עודכן לאחרונה: November 1, 2026

🗺️ מפת דרכים לארבע שנים · שנה 2, אביב

על הקורס

לקורס החינמי הזה יש 10 יחידות ו-6 מעבדות. אלה המספרים האמיתיים, לא תוכנית ארוכה יותר שקוצרה.

בדיקה היא מספר או תוצאת קוד בעמוד קורס שסקריפט מחשב מחדש לפני הפרסום. המספר המודפס והמספר שחושב מחדש חייבים להתאים.

זהו מתווה של קורס חינמי ללימוד עצמי שנכתב על ידי Saving Planets. הוא אינו קורס אוניברסיטאי, אינו מעניק נקודות זכות אקדמיות, ואף מוסד לימודים אינו מעורב בו.

היקפו תואם קורס סמסטריאלי באלגברה ליניארית בשנה השנייה. הוא בנוי על הנושאים והעומק של MIT 18.06 Linear Algebra שמלמד Gilbert Strang (חינם ב-MIT OpenCourseWare), ועל קורסי האלגברה הליניארית לשנה שנייה ב-Georgia Tech וב-Purdue, תוך שימוש בספר החינמי של Georgia Tech Interactive Linear Algebra מאת Dan Margalit ו-Joseph Rabinoff ובספר החינמי Linear Algebra של Jim Hefferon, שאליהם אנו מקשרים כשהם מועילים. אף אחד מהמחברים או המוסדות האלה אינו תומך בדף זה.

מה שאנו מוסיפים: כל יחידה קשורה לעבודה אמיתית על כדור הארץ עם מקור ציבורי מצוטט (GPS, Landsat 9, לווייני גובה פני הים של NASA, מחשבי-העל למזג אוויר של NOAA, נתוני תשומה–תפוקה ומיחזור של EPA, מחקרי בניינים של USGS, ספקטרומטר המינרלים EMIT של NASA), כל מספר בדף מחושב מחדש בסקריפט בדיקה לפני פרסומו, וכל מעבדה רצה בגיליון אלקטרוני חינמי או על נייר.

עברו עליו לפי הסדר. בכל יחידה יש מטרות, רעיונות מרכזיים, משוואות, דוגמאות צעד אחר צעד, תרגול עם תשובות מלאות, טעויות נפוצות, כרטיסיות ובוחן. ההתקדמות שלכם נשמרת רק בדפדפן הזה.

איך הקורס הזה עוזר להציל את כדור הארץ

אלגברה ליניארית היא שפת הנתונים על כדור הארץ. פיקסל לוויין הוא וקטור, מיקום GPS הוא פתרון של מערכת ליניארית, תחזית מזג אוויר היא מיליוני משוואות הנפתרות שוב ושוב, ואת הזיהום של כלכלה שלמה אפשר לעקוב בעזרת מטריצה אחת.

אותם רעיונות מעטים, דירוג, היטל, ערכים עצמיים ו-SVD, הופכים מדידות גולמיות למפות של יערות, למגמות בגובה פני הים ולאבק מינרלי. כל יחידה מסתיימת בקטע קצר עם מקורות. ערכים שאינם ממקור מסומנים כערכים לדוגמה.

למורים

אפשר ללמד את הקורס הזה, או לתת לתלמיד לעבור אותו לבד. הוא חינם. Saving Planets לא נותנת ציון ולא נקודות זכות.

- העמוד הזה הוא כל הקורס: 10 יחידות ו-6 מעבדות (MATH 230).
- תכננו 15 שבועות, בערך 6 עד 9 שעות בשבוע, כולל שבועות המעבדה.
- עקבו אחרי לוח 15 השבועות. קראו את היחידה, פתרו על הנייר, ואז פתחו את התשובה. בשבוע מעבדה עשו את המעבדה או את הגרסה הביתית.
- בדיקה היא מספר או תוצאת קוד בעמוד שסקריפט מחשב מחדש לפני הפרסום. המספר שרואים והמספר שחושב מחדש חייבים להתאים.
- השתמשו בהדפסת העמוד, או הורידו את מדריך הלימוד ב-PDF. דף הנוסחאות נמצא לקראת הסוף.
- שאלו: איך היחידה הזו עוזרת לאנשים ולכוכב? בכל יחידה יש תיבה ירוקה עם עובדה ומקור.
- העתיקו את תבנית המדריך למורה וכתבו את שם הכיתה, הזמן שיש לכם, והשאלות שתשאלו. פתיחת תבנית המדריך למורה

לפני שמתחילים

ידע מוקדם

- אלגברה של תיכון: פתרון שתי משוואות בשני נעלמים ועבודה עם פונקציות.
- חדו"א I עוזר בגבולות ובנגזרות בכמה דוגמאות, אך ברוב הקורס אין צורך בחדו"א.
- נוחות בעבודה עם גיליון אלקטרוני; מבוא לתכנות עוזר בגרסאות ה-Python האופציונליות של המעבדות.
- חדו"א III ומשוואות דיפרנציאליות משתלבים היטב עם הקורס אך אינם נדרשים.

איך ללמוד

- בצעו כל חישוב ביד תחילה על דוגמאות קטנות (2 × 2 ו-3 × 3), ואז בדקו בגיליון אלקטרוני או במחשבון.
- חשבו על Ax בשתי דרכים: כמכפלות סקלריות של השורות עם x, וכצירוף של העמודות של A.
- בדקו כל תשובה: הציבו את x בחזרה ב-Ax = b, הכפילו את A בהפכית שלה, או בדקו Av = λv.
- עקבו אחר הממדים: מטריצה n × m כפול מטריצה p × n נותנת m × p, וממדים שאינם תואמים פירושם שגיאה.
- ציירו ב-2D וב-3D: ישרים, מישורים, היטלים ומתיחות הופכים את הכללים לקלים לזכירה.
- פתרו כל תרגיל על נייר לפני שאתם פותחים את התשובה, וחזרו על הבחנים כעבור כמה ימים.

מה צריך

- מחשב עם תוכנת גיליון אלקטרוני חינמית (הפונקציות MMULT, MINVERSE, MDETERM ו-LINEST שלה מבצעות עבודת מטריצות).
- נייר משבצות, סרגל, מד-זווית ועיפרון.
- אופציונלי: Python חינמי עם NumPy לגרסאות הגדולות של המעבדות.
- חוט ונעצים או סרט הדבקה למעבדת הטרילטרציה, ומפה מודפסת או דף נייר.
- תמונה בגווני אפור או רשת קטנה של מספרים למעבדת דחיסת התמונה.

לוח זמנים מוצע ל־15 שבועות

כ־6 עד 9 שעות בשבוע: קריאה, תרגילים, ובשבועות המעבדה גם המעבדה.

שבוע	יחידה	נושאים	קריאה
1	וקטורים: צירופים ליניאריים, אורכים ומכפלות סקלריות	וקטורים, צירופים ליניאריים, פרישה, אורך	MIT 18.06 L1; ILA 2.1–2.2
2	וקטורים: צירופים ליניאריים, אורכים ומכפלות סקלריות	מכפלות סקלריות, זוויות, אורתוגונליות; מעבדה A; תחילת הדירוג	ILA 6.1
3	מערכות משוואות ליניאריות ודירוג גאוס	דירוג, צורות מדורגות, קבוצות פתרונות; מעבדה B	MIT 18.06 L2; ILA 1.1–1.3
4	אלגברת מטריצות: כפל, הפכיות ופירוק LU	כפל מטריצות, הפכיות, A = LU; מעבדה C	MIT 18.06 L3–4; ILA 3.4–3.5
5	מודלים ליניאריים: כלכלת תשומה–תפוקה (לאונטייף), רשתות ואיזון	מודלי תשומה–תפוקה, רשתות, איזון	Hefferon Topics; EPA USEEIO
6	מרחבים וקטוריים, תת-מרחבים, אי-תלות, בסיס, דרגה וארבעת תת-המרחבים היסודיים	תת-מרחבים, מרחב העמודות, מרחב האפס, Ax = 0	MIT 18.06 L5–7; ILA 2.6
7	מרחבים וקטוריים, תת-מרחבים, אי-תלות, בסיס, דרגה וארבעת תת-המרחבים היסודיים	אי-תלות, בסיס, ממד, דרגה, ארבעה תת-מרחבים; תרגול אמצע סמסטר	MIT 18.06 L8–10; ILA 2.5, 2.7, 2.9
8	אורתוגונליות, היטלים, ריבועים פחותים וגרם–שמידט	אורתוגונליות והיטלים	MIT 18.06 L14–15; ILA 6.3
9	אורתוגונליות, היטלים, ריבועים פחותים וגרם–שמידט	ריבועים פחותים, גרם–שמידט, A = QR; מעבדה D	MIT 18.06 L16–17; ILA 6.4–6.5
10	דטרמיננטות: תכונות, קו-פקטורים, כלל קרמר ונפח	דטרמיננטות, קו-פקטורים, כלל קרמר, נפח	MIT 18.06 L18–20; ILA 4.1–4.3
11	ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים	ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים, שיטת החזקות, אופנים	MIT 18.06 L21; ILA 5.1–5.2, 5.5
12	לכסון, חזקות מטריצות, שרשראות מרקוב ומערכות דינמיות ליניאריות	לכסון, שרשראות מרקוב, מערכות דינמיות; מעבדה E	MIT 18.06 L22–25; ILA 5.4, 5.6
13	פירוק לערכים סינגולריים, ניתוח רכיבים ראשיים ומטריצות חיוביות מוגדרות	מטריצות חיוביות מוגדרות ו-SVD	MIT 18.06 L27–29
14	פירוק לערכים סינגולריים, ניתוח רכיבים ראשיים ומטריצות חיוביות מוגדרות	קירוב בדרגה נמוכה, PCA, מספר מצב; מעבדה F	MIT 18.06 L29; אתר הספר של Strang
15	חזרה	חזרה וסדרת תרגול מסכמת	כל היחידות

ההתקדמות שלכם

סמנו יחידות ומעבדות כשאתם מסיימים אותן, ועשו את הבחנים. ההתקדמות והציונים נשמרים רק בדפדפן הזה ולעולם לא נשלחים אלינו.

יחידות

וקטורים: צירופים ליניאריים, אורכים ומכפלות סקלריות

וקטורים בשניים, שלושה ו-n ממדים, חיבורם והכפלתם בסקלר, צירופים ליניאריים ופרישה, אורך, וקטורי יחידה, מכפלה סקלרית, הזווית בין וקטורים, אורתוגונליות ואי-שוויוני קושי–שוורץ והמשולש.

מטרות הלמידה

בסוף היחידה הזו תוכלו:

- חברו, הכפילו בסקלר וצרפו וקטורים ביד ובציור.
- חשבו אורכים, וקטורי יחידה ומכפלות סקלריות.
- מצאו את הזווית בין שני וקטורים ובדקו אורתוגונליות.
- תארו את הפרישה של וקטור אחד, שניים או שלושה.

מושגי מפתח

- וקטור ב-$\mathbb{R}^n$ הוא רשימה סדורה של n מספרים. ב-2D וב-3D הוא חץ; בממדים גבוהים יותר הוא רשימה, כמו 11 ערכי הערוצים של פיקסל לוויין אחד.
- צירוף ליניארי $c_1v_1 + c_2v_2 + \dots$ מכפיל וקטורים בסקלרים ומחבר אותם. הפרישה היא קבוצת כל הצירופים הליניאריים: ישר, מישור או כל המרחב.
- אורך $\|v\| = \sqrt{(v \cdot v)}$. חלוקה באורך נותנת וקטור יחידה $u = v/\|v\|$ באורך 1.
- מכפלה סקלרית $v \cdot w = v_1w_1 + v_2w_2 + \dots = \|v\|\|w\|\cos\theta$. אם $v \cdot w = 0$ הווקטורים אורתוגונליים (ניצבים).
- קושי–שוורץ: $|v \cdot w| \le \|v\|\|w\|$. אי-שוויון המשולש: $\|v + w\| \le \|v\| + \|w\|$.

משוואות מפתח

$$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$$

\|v\|=_1^2+v_2^2+⋯+v_n^2

אורך

$$v \cdot w = v_1w_1 + \cdots + v_nw_n$$

v⋅ w=v_1w_1+⋯+v_nw_n

מכפלה סקלרית

$$\cos\theta = \frac{v \cdot w}{\|v\|\,\|w\|}$$

θ=(v⋅ w)/(\|v\| \|w\|)

הזווית בין וקטורים

$$|v \cdot w| \le \|v\|\,\|w\|$$

אי-שוויון קושי–שוורץ

דוגמאות פתורות שלב אחר שלב

דוגמה 1.1 מצאו את האורך של $v = (3, 4)$ ואת וקטור היחידה בכיוונו.

1. $\|v\| = \sqrt{(3^2 + 4^2)} = \sqrt{25} = 5$.
2. $u = v/5$.

תשובה: $\|v\| = 5$, $u = (0.6, 0.8)$.

דוגמה 1.2 מצאו את הזווית בין $v = (3, 4)$ ל-$w = (1, 2)$.

1. $v\cdot w = 3 + 8 = 11$.
2. $\|v\| = 5$, $\|w\| = \sqrt{5} = 2.236$.
3. $\cos\theta = 11/(5 \times 2.236) = 0.9839$.

תשובה: $\theta = 10.30°$.

דוגמה 1.3 כתבו את $(1, 1, 0) + 2(1, 0, 1)$ כווקטור אחד. האם $(2, 3, 4)$ נמצא בפרישה של שני הווקטורים האלה?

1. $(1, 1, 0) + 2(1, 0, 1) = (3, 1, 2)$.
2. כל צירוף $c_1(1, 0, 1) + c_2(0, 1, 1) = (c_1, c_2, c_1 + c_2)$, ולכן הרכיב השלישי חייב להיות סכום שני הראשונים.

תשובה: $(2, 3, 5)$; $(2, 3, 4)$ אינו בפרישה כי $2 + 3 \neq 4$.

תרגילים

פתרו כל אחד קודם על נייר, ואז בדקו.

1. מצאו את $\|(1, 2, 2)\|$.

   $\sqrt{(1 + 4 + 4)} = 3$.

2. מצאו את $(4, -5, 6)\cdot(1, 2, 3)$.

   $4 - 10 + 18 = 12$.

3. האם $(2, -1)$ ו-$(1, 2)$ אורתוגונליים?

כן: 0 = 2 − 2.

4. מצאו את וקטור היחידה בכיוון (6, 8).

‖(6, 8)‖ = 10, ולכן (0.6, 0.8).

תפיסות שגויות נפוצות

מיתוס: המכפלה הסקלרית היא וקטור.

בפועל: היא מספר יחיד (סקלר).

מיתוס: ‖v + w‖ = ‖w‖ + ‖v‖ תמיד.

בפועל: רק כש-v ו-w מצביעים לאותו כיוון; אחרת הוא קטן יותר.

מיתוס: לווקטורים יש משמעות רק ב-2D או ב-3D.

בפועל: לווקטורי נתונים יכולים להיות מאות רכיבים; אותם כללים חלים.

כרטיסיות

צירוף ליניארי

$c_1v_1 + c_2v_2 + \dots$

פרישה

כל הצירופים הליניאריים של קבוצת וקטורים.

אורך

$\|v\| = \sqrt{(v \cdot v)}$.

מכפלה סקלרית

$v \cdot w = \sum v_i w_i = \|v\|\|w\|\cos\theta$.

אורתוגונלי

$v \cdot w = 0$.

וקטור יחידה

$v/\|v\|$.

