi e colonne di somma 1. Ha sempre $\lambda = 1$, e gli altri autovalori soddisfano $|\lambda| \le 1$. Lo stato stazionario è l'autovettore di $\lambda = 1$, scalato in modo che i suoi elementi sommino a 1.
- Il secondo $|\lambda|$ più grande stabilisce quanto velocemente una catena di Markov dimentica la partenza: lo scarto si riduce come $|\lambda_2|^k$.
- Teorema spettrale: una matrice simmetrica reale si può scrivere $A = Q\Lambda Q^T$ con autovettori ortonormali in Q.

Equazioni chiave

$$A = PDP^{-1},\ \ A^k = PD^kP^{-1}$$

`A=PDP^-1,\ \ A^k=PD^kP^-1`

Diagonalizzazione e potenze

$$\mathbf{x}_k = c_1\lambda_1^k\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\lambda_n^k\mathbf{v}_n$$

`_k=c_1_1^k_1+·s+c_n_n^k_n`

Soluzione di x_{k+1} = Ax_k

$$P\mathbf{q} = \mathbf{q}, \ \ \sum q_i = 1$$

`P=,\ \ q_i=1`

Stato stazionario di Markov

$$A = Q\Lambda Q^T$$

`A=Q Q^T`

Teorema spettrale

Esempi svolti passo passo

Esempio 9.1 Usa la diagonalizzazione per trovare A^{10} per A = [[2, 1], [1, 2]].

1. Dall'unità 8: λ = 3, 1 con v = (1, 1), (1, −1). P = [[1, 1], [1, −1]], P^{-1} = ½[[1, 1], [1, −1]].
2. $A^{10} = P\,\mathrm{diag}(3^{10}, 1)\,P^{-1}$; ogni elemento è $(3^{10} \pm 1)/2$.

Risposta: A^{10} = [[29525, 29524], [29524, 29525]].

Esempio 9.2 Una matrice di Markov è P = [[0.8, 0.3], [0.2, 0.7]] (valori di esempio). Trova lo stato stazionario.

1. (P − I)q = 0: $-0.2q_1 + 0.3q_2 = 0$, quindi $q_1 = 1.5q_2$.
2. $q_1 + q_2 = 1$ dà $q_2 = 0.4$.

Risposta: q = (0.6, 0.4).

Esempio 9.3 Partendo da x_0 = (1, 0), trova x_2 per la stessa P, e lo x_k generale.

1. x_1 = (0.8, 0.2); x_2 = (0.64 + 0.06, 0.16 + 0.14).
2. Gli autovalori sono 1 e 0.5 (traccia 1.5, det 0.5), quindi x_k = (0.6, 0.4) + 0.5^k(0.4, −0.4).

Risposta: x_2 = (0.70, 0.30); $x_k \to$ (0.6, 0.4).

Esercizi

Svolgi ciascuno prima su carta, poi controlla.

1. [[0.5, 0.2], [0.5, 0.8]] è una matrice di Markov?

Sì: elementi non negativi, colonne di somma 1.

2. Trova il suo stato stazionario.

   $0.5q_1 = 0.2q_2$, quindi $q = (2/7, 5/7) = (0.286, 0.714)$.

3. Se $A = PDP^{-1}$ con $D = \text{diag}(0.9, 0.5)$, che succede ad $A^k x$ per k grande?

   Decade a zero, dominato da 0.9^k.

4. [[1, 1], [0, 1]] è diagonalizzabile?

   No: $\lambda = 1$ doppio ma un solo autovettore indipendente.

Errori concettuali comuni

Mito: Ogni matrice è diagonalizzabile.
In realtà: Servono n autovettori indipendenti; [[1, 1], [0, 1]] ne ha uno solo.

Mito: Lo stato stazionario di una catena di Markov dipende dalla partenza.
In realtà: Per una catena regolare no; ogni partenza converge allo stesso q.

Mito: A^k significa elevare ogni elemento alla potenza k.
In realtà: Solo le matrici diagonali funzionano così; per questo diagonalizziamo.

Flashcard

Diagonalizzazione

$A = PDP^{-1}$.

Potenza di una matrice

$A^k = PD^kP^{-1}$.

Matrice di Markov

Non negativa, colonne di somma 1.

Stato stazionario

$Pq = q$, elementi di somma 1.

Teorema spettrale

$A = Q\Lambda Q^T$.

Matrice difettiva

Troppo pochi autovettori per diagonalizzare.

Quiz di autoverifica

1. Ogni matrice di Markov ha l'autovalore...

0

1

-1

2

1. Le colonne sommano a 1.

2. A^k per $A = PDP^{-1}$ è...

P^kDP^k

PD^kP^{-1}

D^kP

$kPDP^{-1}$

PD^kP^{-1}. I $P^{-1}P$ interni si semplificano.

3. La velocità di convergenza di una catena di Markov è fissata da...

$\lambda_1 = 1$

$|\lambda_2|$

la traccia

n

$|\lambda_2|$. Lo scarto si riduce come $|\lambda_2|^k$.

4. Le matrici simmetriche si diagonalizzano come...

LU

$Q\Lambda Q^T$

QR

solo $U\Sigma V^T$

$Q\Lambda Q^T$. Teorema spettrale.

