Dernière mise à jour: November 1, 2026

À propos de ce cours

Ce cours gratuit compte 10 unités et 6 travaux pratiques. Ce sont les vrais totaux, pas un programme plus long raccourci.

Un contrôle est un nombre ou un résultat de code sur une page de cours qu'un script recalcule avant publication. Le nombre affiché et le nombre recalculé doivent correspondre.

> Ceci est le plan d'un cours gratuit en autonomie rédigé par Saving Planets. Ce n'est pas un cours universitaire : il ne donne aucun crédit académique et aucun établissement n'y participe.
>
> Son contenu suit un cours d'algèbre linéaire d'un semestre de deuxième année. Il s'inspire des thèmes et du niveau de MIT 18.06 Linear Algebra enseigné par Gilbert Strang (gratuit sur MIT OpenCourseWare) et des cours d'algèbre linéaire de deuxième année de Georgia Tech et de Purdue, en s'appuyant sur le manuel gratuit de Georgia Tech Interactive Linear Algebra de Dan Margalit et Joseph Rabinoff et sur le manuel gratuit Linear Algebra de Jim Hefferon, que nous citons quand ils sont utiles. Aucun de ces auteurs ou établissements ne cautionne cette page.
>
> Ce que nous ajoutons : chaque unité est reliée à un vrai travail sur la planète avec une source publique citée (GPS, Landsat 9, satellites de niveau de la mer de la NASA, supercalculateurs météo de la NOAA, données entrées–sorties et recyclage de l'EPA, études de bâtiments de l'USGS, spectromètre minéral EMIT de la NASA), chaque nombre de la page est recalculé par un script de vérification avant sa mise en ligne, et chaque TP se fait dans un tableur gratuit ou sur papier.
>
> Suivez-le dans l'ordre. Chaque unité comporte des objectifs, des notions clés, des équations, des exemples pas à pas, des exercices corrigés en détail, des erreurs fréquentes, des cartes mémoire et un quiz. Votre progression est enregistrée uniquement dans ce navigateur.

Comment ce cours aide à sauver la planète

L'algèbre linéaire est le langage des données sur la planète. Un pixel satellite est un vecteur, une position GPS est la solution d'un système linéaire, une prévision météo, ce sont des millions d'équations résolues encore et encore, et la pollution d'une économie peut se suivre avec une seule matrice.

Les mêmes quelques idées, élimination, projection, valeurs propres et SVD, transforment des mesures brutes en cartes de forêts, en tendances du niveau de la mer et en cartes de poussières

minérales. Chaque unité se termine par une courte section sourcée. Les valeurs qui ne proviennent pas d'une source sont indiquées comme valeurs d'exemple.

Pour les enseignants

Vous pouvez enseigner ce cours, ou laisser un élève le faire seul. Il est gratuit. Saving Planets ne donne ni note ni crédit scolaire.

- Cette page est le cours entier : 10 unités et 6 travaux pratiques (MATH 230).
- Prévoyez 15 semaines, environ 6 à 9 heures par semaine, y compris les semaines de travaux pratiques.
- Suivez le calendrier de 15 semaines. Lisez l'unité, faites les exercices sur papier, puis ouvrez la réponse. La semaine d'un TP, faites le TP ou la version à la maison.
- Un contrôle est un nombre ou un résultat de code sur la page qu'un script recalcule avant publication. Le nombre affiché et le nombre recalculé doivent correspondre.
- Utilisez Imprimer cette page, ou téléchargez le guide d'étude PDF. La feuille de formules est vers la fin.
- Demandez : en quoi cette unité aide-t-elle les gens et la planète ? Chaque unité a un encadré vert avec un fait sourcé.
- Copiez le modèle de guide enseignant et écrivez le nom de votre classe, le temps dont vous disposez et les questions que vous poserez. Ouvrir le modèle de guide enseignant

Avant de commencer

Prérequis

- Algèbre du lycée : résoudre deux équations à deux inconnues et manipuler des fonctions.
- Analyse I aide pour les limites et les dérivées dans quelques exemples, mais aucune analyse n'est nécessaire pour la plus grande partie du cours.
- Être à l'aise avec un tableur ; Introduction à la programmation aide pour les versions Python facultatives des TP.
- Analyse III et Équations différentielles vont bien avec ce cours mais ne sont pas requis.

Comment étudier

- Faites d'abord chaque calcul à la main sur de petits exemples (2 × 2 et 3 × 3), puis vérifiez-le avec un tableur ou une calculatrice.
- Pensez à Ax de deux façons : comme les produits scalaires des lignes avec x, et comme une combinaison des colonnes de A.
- Vérifiez chaque réponse : remplacez x dans Ax = b, multipliez A par son inverse, ou testez Av = λv.

- Surveillez les dimensions : une matrice m × n fois une matrice n × p donne m × p, et des dimensions qui ne concordent pas signalent une erreur.
- Faites des dessins en 2D et en 3D : droites, plans, projections et étirements rendent les règles faciles à retenir.
- Faites chaque exercice sur papier avant d'ouvrir la réponse, et refaites les quiz quelques jours plus tard.

Ce qu'il vous faut

- Un ordinateur avec un tableur gratuit (ses fonctions MMULT, MINVERSE, MDETERM et LINEST font le calcul matriciel).
- Du papier millimétré, une règle, un rapporteur et un crayon.
- Facultatif : Python gratuit avec NumPy pour les versions plus grandes des TP.
- Une ficelle et des punaises ou du ruban adhésif pour le TP de trilatération, et une carte imprimée ou une feuille de papier.
- Une photo en niveaux de gris ou une petite grille de nombres pour le TP de compression d'image.

Programme suggéré sur 15 semaines

Environ 6 à 9 heures par semaine : lecture, exercices et, les semaines de TP, le TP.