בוחן לבדיקה עצמית

1. ‖(3, 4)‖ שווה ל…

7

5

25

12

.5. √(9 + 16) = 5

2. פירושו שהווקטורים… v·w = 0

מקבילים

אורתוגונליים

שווים

וקטורי יחידה

אורתוגונליים. cos θ = 0, ולכן θ = 90°.

3. הפרישה של שני וקטורים לא מקבילים ב-ℝ³ היא…

נקודה

קו ישר

מישור

כל ℝ³

מישור. שני כיוונים בלתי תלויים ממלאים מישור.

4. הכפלת v פי שניים משנה את ‖v‖ פי…

1

2

4

2√

.2. ‖cv‖ = |c|‖v‖

לנסות שוב את הבוחן

איך זה עוזר להציל את כדור הארץ

כל פיקסל של Landsat 9 הוא וקטור. לפי USGS, ה-Operational Land Imager 2 של Landsat 9 רושם 9 ערוצים ספקטרליים ברזולוציה של 30 m (15 m לערוץ הפנכרומטי), וה-Thermal Infrared Sensor 2 שלו רושם 2 ערוצים תרמיים ב-100 m, כך שכל נקודה על הקרקע הופכת לרשימה של 11 מספרים. הנתונים הם של 14 ביט, $2^{14} = 16384$ גוונים לערוץ, ו-Landsat 9 אוסף כ-750 סצנות ביום, כולן חינם.

בריאות יערות וגידולים נקראת מהערוץ האדום (ערוץ 4, 0.64–0.67 µm) ומערוץ האינפרה-אדום הקרוב (ערוץ 5, 0.85–0.88 µm). מדד הצמחייה $\mathrm{NDVI} = (\mathrm{NIR} - \mathrm{red})/(\mathrm{NIR} + \mathrm{red})$ משווה בין שני רכיבים של וקטור הפיקסל. עם החזרויות לדוגמה של 0.40 (NIR) ו-0.08 (אדום), $\mathrm{NDVI} = 0.32/0.48 = 0.667$, אופייני לצמחייה בריאה; קרקע חשופה נותנת ערכים קרובים לאפס.

ב־Saving Planets: תצפית על כדור הארץ · בירוא יערות

מקורות: Interactive Linear Algebra, 2.1 Vectors (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/vectors.html) · USGS: Landsat 9 (https://www.usgs.gov/landsat-missions/landsat-9)

מקורות לימוד חינמיים

- Interactive Linear Algebra, 2.1 Vectors (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/vectors.html): טקסט חינמי עם איורים אינטראקטיביים.
- Interactive Linear Algebra, 6.1 Dot products and orthogonality (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/dot-product.html): אורכים, זוויות ואורתוגונליות.
- MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra (Strang, Spring 2010) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/): הרצאה 1: הגאומטריה של משוואות ליניאריות.
- PhET: Vector Addition (https://phet.colorado.edu/en/simulations/vector-addition): אינטראקטיבי.

סיימתי את היחידה הזו

מערכות משוואות ליניאריות ודירוג גאוס

מערכות ליניאריות בתמונת השורות ובתמונת העמודות, מטריצות מורחבות, דירוג לצורה מדורגת, הצבה לאחור, צורה מדורגת קנונית, איברים מובילים ומשתנים חופשיים, ומתי למערכת יש פתרון אחד, אין פתרון או אינסוף פתרונות.

מטרות הלמידה

בסוף היחידה הזו תוכלו:

- כתבו מערכת בצורה Ax = b וכמטריצה מורחבת.
- פתרו מערכות בדירוג ובהצבה לאחור.
- מצאו את הצורה המדורגת הקנונית וזהו איברים מובילים ומשתנים חופשיים.
- החליטו אם למערכת יש פתרון אחד, אין פתרון או אינסוף פתרונות.

מושגי מפתח

- תמונת השורות: כל משוואה היא ישר (2D) או מישור (3D) והפתרון הוא נקודת המפגש. תמונת העמודות: b הוא צירוף של עמודות A עם המשקלים x.
- שלוש פעולות שורה אינן משנות את הפתרונות: החלפת שורות, הכפלת שורה במספר שונה מאפס, והוספת כפולה של שורה אחת לאחרת.
- הדירוג מייצר צורה משולשית עליונה (מדורגת); ההצבה לאחור פותרת אז מלמטה למעלה. האיברים המובילים הם האיברים הראשונים השונים מאפס בכל שורה.
- עמודה ללא איבר מוביל נותנת משתנה חופשי ואינסוף פתרונות. שורה 0 = c עם c ≠ 0 פירושה שאין פתרון (מערכת סותרת).
- משוואות של מרחק בריבוע כמו (x − a)² + (y − b)² = d² אינן ליניאריות, אך חיסור אחת מאחרת מבטל את x² ואת y² ומשאיר משוואות ליניאריות. כך בעיות מיקום הופכות למערכות ליניאריות.

משוואות מפתח

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

צורה מטריציונית

$$R_i \leftarrow R_i - \ell_{ij} R_j, \;\; \ell_{ij} = a_{ij}/a_{jj}$$

```
R_i R_i-_ijR_j,\ \ _ij=a_ij/a_jj
```

צעד דירוג ומכפיל

$$\text{solutions: one, none, or infinitely many}$$

שלושת המקרים היחידים

$$d = c\,t$$

דוגמאות פתורות שלב אחר שלב

דוגמה 2.1 פתרו $x + y + z = 6$, $2x + y - z = 1$, $x - y + 2z = 5$.

1. $R_2 - 2R_1$: $-y - 3z = -11$. $R_3 - R_1$: $-2y + z = -1$.
2. $R_3 - 2R_2$: $7z = 21$, ולכן $z = 3$.
3. הצבה לאחור: $-y - 9 = -11$ נותן $y = 2$; ואז $x = 6 - 2 - 3 = 1$.

תשובה: $(x, y, z) = (1, 2, 3)$.

דוגמה 2.2 משואות נמצאות ב-$(0, 0)$, $(10, 0)$ ו-$(0, 10)$ km. מקלט מודד מרחקים בריבוע של 65, 25 ו-$45\ \text{km}^2$. מצאו את מיקומו.

1. משוואה 1 פחות משוואה $x^2 + y^2 - [(x-10)^2 + y^2] = 65 - 25$: $20x - 100 = -40$, ולכן $x = 3$.
2. משוואה 1 פחות משוואה $x^2 + y^2 - [(x-10)^2 + (y-10)^2] = 65 - 45$: $20y - 100 = -20$.
3. פתרו את שתי המשוואות הליניאריות.

תשובה: $(x, y) = (3, 4)$ km.

דוגמה 2.3 כמה פתרונות יש ל-$x + 2y = 3$, $2x + 4y = 6$? ול-$x + 2y = 3$, $2x + 4y = 7$?

1. $R_2 - 2R_1$ נותן $0 = 0$ במערכת הראשונה: איבר מוביל אחד, משתנה חופשי אחד.
2. בשנייה, $R_2 - 2R_1$ נותן $0 = 1$.

תשובה: אינסוף; אף לא אחד.

תרגילים

פתרו כל אחד קודם על נייר, ואז בדקו.

1. פתרו $x + y = 5$, $x - y = 1$.

   חיבור נותן $2x = 6$: $x = 3$, $y = 2$.

2. אות בסגנון GPS מגיע תוך 0.00505783 s. איזה מרחק עבר במהירות 299792458 m/s?

   $d = ct = 1516299$ m, בערך 1516 km.

3. מצאו את הצורה המדורגת הקנונית של $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix}$ (מורחבת).

$R_2 - 2R_1 = [0, 1, 2]$; $R_1 - 2R_2 = [1, 0, -1]$: $x = -1$, $y = 2$.

4. למערכת 5×3 יש 3 איברים מובילים. כמה משתנים חופשיים?

$5 - 3 = 2$.

תפיסות שגויות נפוצות

מיתוס: הכפלת שורה ב-0 היא פעולת שורה מותרת.

בפועל: היא הורסת מידע; המכפיל חייב להיות שונה מאפס.

מיתוס: למערכת עם יותר נעלמים ממשוואות אין פתרון.

בפועל: אם היא עקבית יש לה אינסוף פתרונות; היא גם יכולה להיות סותרת.

מיתוס: שורת אפסים פירושה שאין פתרון.

בפועל: רק שורה $c = 0$ עם $c \neq 0$; $0 = 0$ פירושו רק משתנה חופשי.

כרטיסיות

מטריצה מורחבת

$[A \mid b]$.

איבר מוביל

האיבר הראשון השונה מאפס בשורה בצורה מדורגת.

משתנה חופשי

משתנה שבעמודה שלו אין איבר מוביל.

RREF

איברים מובילים 1, אפסים מעליהם ומתחתם.

סותרת

שורה $c = 0$, $c \neq 0$.

הצבה לאחור

פתרון המערכת המשולשית מלמטה למעלה.

בוחן לבדיקה עצמית

1. שורה 0 0 0 | 5 בצורה מדורגת פירושה…

פתרון אחד

אין פתרון

אינסוף

$x = 5$

אין פתרון. $5 = 0$ בלתי אפשרי.

2. מה מהבאים אינו פעולת שורה?

החלפת שתי שורות

הוספת כפולה של שורה לשורה אחרת

הכפלת שורה ב-3

העלאת שורה בריבוע

העלאת שורה בריבוע. העלאה בריבוע אינה ליניארית.

3. עמודה ללא איבר מוביל נותנת...

משתנה חופשי

אין פתרון

רק דטרמיננטה אפס

פתרון יחיד

משתנה חופשי. את המשתנה שלה אפשר לבחור בחופשיות.

4. בתמונת העמודות, $Ax = b$ שואל אם b הוא...

אורתוגונלי ל-A

צירוף של העמודות של A

שורה של A

וקטור עצמי

צירוף של העמודות של $A. Ax = x_1a_1 + x_2a_2 + \dots$

לנסות שוב את הבוחן

איך זה עוזר להציל את כדור הארץ

GPS הוא מכונת אלגברה ליניארית. GPS.gov מדווח שלפחות 24 לוויינים פעילים זמינים 95% מהזמן ושהוטסו 31 לוויינים פעילים במשך יותר מעשור, בגובה של כ-20200 km, וכל אחד מקיף את כדור הארץ פעמיים ביום. הם ממוקמים בשישה מישורי מסלול במרווחים שווים, כך שמשתמשים רואים לפחות ארבעה לוויינים כמעט מכל נקודה על פני כדור הארץ.

פעילות הטרילטרציה של GPS.gov מסבירה את הרעיון: מרחק = מהירות × זמן, כשהמהירות היא מהירות האור, 299792458 m/s, ומרחקים מלפחות 3 לוויינים קובעים מיקום 3D. גם השעון של מקלט אמיתי אינו ידוע, ולכן במודל הסטנדרטי של ספרי הלימוד הנעלמים הם x, y, z והסטיית השעון, ארבעה נעלמים שדורשים ארבעה לוויינים; חיסור משוואות הטווח, כמו בדוגמה הפתורה, הופך אותן למערכת ליניארית. שגיאת שעון של מיקרו-שנייה אחת בלבד הייתה מסיטה טווח ב-299.8 m. מיקומים מדויקים מנחים טרקטורים שמפזרים פחות דשן, אוניות במסלולים יעילים ותחנות מדידה שמודדות את גובה פני הים ואת הקרח.

ב־Saving Planets: תצפית על כדור הארץ · חלל

מקורות: GPS.gov: Trilateration (NOAA classroom activity) (https://www.gps.gov/trilateration) · GPS.gov: Space segment (https://www.gps.gov/space-segment)

מקורות לימוד חינמיים

- Interactive Linear Algebra, 1.1 Systems of linear equations (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/systems-of-eqns.html): קטע מטקסט חינמי.
- Interactive Linear Algebra, 1.2 Row reduction (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/row-reduction.html): צורות מדורגות צעד אחר צעד.
- MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra (Strang, Spring 2010) https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-201 0/): הרצאה 2: דירוג בעזרת מטריצות.
- Jim Hefferon, Linear Algebra (free text) (https://hefferon.net/linearalgebra/): פרק ראשון: מערכות ליניאריות.

צפו בהרצאה

Lecture 1: The geometry of linear equations (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/resources/lecture-1-the-geometry-of-linear-equations/) (באנגלית)

MIT 18.06 Linear Algebra (Spring 2010), MIT OpenCourseWare. רישיון: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/). תנאי שימוש (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/) · הקישור מיועד ללימוד חינמי בלבד; Saving Planets אינו קשור לאוניברסיטה זו ואינו נתמך על ידה.

☐ **סיימתי את היחידה הזו**

אלגברת מטריצות: כפל, הפכיות ופירוק LU

מכפלות מטריצה–וקטור ומטריצה–מטריצה, הכללים (והלא-כללים) של אלגברת מטריצות, שחלופים, מטריצות דירוג, ההפכית וגאוס–ז'ורדן, נוסחת ההפכית של 2 × 2, A = LU ועלות הדירוג.

מטרות הלמידה

בסוף היחידה הזו תוכלו:

- הכפילו מטריצות ובדקו שהממדים תואמים.
- מצאו הפכיות בנוסחת 2 × 2 ובשיטת גאוס–ז'ורדן.
- פרקו A = LU והשתמשו בפירוק לפתרון מערכות.
- העריכו את עלות הדירוג כש-n גדל.

מושגי מפתח

- $(AB)_{ij}$ = מכפלה סקלרית של שורה i של A בעמודה j של B. מטריצה m × n כפול n × p היא m × p. באופן כללי AB ≠ BA.
- ההפכית A^{-1} מקיימת $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. היא קיימת בדיוק כאשר ל-A יש n איברים מובילים (det A ≠ 0). $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ו-$(AB)^{T} = B^{T}A^{T}$.
- גאוס–ז'ורדן: דרגו את [A | I] ל-[I | A^{-1}].
- דירוג ללא החלפת שורות רושם את המכפילים שלו במטריצה משולשית תחתונה L עם אחדות באלכסון, ומתקבל A = LU. פתרו Lc = b, ואז Ux = c; כש-L ו-U שמורות, כל אגף ימין חדש זול.
- דירוג של מטריצה n × n עולה כ-$n^3/3$ פעולות כפל–חיבור; פתרון עם L ו-U שמורות עולה כ-n^2 לכל אגף ימין.

משוואות מפתח

$$(AB)_{ij} = \sum_{k} a_{ik} b_{kj}$$

```
(AB)_ij=_k a_ikb_kj
```

מכפלת מטריצות

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

```
&b\&d^-1=(1)/(ad-bc)&-b\\-c&a
```

הפכית 2 × 2

$$A = LU$$

```
A=LU
```

פירוק LU

$$\text{cost} \approx n^3/3$$

מספר פעולות הדירוג

דוגמאות פתורות שלב אחר שלב

דוגמה 3.1 מצאו את AB ואת BA עבור $A = [[1, 2], [3, 4]]$ ו-$B = [[0, 1], [1, 0]]$.

1. AB: שורה 1 · עמודות $(2, 1)$ =; שורה $(4, 3) = 2$.
2. BA מחליפה את שורות A: $[[3, 4], [1, 2]]$.

תשובה: $AB = [[2, 1], [4, 3]]$, $BA = [[3, 4], [1, 2]]$, ולכן $AB \neq BA$.

דוגמה 3.2 הפכו את $A = [[4, 7], [2, 6]]$.

1. $ad - bc = 24 - 14 = 10$.
2. $A^{-1} = (1/10)[[6, -7], [-2, 4]]$.

תשובה: $A^{-1} = [[0.6, -0.7], [-0.2, 0.4]]$.

דוגמה 3.3 פרקו את $A = [[2, 1], [6, 8]]$ ל-LU.

1. מכפיל $\ell_{21} = 6/2 = 3$.
2. $R_2 - 3R_1 = [0, 5]$.