Rifai questo quiz

Come questo aiuta a salvare il pianeta

Dove finiscono i materiali è una catena di Markov. L'EPA riferisce che nel 2018 gli Stati Uniti hanno prodotto 292.4 milioni di tonnellate di rifiuti solidi urbani, 4.9 libbre a persona al giorno. Circa 69 milioni di tonnellate sono state riciclate e 25 milioni di tonnellate compostate, un tasso combinato del 32.1%; circa 35 milioni di tonnellate (11.8%) sono state incenerite con recupero di energia; e più di 146 milioni di tonnellate (50%) sono finite in discarica.

Se le quote di ogni anno restassero fisse, un materiale uscirebbe dall'uso verso queste destinazioni con queste probabilità, e solo la quota riciclata tornerebbe nell'economia. Il Laboratorio E costruisce una matrice di transizione di esempio con una quota di recupero del 32.1% e mostra, con le potenze di matrici e l'autovettore di $\lambda = 1$, come aumentare il riciclo cambi quanto a lungo il materiale resta in uso e quanto ne arriva in discarica.

Su Saving Planets: Soluzioni

Fonti: U.S. EPA: National overview, facts and figures on materials, wastes and recycling (https://www.epa.gov/facts-and-figures-about-materials-waste-and-recycling/national-overview-facts-and-figures-materials) · Interactive Linear Algebra, 5.6 Stochastic matrices (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/stochastic-matrices.html)

Risorse di apprendimento gratuite

- Interactive Linear Algebra, 5.4 Diagonalization (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/diagonalization.html): Sezione di testo gratuito.
- Interactive Linear Algebra, 5.6 Stochastic matrices (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/stochastic-matrices.html): Catene di Markov e stati stazionari.
- MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra (Strang, Spring 2010) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/): Lezioni 22–25: diagonalizzazione, matrici di Markov, matrici simmetriche.
- MIT OpenCourseWare 18.06SC Linear Algebra (self-paced, Fall 2011) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06sc-linear-algebra-fall-2011/): Esercitazioni sulle matrici di Markov.

Guarda la lezione

Lecture 22: Diagonalization and powers of A (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/resources/lecture-22-diagonalization-and-powers-of-a/) (in inglese)

MIT 18.06 Linear Algebra (Spring 2010), MIT OpenCourseWare. Licenza: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Condizioni d'uso (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Link fornito solo per lo studio gratuito; Saving Planets non è affiliato a questa università né approvato da essa.

- [ ] **Ho finito questa unità**

La decomposizione ai valori singolari, l’analisi delle componenti principali e le matrici definite positive

Matrici definite positive e A^TA, la SVD $A = U\Sigma V^T$, valori singolari e la geometria di una matrice come rotazione–allungamento–rotazione, migliore approssimazione di rango basso e compressione di immagini, numero di condizionamento e analisi delle componenti principali dei dati.

Obiettivi di apprendimento

Alla fine di questa unità saprai:

- Verificare se una matrice simmetrica è definita positiva.
- Calcolare i valori singolari dagli autovalori di A^TA.
- Costruire un’approssimazione di rango k e misurare cosa conserva.
- Eseguire una piccola analisi delle componenti principali.

Concetti chiave

- Una matrice simmetrica è definita positiva quando $x^TAx > 0$ per ogni $x \neq 0$; equivalentemente tutti gli autovalori (o tutti i pivot) sono positivi. A^TA è sempre simmetrica e semidefinita positiva.
- Ogni matrice m × n ha una SVD $A = U\Sigma V^T$: V e U hanno colonne ortonormali, e Σ contiene i valori singolari $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq 0$, radici quadrate degli autovalori di A^TA.
- $A = \sigma_1 u_1 v_1^T + \sigma_2 u_2 v_2^T + \ldots$. Tenere i primi k termini dà la migliore approssimazione di rango k (Eckart–Young); l’errore in norma 2 è σ_{k+1}.
- Il numero di condizionamento σ_1/σ_n misura quanto gli errori su b possono essere amplificati risolvendo $Ax = b$.
- PCA: centra i dati (sottrai le medie delle colonne); allora i vettori singolari destri (autovettori della matrice di covarianza) sono le direzioni principali, e σ_i^2 misura la varianza spiegata da ciascuna.

Equazioni chiave

$$A = U\Sigma V^T$$

```
A=U V^T
```

Decomposizione ai valori singolari

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(A^TA)}$$

```
σ_i=_i(A^TA)
```

Valori singolari

$$A_k = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T$$

A_k=_i=1^kσ_i_i_i^T

Migliore approssimazione di rango k

$$\kappa = \sigma_1 / \sigma_n$$

Numero di condizionamento

Esempi svolti passo passo

Esempio 10.1 Trova i valori singolari di A = [[3, 0], [4, 5]].

1. A^TA = [[25, 20], [20, 25]], autovalori 45 e 5.
2. $\sigma_1 = \sqrt{45}$, $\sigma_2 = \sqrt{5}$. Verifica: $\sigma_1\sigma_2 = 15 = |\det A|$.

Risposta: σ_1 = 6.708, σ_2 = 2.236.