Semaine	Unité	Thèmes	Lecture
1	Vecteurs : combinaisons linéaires, normes et produits scalaires	Vecteurs, combinaisons linéaires, espace engendré, norme	MIT 18.06 L1; ILA 2.1–2.2
2	Vecteurs : combinaisons linéaires, normes et produits scalaires	Produits scalaires, angles, orthogonalité ; TP A ; début de l'élimination	ILA 6.1
3	Systèmes d'équations linéaires et élimination de Gauss	Élimination, formes échelonnées, ensembles de solutions ; TP B	MIT 18.06 L2; ILA 1.1–1.3
4	Algèbre matricielle : multiplication, inverses et factorisation LU	Multiplication matricielle, inverses, A = LU ; TP C	MIT 18.06 L3–4; ILA 3.4–3.5
5	Modèles linéaires : économie entrées–sorties (Leontief), réseaux et équilibrage	Modèles entrées–sorties, réseaux, équilibrage	Hefferon Topics; EPA USEEIO
6	Espaces vectoriels, sous-espaces, indépendance, base, rang et les quatre sous-espaces fondamentaux	Sous-espaces, espace des colonnes, noyau, Ax = 0	MIT 18.06 L5–7; ILA 2.6
7	Espaces vectoriels, sous-espaces, indépendance, base, rang et les quatre sous-espaces fondamentaux	Indépendance, base, dimension, rang, quatre sous-espaces ; entraînement de mi-parcours	MIT 18.06 L8–10; ILA 2.5, 2.7, 2.9

Semaine	Unité	Thèmes	Lecture
8	Orthogonalité, projections, moindres carrés et Gram–Schmidt	Orthogonalité et projections	MIT 18.06 L14–15; ILA 6.3
9	Orthogonalité, projections, moindres carrés et Gram–Schmidt	Moindres carrés, Gram–Schmidt, A = QR ; TP D	MIT 18.06 L16–17; ILA 6.4–6.5
10	Déterminants : propriétés, cofacteurs, règle de Cramer et volume	Déterminants, cofacteurs, règle de Cramer, volume	MIT 18.06 L18–20; ILA 4.1–4.3
11	Valeurs propres et vecteurs propres	Valeurs propres, vecteurs propres, méthode de la puissance itérée, modes	MIT 18.06 L21; ILA 5.1–5.2, 5.5
12	Diagonalisation, puissances de matrices, chaînes de Markov et systèmes dynamiques linéaires	Diagonalisation, chaînes de Markov, systèmes dynamiques ; TP E	MIT 18.06 L22–25; ILA 5.4, 5.6
13	La décomposition en valeurs singulières, l’analyse en composantes principales et les matrices définies positives	Matrices définies positives et SVD	MIT 18.06 L27–29
14	La décomposition en valeurs singulières, l’analyse en composantes principales et les matrices définies positives	Approximation de rang faible, ACP, conditionnement ; TP F	MIT 18.06 L29 ; site du livre de Strang
15	Révision	Révision et série d’exercices finale	Toutes les unités

Votre progression

Cochez les unités et les TP à mesure que vous les terminez, et faites les quiz. La progression et les scores sont enregistrés uniquement dans ce navigateur et ne nous sont jamais envoyés.

Unités

Vecteurs : combinaisons linéaires, normes et produits scalaires

Vecteurs en deux, trois et n dimensions, addition et multiplication par un scalaire, combinaisons linéaires et espace engendré, norme, vecteurs unitaires, produit scalaire, angle entre vecteurs, orthogonalité et inégalités de Cauchy–Schwarz et triangulaire.

Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette unité, vous saurez :

- Additionner, multiplier et combiner des vecteurs à la main et en dessin.
- Calculer des normes, des vecteurs unitaires et des produits scalaires.
- Trouver l'angle entre deux vecteurs et tester l'orthogonalité.
- Décrire l'espace engendré par un, deux ou trois vecteurs.

Notions clés

- Un vecteur de $\mathbb{R}^n$ est une liste ordonnée de n nombres. En 2D et 3D c'est une flèche ; en dimension plus grande c'est une liste, comme les 11 valeurs de bandes d'un pixel satellite.
- Une combinaison linéaire $c_1v_1 + c_2v_2 + \dots$ multiplie des vecteurs par des scalaires et les additionne. L'espace engendré est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires : une droite, un plan ou tout l'espace.
- Norme $\|v\| = \sqrt{(v \cdot v)}$. Diviser par la norme donne un vecteur unitaire $u = v/\|v\|$ de norme 1.
- Produit scalaire $v \cdot w = v_1w_1 + v_2w_2 + \dots = \|v\|\|w\|\cos\theta$. Si $v \cdot w = 0$, les vecteurs sont orthogonaux (perpendiculaires).
- Cauchy–Schwarz : $|v \cdot w| \le \|v\|\|w\|$. Inégalité triangulaire : $\|v + w\| \le \|v\| + \|w\|$.

Équations clés

$$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$$

\|v\|=_1^2+v_2^2+·s+v_n^2

Norme

$$v \cdot w = v_1w_1 + \cdots + v_nw_n$$

v· w=v_1w_1+·s+v_nw_n

Produit scalaire

$$\cos\theta = \frac{v \cdot w}{\|v\|\,\|w\|}$$

θ=(v· w)/(\|v\| \|w\|)

Angle entre vecteurs

$$|v \cdot w| \le \|v\|\,\|w\|$$

Inégalité de Cauchy–Schwarz

Exemples résolus pas à pas

Exemple 1.1 Trouvez la norme de v = (3, 4) et le vecteur unitaire de même direction.

1. ‖v‖ = √(3² + 4²) = √25 = 5.
2. u = v/5.

Réponse : ‖v‖ = 5, u = (0.6, 0.8).

Exemple 1.2 Trouvez l'angle entre v = (3, 4) et w = (1, 2).

1. v·w = 3 + 8 = 11.
2. ‖v‖ = 5, ‖w‖ = √5 = 2.236.
3. cos θ = 11/(5 × 2.236) = 0.9839.

Réponse : θ = 10.30°.

Exemple 1.3 Écrivez 2(1, 0, 1) + 3(0, 1, 1) sous forme d'un seul vecteur. (2, 3, 4) appartient-il à l'espace engendré par ces deux vecteurs ?

1. 2(1, 0, 1) + 3(0, 1, 1) = (2, 3, 5).
2. Toute combinaison c_1(1, 0, 1) + c_2(0, 1, 1) = (c_1, c_2, c_1 + c_2), donc la troisième composante doit égaler la somme des deux premières.

Réponse : (2, 3, 5) ; (2, 3, 4) n'est pas dans l'espace engendré car 2 + 3 ≠ 4.

Exercices

Faites chacun d'abord sur papier, puis vérifiez.

1. Trouvez $\|(1, 2, 2)\|$.

   $\sqrt{(1 + 4 + 4)} = 3$.

2. Trouvez $(1, 2, 3)\cdot(4, -5, 6)$.

   $4 - 10 + 18 = 12$.

3. $(2, -1)$ et $(1, 2)$ sont-ils orthogonaux ?

   Oui : $2 - 2 = 0$.

4. Trouvez le vecteur unitaire de même direction que $(6, 8)$.

   $\|(6, 8)\| = 10$, donc $(0.6, 0.8)$.

Idées reçues fréquentes

Idée reçue : Le produit scalaire est un vecteur.

En réalité : C'est un seul nombre (un scalaire).