תשובה: $L = [[1, 0], [3, 1]]$, $U = [[2, 1], [0, 5]]$.

תרגילים

פתרו כל אחד קודם על נייר, ואז בדקו.

1. מה הממד של מטריצה 2×3 כפול מטריצה 4×2?

   3×4.

2. הפכו את $[[2, 1], [5, 3]]$.

   $\det = 1$, הפכית $[[3, -1], [-5, 2]]$.

3. בערך כמה פעולות דורש הדירוג עבור $n = 1000$?

   $n^3/3 \approx 3.33 \times 10^8$.

4. אם A ו-B הפיכות, מהי $(AB)^{-1}$?

$B^{-1}A^{-1}$.

תפיסות שגויות נפוצות

מיתוס: $AB = BA$.

בפועל: כפל מטריצות בדרך כלל אינו חילופי.

מיתוס: $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

בפועל: הסדר מתהפך: $B^{-1}A^{-1}$.

מיתוס: מחשבים פותרים $Ax = b$ בחישוב A^{-1}.

בפועל: הם מפרקים $A = LU$ (או דומה); חישוב A^{-1} איטי יותר ופחות מדויק.

כרטיסיות

יחידה

$AI = IA = A$.

הפכית

$AA^{-1} = I$.

הפכית 2 × 2

החליפו את a ו-d; הפכו סימן ל-b ול-c; חלקו ב-$ad - bc$.

כלל השחלוף

$(AB)^T = B^T A^T$.

LU

$A = LU$ מהדירוג.

עלות

כ-$n^3/3$ לדירוג.

בוחן לבדיקה עצמית

1. מטריצה 3 × 2 כפול מטריצה 5 × 3 היא...

2 × 5

3 × 3

2 × 5

לא מוגדר

5 × 2. הממדים החיצוניים.

2. מטריצה הפיכה בדיוק כאשר יש לה…

אין אפסים

n איברים מובילים

שורת אפסים

איברים שווים

n איברים מובילים. סט מלא של איברים מובילים.

3. הכפלת n פי שניים מכפילה את עלות הדירוג בערך פי…

2

4

8

16

n^3 .8 גדל פי $2^3 = 8$.

4. L ב-LU = A מכילה…

את האיברים המובילים

את המכפילים

את ההפכית

את הערכים העצמיים

את המכפילים. מכפילים מתחת לאלכסון, אחדות באלכסון.

לנסות שוב את הבוחן

איך זה עוזר להציל את כדור הארץ

תחזיות מזג אוויר ואקלים הן בבסיסן משימות אלגברה ליניארית עצומות שחוזרות פעמים רבות ביום. NOAA דיווחה באוגוסט 2023 שמחשבי-העל התפעוליים התאומים שלה, Dogwood במנסס שבווירג׳יניה ו-Cactus בפיניקס שבאריזונה, שודרגו ב-20% ל-14.5 פטה-פלופס כל אחד, כך שיחד מערכת התחזית יכולה לעבד 29 קוודריליון חישובים בשנייה, ושעם מחשבי-העל המחקריים שלה הקיבולת הכוללת היא 49 פטה-פלופס.

כלל $n^3/3$ מראה מדוע מהירות חשובה. לדוגמה, מערכת צפופה עם $n = 100000$ נעלמים דורשת כ-3.33×10^{14} פעולות; בקצב רציף של 14.5×10^{15} פעולות בשנייה זה כ-0.023 s, אבל הכפלת n מגדילה את העבודה פי 8. מודלים אמיתיים משתמשים במטריצות דלילות ובפותרים מתוחכמים, אך אותה צמיחה קובית היא מה שלדברי NOAA הכוח הנוסף יממן: מודלים ברזולוציה גבוהה יותר שמשפרים תחזיות ואזהרות.

ב־Saving Planets: מבוא לתכנות · פתרונות

מקורות: NOAA: NOAA completes upgrade to weather and climate supercomputer system (Aug. 10, 2023) (https://www.noaa.gov/news-release/noaa-completes-upgrade-to-weather-and-climate-supercomputer-system) · MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra (Strang, Spring 2010) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/)

מקורות לימוד חינמיים

- Interactive Linear Algebra, 3.4 Matrix multiplication (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/matrix-multiplication.html): קטע מטקסט חינמי.
- Interactive Linear Algebra, 3.5 Matrix inverses (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/matrix-inverses.html): הפכיות וגאוס–ז׳ורדן.
- MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra (Strang, Spring 2010) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-201 0/): הרצאות 1–3: כפל, הפכיות ו-$A = LU$.
- MIT OpenCourseWare 18.06SC Linear Algebra (self-paced, Fall 2011) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06sc-linear-algebra-fall-20 11/): סרטוני תרגול על LU.

צפו בהרצאה

Lecture 3: Multiplication and inverse matrices (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/resources/lecture-3-multipli cation-and-inverse-matrices/) (באנגלית)

MIT 18.06 Linear Algebra (Spring 2010), MIT OpenCourseWare. רישיון: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · תנאי שימוש (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use). הקישור מיועד ללימוד חינמי בלבד; Saving Planets אינו קשור לאוניברסיטה זו ואינו נתמך על ידה.

סיימתי את היחידה הזו

מודלים ליניאריים: כלכלת תשומה–תפוקה (לאונטייף), רשתות ואיזון

בניית מודלים ליניאריים ממערכות אמיתיות: מודל התשומה–תפוקה של לאונטיף x = Ax + d ופתרונו x = (I − A)⁻¹d, מודלים מורחבים סביבתית שהופכים הוצאות לפליטות, זרימות ברשתות ואיזון משוואות כימיות.

מטרות הלמידה

בסוף היחידה הזו תוכלו:

- בנו ופתרו מודל תשומה–תפוקה של לאונטיף.
- פרשו את איברי (I − A)⁻¹.
- הרחיבו מודל תשומה–תפוקה בעוצמות פליטה כדי למצוא טביעת רגל.
- כתבו בעיות איזון זרימה ואיזון כימי כמערכות ליניאריות.

מושגי מפתח

- במודל תשומה–תפוקה, עמודה j של מטריצת הצריכה A מפרטת מה ענף j קונה מכל ענף כדי לייצר דולר אחד של תפוקה.
- התפוקה הכוללת x צריכה לכסות את מה שהענפים משתמשים בו (Ax) ועוד את הביקוש הסופי d: x = Ax + d, ולכן x − Ax = d ו-x = (I − A)⁻¹d.
- האיבר (i, j) של הפכית לאונטיף (I − A)⁻¹ הוא התפוקה הכוללת של ענף i הנדרשת, ישירות ודרך כל שרשראות האספקה, לדולר אחד של ביקוש סופי מענף j.
- מודלים מורחבים סביבתית מכפילים את התפוקה בשורה של עוצמות פליטה e (למשל $kg\ CO_2$ לדולר): טביעת רגל e·x =.
- גם חוקי שימור נותנים משוואות ליניאריות: הזרימה הנכנסת שווה ליוצאת בכל צומת ברשת, והאטומים של כל יסוד מתאזנים בתגובה כימית.

משוואות מפתח

$$\mathbf{x} = A\mathbf{x} + \mathbf{d}$$

איזון תשומה–תפוקה

$$\mathbf{x} = (I - A)^{-1}\mathbf{d}$$

```
=(I-A)^-1
```

פתרון לאונטיף

$$\text{footprint} = \mathbf{e} \cdot \mathbf{x}$$

```
footprint=·
```

מודל מורחב סביבתית

$$\sum \text{in} = \sum \text{out}$$

דוגמאות פתורות שלב אחר שלב

דוגמה 4.1 לכלכלה בת שני ענפים $A = [[0.2, 0.3], [0.1, 0.4]]$ וביקוש סופי $d = (100, 50)$ (ערכים לדוגמה, מיליוני \$). מצאו את התפוקה הכוללת.

1. $I - A = [[0.8, -0.3], [-0.1, 0.6]]$, $\det = 0.48 - 0.03 = 0.45$.
2. $(I - A)^{-1} = (1/0.45)[[0.6, 0.3], [0.1, 0.8]]$.
3. $x = (1/0.45)(60 + 15, 10 + 40)$.

תשובה: $x = (166.7, 111.1)$ מיליוני \$.

דוגמה 4.2 עם עוצמות פליטה לדוגמה $e = (0.5, 2.0)$ kg CO_2 לדולר, מצאו את טביעת הרגל של אותו ביקוש סופי.

1. טביעת רגל $= 0.5 \times 166.7 + 2.0 \times 111.1$ (ביחידות kg ל-\$ × מיליוני \$).

תשובה: 305.6 מיליון kg CO_2 = 305.6 kt (לדוגמה).

דוגמה 4.3 אזנו $x\ CH_4 + y\ O_2 \rightarrow z\ CO_2 + w\ H_2O$.

1. C: $x = z$. H: $4x = 2w$. O: $2y = 2z + w$.
2. מציבים $x = 1$: $z = 1$, $w = 2$, $y = 2$.

תשובה: $CH_4 + 2\ O_2 \rightarrow CO_2 + 2\ H_2O$.

תרגילים

פתרו כל אחד קודם על נייר, ואז בדקו.

1. במודל הפתור, כמה תפוקה של ענף 1 נדרשת בסך הכול עבור 1 \$ של ביקוש סופי מענף 2?

   איבר $(1, 2)$ של $(I - A)^{-1} = 0.3/0.45 = 0.667$.

2. כלכלה בת ענף אחד צורכת 0.25 מהתפוקה שלה. איזו תפוקה כוללת עונה על ביקוש של 300?

   $x = 300/(1 - 0.25) = 400$.

3. לצומת זרימות נכנסות 40 ו-25, וזרימה יוצאת f_1 ועוד זרימה יוצאת של 30. מצאו את f_1.

   $f_1 = 65 - 30 = 35$.

4. אזנו $H_2 + O_2 \rightarrow H_2O$.

$2\ H_2 + O_2 \rightarrow 2\ H_2O$.

תפיסות שגויות נפוצות

מיתוס: התפוקה הכוללת שווה לביקוש הסופי.

בפועל: הענפים צורכים גם את תפוקות זה של זה, ולכן x גדול מ-d.

מיתוס: טביעת הרגל נובעת רק מהענף שממנו קונים.

בפועל: הפכית לאונטיף מסכמת את כל הספקים במעלה השרשרת.

מיתוס: כל A נותנת כלכלה הגיונית.

בפועל: סכומי העמודות חייבים להיות קטנים מ-1 כדי שלאיברי $(I - A)^{-1}$ לא יהיו ערכים שליליים.

כרטיסיות

מטריצת צריכה

תשומות לדולר תפוקה.

מודל לאונטיף

$x = Ax + d$.

הפכית לאונטיף

$(I - A)^{-1}$, דרישות כוללות.

מודל מורחב

טביעת רגל $e \cdot x$ =.

איזון זרימה

נכנס = יוצא בכל צומת.

מערכת הומוגנית

$Ax = 0$.

בוחן לבדיקה עצמית

1. פתרון לאונטיף הוא…

$x = Ad$

$x = (I - A)^{-1}d$

$x = A^{-1}d$

$x = d - A$

$x = (I - A)^{-1}d$. מתוך $x = Ax + d$.

2. עמודה j של A מתארת...

מה ענף j מוכר

מה ענף j קונה לכל דולר תפוקה

ביקוש סופי

פליטות

מה ענף j קונה לכל דולר תפוקה. תשומות ליחידת תפוקה.

3. טביעת רגל במודל מורחב היא...

e·x

e + x

det A

x/e

e·x. עוצמה כפול תפוקה, מסוכמת.

4. איזון משוואה כימית הוא...

בעיה לא ליניארית

מערכת ליניארית הומוגנית

דטרמיננטה

בעיית ערכים עצמיים

מערכת ליניארית הומוגנית. ספירת האטומים נותנת $Ax = 0$.

לנסות שוב את הבוחן

איך זה עוזר להציל את כדור הארץ

הסוכנות להגנת הסביבה של ארה"ב (EPA) משתמשת בדיוק במודל הזה כדי לעקוב אחר זיהום לאורך הכלכלה. לדברי EPA, מודלי USEEIO שלה משלבים נתונים על עסקאות כלכליות בין 389 ענפי תעשייה עם נתונים סביבתיים על אותם ענפים, הכוללים שימוש בקרקע, במים, באנרגיה ובמינרלים, זיהום אוויר, נוטריינטים וחומרים רעילים, כדי להעריך את ההשפעות של מוצרים ושירותים. EPA מתארת אותם כשימושיים לחישוב טביעת רגל פחמנית, והם תומכים בעבודתה בניהול בר-קיימא של חומרים.

למטריצת צריכה של 389 ענפים יש 389² = 151321 איברים, הרבה יותר מדי לעבודה ידנית אבל קל לשיטות הדירוג וה-LU של יחידה 3. הפכית לאונטיף היא שמאפשרת לעיר, לחברה או למשק בית לראות את הפליטות החבויות בשרשראות האספקה שלהם, ולא רק בשער המפעל.

ב־Saving Planets: פתרונות · כימיה כללית I

מקורות: U.S. EPA: US Environmentally-Extended Input-Output (USEEIO) models (https://www.epa.gov/land-research/us-environmentally-extended-input-output-useeio-models) · Interactive Linear Algebra, 1.1 Systems of linear equations (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/systems-of-eqns.html)

מקורות לימוד חינמיים

- U.S. EPA: US Environmentally-Extended Input-Output (USEEIO) models (https://www.epa.gov/land-research/us-environmentally-extended-input-output-useeio-models): מודלי התשומה–תפוקה המורחבים סביבתית של EPA.
- Jim Hefferon, Linear Algebra (free text) (https://hefferon.net/linearalgebra/): נושא: ניתוח תשומה–תפוקה של לאונטיף.
- MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra (Strang, Spring 2010) https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/: הרצאות ותרגילים ביישומים.
- Interactive Linear Algebra, 1.2 Row reduction (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/row-reduction.html): פתרון המערכות.

סיימתי את היחידה הזו

מרחבים וקטוריים, תת-מרחבים, אי-תלות, בסיס, דרגה וארבעת תת-המרחבים היסודיים

מרחבים וקטוריים ותת-מרחבים, מרחב העמודות ומרחב האפס, פתרון מלא של Ax = 0 ו-Ax = b, תלות ליניארית, בסיס ומימד, דרגה, משפט הדרגה והאפסות וארבעת תת-המרחבים היסודיים של סטרנג.

מטרות הלמידה

בסוף היחידה הזו תוכלו:

- בדקו אם קבוצה היא תת-מרחב.
- מצאו בסיסים למרחב העמודות ולמרחב האפס של מטריצה.
- בדקו אי-תלות ליניארית של וקטורים.
- השתמשו במשפט הדרגה והאפסות ובממדים של ארבעת תת-המרחבים היסודיים.

מושגי מפתח

- תת-מרחב מכיל את וקטור האפס וסגור לחיבור ולכפל בסקלר. ישרים ומישורים העוברים בראשית הם תת-מרחבים; אלה שאינם עוברים בראשית אינם.
- מרחב העמודות C(A): כל ה-Ax, קבוצת ה-b שעבורם ל-Ax = b יש פתרון. מרחב האפס N(A): כל ה-x שעבורם Ax = 0.
- וקטורים בלתי תלויים ליניארית אם הצירוף היחיד שנותן אפס הוא הצירוף שכל מקדמיו אפס. בסיס הוא קבוצה פורשת בלתי תלויה; לכל בסיס של מרחב יש אותו מספר וקטורים, המימד שלו.
- דרגה = r מספר האיברים המובילים dim C(A) =. משפט הדרגה והאפסות: r + dim N(A) = n, מספר העמודות.
- ארבעת תת-המרחבים היסודיים של מטריצה m × n מדרגה r: C(A) (מימד r) ו-N(Aᵀ) (מימד m − r) ב-ℝᵐ; C(Aᵀ) (מימד r) ו-N(A) (מימד n − r) ב-ℝⁿ. N(A) ניצב למרחב השורות.