Esempio 10.2 Quale quota dell'«energia» $\Sigma\sigma^2$ di A^TA conserva l'approssimazione di rango 1 di quella A?

1. $\sigma_1^2/(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) = 45/50$.

Risposta: 90%.

Esempio 10.3 Un'immagine in scala di grigi 1000 × 1000 è memorizzata come SVD di rango 50. Quanti numeri si memorizzano, rispetto all'immagine completa?

1. Ogni termine richiede un u (1000), un v (1000) e un σ: 2001 numeri.
2. 50 × 2001 = 100050 contro 1000000.

Risposta: 100050 numeri, circa il 10.0% dell'originale.

Esercizi

Svolgi ciascuno prima su carta, poi controlla.

1. [[2, 1], [1, 2]] è definita positiva?

Sì: gli autovalori 3 e 1 sono positivi.

2. Trova il numero di condizionamento di diag(10, 0.1).

   10/0.1 = 100.

3. Dati 2D centrati hanno covarianza [[2, 1], [1, 2]]. Quale quota della varianza spiega la prima componente principale?

   Autovalori 3 e 1: 3/4 = 75%, lungo (1, 1).

4. Quali sono i valori singolari di una matrice ortogonale?

   Tutti uguali a 1.

Errori concettuali comuni

Mito: I valori singolari sono gli autovalori di A.

In realtà: Sono le radici quadrate degli autovalori di A^TA, e non sono mai negativi.

Mito: Solo le matrici quadrate hanno una SVD.

In realtà: Ogni matrice ce l'ha.

Mito: La PCA funziona sui dati grezzi.

In realtà: Centra prima i dati, e scala le variabili misurate in unità diverse.

Flashcard

SVD

$A = U\Sigma V^T$.

Valore singolare

$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}(A^TA)$.

Definita positiva

$x^TAx > 0$, tutti i $\lambda > 0$.

Eckart–Young

La SVD troncata è la migliore approssimazione di rango k.

Numero di condizionamento

σ_1/σ_n.

PCA

SVD dei dati centrati.

Quiz di autoverifica

1. I valori singolari sono...

numeri reali qualsiasi

non negativi

sempre interi

gli autovalori di A

non negativi. Radici quadrate degli autovalori di A^TA, ≥ 0.

2. La migliore approssimazione di rango k conserva...

le prime k righe

i k termini singolari più grandi

k colonne a caso

i k σ più piccoli

i k termini singolari più grandi. Eckart–Young.

3. Un numero di condizionamento grande significa...

un sistema ben condizionato

che gli errori possono essere amplificati

che A è ortogonale

che det A = 1

che gli errori possono essere amplificati. Quasi singolare.

4. Nella PCA, la prima direzione principale è...

la media

il primo vettore singolare destro dei dati centrati

al nucleo

la prima riga

il primo vettore singolare destro dei dati centrati. La direzione di massima varianza.

Rifai questo quiz

Come questo aiuta a salvare il pianeta

Lo spettrometro per immagini EMIT del JPL della NASA, sulla Stazione Spaziale Internazionale, mappa i minerali delle regioni sorgente di polvere della Terra. Il JPL dice che raccoglie più di 100000 spettri al secondo, cioè 3.6 × 10^8 spettri all'ora, e che la missione è stata prolungata almeno fino al 2026. La polvere conta per il clima: il JPL osserva che i minerali scuri assorbono la luce solare e riscaldano l'aria, mentre quelli chiari la riflettono e raffreddano.

Ogni spettro è un lungo vettore di riflettanze a molte lunghezze d'onda, e le lunghezze d'onda vicine sono fortemente correlate. La PCA e la SVD comprimono questi dati in poche componenti, separano il segnale dal rumore e isolano le firme dei singoli minerali: la stessa matematica del laboratorio di compressione delle immagini.

Su Saving Planets: Osservazione della Terra · Spazio

Fonti: NASA JPL: EMIT, Earth Surface Mineral Dust Source Investigation (https://earth.jpl.nasa.gov/emit/) · MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra (Strang, Spring 2010) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/)

Risorse di apprendimento gratuite

- MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra (Strang, Spring 2010) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/): Lezioni 27–29: matrici definite positive e SVD.
- MIT OpenCourseWare 18.06SC Linear Algebra (self-paced, Fall 2011) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06sc-linear-algebra-fall-2011/): Sessione sulla decomposizione ai valori singolari.
- Gilbert Strang, Introduction to Linear Algebra (book site) (https://math.mit.edu/~gs/linearalgebra/): Appunti di Strang sulla SVD e sui dati.
- Jim Hefferon, Linear Algebra (free text) (https://hefferon.net/linearalgebra/): Argomenti su matrici ortogonali e proiezioni.

Guarda la lezione

Lecture 25: Symmetric matrices and positive definiteness (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/resources/lecture-25-symmetric-matrices-and-positive-definiteness/) (in inglese)

MIT 18.06 Linear Algebra (Spring 2010), MIT OpenCourseWare. Licenza: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Condizioni d'uso (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Link fornito solo per lo studio gratuito; Saving Planets non è affiliato a questa università né approvato da essa.