Idée reçue : $\|v + w\| = \|v\| + \|w\|$ toujours.

En réalité : Seulement quand v et w pointent dans le même sens ; sinon c'est plus petit.

Idée reçue : Les vecteurs n'ont de sens qu'en 2D ou en 3D.

En réalité : Les vecteurs de données peuvent avoir des centaines de composantes ; les mêmes règles s'appliquent.

Cartes mémoire

Combinaison linéaire

$c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots$

Espace engendré

Toutes les combinaisons linéaires d'un ensemble de vecteurs.

Norme

$\|v\| = \sqrt{(v\cdot v)}$.

Produit scalaire

$v\cdot w = \Sigma\, v_i w_i = \|v\|\|w\|\cos\theta$.

Orthogonal

$v\cdot w = 0$.

Vecteur unitaire

$v/\|v\|$.

Quiz d’autocontrôle

1. ‖(3, 4)‖ vaut…

7

5

25

12

5. √(9 + 16) = 5.

2. v·w = 0 signifie que les vecteurs sont…

parallèles

orthogonaux

égaux

unitaires

orthogonaux. cos θ = 0, donc θ = 90°.

3. L’espace engendré par deux vecteurs non parallèles de $\mathbb{R}^3$ est…

un point

une droite

un plan

tout $\mathbb{R}^3$

un plan. Deux directions indépendantes remplissent un plan.

4. Doubler v change ‖v‖ d’un facteur…

1

2

4

√2

2. ‖cv‖ = |c|‖v‖.

Refaire ce quiz

Comment cela aide à sauver la planète

Chaque pixel de Landsat 9 est un vecteur. Selon l'USGS, l'Operational Land Imager 2 de Landsat 9 enregistre 9 bandes spectrales à 30 m (15 m pour la bande panchromatique) et son Thermal Infrared Sensor 2 enregistre 2 bandes thermiques à 100 m, si bien que chaque point au sol devient une liste de 11 nombres. Les données sont sur 14 bits, $2^{14} = 16384$ niveaux par bande, et Landsat 9 acquiert environ 750 scènes par jour, toutes gratuites.

La santé des forêts et des cultures se lit dans la bande rouge (bande 4, 0.64–0.67 µm) et la bande proche infrarouge (bande 5, 0.85–0.88 µm). L'indice de végétation NDVI = (NIR − red)/(NIR + red) compare deux composantes du vecteur pixel. Avec des réflectances d'exemple de 0.40 (NIR) et 0.08 (rouge), NDVI = 0.32/0.48 = 0.667, typique d'une végétation en bonne santé ; un sol nu donne des valeurs proches de zéro.

Sur Saving Planets : Observation de la Terre · Déforestation

Sources : USGS: Landsat 9 (https://www.usgs.gov/landsat-missions/landsat-9) · Interactive Linear Algebra, 2.1 Vectors (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/vectors.html)

Ressources d'apprentissage gratuites

- Interactive Linear Algebra, 2.1 Vectors (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/vectors.html): Texte gratuit avec des figures interactives.
- Interactive Linear Algebra, 6.1 Dot products and orthogonality (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/dot-product.html): Normes, angles et orthogonalité.
- MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra (Strang, Spring 2010) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/): Cours 1 : la géométrie des équations linéaires.
- PhET : Vector Addition (https://phet.colorado.edu/en/simulations/vector-addition): Interactif.

☐ **J'ai terminé cette unité**

Systèmes d’équations linéaires et élimination de Gauss

Systèmes linéaires vus par lignes et par colonnes, matrices augmentées, élimination jusqu’à la forme échelonnée, remontée, forme échelonnée réduite, pivots et variables libres, et quand un système a une, aucune ou une infinité de solutions.

Objectifs d’apprentissage

À la fin de cette unité, vous saurez :

- Écrire un système sous la forme Ax = b et comme matrice augmentée.
- Résoudre des systèmes par élimination et remontée.
- Trouver la forme échelonnée réduite et identifier pivots et variables libres.
- Décider si un système a une, aucune ou une infinité de solutions.

Notions clés

- Vue par lignes : chaque équation est une droite (2D) ou un plan (3D) et la solution est leur intersection. Vue par colonnes : b est une combinaison des colonnes de A, avec les poids x.
- Trois opérations sur les lignes ne changent pas les solutions : échanger des lignes, multiplier une ligne par un nombre non nul, et ajouter à une ligne un multiple d’une autre.
- L’élimination produit une forme triangulaire supérieure (échelonnée) ; la remontée résout ensuite de bas en haut. Les pivots sont les premiers coefficients non nuls de chaque ligne.
- Une colonne sans pivot donne une variable libre et une infinité de solutions. Une ligne 0 = c avec c ≠ 0 signifie aucune solution (système incompatible).
- Des équations de distance au carré comme (x − a)² + (y − b)² = d² ne sont pas linéaires, mais en soustraire une d’une autre élimine x² et y² et laisse des équations linéaires. C’est ainsi que les problèmes de positionnement deviennent des systèmes linéaires.

Équations clés

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Forme matricielle

$$R_i \leftarrow R_i - \ell_{ij} R_j, \;\; \ell_{ij} = a_{ij}/a_{jj}$$

```
R_i R_i-_ijR_j,\ \ _ij=a_ij/a_jj
```

Étape d’élimination et multiplicateur

$$\text{solutions: one, none, or infinitely many}$$

Les trois seuls cas

$$d = c\,t$$

`d=c t`

Distance à partir du temps de trajet du signal (GPS)

Exemples résolus pas à pas

Exemple 2.1 Résolvez x + y + z = 6, 2x + y − z = 1, x − y + 2z = 5.

1. $R_2 - 2R_1$: −y − 3z = −11. $R_3 - R_1$: −2y + z = −1.
2. $R_3 - 2R_2$: 7z = 21, donc z = 3.
3. Remontée : −y − 9 = −11 donne y = 2 ; puis x = 6 − 2 − 3 = 1.

Réponse : (x, y, z) = (1, 2, 3).

Exemple 2.2 Des balises sont en (0, 0), (10, 0) et (0, 10) km. Un récepteur mesure des distances au carré de 25, 65 et 45 km². Trouvez sa position.

1. Équation 1 moins équation 2 : $x^2 + y^2 - [(x-10)^2 + y^2] = 25 - 65$, donc 20x − 100 = −40.
2. Équation 1 moins équation 3 : 20y − 100 = −20.
3. Résolvez les deux équations linéaires.

Réponse : (x, y) = (3, 4) km.