משוואות מפתח

$$C(A) = \{A\mathbf{x}\},\ \ N(A) = \{\mathbf{x} : A\mathbf{x} = 0\}$$

```
C(A)=\,\ \ N(A)=\:A=0\
```

מרחב העמודות ומרחב האפס

$$r + \dim N(A) = n$$

```
r+ N(A)=n
```

משפט הדרגה והאפסות

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_n$$

פתרון מלא של Ax = b

$$\dim N(A^T) = m - r$$

`N(A^T)=m-r`

מרחב האפס השמאלי

דוגמאות פתורות שלב אחר שלב

דוגמה 5.1 מצאו את הדרגה ובסיס למרחב האפס של $A = [[1, 2, 3], [2, 4, 6], [1, 0, 1]]$.

1. $R_2 - 2R_1 = [0, -2, -2]$; $R_3 - R_1 = [0, -2, -2]$. שני איברים מובילים, ולכן $r = 2$.
2. $Ax = 0$: $x + z = 0$ ו-$-2y - 2z = 0$, כאשר z חופשי.
3. קחו $z = 1$: $x = -1$, $y = -1$.

תשובה: $r = 2$, $N(A)$ נפרש על ידי $(1, -1, -1)$; $\dim N(A) = 3 - 2 = 1$.

דוגמה 5.2 האם $(1, 2, 3)$, $(4, 5, 6)$, $(7, 8, 9)$ בלתי תלויים?

1. דרגו את המטריצה שאלה עמודותיה: $R_2 - 2R_1$ ו-$R_3 - 3R_1$ נותנות את השורות $[-6, -3, 0]$ ו-$[-12, -6, 0]$, שהן כפולות זו של זו.
2. רק שני איברים מובילים.

תשובה: $(7, 8, 9) = 2(4, 5, 6) - (1, 2, 3)$: No.

דוגמה 5.3 למטריצה 8×5 דרגה 3. תנו את הממדים של ארבעת תת-המרחבים היסודיים שלה.

1. $C(A)$ ו-$C(A^T)$: $r = 3$.
2. $N(A)$: $n - r = 8 - 3$; $N(A^T)$: $m - r = 5 - 3$.

תשובה: 3, 3, 5 ו-2.

תרגילים

פתרו כל אחד קודם על נייר, ואז בדקו.

1. האם הישר $y = 2x + 1$ הוא תת-מרחב של $\mathbb{R}^2$?

   לא: הוא אינו מכיל את $(0, 0)$.

2. למטריצה 4×4 מרחב אפס ממימד 2. מהי הדרגה שלה?

   $4 - 2 = 2$.

3. מהו המימד של מרחב המטריצות 2 × 2?

4.

4. האם 4 וקטורים ב-$\mathbb{R}^3$ יכולים להיות בלתי תלויים?

לא: לכל היותר 3.

תפיסות שגויות נפוצות

מיתוס: כל מישור ב-$\mathbb{R}^3$ הוא תת-מרחב.

בפועל: רק מישורים העוברים בראשית.

מיתוס: הדרגה סופרת איברים שונים מאפס.

בפועל: היא סופרת איברים מובילים (עמודות בלתי תלויות).

מיתוס: מרחב האפס נמצא באותו מרחב כמו b.

בפועל: N(A) נמצא ב-$\mathbb{R}^n$ (צד ה-x); b נמצא ב-$\mathbb{R}^m$.

כרטיסיות

תת-מרחב

מכיל 0; סגור ל-+ ולכפל בסקלר.

מרחב העמודות

All Ax.

מרחב האפס

כל ה-x שעבורם Ax = 0.

בסיס

קבוצה פורשת בלתי תלויה.

דרגה

מספר האיברים המובילים.

משפט הדרגה והאפסות

r + dim N(A) = n.

בוחן לבדיקה עצמית

1. משפט הדרגה והאפסות אומר ש-r + dim N(A) שווה ל...

m

n

m + n

r

n. מספר העמודות.

2. ל-Ax = b יש פתרון בדיוק כאשר b נמצא ב...

N(A)

C(A)

$N(A^T)$

$C(A^T)$

b .C(A) חייב להיות צירוף של העמודות.

3. מרחב האפס ניצב ל...

מרחב העמודות

מרחב השורות

b

מרחב האפס השמאלי

מרחב השורות. המכפלה הסקלרית של כל שורה ב-x היא 0.

4. כמה וקטורים יש בבסיס של $\mathbb{R}^3$?

2

3

4

כל מספר

3. מימד 3.

לנסות שוב את הבוחן

איך זה עוזר להציל את כדור הארץ

המימד סופר נעלמים, ותחזיות טובות יותר צריכות יותר מהם. NOAA אמרה ששדרוג מחשבי-העל שלה ב-2023 יאפשר למערכת התחזית הגלובלית של ארה"ב (Global Forecast System) לשפר את הרזולוציה האופקית שלה מ-13 km ל-9 km, מה שעוזר לראות ולדמות תופעות בקנה מידה קטן יותר.

לרשת עם מרווח h יש כ-(1/h)² עמודות ליחידת שטח, ולכן מעבר מ-13 km ל-9 km מכפיל את מספר עמודות הרשת פי (13/9)² = 2.09. כל אחת מהעמודות האלה נושאת טמפרטורה, רוח, לחות ולחץ ברמות רבות, כך שווקטור המצב של תחזית נמצא במרחב ממימד גבוה בהרבה, והמטריצות שמעדכנות אותו גדלות בהתאם.

ב־Saving Planets: חשבון אינפיניטסימלי 3 · משוואות דיפרנציאליות

מקורות: NOAA: NOAA completes upgrade to weather and climate supercomputer system (Aug. 10, 2023) (https://www.noaa.gov/news-release/noaa-completes-upgrade-to-weather-and-climate-supercomputer-system) · Interactive Linear Algebra, 2.7 Basis and dimension (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/dimension.html)

מקורות לימוד חינמיים

- Interactive Linear Algebra, 2.6 Subspaces (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/subspaces.html): קטע מטקסט חינמי.
- Interactive Linear Algebra, 2.5 Linear independence (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/linear-independence.html): מבחני אי-תלות.
- Interactive Linear Algebra, 2.9 The rank theorem (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/rank-thm.html): דרגה ואפסות.
- MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra (Strang, Spring 2010) https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-201)0/): הרצאות 10–5: מרחבים, דרגה וארבעת תת-המרחבים.

צפו בהרצאה

Lecture 10: The four fundamental subspaces (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/resources/lecture-10-the-four-fundamental-subspaces/) (באנגלית)

MIT 18.06 Linear Algebra (Spring 2010), MIT OpenCourseWare. רישיון: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · תנאי שימוש (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). הקישור מיועד ללימוד חינמי בלבד; Saving Planets אינו קשור לאוניברסיטה זו ואינו נתמך על ידה.

☐ **סיימתי את היחידה הזו**

אורתוגונליות, היטלים, ריבועים פחותים וגרם–שמידט

וקטורים ותת-מרחבים ניצבים, היטל על ישר ועל תת-מרחב, המשוואות הנורמליות $A^TA\hat{x} = A^Tb$, התאמת ישרים ועקומות לנתונים בשיטת הריבועים הפחותים, בסיסים אורתונורמליים, גרם–שמידט ו-$A = QR$.

מטרות הלמידה

בסוף היחידה הזו תוכלו:

- הטילו וקטור על ישר ועל מרחב עמודות.
- התאימו ישר לנתונים בעזרת המשוואות הנורמליות.
- בנו בסיס אורתונורמלי בשיטת גרם–שמידט.
- הסבירו מדוע ריבועים פחותים הם היטל.

מושגי מפתח

- ההיטל של b על הישר דרך a הוא $p = (a\cdot b/a\cdot a)\,a$; השגיאה $e = b - p$ ניצבת ל-a.
- כאשר $Ax = b$ אין פתרון (יותר משוואות מנעלמים, נתונים רועשים), בחרו $\hat{x}$ כך ש-$\|b - Ax\|$ יהיה קטן ככל האפשר. השגיאה חייבת להיות ניצבת ל-$C(A)$, וזה נותן את המשוואות הנורמליות $A^TA\hat{x} = A^Tb$.
- עבור ישר $y = C + Dt$ דרך הנקודות (t_i, y_i), עמודות A הן עמודת אחדות ועמודת ערכי t_i.
- וקטורים אורתונורמליים q_i מקיימים $q_i\cdot q_j = 0$ $(i \neq j)$ ו-$\|q_i\| = 1$. כשלמטריצה Q עמודות אורתונורמליות, $Q^TQ = I$ וההיטלים נעשים $p = QQ^Tb$.
- גרם–שמידט מחסר מכל וקטור חדש את ההיטלים שלו על הקודמים, ואז מנרמל. התוצאה היא $A = QR$ עם R משולשית עליונה.

משוואות מפתח

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\,\mathbf{a}$$

היטל על ישר

$$A^TA\hat{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b}$$

A^TA=A^T

משוואות נורמליות

$$P = A(A^TA)^{-1}A^T$$

P=A(A^TA)^-1A^T

מטריצת היטל

$$A = QR$$

דוגמאות פתורות שלב אחר שלב

דוגמה 6.1 הטילו את $b = (2, 3)$ על $a = (1, 1)$.

1. $a\cdot b = 5$, $a\cdot a = 2$.
2. $p = 2.5(1, 1)$; $e = b - p = (-0.5, 0.5)$, ו-$e\cdot a = 0$.

תשובה: $p = (2.5, 2.5)$.

דוגמה 6.2 התאימו $y = C + Dt$ לנקודות $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 4)$ בריבועים פחותים.

1. לשורות A: $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(1, 2)$; $A^TA = [[3, 3], [3, 5]]$, $A^Tb = (7, 10)$.
2. $\det = 6$; $C = (5 \times 7 - 3 \times 10)/6$, $D = (3 \times 10 - 3 \times 7)/6$.

תשובה: $y = 0.833 + 1.5t$: $C = 0.833$, $D = 1.5$.

דוגמה 6.3 הפעילו גרם–שמידט על $a_1 = (1, 1, 0)$, $a_2 = (1, 0, 1)$.

1. $q_1 = (1, 1, 0)/\sqrt{2}$.
2. $a_2 - (a_2\cdot q_1)q_1 = (1, 0, 1) - \tfrac{1}{2}(1, 1, 0) = (0.5, -0.5, 1)$, באורך $\sqrt{1.5} = 1.225$.

תשובה: $q_1 = (0.707, 0.707, 0)$, $q_2 = (0.408, -0.408, 0.816)$.

תרגילים

פתרו כל אחד קודם על נייר, ואז בדקו.

1. הטילו את $(3, 4)$ על $(1, 0)$.

   $(3, 0)$.

2. כתבו את המשוואות הנורמליות להתאמת $y = Dt$ (ללא חותך) לנקודות $(1, 2)$, $(2, 3)$.

   $\Sigma t^2\, D = \Sigma ty$: $5D = 8$, $D = 1.6$.

3. האם $Q = [[0, 1], [1, 0]]$ אורתוגונלית?

   כן: $Q^TQ = I$.

4. אם b כבר נמצא ב-C(A), מהי שגיאת הריבועים הפחותים?

אפס: $p = b$.

תפיסות שגויות נפוצות

מיתוס: ריבועים פחותים פותרים את $Ax = b$ במדויק.

בפועל: הם מוצאים את ה-$A\hat{x}$ הקרוב ביותר כשאין פתרון מדויק.

מיתוס: כל בסיס הופך היטלים לקלים.

בפועל: בסיסים אורתונורמליים כן; אחרת צריך את $(A^TA)^{-1}$.

מיתוס: התאמה לישר פירושה שהנתונים ליניאריים.

בפועל: בדקו את השאריות; ייתכן שעקומה תתאים טוב יותר (הוסיפו עמודת t^2).

כרטיסיות

היטל על ישר

$p = (a \cdot b / a \cdot a)a$.

משוואות נורמליות

$A^TA\hat{x} = A^Tb$.

מטריצת היטל

$P = A(A^TA)^{-1}A^T$.

אורתונורמלי

$q_i \cdot q_j = 0, \|q_i\| = 1$.

גרם–שמידט

חסרו היטלים, נרמלו.

QR

$A = QR$.

בוחן לבדיקה עצמית

1. המשוואות הנורמליות הן…

$Ax = b$

$A^TA\hat{x} = A^Tb$

$AA^Tx = b$

$A^Tx = b$

A^Tb $A^TA\hat{x}$ =. שגיאה ניצבת ל-C(A).

2. וקטור השגיאה של הריבועים הפחותים ניצב ל…

b

מרחב העמודות

מרחב האפס

$\hat{x}$

מרחב העמודות. זה מה שהופך אותו לקצר ביותר.

3. עבור Q עם עמודות אורתונורמליות, Q^TQ =…

0

Q

I

QQ^T

I. מכפלות סקלריות 0 או 1.

4. גרם–שמידט מפיק…

A = LU

A = QR

$A = PDP^{-1}$

$A = U\Sigma V^T$

A = QR. Q אורתונורמלית, R משולשית.

לנסות שוב את הבוחן

איך זה עוזר להציל את כדור הארץ

עליית מפלס הים נמדדת בהתאמת עקומות לנתוני לוויין רועשים. NASA מדווחת שמדי גובה לווייניים, TOPEX/Poseidon, Jason-1, -2 ו--3 וכעת Sentinel-6 Michael Freilich, עוקבים אחר מפלס הים הממוצע העולמי מאז 1993, שהוא עלה מאז ב-114.4 mm, ושקצב העלייה גדל מ-0.08 אינץ' בשנה (0.20 cm בשנה) ב-1993 ל-0.17 אינץ' בשנה (0.44 cm בשנה) כיום, מהיר פי 2.2 בערך.

התאמת ישר בריבועים פחותים נותנת קצב ממוצע; הוספת עמודת t^2 ל-A מתאימה עקומה ששיפועה המשתנה מודד את ההאצה ש-NASA מתארת. מעבדה D מתאימה נתונים לדוגמה בצורת הרשומה של NASA בעזרת אותן משוואות נורמליות בדיוק מהיחידה הזאת.

ב־Saving Planets: אוקיינוסים · תצפית על כדור הארץ

מקורות: Interactive Linear Algebra, 6.5 The method of least squares (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/least-squares.html) · NASA: Global mean sea level (Vital Signs) (https://sealevel.nasa.gov/vital-signs/global-mean-sea-level/)

מקורות לימוד חינמיים

- Interactive Linear Algebra, 6.3 Orthogonal projection (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/projections.html): קטע מטקסט חינמי.
- Interactive Linear Algebra, 6.5 The method of least squares (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/least-squares.html): ריבועים פחותים בתמונות.
- Interactive Linear Algebra, 6.4 Orthogonal sets (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/orthogonal-sets.html): גרם–שמידט.
- MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra (Strang, Spring 2010) https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/0/): הרצאות 17–14: אורתוגונליות, היטלים, ריבועים פחותים, גרם–שמידט.

צפו בהרצאה

Lecture 16: Projection matrices and least squares (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/resources/lecture-16-projection-matrices-and-least-squares/) (באנגלית)

MIT 18.06 Linear Algebra (Spring 2010), MIT OpenCourseWare. רישיון: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · תנאי שימוש (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). הקישור מיועד ללימוד חינמי בלבד; Saving Planets אינו קשור לאוניברסיטה זו ואינו נתמך על ידה.