☐ **Ho finito questa unità**

Esercizi

Questi esercizi stanno dentro ogni unità. Falli su carta, poi apri la risposta.

1. Vettori: combinazioni lineari, lunghezze e prodotti scalari
   4 esercizi
2. Sistemi di equazioni lineari ed eliminazione di Gauss
   4 esercizi
3. Algebra delle matrici: moltiplicazione, inverse e fattorizzazione LU
   4 esercizi
4. Modelli lineari: economia input–output (Leontief), reti e bilanciamento
   4 esercizi
5. Spazi vettoriali, sottospazi, indipendenza, base, rango e i quattro sottospazi fondamentali
   4 esercizi
6. Ortogonalità, proiezioni, minimi quadrati e Gram–Schmidt
   4 esercizi
7. Determinanti: proprietà, cofattori, regola di Cramer e volume
   4 esercizi
8. Autovalori e autovettori
   4 esercizi
9. Diagonalizzazione, potenze di matrici, catene di Markov e sistemi dinamici lineari
   4 esercizi
10. La decomposizione ai valori singolari, l'analisi delle componenti principali e le matrici definite positive
    4 esercizi

Il laboratorio (Computation lab)

Il laboratorio è la parte pratica del corso. Qui è gratuito e solo per esercitarsi, senza crediti.

Ogni laboratorio si svolge in un foglio di calcolo gratuito o su carta; le versioni Python sono facoltative. Fai pause regolari dallo schermo e maneggia spilli e forbici con cura.

Riferimento per la sicurezza: OSHA: Computer workstations eTool (https://www.osha.gov/etools/computer-workstations)

Laboratorio A: vettori di pixel e un indice di vegetazione

SETTIMANA 2

Obiettivo: Trattare i pixel satellitari come vettori: calcolare lunghezze, angoli tra pixel e l'NDVI, e vedere che vegetazione, suolo e acqua puntano in direzioni diverse.

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}}{\|\mathbf{p}\|\|\mathbf{q}\|}, \quad \mathrm{NDVI} = \frac{\mathrm{NIR}-\mathrm{red}}{\mathrm{NIR}+\mathrm{red}}$$

θ=·\|\|\|\|, NDVI=-redNIR+red

Angolo tra pixel e NDVI

Procedimento

1. In un foglio di calcolo, inserisci tre pixel di esempio come righe di riflettanze (verde, rosso, NIR): vegetazione (0.10, 0.08, 0.40), suolo (0.20, 0.25, 0.30), acqua (0.06, 0.04, 0.02).
2. Calcola la lunghezza di ogni pixel con SQRT(SUMSQ(...)) e il prodotto scalare di ogni coppia con SUMPRODUCT.
3. Trova l'angolo tra ogni coppia con ACOS e DEGREES.
4. Calcola l'NDVI di ogni pixel. Facoltativo: scarica una scena Landsat gratuita e ripeti con pixel reali.

Tabella dei dati

Pixel	Verde	Red	NIR	NDVI
Vegetazione	0.10	0.08	0.40	0.667
Suolo	0.20	0.25	0.30	0.091
Acqua	0.06	0.04	0.02	−0.333

Riflettanze di esempio scelte per somigliare a vegetazione, suolo nudo e acqua tipici.

Calcolo di esempio

1. NDVI vegetazione = (0.40 − 0.08)/(0.40 + 0.08) = 0.667.
2. NDVI suolo = 0.05/0.55 = 0.091; NDVI acqua = −0.02/0.06 = −0.333.
3. Angolo vegetazione–suolo: prodotto scalare = 0.160, lunghezze 0.420 e 0.4387, cos θ = 0.8683, θ = 29.7°.

> **Sicurezza**
>
> - Fai una breve pausa dallo schermo ogni mezz'ora.

Alternativa a casa o virtuale

- L’intero laboratorio si svolge in un foglio di calcolo gratuito.

PhET: Vector Addition (https://phet.colorado.edu/en/simulations/vector-addition) · USGS: Landsat 9 (https://www.usgs.gov/landsat-missions/landsat-9)

Legame con il pianeta: L’USGS indica le bande rossa (banda 4) e del vicino infrarosso (banda 5) di Landsat 9, e i suoi dati sono gratuiti, quindi chiunque può mappare la vegetazione in questo modo. USGS: Landsat 9 (https://www.usgs.gov/landsat-missions/landsat-9)

☐ **Ho completato questo laboratorio (reale o virtuale)**

Laboratorio B: trilaterazione, dai fili a un sistema lineare

SETTIMANA 3

Obiettivo: Trovare una posizione a partire dalle distanze, prima con dei fili su una mappa come nell'attività di GPS.gov, poi trasformando le equazioni delle circonferenze in un sistema lineare risolto per eliminazione.

$$2(a_2 - a_1)x + 2(b_2 - b_1)y = d_1^2 - d_2^2 + a_2^2 - a_1^2 + b_2^2 - b_1^2$$

```
2(a_2-a_1)x+2(b_2-b_1)y=d_1^2-d_2^2+a_2^2-a_1^2+b_2^2-b_1^2
```

Differenza di due equazioni di circonferenze

Procedimento

1. Stampa la mappa di trilaterazione di GPS.gov (senza ridimensionarla) o segna tre «satelliti» su carta millimetrata in (0, 0), (10, 0) e (0, 10) cm.
2. Converti i tempi di segnale in distanze con d = ct (c = 299792458 m/s); per la versione su carta usa le distanze di esempio qui sotto.
3. Traccia le circonferenze con un filo e una matita e segna dove si incrociano.
4. Sottrai a coppie le equazioni delle circonferenze per ottenere due equazioni lineari, risolvile per eliminazione in un foglio di calcolo e confronta con il tuo disegno.