Exemple 2.3 Combien de solutions ont x + 2y = 3, 2x + 4y = 6 ? Et x + 2y = 3, 2x + 4y = 7 ?

1. $R_2 - 2R_1$ donne 0 = 0 dans le premier système : un pivot, une variable libre.
2. Dans le second, $R_2 - 2R_1$ donne 0 = 1.

Réponse : Une infinité ; aucune.

Exercices

Faites chacun d’abord sur papier, puis vérifiez.

1. Résolvez x + y = 5, x − y = 1.

   En additionnant, 2x = 6 : x = 3, y = 2.

2. Un signal de type GPS met 0.00505783 s à arriver. Quelle distance a-t-il parcourue à 299792458 m/s ?

   d = ct = 1516299 m, environ 1516 km.

3. Trouvez la forme échelonnée réduite de [[1, 2, 3], [2, 5, 8]] (augmentée).

   $R_2 - 2R_1 = [0, 1, 2]$; $R_1 - 2R_2 = [1, 0, -1]$: $x = -1$, $y = 2$.

4. Un système 3 × 5 a 3 pivots. Combien de variables libres ?

   5 − 3 = 2.

Idées reçues fréquentes

Idée reçue : Multiplier une ligne par 0 est une opération sur les lignes permise.
En réalité : Cela détruit de l'information ; le multiplicateur doit être non nul.

Idée reçue : Un système avec plus d'inconnues que d'équations n'a pas de solution.
En réalité : S'il est compatible, il en a une infinité ; il peut aussi être incompatible.

Idée reçue : Une ligne nulle signifie aucune solution.
En réalité : Seule une ligne 0 = c avec c ≠ 0 le signifie ; 0 = 0 indique juste une variable libre.

Cartes mémoire

Matrice augmentée

[A | b].

Pivot

Premier coefficient non nul d'une ligne en forme échelonnée.

Variable libre

Variable dont la colonne n'a pas de pivot.

RREF

Pivots égaux à 1, zéros au-dessus et en dessous.

Incompatible

Une ligne 0 = c, c ≠ 0.

Remontée

Résoudre le système triangulaire de bas en haut.

Quiz d'autocontrôle

1. Une ligne 0 0 0 | 5 en forme échelonnée signifie...

une solution

aucune solution

une infinité

x = 5

aucune solution. 0 = 5 est impossible.

2. Laquelle n'est PAS une opération sur les lignes ?

échanger deux lignes

ajouter à une ligne un multiple d'une autre

multiplier une ligne par 3

élever une ligne au carré

élever une ligne au carré. Élever au carré n'est pas linéaire.

3. Une colonne sans pivot donne...

une variable libre

aucune solution

seulement un déterminant nul

une solution unique

une variable libre. Sa variable peut être choisie librement.

4. Vu par colonnes, Ax = b demande si b est...

orthogonal à A

une combinaison des colonnes de A

une ligne de A

un vecteur propre

une combinaison des colonnes de A. $Ax = x_1a_1 + x_2a_2 + \ldots$

Refaire ce quiz

Comment cela aide à sauver la planète

Le GPS est une machine d'algèbre linéaire. GPS.gov indique qu'au moins 24 satellites opérationnels sont disponibles 95 % du temps et que 31 satellites opérationnels sont en service depuis plus d'une décennie, à environ 20200 km d'altitude, chacun faisant le tour de la Terre deux fois par jour. Ils sont répartis sur six plans orbitaux également espacés, si bien que les utilisateurs voient au moins quatre satellites depuis pratiquement n'importe quel point de la planète.

L'activité de trilatération de GPS.gov explique l'idée : distance = vitesse × temps, la vitesse étant celle de la lumière, 299792458 m/s, et les distances à au moins 3 satellites fixent une position 3D. L'horloge d'un vrai récepteur est aussi inconnue, donc dans le modèle classique des manuels les inconnues sont x, y, z et le décalage d'horloge, quatre inconnues qui exigent quatre satellites ; soustraire les équations de distance, comme dans l'exemple résolu, en fait un système linéaire. Une erreur d'horloge d'une seule microseconde fausserait une distance de 299.8 m. Les positions précises guident les tracteurs qui épandent moins d'engrais, les navires sur des routes efficaces et les stations de mesure qui suivent le niveau de la mer et la glace.

Sur Saving Planets : Observation de la Terre · Espace

Sources : GPS.gov: Space segment (https://www.gps.gov/space-segment) · GPS.gov: Trilateration (NOAA classroom activity) (https://www.gps.gov/trilateration)

Ressources d'apprentissage gratuites

- Interactive Linear Algebra, 1.1 Systems of linear equations (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/systems-of-eqns.html): Section de texte gratuit.
- Interactive Linear Algebra, 1.2 Row reduction (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/row-reduction.html): Formes échelonnées pas à pas.
- MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra (Strang, Spring 2010) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/): Cours 2 : l'élimination avec des matrices.
- Jim Hefferon, Linear Algebra (free text) (https://hefferon.net/linearalgebra/): Chapitre un : systèmes linéaires.

Regarder le cours magistral

Lecture 1: The geometry of linear equations (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/resources/lecture-1-the-geometry-of-linear-equations/) (en anglais)

MIT 18.06 Linear Algebra (Spring 2010), MIT OpenCourseWare. Licence : CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Conditions d’utilisation (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Lien fourni uniquement pour l’étude gratuite ; Saving Planets n’est ni affilié à cette université ni soutenu par elle.

- [ ] **J’ai terminé cette unité**

Algèbre matricielle : multiplication, inverses et factorisation LU

Produits matrice–vecteur et matrice–matrice, règles (et non-règles) de l'algèbre matricielle, transposées, matrices d'élimination, inverse et Gauss–Jordan, formule de l'inverse 2 × 2, A = LU et coût de l'élimination.

Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette unité, vous saurez :

- Multiplier des matrices en vérifiant que les dimensions concordent.
- Trouver des inverses par la formule 2 × 2 et par Gauss–Jordan.
- Factoriser A = LU et s'en servir pour résoudre des systèmes.
- Estimer le coût de l'élimination quand n augmente.

Notions clés

- $(AB)_{ij}$ = produit scalaire de la ligne i de A par la colonne j de B. Une matrice m × n fois une matrice n × p donne m × p. En général AB ≠ BA.
- L'inverse A^{-1} vérifie $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Elle existe exactement quand A a n pivots (det A ≠ 0). $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ et $(AB)^T = B^TA^T$.
- Gauss–Jordan : réduire [A | I] en [I | A^{-1}].
- L'élimination sans échange de lignes enregistre ses multiplicateurs dans une matrice triangulaire inférieure L avec des uns sur la diagonale, ce qui donne A = LU. Résolvez Lc = b, puis Ux = c ; avec L et U conservées, chaque nouveau second membre coûte peu.
- L'élimination sur une matrice n × n coûte environ $n^3/3$ multiplications–additions ; résoudre avec L et U conservées coûte environ n^2 par second membre.