☐ **סיימתי את היחידה הזו**

דטרמיננטות: תכונות, קו-פקטורים, כלל קרמר ונפח

הדטרמיננטה מתוך תכונותיה, חישובה בדירוג ובפיתוח לפי מינורים, det(AB) = det A det B, מבחן ההפיכות, כלל קרמר, והדטרמיננטה כמקדם שינוי השטח או הנפח של העתקה ליניארית.

מטרות הלמידה

בסוף היחידה הזו תוכלו:

- חשבו דטרמיננטות 2 × 2 ו-3 × 3 בפיתוח לפי מינורים ובדירוג.
- השתמשו בתכונות הדטרמיננטה תחת פעולות שורה.
- פתרו מערכות קטנות בכלל קרמר.
- פרשו את |det A| כמקדם שינוי שטח או נפח.

מושגי מפתח

- det A ≠ 0 בדיוק כאשר A הפיכה. הדטרמיננטה של מטריצה משולשית היא מכפלת איברי האלכסון שלה, ולכן det A = ± (מכפלת האיברים המובילים).
- פעולות שורה: החלפה הופכת את הסימן, כפל שורה ב-c מכפיל את det ב-c, והוספת כפולה של שורה אחת לאחרת אינה משנה את det.
- det(AB) = det A · det B ,det(Aᵀ) = det A ו-det(A⁻¹) = 1/det A.
- פיתוח לפי שורה: det A = Σ $a_{ij}C_{ij}$ כאשר $C_{ij} = (-1)^{i+j}$ כפול המינור. כלל קרמר: $x_i = \det(B_i)/\det A$, כאשר B_i העמודה i מוחלפת ב-b.
- העתקה ליניארית x ↦ Ax מכפילה שטחים (2D) או נפחים (3D) ב-|det A|; דטרמיננטה שלילית גם הופכת את הכיוון.

משוואות מפתח

$$\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

&b\&d=ad-bc

דטרמיננטה 2 × 2

$$\det(AB) = \det A \, \det B$$

(AB)= A B

כלל המכפלה

$$x_i = \frac{\det B_i}{\det A}$$

x_i=(B_i)/(A)

כלל קרמר

$$\operatorname{area}(AS) = |\det A| \operatorname{area}(S)$$

```
area(AS)=| A| area(S)
```

מקדם שינוי שטח

דוגמאות פתורות שלב אחר שלב

דוגמה 7.1 מצאו את det [[1, 2, 0], [0, 1, 3], [2, 0, 1]] בפיתוח לפי שורה 1.

1. 1 × (1 × 1 − 3 × 0) = 1.
2. −2 × (2 × 1 − 3 × 0) = −2 × 2 = −6 − 12 = 12.
3. 0 + 0 × (…) = 0.

תשובה: det = 13.

דוגמה 7.2 פתרו 2x + y = 5, x + 3y = 10 בכלל קרמר.

1. det A = 6 − 1 = 5.
2. x = det[[5, 1], [10, 3]]/5 = (15 − 10)/5 = 1.
3. y = det[[2, 5], [1, 10]]/5 = (20 − 5)/5 = 3.

תשובה: x = 1, y = 3.

דוגמה 7.3 מצאו את שטח המקבילית שצלעותיה (3, 0) ו-(1, 2).

1. שטח = |det [[3, 1], [0, 2]]| = |6 − 0| = 6.

תשובה: 6 יחידות שטח.

תרגילים

פתרו כל אחד קודם על נייר, ואז בדקו.

1. det [[3, 1], [2, 4]]?

   12 − 2 = 10.

2. det [[2, 0, 1], [1, 3, 2], [1, 1, 1]]?

   1(3 − 2) − 0 + 2(1 − 3) = 0, ולכן היא סינגולרית.

3. אם $\det A = 4$ עבור A מסדר 3×3, מהו $\det(2A)$?

$2^3 \times 4 = 32$.

4. אם $\det A = 5$, מהו $\det(A^{-1})$?

$1/5 = 0.2$.

תפיסות שגויות נפוצות

מיתוס: $\det(A + B) = \det A + \det B$.

בפועל: לא נכון באופן כללי; רק $\det(AB)$ מתפרק.

מיתוס: $\det(2A) = 2 \det A$.

בפועל: עבור $n \times n$, $\det(2A) = 2^n \det A$.

מיתוס: פיתוח לפי מינורים הוא הדרך המהירה.

בפועל: הוא דורש כ-$n!$ צעדים; דירוג כ-$n^3/3$.

כרטיסיות

2×2 det

$ad - bc$.

הפיכות

$\det A \neq 0$.

כלל המכפלה

$\det(AB) = \det A \det B$.

החלפת שורות

הופכת את הסימן.

כלל קרמר

$x_i = \det B_i / \det A$.

מקדם שטח

$|\det A|$.

בוחן לבדיקה עצמית

1. החלפת שתי שורות מכפילה את det ב...

0

1

−1

2

-1. הסימן מתהפך.

2. פירושו ש-A... det A = 0

אורתוגונליים

סינגולרית

סימטרית

מטריצת היחידה

סינגולרית. לא הפיכה.

3. הדטרמיננטה של מטריצה משולשית היא...

העקבה

מכפלת האלכסון

אפס

סכום האלכסון

מכפלת האלכסון. פתחו לאורך האלכסון.

4. העתקה עם det = 3 משנה שטחים פי...

1/3

3

9

√3

3. |det A|.

לנסות שוב את הבוחן

איך זה עוזר להציל את כדור הארץ

המרת פיקסלים לשטח קרקע היא דטרמיננטה. USGS מציינת עבור Landsat 9 ערוצים רב-ספקטרליים ברזולוציה 30 m וערוץ פנכרומטי ברזולוציה 15 m. ההעתקה מאינדקסי הפיקסל (i, j) לקואורדינטות קרקע היא, מקומית, מטריצה; עבור רשת מיושרת של 30 m היא $\operatorname{diag}(30, 30)$ m, שהדטרמיננטה שלה 900, ולכן כל פיקסל מכסה 900 m². לרשת הפנכרומטית של 15 m דטרמיננטה 225 m², כך שארבעה פיקסלים פנכרומטיים נכנסים בפיקסל רב-ספקטרלי אחד.

ספירת הפיקסלים שסווגו כיער והכפלה במקדם הזה היא הדרך שבה רשומות לוויין מודדות אובדן יערות בהקטרים (1 ha = 10000 m², כ-11.1 פיקסלים של Landsat). כאשר תמונה מסובבת או נגזרת כדי להתאים למפה, הדטרמיננטה של המטריצה החדשה שומרת על השטח הנכון.

ב־Saving Planets: בירוא יערות · תצפית על כדור הארץ

מקורות: Interactive Linear Algebra, 4.3 Determinants and volumes (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/determinants-volumes.html) · USGS: Landsat 9 (https://www.usgs.gov/landsat-missions/landsat-9)

מקורות לימוד חינמיים

- Interactive Linear Algebra, 4.1 Determinants: definition (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/determinants-definitions-properties.html): קטע מטקסט חינמי.
- Interactive Linear Algebra, 4.3 Determinants and volumes (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/determinants-volumes.html): משמעות גאומטרית.
- MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra (Strang, Spring 2010) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/): הרצאות 20–18: דטרמיננטות, מינורים, כלל קרמר.
- Jim Hefferon, Linear Algebra (free text) (https://hefferon.net/linearalgebra/): פרק ארבע: דטרמיננטות.

צפו בהרצאה

Lecture 20: Cramer's rule, inverse matrix, and volume (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/resources/lecture-20-cramers-rule-inverse-matrix-and-volume/) (באנגלית)

MIT 18.06 Linear Algebra (Spring 2010), MIT OpenCourseWare. רישיון: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · תנאי שימוש (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use). הקישור מיועד ללימוד חינמי בלבד; Saving Planets אינו קשור לאוניברסיטה זו ואינו נתמך על ידה.

☐ **סיימתי את היחידה הזו**

ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים

וקטורים עצמיים ככיוונים שמטריצה רק מותחת, המשוואה האופיינית det(A − λI) = 0, בדיקות עקבה ודטרמיננטה, ערכים עצמיים של מטריצות מיוחדות, ערכים עצמיים מרוכבים וסיבוב, שיטת החזקה, ואופני תנודה טבעיים של מבנים רוטטים.

מטרות הלמידה

בסוף היחידה הזו תוכלו:

- מצאו ערכים עצמיים מ-det(A − λI) = 0 ווקטורים עצמיים ממרחב האפס של A − λI.
- בדקו ערכים עצמיים בעזרת העקבה והדטרמיננטה.
- זהו ערכים עצמיים ממשיים, חוזרים ומרוכבים.
- השתמשו בשיטת החזקה למציאת הערך העצמי הדומיננטי.

מושגי מפתח

- Av = λv עם v ≠ 0: הווקטור העצמי v שומר על כיוונו ומוכפל בערך העצמי λ.
- הערכים העצמיים הם שורשי det(A − λI) = 0, פולינום ממעלה n. לכל λ, הווקטורים העצמיים ממלאים את מרחב האפס של A − λI.
- בדיקות: סכום הערכים העצמיים הוא העקבה (סכום האלכסון) ומכפלתם היא det A.
- למטריצות סימטריות ערכים עצמיים ממשיים ווקטורים עצמיים ניצבים. למטריצות סיבוב ערכים עצמיים מרוכבים. מטריצות משולשיות מציגות את ערכיהן העצמיים על האלכסון.
- שיטת החזקה: הכפילו שוב ושוב וקטור התחלתי ב-A ונרמלו; הוא מתיישר עם הווקטור העצמי של ה-|λ| הגדול ביותר. בתנודות, Kv = ω²Mv נותנת את התדירויות הטבעיות ω ואת צורות האופנים v.

משוואות מפתח

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

משוואת הערכים העצמיים

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

```
(A- I)=0
```

המשוואה האופיינית

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = \operatorname{tr} A, \;\; \lambda_1 \cdots \lambda_n = \det A$$

```
_1+⋯+_n=,\ \ _1⋯_n= A
```

בדיקות עקבה ודטרמיננטה

$$K\mathbf{v} = \omega^2 M\mathbf{v}$$

דוגמאות פתורות שלב אחר שלב

דוגמה 8.1 מצאו את הערכים והווקטורים העצמיים של $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

1. $\det(A - \lambda I) = (2 - \lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$.
2. עבור $\lambda = 3$: $A - 3I = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ נותנת $v = (1, 1)$. עבור $\lambda = 1$: $v = (1, -1)$.
3. בדיקה: עקבה $= 4 = 1 + 3$; $\det = 3 = 1 \times 3$.

תשובה: $\lambda = 3$ עם $(1, 1)$; $\lambda = 1$ עם $(1, -1)$.

דוגמה 8.2 מצאו את הערכים העצמיים של $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

1. $\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$ (עקבה 7, $\det 10$).
2. $(\lambda - 5)(\lambda - 2) = 0$.

תשובה: $\lambda = 5$ ו-$\lambda = 2$.

דוגמה 8.3 לבניין לדוגמה בן שתי קומות מסות קומה שוות m וקשיחות קומה k, עם $K/m = (k/m)\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ו-$k/m = 100$ s^{-2}. מצאו את התדירות היסודית.

1. הערכים העצמיים של $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$: $\lambda = (3 \pm \sqrt{5})/2 = 0.382$ ו-2.618.
2. $\omega_1^2 = 100 \times 0.382 = 38.2\ s^{-2}$, $\omega_1 = 6.18$ rad/s.
3. $f_1 = \omega_1/(2\pi)$, $T_1 = 1/f_1$.

תשובה: $f_1 = 0.984$ Hz, זמן מחזור $T_1 = 1.02$ s (ערכים לדוגמה).

תרגילים

פתרו כל אחד קודם על נייר, ואז בדקו.

1. הערכים העצמיים של $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$?

   5 ו--2 (האלכסון).

2. למטריצה 3×3 ערכים עצמיים 1, 2, 3. מצאו את העקבה והדטרמיננטה שלה.

   עקבה 6, $\det 6$.

3. הערכים העצמיים של הסיבוב ב-$90°$ $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$?

λ² + 1 = 0: λ = ±i.

4. אם Av = 4v, מהו A²v?

16v.

תפיסות שגויות נפוצות

מיתוס: וקטור האפס הוא וקטור עצמי.

בפועל: וקטורים עצמיים חייבים להיות שונים מאפס.

מיתוס: דירוג שומר על הערכים העצמיים.

בפועל: הוא משנה אותם; השתמשו ב-det(A − λI).

מיתוס: לכל מטריצה ממשית ערכים עצמיים ממשיים.

בפועל: סיבובים נותנים ערכים מרוכבים; מטריצות סימטריות הן המקרה הבטוח.

כרטיסיות

וקטור עצמי

Av = λv, v ≠ 0.

המשוואה האופיינית

det(A − λI) = 0.

בדיקת עקבה

עקבה = Σλ.

בדיקת דטרמיננטה

Πλ = det A.

שיטת החזקה

הכפלה חוזרת מוצאת את הווקטור העצמי המוביל.

אופנים טבעיים

Kv = ω²Mv.

בוחן לבדיקה עצמית

1. הערכים העצמיים של מטריצה משולשית הם...

האיברים המובילים שלה אחרי החלפות

איברי האלכסון שלה

כולם 1

סכומי השורות שלה

איברי האלכסון שלה. det(A − λI) הוא מכפלה של איברי אלכסון.

2. סכום הערכים העצמיים שווה ל…

דטרמיננטה

העקבה

דרגה

n

העקבה. בדיקת עקבה.

3. שיטת החזקה מוצאת את…

הערך העצמי הקטן ביותר

הערך העצמי הדומיננטי

דטרמיננטה

את ההפכית

הערך העצמי הדומיננטי. ה-|λ| הגדול ביותר מנצח.

4. למטריצות סימטריות יש…

ערכים עצמיים מרוכבים

ערכים עצמיים ממשיים ווקטורים עצמיים ניצבים

דטרמיננטה אפס

אין וקטורים עצמיים

ערכים עצמיים ממשיים ווקטורים עצמיים ניצבים. המשפט הספקטרלי.

לנסות שוב את הבוחן

איך זה עוזר להציל את כדור הארץ

מהנדסי רעידות אדמה קוראים מבנים דרך הערכים העצמיים שלהם. מחקר של USGS מאת מהמט צ׳לבי (2022) השתמש בזמני המחזור היסודיים ובאחוזי הריסון הקריטי של 41 בניינים גבוהים בכמה מדינות. הוא מצא מגמה ליניארית ברורה בין גובה הבניין לזמן המחזור היסודי בבניינים מפלדה ומבטון מזוין, אם כי עם פיזור גדול בשל תכנונים מבניים שונים, ושהריסון הקריטי נמוך בבירור מ-3%, בהתאם למחקרים עדכניים אחרים על בניינים גבוהים.

זמן המחזור היסודי נקבע על ידי הערך העצמי הקטן ביותר של בעיית הקשיחות–מסה, כמו בדוגמת הבניין בן שתי הקומות. ריסון נמוך פירושו שבניין גבוה יכול לרטוט זמן רב כשגלי רעידה ארוכי מחזור תואמים את זמן המחזור הזה, ולכן בניינים מצוידים במכשור והאופנים הנמדדים שלהם מכוונים לערים בטוחות ועמידות יותר.