Tabella dei dati

Faro	Posizione (cm)	Distanza (cm)	d²
1	(0, 0)	5.000	25
2	(10, 0)	8.062	65
3	(0, 10)	6.708	45

Distanze di esempio per un ricevitore in (3, 4) cm. L'attività di GPS.gov usa quattro satelliti su una mappa in scala 1:21283839.

Calcolo di esempio

1. Eq. 1 − Eq. 2: 20x − 100 = −40, x = 3. Eq. 1 − Eq. 3: 20y − 100 = −20, y = 4.
2. Il tempo A di GPS.gov = 0.00505783 s dà d = 1516299 m; in scala 1:21283839 sono 7.12 cm sulla mappa.

> **Sicurezza**
>
> - Maneggia puntine e forbici con cura.

Alternativa a casa o virtuale

- La versione con filo e carta è il laboratorio da fare a casa.

GPS.gov: Trilateration activity (https://www.gps.gov/trilateration) · Interactive Linear Algebra, 1.2 Row reduction (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/row-reduction.html)

Legame con il pianeta: GPS.gov ha progettato questa attività con la NOAA; i ricevitori reali risolvono lo stesso tipo di sistema, con un'incognita di orologio, molte volte al secondo. GPS.gov: Trilateration (NOAA classroom activity) (https://www.gps.gov/trilateration) · GPS.gov: Space segment (https://www.gps.gov/space-segment)

- [ ] **Ho completato questo laboratorio (reale o virtuale)**

Laboratorio C: le matrici come trasformazioni del piano

SETTIMANA 4

Obiettivo: Vedere le matrici agire sulle figure: allungare, deformare per taglio, ruotare e riflettere un quadrato su carta millimetrata, e verificare che le aree si scalano di |det A|.

$$\operatorname{area}(AS) = |\det A| \operatorname{area}(S)$$

`area(AS)=| A| area(S)`

Fattore di scala delle aree

Procedimento

1. Disegna il quadrato unitario con vertici (0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1).
2. Moltiplica ogni vertice per A = [[2, 1], [0, 1]] (un taglio e un allungamento), per R = [[0, −1], [1, 0]] (una rotazione di 90°) e per F = [[1, 0], [0, −1]] (una riflessione).
3. Disegna ogni immagine e trova la sua area contando i quadretti o con la formula di Gauss.
4. Confronta ogni area con |det| e annota quali applicazioni invertono l’orientamento (det < 0). Poi verifica det(AR) = det A det R.

Tabella dei dati

Matrice	det	Area dell’immagine	Orientamento
A = [[2, 1], [0, 1]]	2	2	conservato
R (rotazione di 90°)	1	1	conservato
F (riflessione)	−1	1	invertito
AR	2	2	conservato

Valori esatti per il quadrato unitario.

Calcolo di esempio

1. det A = 2 × 1 − 1 × 0 = 2; l’immagine è un parallelogramma di base 2 e altezza 1.
2. det(AR) = det A × det R = 2 × 1 = 2.

> **Sicurezza**
>
> - Nessuno oltre al normale lavoro alla scrivania.

Alternativa a casa o virtuale

- Bastano carta millimetrata e una matita.

Interactive Linear Algebra, 3.1 Matrix transformations (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/matrix-transformations.html) · Interactive Linear Algebra, 4.3 Determinants and volumes (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/determinants-volumes.html)

Legame con il pianeta: Le proiezioni cartografiche e la registrazione delle immagini usano queste stesse matrici; il determinante mantiene corrette le misure di area di foreste e alluvioni. USGS: Landsat 9 (https://www.usgs.gov/landsat-missions/landsat-9)

- [ ] **Ho completato questo laboratorio (reale o virtuale)**

Laboratorio D: adattamento ai minimi quadrati dei dati sul livello del mare

SETTIMANA 9

Obiettivo: Adattare una retta, e poi una parabola, ai dati sul livello del mare con le equazioni normali, e confrontare con l'adattamento integrato del foglio di calcolo.

$$A^T A\hat{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b}, \quad A = [\,\mathbf{1}\ \ \mathbf{t}\,]$$

```
A^TA=A^T, A=[ 1\ \ ]
```

Equazioni normali per y = C + Dt

Procedimento

1. Inserisci i dati di esempio qui sotto (o scarica la serie della NASA dalla sua pagina Vital Signs): t in anni dal 1993 e h in mm.
2. Costruisci A con una colonna di uni e una colonna di t. Calcola A^TA e A^Tb con MMULT e TRANSPOSE, poi $\hat{x}$ = MINVERSE(A^TA)·A^Tb.
3. Verifica con LINEST o con una linea di tendenza del grafico. Traccia i residui $b - A\hat{x}$.
4. Aggiungi una colonna t^2 e ripeti l'adattamento. Un coefficiente di t^2 positivo significa che la crescita sta accelerando.