Équations clés

$$(AB)_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$$

```
(AB)_ij=_k a_ikb_kj
```

Produit matriciel

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

```
&b\\&d^-1=(1)/(ad-bc)&-b\\-c&a
```

Inverse 2 × 2

$$A = LU$$

A=LU

Factorisation LU

$$\text{cost} \approx n^3/3$$

Nombre d’opérations de l’élimination

Exemples résolus pas à pas

Exemple 3.1 Trouvez AB et BA pour A = [[1, 2], [3, 4]] et B = [[0, 1], [1, 0]].

1. AB : ligne 1 · colonnes = (2, 1) ; ligne 2 = (4, 3).
2. BA échange les lignes de A : [[3, 4], [1, 2]].

Réponse : AB = [[2, 1], [4, 3]], BA = [[3, 4], [1, 2]], donc AB ≠ BA.

Exemple 3.2 Inversez A = [[4, 7], [2, 6]].

1. ad − bc = 24 − 14 = 10.
2. A^{-1} = (1/10)[[6, −7], [−2, 4]].

Réponse : A^{-1} = [[0.6, −0.7], [−0.2, 0.4]].

Exemple 3.3 Factorisez A = [[2, 1], [6, 8]] sous la forme LU.

1. Multiplicateur ℓ_{21} = 6/2 = 3.
2. $R_2 - 3R_1$ = [0, 5].

Réponse : L = [[1, 0], [3, 1]], U = [[2, 1], [0, 5]].

Exercices

Faites chacun d’abord sur papier, puis vérifiez.

1. Quelle est la taille d’une matrice 3 × 2 fois une matrice 2 × 4 ?

   3 × 4.

2. Inversez [[2, 1], [5, 3]].

   det = 1, inverse [[3, −1], [−5, 2]].

3. Combien d'opérations environ l'élimination demande-t-elle pour n = 1000 ?

   $n^3/3 \approx 3.33 \times 10^8$.

4. Si A et B sont inversibles, que vaut $(AB)^{-1}$?

   $B^{-1}A^{-1}$.

Idées reçues fréquentes

Idée reçue : AB = BA.

En réalité : La multiplication matricielle est en général non commutative.

Idée reçue : $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

En réalité : L'ordre s'inverse : $B^{-1}A^{-1}$.

Idée reçue : Les ordinateurs résolvent Ax = b en calculant A^{-1}.

En réalité : Ils factorisent A = LU (ou similaire) ; former A^{-1} est plus lent et moins précis.

Cartes mémoire

Identité

$AI = IA = A$.

Inverse

$AA^{-1} = I$.

Inverse 2 × 2

Échanger a et d ; changer le signe de b et c ; diviser par ad − bc.

Règle de la transposée

$(AB)^T = B^T A^T$.

LU

A = LU issue de l'élimination.

Coût

Environ $n^3/3$ pour l'élimination.

Quiz d'autocontrôle

1. Une matrice 2 × 3 fois une matrice 3 × 5 donne…

2 × 5

3 × 3

5 × 2

non définie

2 × 5. Les dimensions extérieures.

2. Une matrice est inversible exactement quand elle a…

aucun zéro

n pivots

une ligne nulle

des coefficients égaux

n pivots. Un jeu complet de pivots.

3. Doubler n multiplie le coût de l'élimination par environ…

2

4

8

16

8. n^3 croît de $2^3 = 8$ fois.

4. L dans A = LU contient…

les pivots

les multiplicateurs

l'inverse

les valeurs propres

les multiplicateurs. Les multiplicateurs sous la diagonale, des uns sur la diagonale.

Refaire ce quiz

Comment cela aide à sauver la planète

Les prévisions météo et climatiques sont, au fond, d'énormes calculs d'algèbre linéaire répétés plusieurs fois par jour. La NOAA a annoncé en août 2023 que ses deux supercalculateurs opérationnels jumeaux, Dogwood à Manassas (Virginie) et Cactus à Phoenix (Arizona), avaient été améliorés de 20 % pour atteindre 14.5 pétaflops chacun, si bien qu'ensemble le système de prévision peut effectuer 29 quadrillions de calculs par seconde, et qu'avec ses supercalculateurs de recherche sa capacité totale est de 49 pétaflops.

La règle $n^3/3$ montre pourquoi la vitesse compte. À titre d'exemple, un système dense à n = 100000 inconnues demande environ 3.33×10^{14} opérations ; à 14.5×10^{15} opérations par seconde en continu cela fait environ 0.023 s, mais doubler n multiplie le travail par 8. Les vrais modèles utilisent des matrices creuses et des solveurs astucieux, mais c'est cette même croissance cubique que la puissance supplémentaire doit financer selon la NOAA : des modèles à plus haute résolution qui améliorent prévisions et alertes.

Sur Saving Planets : Introduction à la programmation · Solutions

Sources : NOAA: NOAA completes upgrade to weather and climate supercomputer system (Aug. 10, 2023) (https://www.noaa.gov/news-release/noaa-completes-upgrade-to-weather-and-climate-supercomputer-system) · MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra (Strang, Spring 2010) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/)

Ressources d'apprentissage gratuites

- Interactive Linear Algebra, 3.4 Matrix multiplication (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/matrix-multiplication.html): Section de texte gratuit.
- Interactive Linear Algebra, 3.5 Matrix inverses (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/matrix-inverses.html): Inverses et Gauss–Jordan.
- MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra (Strang, Spring 2010) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/): Cours 3–4 : multiplication, inverses et A = LU.
- MIT OpenCourseWare 18.06SC Linear Algebra (self-paced, Fall 2011) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06sc-linear-algebra-fall-2011/): Vidéos de travaux dirigés sur LU.

Regarder le cours magistral

Lecture 3: Multiplication and inverse matrices (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/resources/lecture-3-multiplication-and-inverse-matrices/) (en anglais)

MIT 18.06 Linear Algebra (Spring 2010), MIT OpenCourseWare. Licence : CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Conditions d’utilisation (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Lien fourni uniquement pour l’étude gratuite ; Saving Planets n’est ni affilié à cette université ni soutenu par elle.