ב־Saving Planets: משוואות דיפרנציאליות · דינמיקה

מקורות: USGS: Preliminary study of correlation of natural periods and damping percentages of tall buildings in several countries (Çelebi, 2022) (https://www.usgs.gov/publications/preliminary-study-correlation-natural-periods-and-damping-percentages-tall-buildings) · Interactive Linear Algebra, 5.1 Eigenvalues and eigenvectors (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/eigenvectors.html)

מקורות לימוד חינמיים

- Interactive Linear Algebra, 5.1 Eigenvalues and eigenvectors (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/eigenvectors.html): קטע מטקסט חינמי.
- Interactive Linear Algebra, 5.2 The characteristic polynomial (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/characteristic-polynomial.html): מציאת ערכים עצמיים.
- Interactive Linear Algebra, 5.5 Complex eigenvalues (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/complex-eigenvalues.html): סיבוב ומתיחה.
- MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra (Strang, Spring 2010) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/): הרצאה 21: ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים.

סיימתי את היחידה הזו

לכסון, חזקות מטריצות, שרשראות מרקוב ומערכות דינמיות ליניאריות

לכסון $A = PDP^{-1}$, חישוב מהיר של חזקות A^k, מטריצות סימטריות והמשפט הספקטרלי $A = Q\Lambda Q^T$, מטריצות מרקוב (סטוכסטיות) ומצבים יציבים, וההתנהגות לטווח ארוך של $x_{k+1} = Ax_k$.

מטרות הלמידה

בסוף היחידה הזו תוכלו:

- לכסנו מטריצה עם n וקטורים עצמיים בלתי תלויים.
- חשבו את A^k וחזו את ההתנהגות לטווח ארוך של $x_{k+1} = Ax_k$.
- מצאו את המצב היציב של שרשרת מרקוב.
- השתמשו במשפט הספקטרלי למטריצות סימטריות.

מושגי מפתח

- אם ל-A יש n וקטורים עצמיים בלתי תלויים (העמודות של P), אז $A = PDP^{-1}$ עם הערכים העצמיים על האלכסון של D, ו-$A^k = PD^kP^{-1}$.
- כתבו $x_0 = c_1v_1 + \dots + c_nv_n$. אז $x_k = A^kx_0 = c_1\lambda_1^kv_1 + \dots + c_n\lambda_n^kv_n$; ה-$|\lambda|$ הגדול ביותר שולט כש-k גדל.
- למטריצת מרקוב איברים אי-שליליים ועמודות שסכומן 1. תמיד יש לה $\lambda = 1$, ושאר הערכים העצמיים מקיימים $|\lambda| \le 1$. המצב היציב הוא הווקטור העצמי של $\lambda = 1$, מנורמל כך שסכום איבריו 1.
- ה-$|\lambda|$ השני בגודלו קובע כמה מהר שרשרת מרקוב שוכחת את נקודת ההתחלה: הפער מצטמצם כמו $|\lambda_2|^k$.
- המשפט הספקטרלי: מטריצה סימטרית ממשית ניתנת לכתיבה כ-$A = Q\Lambda Q^T$ עם וקטורים עצמיים אורתונורמליים ב-Q.

משוואות מפתח

$$A = PDP^{-1}, \;\; A^k = PD^kP^{-1}$$

A=PDP^-1,\ \ A^k=PD^kP^-1

לכסון וחזקות

$$\mathbf{x}_k = c_1\lambda_1^k\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\lambda_n^k\mathbf{v}_n$$

_k=c_1_1^k_1+⋯s+c_n_n^k_n

פתרון של x_{k+1} = Ax_k

$$P\mathbf{q} = \mathbf{q}, \;\; \sum q_i = 1$$

P=,\ \ q_i=1

מצב יציב של מרקוב

$$A = Q\Lambda Q^T$$

דוגמאות פתורות שלב אחר שלב

דוגמה 9.1 השתמשו בלכסון כדי למצוא את A^{10} עבור $A = [[2, 1], [1, 2]]$.

1. מיחידה 8: $\lambda = 3, 1$ עם $v = (1, 1), (1, -1)$. $P = [[1, 1], [1, -1]]$, $P^{-1} = \frac{1}{2}[[1, 1], [1, -1]]$.
2. $A^{10} = P\,\mathrm{diag}(3^{10}, 1)\,P^{-1}$; כל איבר הוא $(3^{10} \pm 1)/2$.

תשובה: $A^{10} = [[29525, 29524], [29524, 29525]]$.

דוגמה 9.2 מטריצת מרקוב היא $P = [[0.8, 0.3], [0.2, 0.7]]$ (ערכים לדוגמה). מצאו את המצב היציב.

1. $(P - I)q = 0$: $-0.2q_1 + 0.3q_2 = 0$, ולכן $q_1 = 1.5q_2$.
2. $q_1 + q_2 = 1$ נותן $q_2 = 0.4$.

תשובה: $q = (0.6, 0.4)$.

דוגמה 9.3 בהתחלה מ-$x_0 = (1, 0)$, מצאו את x_2 עבור אותה P, ואת x_k הכללי.

1. $x_1 = (0.8, 0.2)$; $x_2 = (0.64 + 0.06, 0.16 + 0.14)$.
2. הערכים העצמיים הם 1 ו-0.5 (עקבה 1.5, det 0.5), ולכן $x_k = (0.6, 0.4) + 0.5^k(0.4, -0.4)$.

תשובה: $x_2 = (0.70, 0.30)$; $x_k \to (0.6, 0.4)$.

תרגילים

פתרו כל אחד קודם על נייר, ואז בדקו.

1. האם $[[0.5, 0.2], [0.5, 0.8]]$ היא מטריצת מרקוב?

   כן: איברים אי-שליליים, סכום כל עמודה 1.

2. מצאו את המצב היציב שלה.

   $0.5q_1 = 0.2q_2$, ולכן $q = (2/7, 5/7) = (0.286, 0.714)$.

3. אם $A = PDP^{-1}$ עם $D = \mathrm{diag}(0.9, 0.5)$, מה קורה ל-$A^k x$ עבור k גדול?

   הוא דועך לאפס, כש-0.9^k שולט.

4. האם [[1, 1], [0, 1]] ניתנת ללכסון?

לא: λ = 1 פעמיים אבל רק וקטור עצמי בלתי תלוי אחד.

תפיסות שגויות נפוצות

מיתוס: כל מטריצה ניתנת ללכסון.

בפועל: נדרשים n וקטורים עצמיים בלתי תלויים; ל-[[1, 1], [0, 1]] יש רק אחד.

מיתוס: המצב היציב של שרשרת מרקוב תלוי בנקודת ההתחלה.

בפועל: בשרשרת רגולרית לא; כל התחלה מתכנסת לאותו q.

מיתוס: A^k פירושו העלאת כל איבר בחזקת k.

בפועל: רק מטריצות אלכסוניות עובדות כך; לכן מלכסנים.

כרטיסיות

לכסון

$A = PDP^{-1}$.

חזקת מטריצה

$A^k = PD^kP^{-1}$.

מטריצת מרקוב

אי-שלילית, סכום כל עמודה 1.

מצב יציב

$Pq = q$, סכום האיברים 1.

המשפט הספקטרלי

$A = Q\Lambda Q^T$.

מטריצה פגומה

מעט מדי וקטורים עצמיים לצורך לכסון.

בוחן לבדיקה עצמית

1. לכל מטריצת מרקוב יש הערך העצמי…

0

1

−1

2

1. סכום כל עמודה 1.

2. A^k עבור $A = PDP^{-1}$ הוא…

P^kDP^k

PD^kP^{-1}

D^kP

$kPDP^{-1}$

PD^kP^{-1}. ה-$P^{-1}P$ הפנימיים מצטמצמים.

3. מהירות ההתכנסות של שרשרת מרקוב נקבעת על ידי…

$\lambda_1 = 1$

$|\lambda_2|$

העקבה

n

$|\lambda_2|$. הפער מצטמצם כמו $|\lambda_2|^k$.

4. מטריצות סימטריות מתלכסנות בצורה…

LU

$Q\Lambda Q^T$

QR

רק $U\Sigma V^T$

$Q\Lambda Q^T$. המשפט הספקטרלי.

לנסות שוב את הבוחן

איך זה עוזר להציל את כדור הארץ

לאן החומרים מגיעים בסוף זו שרשרת מרקוב. EPA מדווחת שארה"ב ייצרה 292.4 מיליון טון פסולת מוצקה עירונית ב-2018, 4.9 ליברות לאדם ליום. כ-69 מיליון טון מוחזרו ו-25 מיליון טון קומפסטו, שיעור משולב של 32.1%; כ-35 מיליון טון (11.8%) נשרפו עם השבת אנרגיה; ויותר מ-146 מיליון טון (50%) הוטמנו.

אילו החלקים של כל שנה נשארו קבועים, חומר היה יוצא משימוש ליעדים האלה בהסתברויות האלה, ורק החלק הממוחזר היה חוזר לכלכלה. מעבדה E בונה מטריצת מעבר לדוגמה עם חלק השבה של 32.1% ומראה, בעזרת חזקות מטריצות והווקטור העצמי של $\lambda = 1$, כיצד הגדלת המיחזור משנה כמה זמן חומר נשאר בשימוש וכמה ממנו מגיע להטמנה.

ב־Saving Planets: פתרונות

מקורות: U.S. EPA: National overview, facts and figures on materials, wastes and recycling (https://www.epa.gov/facts-and-figures-about-materials-waste-and-recycling/national-overview-facts-and-figures-materials) · Interactive Linear Algebra, 5.6 Stochastic matrices (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/stochastic-matrices.html)

מקורות לימוד חינמיים

- Interactive Linear Algebra, 5.4 Diagonalization (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/diagonalization.html): קטע מטקסט חינמי.
- Interactive Linear Algebra, 5.6 Stochastic matrices (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/stochastic-matrices.html): שרשראות מרקוב ומצבים יציבים.
- MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra (Strang, Spring 2010) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/): הרצאות 25–22: לכסון, מטריצות מרקוב, מטריצות סימטריות.
- MIT OpenCourseWare 18.06SC Linear Algebra (self-paced, Fall 2011) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06sc-linear-algebra-fall-2011/): תרגולים על מטריצות מרקוב.

צפו בהרצאה

Lecture 22: Diagonalization and powers of A (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/resources/lecture-22-diagonalization-and-powers-of-a/) (באנגלית)

MIT 18.06 Linear Algebra (Spring 2010), MIT OpenCourseWare. רישיון: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · תנאי שימוש (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use). הקישור מיועד ללימוד חינמי בלבד; Saving Planets אינו קשור לאוניברסיטה זו ואינו נתמך על ידה.

☐ **סיימתי את היחידה הזו**

פירוק לערכים סינגולריים, ניתוח רכיבים ראשיים ומטריצות חיוביות מוגדרות

מטריצות חיוביות לחלוטין ו-A^TA, פירוק SVD $A = U\Sigma V^T$, ערכים סינגולריים והגאומטריה של מטריצה כסיבוב–מתיחה–סיבוב, הקירוב הטוב ביותר מדרגה נמוכה ודחיסת תמונות, מספר המצב, וניתוח רכיבים ראשיים של נתונים.

מטרות הלמידה

בסוף היחידה הזו תוכלו:

- בדקו אם מטריצה סימטרית חיובית לחלוטין.
- חשבו ערכים סינגולריים מהערכים העצמיים של A^TA.
- בנו קירוב מדרגה k ומדדו מה הוא שומר.
- בצעו ניתוח רכיבים ראשיים קטן.

מושגי מפתח

- מטריצה סימטרית היא חיובית לחלוטין כאשר $x^TAx > 0$ לכל $x \neq 0$; באופן שקול כל הערכים העצמיים (או כל האיברים המובילים) חיוביים. A^TA תמיד סימטרית וחיובית למחצה.
- לכל מטריצה $m \times n$ יש SVD $A = U\Sigma V^T$: ל-V ול-U עמודות אורתונורמליות, ו-Σ מכילה את הערכים הסינגולריים $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq 0$, השורשים הריבועיים של הערכים העצמיים של A^TA.
- $A = \sigma_1 u_1 v_1^T + \sigma_2 u_2 v_2^T + \dots$ שמירת k האיברים הראשונים נותנת את הקירוב הטוב ביותר מדרגה k (אקרט–יאנג); השגיאה בנורמה 2 היא σ_{k+1}.
- מספר המצב σ_1/σ_n מודד עד כמה שגיאות ב-b עלולות להתעצם בפתרון $Ax = b$.
- PCA: מרכזו את הנתונים (חסרו את ממוצעי העמודות); אז הווקטורים הסינגולריים הימניים (הווקטורים העצמיים של מטריצת השונויות המשותפות) הם הכיוונים הראשיים, ו-σ_i^2 מודד את השונות שכל אחד מסביר.

משוואות מפתח

$$A = U\Sigma V^T$$

A=U V^T

פירוק לערכים סינגולריים

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(A^TA)}$$

σ_i=_i(A^TA)

ערכים סינגולריים

$$A_k = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T$$

A_k=_i=1^kσ_i_i_i^T

$$\kappa = \sigma_1 / \sigma_n$$

מספר מצב

דוגמאות פתורות שלב אחר שלב

דוגמה 10.1 מצאו את הערכים הסינגולריים של A = [[3, 0], [4, 5]].

1. A^TA = [[25, 20], [20, 25]], ערכים עצמיים 45 ו-5.
2. σ_1 = √45, σ_2 = √5. בדיקה: |det A| = 15 = $\sigma_1\sigma_2$.

תשובה: σ_1 = 6.708, σ_2 = 2.236.

דוגמה 10.2 איזה חלק מה"אנרגיה" Σσ² של A^TA שומר הקירוב מדרגה 1 של אותה A?

1. $\sigma_1^2/(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ = 45/50.

תשובה: 90%.

דוגמה 10.3 תמונה בגווני אפור בגודל 1000 × 1000 נשמרת כ-SVD מדרגה 50. כמה מספרים נשמרים, בהשוואה לתמונה המלאה?

1. כל איבר צריך u אחד (1000), v אחד (1000) ו-σ אחד: 2001 מספרים.
2. 50 × 2001 = 100050 לעומת 1000000.

תשובה: 100050 מספרים, כ-10.0% מהמקור.

תרגילים

פתרו כל אחד קודם על נייר, ואז בדקו.

1. האם [[2, 1], [1, 2]] חיובית לחלוטין?

   כן: הערכים העצמיים 3 ו-1 חיוביים.

2. מצאו את מספר המצב של diag(10, 0.1).

   10/0.1 = 100.

3. לנתוני 2D ממורכזים מטריצת שונויות [[2, 1], [1, 2]]. איזה חלק מהשונות מסביר הרכיב הראשי הראשון?

ערכים עצמיים 3 ו-1: 75% = 3/4, לאורך (1, 1).

4. מהם הערכים הסינגולריים של מטריצה אורתוגונלית?

כולם שווים ל-1.

תפיסות שגויות נפוצות

מיתוס: הערכים הסינגולריים הם הערכים העצמיים של A.

בפועל: הם השורשים הריבועיים של הערכים העצמיים של A^TA, ולעולם אינם שליליים.

מיתוס: רק למטריצות ריבועיות יש SVD.

בפועל: לכל מטריצה יש.

מיתוס: PCA עובד על נתונים גולמיים.

בפועל: מרכזו קודם את הנתונים, ושנו קנה מידה למשתנים הנמדדים ביחידות שונות.

כרטיסיות

SVD

$A = U\Sigma V^T$.

ערך סינגולרי

$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(A^TA)}$.

חיובית לחלוטין

$x^TAx > 0$, כל $\lambda > 0$.

אקרט–יאנג

SVD קטוע הוא הקירוב הטוב ביותר מדרגה k.

מספר מצב

σ_1/σ_n.

PCA

SVD של הנתונים הממורכזים.