Tabella dei dati

t (anni dal 1993)	**0**	**8**	**16**	**24**	**32**
h (mm)	0	22	48	78	114

Valori di esempio con l'andamento della serie NASA (che riporta 114.4 mm di crescita dal 1993); usa i dati reali per una risposta reale.

Calcolo di esempio

1. $\bar{t} = 16$, $\bar{h} = 52.4$; $\Sigma(t - \bar{t})(h - \bar{h}) = 2272$, $\Sigma(t - \bar{t})^2 = 640$.
2. D = 2272/640 = 3.55 mm/yr; C = 52.4 − 3.55 × 16 = −4.4 mm.
3. I residui sono positivi a entrambi gli estremi e negativi al centro: una curva si adatta meglio, come suggerisce il ritmo crescente indicato dalla NASA.

> **Sicurezza**
>
> - Fai una breve pausa dallo schermo ogni mezz'ora.

Alternativa a casa o virtuale

- L'intero laboratorio si svolge in un foglio di calcolo gratuito.

NASA: Global mean sea level (https://sealevel.nasa.gov/vital-signs/global-mean-sea-level/) · Interactive Linear Algebra, 6.5 Least squares (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/least-squares.html)

Legame con il pianeta: La NASA riferisce che il ritmo di crescita è passato da 0.20 cm l'anno nel 1993 a 0.44 cm l'anno oggi, un'accelerazione che puoi rilevare con una colonna t^2. NASA: Global mean sea level (Vital Signs) (https://sealevel.nasa.gov/vital-signs/global-mean-sea-level/)

- [ ] **Ho completato questo laboratorio (reale o virtuale)**

Laboratorio E: un modello di Markov dei materiali e del riciclo

SETTIMANA 12

Obiettivo: Costruire una matrice di transizione per il materiale in uso e quello perso in discarica o per incenerimento, usare le potenze di matrici per seguirlo nel tempo, e vedere come un tasso di riciclo più alto mantiene il materiale in uso più a lungo.

$$\mathbf{x}_{k+1} = P\mathbf{x}_k, \quad P = \begin{bmatrix} 1-f(1-r) & 0 \\ f(1-r) & 1 \end{bmatrix}$$

```
_k+1=P_k, P=1-f(1-r)&0\(1-r)&1
```

Catena a due stati: in uso, perso

Procedimento

1. Scegli un tasso di scarto di esempio f = 0.2 l'anno e un tasso di recupero r = 0.321 (la quota riciclo più compostaggio dell'EPA nel 2018).
2. Costruisci P in un foglio di calcolo e parti da x_0 = (1, 0): tutto il materiale in uso.
3. Usa MMULT per avanzare di 10 anni, e confronta con la formula $(1 - f(1 - r))^k$ per la quota ancora in uso.
4. Ripeti con r = 0.5 e confronta gli anni medi in uso, 1/(f(1 − r)).

Tabella dei dati

Tasso di recupero r	Probabilità di restare in uso	In uso dopo 10 anni	Anni medi in uso
0.321	0.8642	0.232	7.36
0.50	0.9000	0.349	10.0

Modello di esempio: il tasso di scarto f = 0.2 è un valore di esempio; r = 0.321 è la quota EPA 2018.

Calcolo di esempio

1. Probabilità di restare = 1 − 0.2 × 0.679 = 0.8642; 0.8642^{10} = 0.232.
2. Anni medi in uso = 1/0.1358 = 7.36; con r = 0.5 sono 1/0.1 = 10.0 anni.
3. λ = 1 appartiene allo stato «perso», che a lungo termine assorbe tutto; λ = 0.8642 fissa la velocità.

> **Sicurezza**
>
> - Fai una breve pausa dallo schermo ogni mezz'ora.

Alternativa a casa o virtuale

- L’intero laboratorio si svolge in un foglio di calcolo gratuito.

Interactive Linear Algebra, 5.6 Stochastic matrices (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/stochastic-matrices.html) · EPA: National overview of materials and waste (https://www.epa.gov/facts-and-figures-about-materials-waste-and-recycling/national-overview-facts-and-figures-materials)

Legame con il pianeta: L’EPA riporta un tasso di riciclo e compostaggio del 32.1% nel 2018 e il 50% in discarica; modelli come questo mostrano quanto vale alzare quel tasso. U.S. EPA: National overview, facts and figures on materials, wastes and recycling (https://www.epa.gov/facts-and-figures-about-materials-waste-and-recycling/national-overview-facts-and-figures-materials)

- [ ] **Ho completato questo laboratorio (reale o virtuale)**

Laboratorio F: metodo delle potenze e compressione di immagini con la SVD

SETTIMANA 14

Obiettivo: Trovare un autovalore dominante con moltiplicazioni ripetute, poi comprimere una piccola immagine in scala di grigi con una SVD troncata e vedere con quanti pochi numeri si conserva l'immagine.