- [ ] **J’ai terminé cette unité**

Modèles linéaires : économie entrées–sorties (Leontief), réseaux et équilibrage

Construire des modèles linéaires à partir de systèmes réels : le modèle entrées–sorties de Leontief x = Ax + d et sa solution x = (I − A)$^{-1}$d, les modèles étendus à l'environnement qui convertissent les dépenses en émissions, les flux dans les réseaux et l'équilibrage des équations chimiques.

Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette unité, vous saurez :

- Poser et résoudre un modèle entrées–sorties de Leontief.
- Interpréter les coefficients de (I − A)$^{-1}$.
- Étendre un modèle entrées–sorties avec des intensités d'émission pour obtenir une empreinte.
- Écrire des problèmes d'équilibre de flux et d'équilibre chimique comme des systèmes linéaires.

Notions clés

- Dans un modèle entrées–sorties, la colonne j de la matrice de consommation A indique ce que le secteur j achète à chaque secteur pour produire un dollar de production.
- La production totale x doit couvrir ce qu'utilisent les industries (Ax) plus la demande finale d : x = Ax + d, donc (I − A)x = d et x = (I − A)$^{-1}$d.
- Le coefficient (i, j) de l'inverse de Leontief (I − A)$^{-1}$ est la production totale du secteur i nécessaire, directement et via toutes les chaînes d'approvisionnement, pour un dollar de demande finale adressée au secteur j.
- Les modèles étendus à l'environnement multiplient la production par une ligne d'intensités d'émission e (par exemple kg CO_2 par dollar) : empreinte = e·x.
- Les lois de conservation donnent aussi des équations linéaires : le flux entrant égale le flux sortant en chaque nœud d'un réseau, et les atomes de chaque élément s'équilibrent dans une réaction chimique.

Équations clés

$$\mathbf{x} = A\mathbf{x} + \mathbf{d}$$

Équilibre entrées–sorties

$$\mathbf{x} = (I - A)^{-1}\mathbf{d}$$

```
=(I-A)^-1
```

Solution de Leontief

$$\text{footprint} = \mathbf{e} \cdot \mathbf{x}$$

`footprint=·`

Modèle étendu à l'environnement

$$\sum \text{in} = \sum \text{out}$$

`in= out`

Équilibre des flux en un nœud

Exemples résolus pas à pas

Exemple 4.1 Une économie à deux secteurs a A = [[0.2, 0.3], [0.1, 0.4]] et une demande finale d = (100, 50) (valeurs d'exemple, en millions de $). Trouvez la production totale.

1. I − A = [[0.8, −0.3], [−0.1, 0.6]], det = 0.48 − 0.03 = 0.45.
2. $(I - A)^{-1} = (1/0.45)[[0.6, 0.3], [0.1, 0.8]]$.
3. x = (1/0.45)(60 + 15, 10 + 40).

Réponse : x = (166.7, 111.1) millions de $.

Exemple 4.2 Avec des intensités d'émission d'exemple e = (0.5, 2.0) kg CO_2 par dollar, trouvez l'empreinte de cette demande finale.

1. empreinte = 0.5 × 166.7 + 2.0 × 111.1 (en kg par $ × millions de $).

Réponse : 305.6 millions de kg = 305.6 kt CO_2 (exemple).

Exemple 4.3 Équilibrez x CH_4 + y O_2 → z CO_2 + w H_2O.

1. C: x = z. H: 4x = 2w. O: 2y = 2z + w.
2. Posez x = 1 : z = 1, w = 2, y = 2.

Réponse : CH_4 + 2 O_2 → CO_2 + 2 H_2O.

Exercices

Faites chacun d'abord sur papier, puis vérifiez.

1. Dans le modèle résolu, quelle production du secteur 1 faut-il au total pour 1 $ de demande finale adressée au secteur 2 ?

   Coefficient (1, 2) de $(I - A)^{-1} = 0.3/0.45 = 0.667$.

2. Une économie à un seul secteur consomme 0.25 de sa propre production. Quelle production totale satisfait une demande de 300 ?

   $x = 300/(1 - 0.25) = 400$.

3. Un nœud reçoit des flux entrants de 40 et 25, et a un flux sortant f_1 plus un flux sortant de 30. Trouvez f_1.

   $f_1 = 65 - 30 = 35$.

4. Équilibrez $H_2 + O_2 \rightarrow H_2O$.

   $2\ H_2 + O_2 \rightarrow 2\ H_2O$.

Idées reçues fréquentes

Idée reçue : La production totale est égale à la demande finale.

En réalité : Les industries consomment aussi la production les unes des autres, donc x est plus grand que d.

Idée reçue : L'empreinte provient uniquement du secteur auquel on achète.

En réalité : L'inverse de Leontief additionne tous les fournisseurs en amont.

Idée reçue : N'importe quelle A donne une économie sensée.

En réalité : Les sommes des colonnes doivent être inférieures à 1 pour que $(I - A)^{-1}$ ait des coefficients positifs ou nuls.

Cartes mémoire

Matrice de consommation

Intrants par dollar de production.

Modèle de Leontief

$x = Ax + d$.

Inverse de Leontief

$(I - A)^{-1}$, besoins totaux.

Modèle étendu

empreinte = $e \cdot x$.

Équilibre des flux

Système homogène

Entrée = sortie en chaque nœud. $Ax = 0$.

Quiz d’autocontrôle

1. La solution de Leontief est…

$x = Ad$

$x = (I - A)^{-1}d$

$x = A^{-1}d$

$x = d - A$

$x = (I - A)^{-1}d$. À partir de $x = Ax + d$.

2. La colonne j de A décrit…

ce que vend le secteur j

ce qu’achète le secteur j par dollar de production

la demande finale

les émissions

ce qu’achète le secteur j par dollar de production. Les intrants par unité de production.

3. Dans un modèle étendu, une empreinte est…

$e \cdot x$

$e + x$

$\det A$

x/e

$e \cdot x$. L’intensité fois la production, sommée.

4. Équilibrer une équation chimique est un…

problème non linéaire

système linéaire homogène

déterminant

problème de valeurs propres

système linéaire homogène. Le décompte des atomes donne Ax = 0.

Refaire ce quiz

Comment cela aide à sauver la planète

L'EPA des États-Unis utilise exactement ce modèle pour suivre la pollution à travers l'économie. Selon l'EPA, ses modèles USEEIO combinent des données sur les transactions économiques entre 389 secteurs industriels avec des données environnementales sur ces secteurs, couvrant l'utilisation des sols, de l'eau, de l'énergie et des minéraux, la pollution de l'air, les nutriments et les substances toxiques, afin d'évaluer les impacts des biens et services. L'EPA les décrit comme utiles pour le calcul de l'empreinte carbone, et ils soutiennent son travail de gestion durable des matériaux.