בוחן לבדיקה עצמית

1. ערכים סינגולריים הם…

כל מספר ממשי

אי-שליליים

תמיד שלמים

הערכים העצמיים של A

אי-שליליים. שורשים ריבועיים של הערכים העצמיים של A^TA, ≥ 0.

2. הקירוב הטוב ביותר מדרגה k שומר...

את k השורות הראשונות

את k האיברים הסינגולריים הגדולים ביותר

k עמודות אקראיות

את k ה-σ הקטנים ביותר

את k האיברים הסינגולריים הגדולים ביותר. אקרט–יאנג.

3. מספר מצב גדול פירושו...

מערכת מתנהגת היטב

ששגיאות עלולות להתעצם

ש-A אורתוגונלית

ש- $\det A = 1$

ששגיאות עלולות להתעצם. כמעט סינגולרית.

4. ב-PCA, הכיוון הראשי הראשון הוא...

את הממוצע

הווקטור הסינגולרי הימני העליון של הנתונים הממורכזים

מרחב האפס

השורה הראשונה

הווקטור הסינגולרי הימני העליון של הנתונים הממורכזים. כיוון השונות הגדולה ביותר.

לנסות שוב את הבוחן

איך זה עוזר להציל את כדור הארץ

ספקטרומטר ההדמיה EMIT של JPL ב-NASA, על תחנת החלל הבינלאומית, ממפה את המינרלים באזורי מקורות האבק של כדור הארץ. JPL אומרת שהוא אוסף יותר מ-100000 ספקטרומים בכל שנייה, שהם 3.6×10^8 ספקטרומים בשעה, ושהמשימה שלו הוארכה לפחות עד 2026. לאבק יש חשיבות לאקלים: JPL מציינת שמינרלים כהים בולעים אור שמש ומחממים את האוויר, ואילו מינרלים בהירים מחזירים אותו ומקררים.

כל ספקטרום הוא וקטור ארוך של מקדמי החזרה באורכי גל רבים, ואורכי גל סמוכים מתואמים מאוד. PCA ו-SVD דוחסים נתונים כאלה לרכיבים מעטים, מפרידים אות מרעש ומזהים את החתימות של מינרלים בודדים, אותה מתמטיקה כמו במעבדת דחיסת התמונות.

ב־Saving Planets: תצפית על כדור הארץ · חלל

מקורות: MIT OpenCourseWare · NASA JPL: EMIT, Earth Surface Mineral Dust Source Investigation (https://earth.jpl.nasa.gov/emit/) 18.06 Linear Algebra (Strang, Spring 2010) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/)

מקורות לימוד חינמיים

- MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra (Strang, Spring 2010) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-201 0/): הרצאות 29–27: מטריצות חיוביות לחלוטין ו-SVD.
- MIT OpenCourseWare 18.06SC Linear Algebra (self-paced, Fall 2011) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06sc-linear-algebra-fall-20 11/): מפגש על פירוק לערכים סינגולריים.
- Gilbert Strang, Introduction to Linear Algebra (book site) (https://math.mit.edu/~gs/linearalgebra/): הרשימות של סטרנג על SVD ונתונים.
- Jim Hefferon, Linear Algebra (free text) (https://hefferon.net/linearalgebra/): נושאים על מטריצות אורתוגונליות והיטלים.

צפו בהרצאה

Lecture 25: Symmetric matrices and positive definiteness (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/resources/le cture-25-symmetric-matrices-and-positive-definiteness/) (באנגלית)

MIT 18.06 Linear Algebra (Spring 2010), MIT OpenCourseWare. רישיון: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · תנאי שימוש (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use). הקישור מיועד ללימוד חינמי בלבד; Saving Planets אינו קשור לאוניברסיטה זו ואינו נתמך על ידה.

סיימתי את היחידה הזו

תרגילים

התרגילים האלה נמצאים בתוך כל יחידה. פתרו על הנייר, ואז פתחו את התשובה.

1. וקטורים: צירופים ליניאריים, אורכים ומכפלות סקלריות
   4 תרגילים
2. מערכות משוואות ליניאריות ודירוג גאוס
   4 תרגילים
3. אלגברת מטריצות: כפל, הפכיות ופירוק LU

4 תרגילים

4. מודלים ליניאריים: כלכלת תשומה–תפוקה (לאונטייף), רשתות ואיזון

4 תרגילים

5. מרחבים וקטוריים, תת-מרחבים, אי-תלות, בסיס, דרגה וארבעת תת-המרחבים היסודיים

4 תרגילים

6. אורתוגונליות, היטלים, ריבועים פחותים וגרם–שמידט

4 תרגילים

7. דטרמיננטות: תכונות, קו-פקטורים, כלל קרמר ונפח

4 תרגילים

8. ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים

4 תרגילים

9. לכסון, חזקות מטריצות, שרשראות מרקוב ומערכות דינמיות ליניאריות

4 תרגילים

10. פירוק לערכים סינגולריים, ניתוח רכיבים ראשיים ומטריצות חיוביות מוגדרות

4 תרגילים

המעבדה (Computation lab)

המעבדה היא החלק המעשי של הקורס. כאן היא חינמית ולתרגול בלבד, ללא נקודות זכות.

כל מעבדה מתבצעת בגיליון אלקטרוני חינמי או על נייר; גרסאות Python הן רשות. קחו הפסקות קבועות מהמסך, והשתמשו בסיכות ובמספריים בזהירות.

מקור בטיחות: OSHA: Computer workstations eTool (https://www.osha.gov/etools/computer-workstations)

מעבדה A: וקטורי פיקסלים ומדד צמחייה

שבוע 2

מטרה: התייחסו לפיקסלים של לוויין כאל וקטורים: חשבו אורכים, זוויות בין פיקסלים ואת ה-NDVI, וראו שצמחייה, קרקע ומים מצביעים לכיוונים שונים.

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}}{\|\mathbf{p}\|\|\mathbf{q}\|}, \quad \mathrm{NDVI} = \frac{\mathrm{NIR}-\mathrm{red}}{\mathrm{NIR}+\mathrm{red}}$$

```
θ=·\|\|\|\|, NDVI=-redNIR+red
```

זווית בין פיקסלים ו-NDVI

מהלך הניסוי

1. בגיליון אלקטרוני, הזינו שלושה פיקסלים לדוגמה כשורות של מקדמי החזרה (ירוק, אדום, NIR): צמחייה (0.10, 0.08, 0.40), קרקע (0.20, 0.25, 0.30), מים (0.06, 0.04, 0.02).
2. חשבו את אורך כל פיקסל עם SQRT(SUMSQ(…)) ואת המכפלה הסקלרית של כל זוג עם SUMPRODUCT.
3. מצאו את הזווית בין כל זוג עם ACOS ו-DEGREES.
4. חשבו NDVI לכל פיקסל. רשות: הורידו סצנת Landsat חינמית וחזרו על כך עם פיקסלים אמיתיים.

טבלת נתונים

פיקסל	ירוק	Red	NIR	NDVI
צמחייה	0.10	0.08	0.40	0.667
קרקע	0.20	0.25	0.30	0.091
מים	0.06	0.04	0.02	−0.333

מקדמי החזרה לדוגמה שנבחרו כך שידמו לצמחייה, קרקע חשופה ומים טיפוסיים.

חישוב לדוגמה

1. NDVI של צמחייה 0.667 = (0.40 + 0.08)/(0.40 − 0.08) =.
2. NDVI של קרקע 0.091 = 0.05/0.55 =; NDVI של מים −0.333 = −0.02/0.06 =.
3. זווית צמחייה–קרקע: מכפלה סקלרית 0.160 =, אורכים 0.420 ו-0.4387, 0.8683 = cos θ, θ = 29.7°.

בטיחות

- קחו הפסקת מסך קצרה כל חצי שעה.

חלופה ביתית או וירטואלית

- כל המעבדה מתבצעת בגיליון אלקטרוני חינמי.

PhET: Vector Addition (https://phet.colorado.edu/en/simulations/vector-addition) · USGS: Landsat 9 (https://www.usgs.gov/landsat-missions/landsat-9)

הקשר לכדור הארץ: USGS מפרטת את הערוצים האדום (ערוץ 4) והאינפרה-אדום הקרוב (ערוץ 5) של Landsat 9, והנתונים שלו חינמיים, כך שכל אחד יכול למפות צמחייה בדרך הזאת. USGS: Landsat 9 (https://www.usgs.gov/landsat-missions/landsat-9)

☐ **השלמתי את המעבדה הזו (רטובה או וירטואלית)**

מעבדה B: טרילטרציה, מחוטים למערכת ליניארית

שבוע 3

מטרה: מצאו מיקום ממרחקים, תחילה עם חוטים על מפה כמו בפעילות של GPS.gov, ואז בהפיכת משוואות המעגלים למערכת ליניארית ופתרונה בדירוג.

$$2(a_2-a_1)x+2(b_2-b_1)y=d_1^2-d_2^2+a_2^2-a_1^2+b_2^2-b_1^2$$

```
2(a_2-a_1)x+2(b_2-b_1)y=d_1^2-d_2^2+a_2^2-a_1^2+b_2^2-b_1^2
```

הפרש של שתי משוואות מעגל

מהלך הניסוי

1. הדפיסו את מפת הטרילטרציה של GPS.gov (ללא שינוי קנה מידה) או סמנו שלושה "לוויינים" על נייר משבצות ב-(0, 0), (10, 0) ו-(0, 10) cm.
2. המירו זמני אות למרחקים עם d = ct (c = 299792458 m/s); לגרסת הנייר השתמשו במרחקים לדוגמה שלהלן.
3. שרטטו מעגלים בעזרת חוט ועיפרון וסמנו היכן הם נחתכים.
4. חסרו את משוואות המעגלים בזוגות כדי לקבל שתי משוואות ליניאריות, פתרו אותן בדירוג בגיליון אלקטרוני, והשוו לשרטוט.

טבלת נתונים

משואה	מיקום (cm)	מרחק (cm)	d^2
1	(0 ,0)	5.000	25
2	(0 ,10)	8.062	65
3	(10 ,0)	6.708	45

מרחקים לדוגמה עבור מקלט ב-(3, 4) cm. הפעילות של GPS.gov משתמשת בארבעה לוויינים על מפה בקנה מידה 1:21283839.

חישוב לדוגמה

1. Eq. 1 − Eq. 2: 20x − 100 = −40, x = 3. Eq. 1 − Eq. 3: 20y − 100 = −20, y = 4.
2. זמן A של GPS.gov = 0.00505783 s נותן d = 1516299 m; בקנה מידה 1:21283839 זה 7.12 cm על המפה.

בטיחות

- השתמשו בנעצים ובמספריים בזהירות.

חלופה ביתית או וירטואלית

- גרסת החוט והנייר היא מעבדת הבית.

GPS.gov: Trilateration activity (https://www.gps.gov/trilateration) · Interactive Linear Algebra, 1.2 Row reduction (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/row-reduction.html)

הקשר לכדור הארץ: GPS.gov תכננה את הפעילות הזאת יחד עם NOAA; מקלטים אמיתיים פותרים מערכת מאותו סוג, עם נעלם של שעון, פעמים רבות בשנייה. · GPS.gov: Trilateration (NOAA classroom activity) (https://www.gps.gov/trilateration)

GPS.gov: Space segment (https://www.gps.gov/space-segment)

- [ ] **השלמתי את המעבדה הזו (רטובה או וירטואלית)**

מעבדה C: מטריצות כהעתקות של המישור

שבוע 4

מטרה: ראו מטריצות פועלות על צורות: מתחו, גזרו, סובבו ושקפו ריבוע על נייר משבצות, ווודאו ששטחים מוכפלים ב-|det A|.

$$\operatorname{area}(AS) = |\det A| \operatorname{area}(S)$$

```
area(AS)=| A| area(S)
```

מקדם שינוי שטח

מהלך הניסוי

1. שרטטו את ריבוע היחידה עם הקודקודים (0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1).
2. הכפילו כל קודקוד ב-[[2, 1], [0, 1]] = A (גזירה ומתיחה), ב-[[0, −1], [1, 0]] = R (סיבוב ב-90°) וב-[[1, 0], [0, −1]] = F (שיקוף).
3. שרטטו כל תמונה ומצאו את שטחה בספירת משבצות או בנוסחת השרוך.
4. השוו כל שטח ל-|det| וציינו אילו העתקות הופכות את הכיוון (det < 0). אחר כך בדקו ש-det(AR) = det A det R.

טבלת נתונים

מטריצה	det	שטח התמונה	כיוון
A = [[2, 1], [0, 1]]	2	2	נשמר
R (סיבוב ב-90°)	1	1	נשמר
F (שיקוף)	−1	1	התהפך
AR	2	2	נשמר

ערכים מדויקים לריבוע היחידה.

חישוב לדוגמה

1. det A = 2 × 1 − 1 × 0 = 2; התמונה היא מקבילית עם בסיס 2 וגובה 1.
2. det(AR) = det A × det R = 2 × 1 = 2.

בטיחות

- אין, מעבר לעבודה רגילה ליד שולחן.

חלופה ביתית או וירטואלית

- כל מה שצריך הוא נייר משבצות ועיפרון.

Interactive Linear Algebra, 3.1 Matrix transformations (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/matrix-transformations.html) · Interactive Linear Algebra, 4.3 Determinants and volumes (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/determinants-volumes.html)

הקשר לכדור הארץ: היטלי מפות ורישום תמונות משתמשים באותן מטריצות; הדטרמיננטה שומרת על מדידות שטח אמינות של יערות והצפות. USGS: Landsat 9 (https://www.usgs.gov/landsat-missions/landsat-9)

☐ **השלמתי את המעבדה הזו (רטובה או וירטואלית)**

מעבדה D: התאמת ריבועים פחותים לנתוני מפלס הים

שבוע 9

מטרה: התאימו ישר, ואחר כך פרבולה, לנתוני מפלס הים בעזרת המשוואות הנורמליות, והשוו להתאמה המובנית של הגיליון האלקטרוני.

$$A^{T}A\hat{\mathbf{x}} = A^{T}\mathbf{b}, \quad A = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{t} \end{bmatrix}$$

A^TA=A^T, A=[1\ \ ]

משוואות נורמליות עבור y = C + Dt

מהלך הניסוי

1. הזינו את הנתונים לדוגמה שלהלן (או הורידו את הרשומה של NASA מדף Vital Signs שלה): t בשנים מאז 1993 ו-h ב-mm.
2. בנו את A עם עמודת אחדות ועמודת t. חשבו את $A^{T}A$ ואת $A^{T}b$ עם MMULT ו-TRANSPOSE, ואז $\hat{x}$ = MINVERSE($A^{T}A$)·$A^{T}b$.
3. בדקו מול LINEST או קו מגמה בתרשים. שרטטו את השאריות $b - Ax$.
4. הוסיפו עמודת t^{2} והתאימו מחדש. מקדם t^{2} חיובי פירושו שהעלייה מואצת.

טבלת נתונים

t (שנים מאז 1993)	0	8	16	24	32
h (mm)	0	22	48	78	114

ערכים לדוגמה בצורת הרשומה של NASA (המדווחת על עלייה של 114.4 mm מאז 1993); השתמשו בנתונים האמיתיים לתשובה אמיתית.

חישוב לדוגמה

1. $\bar{t} = 16$, $\bar{h} = 52.4$; $\Sigma (t - \bar{t})(h - \bar{h}) = 2272$, $\Sigma (t - \bar{t})^{2} = 640$.
2. $D = 2272/640 = 3.55$ mm/yr; $C = 52.4 - 3.55 \times 16 = -4.4$ mm.
3. השאריות חיוביות בשני הקצוות ושליליות באמצע: עקומה מתאימה טוב יותר, כפי שמרמז הקצב העולה ש-NASA מדווחת עליו.