$$\mathbf{x}_{k+1} = \frac{A\mathbf{x}_k}{\|A\mathbf{x}_k\|}, \quad A_k = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T$$

```
_k+1=_k\|A_k\|, A_k=_i=1^kσ_i_i_i^T
```

Metodo delle potenze e SVD troncata

Procedimento

1. In un foglio di calcolo, parti da x_0 = (1, 0) e moltiplica per A = [[2, 1], [1, 2]] dieci volte, riscalando ogni volta; osserva il rapporto delle lunghezze avvicinarsi a 3.
2. Crea una griglia 8 × 8 di livelli di grigio (0–255) per un disegno semplice, oppure carica una foto in Python (gratuito) con NumPy.
3. Calcola la SVD (numpy.linalg.svd) e ricostruisci l'immagine con k = 1, 2 e 4 termini.
4. Registra la memoria k(8 + 8 + 1) e la quota di Σσ² conservata, e giudica quando l'immagine sembra giusta.

Tabella dei dati

k	Numeri memorizzati (immagine 8 × 8)	Quota di 64
1	17	26.6%
2	34	53.1%
4	68	106.3%

Conteggi esatti di memoria. Per un'immagine 8 × 8, k = 4 memorizza già più dei 64 numeri grezzi; il risparmio compare per immagini grandi (unità 10: il rango 50 di un'immagine 1000 × 1000 conserva il 10.0%).

Calcolo di esempio

1. Metodo delle potenze: (1, 0) → (2, 1) → (5, 4) → (14, 13); ‖(14, 13)‖/‖(5, 4)‖ = 19.10/6.403 = 2.98, vicino a λ = 3.
2. Memoria per k = 1: 8 + 8 + 1 = 17 numeri, 17/64 = 26.6%.

> **Sicurezza**

- Fai una breve pausa dallo schermo ogni mezz'ora.

Alternativa a casa o virtuale

- Le versioni con foglio di calcolo e con Python gratuito sono entrambe laboratori da fare a casa.

MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra (Strang, Spring 2010) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/) · Interactive Linear Algebra, 5.1 Eigenvectors (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/eigenvectors.html)

Legame con il pianeta: EMIT del JPL della NASA restituisce più di 100000 spettri al secondo; comprimere e separare quei dati usa esattamente questi strumenti. NASA JPL: EMIT, Earth Surface Mineral Dust Source Investigation (https://earth.jpl.nasa.gov/emit/)

☐ **Ho completato questo laboratorio (reale o virtuale)**

Serie di esercizi per gli esami

Cronometrati: circa 10 minuti per problema. Poi confronta con le soluzioni complete.

Esercizi di preparazione all'esame intermedio (unità 1–5)

1. Trova l'angolo tra (1, 0, 1) e (0, 1, 1).

    1. Prodotto scalare = 1; lunghezze $\sqrt{2}$ ciascuna; $\cos\theta = 1/2$.

    Risposta: 60°.

2. Risolvi $x + 2y = 4$, $3x - y = 5$.

    1. $R_2 - 3R_1$: $-7y = -7$.

    Risposta: $x = 2$, $y = 1$.

3. Inverti [[3, 2], [1, 1]].

    1. det = 1.

    Risposta: [[1, −2], [−1, 3]].

4. Un'economia a un solo settore usa 0.4 del proprio output. Quale output soddisfa una domanda di 120?

    1. $x = 120/0.6$.

    Risposta: 200.

5. Una matrice 6 × 9 ha rango 4. Trova dim N(A) e dim N(A^T).

    1. n − r e m − r.

    Risposta: 5 e 2.

Serie di esercizi finale (tutte le unità)

1. Adatta y = C + Dt a (0, 0), (1, 2), (2, 2) con i minimi quadrati.

    1. A^TA = [[3, 3], [3, 5]], A^Tb = (4, 6); det 6.

    Risposta: C = 0.333, D = 1.

2. Trova det [[2, 1, 0], [1, 2, 1], [0, 1, 2]].

    1. 2(4 − 1) − 1(2 − 0) + 0.

    Risposta: 4.

3. Trova gli autovalori di [[6, 2], [2, 3]].

    1. Traccia 9, det 14: $\lambda^2 - 9\lambda + 14 = 0$.

    Risposta: 7 e 2.

4. Trova lo stato stazionario della matrice di Markov [[0.9, 0.2], [0.1, 0.8]].

    1. $0.1q_1 = 0.2q_2$.

    Risposta: (0.667, 0.333).

5. Trova i valori singolari di [[2, 0], [0, −3]].

    1. A^TA = diag(4, 9).

    Risposta: 3 e 2.

6. Quanti numeri memorizza una SVD di rango 20 di un’immagine 500 × 800, e che quota dell’immagine completa è?

    1. 20(500 + 800 + 1).

    Risposta: 26020, circa il 6.5%.