Une matrice de consommation à 389 secteurs a $389^2 = 151321$ coefficients, bien trop pour un calcul à la main mais facile pour les méthodes d'élimination et LU du module 3. C'est l'inverse de Leontief qui permet à une ville, une entreprise ou un ménage de voir les émissions cachées dans ses chaînes d'approvisionnement, et pas seulement à la sortie de l'usine.

Sur Saving Planets : Solutions · Chimie générale I

Sources : U.S. EPA: US Environmentally-Extended Input-Output (USEEIO) models (https://www.epa.gov/land-research/us-environmentally-extended-input-output-useeio-models) · Interactive Linear Algebra, 1.1 Systems of linear equations (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/systems-of-eqns.html)

Ressources d'apprentissage gratuites

- U.S. EPA: US Environmentally-Extended Input-Output (USEEIO) models (https://www.epa.gov/land-research/us-environmentally-extended-input-output-useeio-models): Les modèles entrées–sorties étendus à l'environnement de l'EPA.
- Jim Hefferon, Linear Algebra (free text) (https://hefferon.net/linearalgebra/): Thème : analyse entrées–sorties de Leontief.
- MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra (Strang, Spring 2010) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/): Cours et séries d'exercices d'applications.
- Interactive Linear Algebra, 1.2 Row reduction (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/row-reduction.html): Résoudre les systèmes.

- [ ] **J’ai terminé cette unité**

Espaces vectoriels, sous-espaces, indépendance, base, rang et les quatre sous-espaces fondamentaux

Espaces vectoriels et sous-espaces, espace des colonnes et noyau, résolution complète de Ax = 0 et Ax = b, indépendance linéaire, base et dimension, rang, théorème du rang et les quatre sous-espaces fondamentaux de Strang.

Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette unité, vous saurez :

- Tester si un ensemble est un sous-espace.
- Trouver des bases de l'espace des colonnes et du noyau d'une matrice.
- Tester l'indépendance linéaire de vecteurs.
- Utiliser le théorème du rang et les dimensions des quatre sous-espaces fondamentaux.

Notions clés

- Un sous-espace contient le vecteur nul et est stable par addition et multiplication par un scalaire. Les droites et plans passant par l'origine sont des sous-espaces ; ceux qui ne passent pas par l'origine n'en sont pas.
- Espace des colonnes C(A) : tous les Ax, l'ensemble des b pour lesquels Ax = b a une solution. Noyau N(A) : tous les x tels que Ax = 0.
- Des vecteurs sont linéairement indépendants si la seule combinaison donnant zéro est celle dont tous les coefficients sont nuls. Une base est une famille génératrice indépendante ; toutes les bases d'un espace ont le même nombre de vecteurs, sa dimension.
- Rang r = nombre de pivots = dim C(A). Théorème du rang : r + dim N(A) = n, le nombre de colonnes.
- Quatre sous-espaces fondamentaux d'une matrice m × n de rang r : C(A) (dim r) et N(A^T) (dim m − r) dans $\mathbb{R}^m$; C(A^T) (dim r) et N(A) (dim n − r) dans $\mathbb{R}^n$. N(A) est orthogonal à l'espace des lignes.

Équations clés

$$C(A) = \{A\mathbf{x}\}, \;\; N(A) = \{\mathbf{x} : A\mathbf{x} = 0\}$$

```
C(A)=\,\ \ N(A)=\:A=0\
```

Espace des colonnes et noyau

$$r + \dim N(A) = n$$

```
r+ N(A)=n
```

Théorème du rang

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_n$$

Solution complète de Ax = b

$$\dim N(A^T) = m - r$$

`N(A^T)=m-r`

Noyau à gauche

Exemples résolus pas à pas

Exemple 5.1 Trouvez le rang et une base du noyau de A = [[1, 2, 3], [2, 4, 6], [1, 0, 1]].

1. $R_2 - 2R_1 = 0$; $R_3 - R_1 = [0, -2, -2]$. Deux pivots, donc r = 2.
2. Ax = 0 : x + z = 0 et −2y − 2z = 0, avec z libre.
3. Prenez z = 1 : x = −1, y = −1.

Réponse : r = 2, N(A) engendré par (−1, −1, 1) ; dim N(A) = 3 − 2 = 1.

Exemple 5.2 (1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9) sont-ils indépendants ?

1. Échelonnez la matrice ayant ces colonnes : $R_2 - 2R_1$ et $R_3 - 3R_1$ donnent les lignes [0, −3, −6] et [0, −6, −12], qui sont proportionnelles.
2. Seulement deux pivots.

Réponse : No: (7, 8, 9) = 2(4, 5, 6) − (1, 2, 3).

Exemple 5.3 Une matrice 5 × 8 est de rang 3. Donnez les dimensions de ses quatre sous-espaces fondamentaux.

1. C(A) et $C(A^T)$: r = 3.
2. N(A): n − r = 8 − 3; $N(A^T)$: m − r = 5 − 3.

Réponse : 3, 3, 5 et 2.

Exercices

Faites chacun d’abord sur papier, puis vérifiez.

1. La droite $y = 2x + 1$ est-elle un sous-espace de $\mathbb{R}^2$?

   Non : elle ne contient pas (0, 0).

2. Une matrice 4×4 a un noyau de dimension 2. Quel est son rang ?

   $4 - 2 = 2$.

3. Quelle est la dimension de l'espace des matrices 2×2 ?

   4.

4. 4 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ peuvent-ils être indépendants ?

   Non : au plus 3.

Idées reçues fréquentes

Idée reçue : Tout plan de $\mathbb{R}^3$ est un sous-espace.
En réalité : Seulement les plans passant par l'origine.

Idée reçue : Le rang compte les coefficients non nuls.
En réalité : Il compte les pivots (colonnes indépendantes).

Idée reçue : Le noyau vit dans le même espace que b.
En réalité : N(A) est dans $\mathbb{R}^n$ (côté x) ; b est dans $\mathbb{R}^m$.

Cartes mémoire

Sous-espace

Contient 0 ; stable par + et par multiplication scalaire.

Espace des colonnes

All Ax.

Noyau

Tous les x tels que Ax = 0.

Base

Famille génératrice indépendante.

Rang

Nombre de pivots.

Théorème du rang

r + dim N(A) = n.

Quiz d'autocontrôle

1. Le théorème du rang dit que r + dim N(A) est égal au...

m

n

m + n

r

n. Nombre de colonnes.

2. Ax = b a une solution exactement quand b est dans...

N(A)

C(A)

$N(A^T)$

$C(A^T)$

C(A). b doit être une combinaison des colonnes.