בטיחות

- קחו הפסקת מסך קצרה כל חצי שעה.

חלופה ביתית או וירטואלית

- כל המעבדה מתבצעת בגיליון אלקטרוני חינמי.

NASA: Global mean sea level (https://sealevel.nasa.gov/vital-signs/global-mean-sea-level/) · Interactive Linear Algebra, 6.5 Least squares (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/least-squares.html)

הקשר לכדור הארץ: NASA מדווחת שקצב העלייה גדל מ-0.20 cm בשנה ב-1993 ל-0.44 cm בשנה כיום, האצה שאפשר לזהות בעזרת עמודת t^2. NASA: Global mean sea level (Vital Signs) (https://sealevel.nasa.gov/vital-signs/global-mean-sea-level/)

☐ **השלמתי את המעבדה הזו (רטובה או וירטואלית)**

מעבדה E: מודל מרקוב של חומרים ומיחזור

שבוע 12

מטרה: בנו מטריצת מעבר לחומר שבשימוש ולחומר שאובד להטמנה או לשריפה, השתמשו בחזקות מטריצות כדי לעקוב אחריו לאורך זמן, וראו כיצד שיעור מיחזור גבוה יותר שומר על החומר בשימוש זמן רב יותר.

$$\mathbf{x}_{k+1} = P\mathbf{x}_k, \quad P = \begin{bmatrix} 1-f(1-r) & 0 \\ f(1-r) & 1 \end{bmatrix}$$

_k+1=P_k, P=1-f(1-r)&0\(1-r)&1

שרשרת בת שני מצבים: בשימוש, אבד

מהלך הניסוי

1. בחרו שיעור השלכה לדוגמה f = 0.2 לשנה ושיעור השבה r = 0.321 (חלק המיחזור והקומפוסט של EPA ב-2018).
2. בנו את P בגיליון אלקטרוני והתחילו מ-$x_0 = (1, 0)$: כל החומר בשימוש.
3. השתמשו ב-MMULT כדי להתקדם 10 שנים, והשוו לנוסחה $(1 - f(1 - r))^k$ עבור החלק שעדיין בשימוש.
4. חזרו עם r = 0.5 והשוו את מספר שנות השימוש הממוצע, $1/(f(1 - r))$.

טבלת נתונים

שיעור השבה r	הסתברות להישאר בשימוש	בשימוש אחרי 10 שנים	שנות שימוש בממוצע
0.321	0.8642	0.232	7.36
0.50	0.9000	0.349	10.0

מודל לדוגמה: שיעור ההשלכה f = 0.2 הוא ערך לדוגמה; r = 0.321 הוא החלק של EPA ל-2018.

חישוב לדוגמה

1. הסתברות להישאר 1 − 0.2 × 0.679 = 0.8642; 0.8642^{10} = 0.232.
2. שנות שימוש בממוצע 1/0.1358 = 7.36; ב-r = 0.5 זה 1/0.1 = 10.0 שנים.
3. λ = 1 שייך למצב "אבד", שבולע הכול לטווח ארוך; λ = 0.8642 קובע את המהירות.

בטיחות

- קחו הפסקת מסך קצרה כל חצי שעה.

חלופה ביתית או וירטואלית

- כל המעבדה מתבצעת בגיליון אלקטרוני חינמי.

Interactive Linear Algebra, 5.6 Stochastic matrices (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/stochastic-matrices.html) · EPA: National overview of materials and waste (https://www.epa.gov/facts-and-figures-about-materials-waste-and-recycling/national-overview-facts-and-figures-materials)

הקשר לכדור הארץ: EPA מדווחת על שיעור מיחזור וקומפוסט של 32.1% ב-2018 ועל 50% שהוטמנו; מודלים כאלה מראים כמה שווה העלאת השיעור הזה. U.S. EPA: National overview, facts and figures on materials, wastes and recycling (https://www.epa.gov/facts-and-figures-about-materials-waste-and-recycling/national-overview-facts-and-figures-materials)

☐ **השלמתי את המעבדה הזו (רטובה או וירטואלית)**

מעבדה F: שיטת החזקה ודחיסת תמונות ב-SVD

שבוע 14

מטרה: מצאו ערך עצמי דומיננטי בהכפלה חוזרת, ואז דחסו תמונה קטנה בגווני אפור בעזרת SVD קטוע וראו כמה מעט מספרים שומרים על התמונה.

$$\mathbf{x}_{k+1} = \frac{A\mathbf{x}_k}{\|A\mathbf{x}_k\|}, \quad A_k = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T$$

_k+1=_k\|A_k\|, A_k=_i=1^kσ_i_i_i^T

שיטת החזקה ו-SVD קטוע

מהלך הניסוי

1. בגיליון אלקטרוני, התחילו מ-$x_0 = (1, 0)$ והכפילו ב-$A = [[2, 1], [1, 2]]$ עשר פעמים, עם נרמול בכל פעם; צפו ביחס האורכים מתקרב ל-3.
2. צרו רשת 8 × 8 של רמות אפור (0–255) לתמונה פשוטה, או טענו תמונה ב-Python החינמי עם NumPy.
3. חשבו את ה-SVD (numpy.linalg.svd) ובנו מחדש את התמונה עם $k = 1, 2$ ו-4 איברים.
4. רשמו את האחסון $k(8 + 8 + 1)$ ואת החלק של $\Sigma\sigma^2$ שנשמר, ושפטו מתי התמונה נראית נכון.

טבלת נתונים

k	מספרים מאוחסנים (תמונה 8 × 8)	חלק מתוך 64
1	17	26.6%
2	34	53.1%
4	68	106.3%

ספירות אחסון מדויקות. לתמונה 8 × 8, $k = 4$ כבר מאחסן יותר מ-64 המספרים הגולמיים; החיסכון מופיע בתמונות גדולות (יחידה 10: דרגה 50 של תמונה 1000 × 1000 שומרת 10.0%).

חישוב לדוגמה

1. שיטת החזקה: $(1, 0) \to (2, 1) \to (5, 4) \to (14, 13)$; $\|(14, 13)\| / \|(5, 4)\| = 19.10 / 6.403 = 2.98$, קרוב ל-$\lambda = 3$.
2. אחסון עבור $k = 1$: $1 + 8 + 8 = 17$ מספרים, $17/64 = 26.6\%$.

בטיחות

- קחו הפסקת מסך קצרה כל חצי שעה.

חלופה ביתית או וירטואלית

- גרסת הגיליון האלקטרוני וגרסת Python החינמית הן שתיהן מעבדות בית.

MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra (Strang, Spring 2010) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-20) · Interactive Linear Algebra, 5.1 Eigenvectors (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/eigenvectors.html) (/10

הקשר לכדור הארץ: EMIT של JPL ב-NASA מחזיר יותר מ-100000 ספקטרומים בכל שנייה; דחיסת הנתונים האלה והפרדתם משתמשות בדיוק בכלים האלה. NASA JPL: EMIT, Earth Surface Mineral Dust Source Investigation (https://earth.jpl.nasa.gov/emit/)

☐ **השלמתי את המעבדה הזו (רטובה או וירטואלית)**

מערכי תרגול למבחן

מדדו זמן: כ־10 דקות לבעיה. אחר כך השוו לפתרונות המלאים.

סט תרגול לבחינת אמצע (יחידות 5–1)

1. מצאו את הזווית בין (1, 0, 1) ל-(0, 1, 1).

1. מכפלה סקלרית 1 =; אורך כל אחד √2; cos θ = 1/2.

תשובה: 60°.

2. פתרו $x + 2y = 4$, $3x - y = 5$.

1. $-7y = -7$:$R_2 - 3R_1$.

תשובה: $x = 2, y = 1$.

3. הפכו את [[3, 2], [1, 1]].

1. det = 1.

תשובה: [[1, −2], [−1, 3]].

4. כלכלה בת ענף אחד צורכת 0.4 מהתפוקה שלה. איזו תפוקה עונה על ביקוש של 120?

1. $x = 120/0.6$.

תשובה: 200.

5. למטריצה 9 × 6 דרגה 4. מצאו את dim N(A) ואת dim N(A^T).

1. $n - r$ ו-$m - r$.

תשובה: 5 ו-2.

מערך תרגול מסכם (כל היחידות)

1. התאימו $y = C + Dt$ לנקודות (0, 0), (1, 2), (2, 2) בריבועים פחותים.

1. $A^TA = [[3, 3], [3, 5]]$, $A^Tb = (4, 6)$; $\det$ 6.

תשובה: $C = 0.333$, $D = 1$.

2. מצאו את $\det [[2, 1, 0], [1, 2, 1], [0, 1, 2]]$.

1. $2(4 - 1) - 1(2 - 0) + 0$.

תשובה: 4.

3. מצאו את הערכים העצמיים של $[[6, 2], [2, 3]]$.

1. עקבה 9, $\det$: $\lambda^2 - 9\lambda + 14 = 0$.

תשובה: 7 ו-2.

4. מצאו את המצב היציב של מטריצת המרקוב $[[0.9, 0.2], [0.1, 0.8]]$.

1. $0.1q_1 = 0.2q_2$.

תשובה: $(0.667, 0.333)$.

5. מצאו את הערכים הסינגולריים של $[[-3, 0], [0, 2]]$.

1. $A^TA = \text{diag}(4, 9)$.

תשובה: 3 ו-2.

6. כמה מספרים מאחסן SVD מדרגה 20 של תמונה 800×500, ואיזה חלק מהתמונה המלאה זה?

1. $20(500 + 800 + 1)$.

תשובה: 26020, כ-6.5%.

דף נוסחאות

$$\|v\| = \sqrt{v \cdot v},\ \cos\theta = \frac{v \cdot w}{\|v\|\|w\|}$$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \ A = LU$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1},\ (AB)^T = B^TA^T$$

$$\mathbf{x} = (I - A)^{-1}\mathbf{d}$$

$$r + \dim N(A) = n$$

$$\mathbf{p} = \frac{a \cdot b}{a \cdot a}a,\ \ A^TA\hat{x} = A^Tb$$

$$A = QR,\ Q^TQ = I$$

$$\det(AB) = \det A \det B,\ x_i = \det B_i / \det A \qquad \det(A - \lambda I) = 0,\ \sum \lambda = \operatorname{tr} A,\ \prod \lambda = \det A$$

$$A = PDP^{-1},\ A^k = PD^kP^{-1},\ A = Q\Lambda Q^T \qquad A = U\Sigma V^T,\ \sigma_i = \sqrt{\lambda_i(A^TA)},\ \kappa = \sigma_1/\sigma_n$$

קבועים

קבוע	ערך
מהירות האור (משמשת למרחקי GPS)	299,792,458 m/s
1 מייל	1.609344 km
1 רגל	0.3048 m
1 אינץ׳	25.4 mm
פעולות לפתרון מערכת n × n בדירוג	כ-n³/3 פעולות כפל–חיבור (סטרנג)
מטריצת היחידה I	אחדות על האלכסון ואפסים בשאר המקומות: AI = IA = A

מקור: NIST Guide to the SI, Appendix B.9: conversion factors (https://www.nist.gov/pml/special-publication-811/nist-guide-si-appendix-b-conversion-factors/nist-guide-si-appendix-b9)

טקסטים והרצאות חינמיים

השתמשו בספרי הלימוד, ההרצאות והכלים החינמיים האלה לצד הקורס.

- MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra (Strang, Spring 2010) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/): הרצאות הווידאו המלאות, התרגילים והבחינות של סטרנג.
- MIT OpenCourseWare 18.06SC Linear Algebra (self-paced, Fall 2011) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06sc-linear-algebra-fall-2011/): גרסה בקצב אישי עם סרטוני תרגול ובעיות פתורות.
- Interactive Linear Algebra (Margalit and Rabinoff, Georgia Tech) (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/): ספר לימוד אינטראקטיבי חינמי שמשמש ב-Georgia Tech.
- Jim Hefferon, Linear Algebra (free text) (https://hefferon.net/linearalgebra/): ספר לימוד מלא וחינמי עם תשובות.
- Gilbert Strang, Introduction to Linear Algebra (book site) (https://math.mit.edu/~gs/linearalgebra/): אתר הספר של סטרנג עם רשימות ואיורים.
- PhET: Vector Addition (https://phet.colorado.edu/en/simulations/vector-addition): וקטורים ורכיבים אינטראקטיביים.

מילון מונחים

בסיס

קבוצה בלתי תלויה ליניארית שפורשת מרחב.

מרחב העמודות

כל הצירופים Ax של עמודות A.

מספר מצב

σ_1/σ_n, כמה שגיאות יכולות לגדול בפתרון $Ax = b$.

דטרמיננטה

מקדם שינוי הנפח המסומן של A; אפס בדיוק כאשר A סינגולרית.

לכסון

$A = PDP^{-1}$ עם הווקטורים העצמיים ב-P.

מימד

מספר הווקטורים בכל בסיס.

ערך עצמי

λ שעבורו $Av = \lambda v$ עבור v כלשהו שונה מאפס.

פירוק LU

$A = LU$ מהדירוג.

ריבועים פחותים

ה-$\hat{x}$ שממזער את $\|b - Ax\|$.

הפכית לאונטיף

$(I - A)^{-1}$, התפוקה הכוללת הנדרשת לכל יחידת ביקוש סופי.

אי-תלות ליניארית

רק הצירוף האפסי נותן את וקטור האפס.

מטריצת מרקוב

איברים אי-שליליים, סכום כל עמודה 1.

מרחב האפס

כל ה-x שעבורם $Ax = 0$.

אורתונורמלי

וקטורי יחידה ניצבים זה לזה.

איבר מוביל

האיבר הראשון השונה מאפס בשורה של צורה מדורגת.

חיובית לחלוטין

סימטרית עם $x^TAx > 0$ לכל $x \neq 0$.

הטלה

הנקודה הקרובה ביותר ל-b בתת-מרחב.

דרגה

מספר האיברים המובילים; מימד מרחב העמודות.

ערך סינגולרי

$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(A^TA)}$.

פרישה

כל הצירופים הליניאריים של קבוצת וקטורים.

תת-מרחב

קבוצה המכילה 0 וסגורה לחיבור ולכפל בסקלר.

מחוון להערכה עצמית

לא ניתנים ציון או נקודות זכות. השתמשו בזה כדי להעריך בכנות איפה אתם עומדים בכל יחידה.

רמה	איך זה נראה
4 · שליטה מלאה	בוחר/ת בכלי הנכון (דירוג, היטל, ערכים עצמיים או SVD), מחשב/ת מקרים קטנים ביד, בודק/ת תשובות (Ax = b, עקבה ודטרמיננטה), ומסביר/ה את המשמעות בתמונות ובהקשר.
3 · מיומן	פותר/ת את תרגילי האימון עם טעויות חשבון מזדמנות.
2 · מתפתח	עוקב/ת אחר דוגמאות פתורות אבל מבלבל/ת בין שורות לעמודות או בין ארבעת תת-המרחבים.
1 · מתחיל	מתמרן/ת סמלים בלי לבדוק ממדים או תשובות; צריך/ה לחזור על היחידה.

שקלול מוצע אם רוצים ציון

חלק	משקל
תרגילים	25%
מעבדות	20%
מערך תרגול לאמצע הקורס	25%
מערך תרגול מסכם	30%

שאפו לרמה 3 ומעלה בכל יחידה לפני שעוברים לקורס הבא.

קורסים קשורים

- חוזק חומרים ENGR 213
- מעגלים חשמליים ENGR 214 + ENGR 214L
- חשבון אינפיניטסימלי 3 MATH 210
- כל הקורסים