Formulario

$$\|v\| = \sqrt{v \cdot v},\ \cos\theta = \frac{v \cdot w}{\|v\|\|w\|} \qquad A\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \ A = LU$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \qquad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1},\ (AB)^T = B^T A^T$$

$$\mathbf{x} = (I - A)^{-1}\mathbf{d} \qquad r + \dim N(A) = n$$

$$\mathbf{p} = \frac{a \cdot b}{a \cdot a}a,\ \ A^T A\hat{x} = A^T b \qquad A = QR,\ Q^T Q = I$$

$$\det(AB) = \det A \det B,\ x_i = \det B_i / \det A \qquad \det(A - \lambda I) = 0,\ \sum \lambda = \operatorname{tr} A,\ \prod \lambda = \det A$$

$$A = PDP^{-1},\ A^k = PD^k P^{-1},\ A = Q\Lambda Q^T \qquad A = U\Sigma V^T,\ \sigma_i = \sqrt{\lambda_i(A^T A)},\ \kappa = \sigma_1/\sigma_n$$

Costanti

Costante	Valore
Velocità della luce (usata per le distanze GPS)	299,792,458 m/s
1 miglio	1.609344 km
1 piede	0.3048 m
1 pollice	25.4 mm
Flops per risolvere un sistema n × n per eliminazione	circa $n^3/3$ moltiplicazioni–somme (Strang)
Matrice identità I	Uni sulla diagonale, zeri altrove: AI = IA = A

Fonte: NIST Guide to the SI, Appendix B.9: conversion factors (https://www.nist.gov/pml/special-publication-811/nist-guide-si-appendix-b-conversion-factors/nist-guide-si-appendix-b9)

Testi e lezioni gratuiti

Usa questi libri di testo, lezioni e strumenti gratuiti insieme al corso.

- MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra (Strang, Spring 2010) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/): Le videolezioni complete, gli esercizi e gli esami di Strang.
- MIT OpenCourseWare 18.06SC Linear Algebra (self-paced, Fall 2011) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06sc-linear-algebra-fall-2011/): Versione autogestita con video di esercitazione ed esercizi svolti.
- Interactive Linear Algebra (Margalit and Rabinoff, Georgia Tech) (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/): Libro di testo interattivo gratuito usato al Georgia Tech.
- Jim Hefferon, Linear Algebra (free text) (https://hefferon.net/linearalgebra/): Libro di testo completo e gratuito con soluzioni.

- Gilbert Strang, Introduction to Linear Algebra (book site) (https://math.mit.edu/~gs/linearalgebra/): Il sito del libro di Strang con appunti e figure.
- PhET: Vector Addition (https://phet.colorado.edu/en/simulations/vector-addition): Vettori e componenti interattivi.

Glossario

Base
Un insieme linearmente indipendente che genera uno spazio.

Spazio delle colonne
Tutte le combinazioni Ax delle colonne di A.

Numero di condizionamento
σ_1/σ_n, quanto possono crescere gli errori risolvendo Ax = b.

Determinante
Fattore di scala dei volumi con segno di A; nullo esattamente quando A è singolare.

Diagonalizzazione
$A = PDP^{-1}$ con gli autovettori in P.

Dimensione
Numero di vettori di una qualsiasi base.

Autovalore
λ con $Av = \lambda v$ per qualche v non nullo.

Fattorizzazione LU
A = LU dall'eliminazione.

Minimi quadrati
L'$\hat{x}$ che minimizza $\|b - Ax\|$.

Inversa di Leontief
$(I - A)^{-1}$, output totale necessario per unità di domanda finale.

Indipendenza lineare
Solo la combinazione nulla dà il vettore nullo.

Matrice di Markov
Elementi non negativi, colonne di somma 1.

Nucleo
Tutti gli x con Ax = 0.

Ortonormale
Vettori unitari a due a due ortogonali.

Pivot
Primo elemento non nullo di una riga in forma a scala.

Definita positiva
Simmetrica con $x^TAx > 0$ per $x \neq 0$.

Proiezione
Punto più vicino a b in un sottospazio.

Rango
Numero di pivot; dimensione dello spazio delle colonne.

Valore singolare
$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}(A^TA)$.

Span
Tutte le combinazioni lineari di un insieme di vettori.

Sottospazio
Un insieme che contiene 0 ed è chiuso rispetto a somma e moltiplicazione per scalari.

Griglia di autovalutazione

Non si assegnano voti né crediti. Usala per valutare onestamente a che punto sei in ogni unità.

Livello	Come si presenta
4 · Padronanza	Sceglie lo strumento giusto (eliminazione, proiezione, autovalori o SVD), calcola a mano i casi piccoli, verifica le risposte (Ax = b, traccia e determinante) e spiega il significato con figure e nel contesto.
3 · Competente	Risolve gli esercizi con qualche occasionale errore di calcolo.
2 · In sviluppo	Segue gli esempi svolti ma confonde righe e colonne o i quattro sottospazi.
1 · Principiante	Manipola simboli senza verificare dimensioni o risposte; deve rivedere l'unità.

Pesi suggeriti se vuoi un punteggio

Parte	Peso
Esercizi	25%
Laboratori	20%
Serie di esercizi di metà corso	25%
Serie di esercizi finale	30%

Punta al livello 3 o superiore in ogni unità prima di passare al corso successivo.

Corsi correlati

- Scienza delle costruzioni ENGR 213
- Circuiti ENGR 214 + ENGR 214L
- Analisi III MATH 210
- Tutti i corsi