3. Le noyau est orthogonal à...

l'espace des colonnes

l'espace des lignes

b

le noyau à gauche

l'espace des lignes. Chaque ligne scalaire x vaut 0.

4. Une base de $\mathbb{R}^3$ contient combien de vecteurs ?

2

3

4

un nombre quelconque

3. Dimension 3.

Refaire ce quiz

Comment cela aide à sauver la planète

La dimension compte les inconnues, et de meilleures prévisions en demandent davantage. La NOAA a indiqué que la mise à niveau de ses supercalculateurs en 2023 permettrait au Global Forecast System des États-Unis d'améliorer sa résolution horizontale de 13 km à 9 km, ce qui aide à voir et à simuler des phénomènes de plus petite échelle.

Une grille de pas h compte environ $(1/h)^2$ colonnes par unité de surface, donc passer de 13 km à 9 km multiplie le nombre de colonnes de la grille par $(13/9)^2 = 2.09$. Chacune de ces colonnes porte la température, le vent, l'humidité et la pression à de nombreux niveaux, si bien que le vecteur d'état d'une prévision vit dans un espace de dimension bien plus grande, et les matrices qui le mettent à jour grossissent d'autant.

Sur Saving Planets : Analyse III · Équations différentielles

Sources : NOAA: NOAA completes upgrade to weather and climate supercomputer system (Aug. 10, 2023) (https://www.noaa.gov/news-release/noaa-completes-upgrade-to-weather-and-climate-supercomputer-system) · Interactive Linear Algebra, 2.7 Basis and dimension (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/dimension.html)

Ressources d'apprentissage gratuites

- Interactive Linear Algebra, 2.6 Subspaces (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/subspaces.html): Section de texte gratuit.
- Interactive Linear Algebra, 2.5 Linear independence (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/linear-independence.html): Tests d'indépendance.
- Interactive Linear Algebra, 2.9 The rank theorem (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/rank-thm.html): Rang et dimension du noyau.
- MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra (Strang, Spring 2010) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/): Cours 5–10 : espaces, rang et les quatre sous-espaces.

Regarder le cours magistral

Lecture 10: The four fundamental subspaces (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/resources/lecture-10-the-four-fundamental-subspaces/) (en anglais)

MIT 18.06 Linear Algebra (Spring 2010), MIT OpenCourseWare. Licence : CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Conditions d'utilisation (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Lien fourni uniquement pour l'étude gratuite ; Saving Planets n'est ni affilié à cette université ni soutenu par elle.

- [ ] **J’ai terminé cette unité**

UNITÉ 6 · SEMAINES 8–9

Orthogonalité, projections, moindres carrés et Gram–Schmidt

Vecteurs et sous-espaces orthogonaux, projection sur une droite et sur un sous-espace, équations normales $A^TA\hat{x} = A^Tb$, ajustement de droites et de courbes à des données par moindres carrés, bases orthonormées, Gram–Schmidt et A = QR.

Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette unité, vous saurez :

- Projeter un vecteur sur une droite et sur un espace des colonnes.
- Ajuster une droite à des données avec les équations normales.
- Construire une base orthonormée par Gram–Schmidt.
- Expliquer pourquoi les moindres carrés sont une projection.

Notions clés

- La projection de b sur la droite passant par a est p = (a·b/a·a) a ; l'erreur e = b − p est orthogonale à a.
- Quand Ax = b n'a pas de solution (plus d'équations que d'inconnues, données bruitées), on choisit $\hat{x}$ pour rendre $\|b - A\hat{x}\|$ aussi petit que possible. L'erreur doit être orthogonale à C(A), ce qui donne les équations normales $A^TA\hat{x} = A^Tb$.
- Pour une droite y = C + Dt passant par des points (t_i, y_i), les colonnes de A sont une colonne de uns et les valeurs t_i.
- Des vecteurs orthonormés q_i vérifient $q_i \cdot q_j = 0$ $(i \neq j)$ et $\|q_i\| = 1$. Si Q a des colonnes orthonormées, $Q^TQ = I$ et les projections deviennent $p = QQ^Tb$.
- Gram–Schmidt retranche à chaque nouveau vecteur ses projections sur les précédents, puis normalise. On obtient A = QR avec R triangulaire supérieure.

Équations clés

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \mathbf{a}$$

Projection sur une droite

$$A^T A\hat{\mathbf{x}} = A^T \mathbf{b}$$

A^TA=A^T

Équations normales

$$P = A(A^T A)^{-1} A^T$$

`P=A(A^TA)^-1A^T`

Matrice de projection

$$A = QR$$

`A=QR`

Factorisation de Gram–Schmidt

Exemples résolus pas à pas

Exemple 6.1 Projetez b = (2, 3) sur a = (1, 1).

1. a·b = 5, a·a = 2.
2. p = 2.5(1, 1) ; e = b − p = (−0.5, 0.5), et e·a = 0.

Réponse : p = (2.5, 2.5).

Exemple 6.2 Ajustez y = C + Dt à (0, 1), (1, 2), (2, 4) par moindres carrés.

1. A a pour lignes (1, 0), (1, 1), (1, 2) ; A^TA = [[3, 3], [3, 5]], A^Tb = (7, 10).
2. det = 6 ; C = (5 × 7 − 3 × 10)/6, D = (3 × 10 − 3 × 7)/6.

Réponse : C = 0.833, D = 1.5: y = 0.833 + 1.5t.

Exemple 6.3 Appliquez Gram–Schmidt à a_1 = (1, 1, 0), a_2 = (1, 0, 1).

1. q_1 = (1, 1, 0)/√2.
2. $a_2 - (a_2 \cdot q_1)q_1$ = (1, 0, 1) − ½(1, 1, 0) = (0.5, −0.5, 1), de longueur √1.5 = 1.225.

Réponse : q_1 = (0.707, 0.707, 0), q_2 = (0.408, −0.408, 0.816).

Exercices

Faites chacun d’abord sur papier, puis vérifiez.

1. Projetez (3, 4) sur (1, 0).

(3, 0).

2. Écrivez les équations normales pour ajuster y = Dt (sans ordonnée à l'origine) à (1, 2), (2, 3).

   $\Sigma t^2\, D = \Sigma ty$: $5D = 8$, $D = 1.6$.

3. Q = [[0, 1], [1, 0]] est-elle orthogonale ?

   Oui : $Q^TQ = I$.

4. Si b est déjà dans C(A), quelle est l'erreur des moindres carrés ?

   Zéro : p = b.

Idées reçues fréquentes

Idée reçue : Les moindres carrés résolvent Ax = b exactement.
En réalité : Ils trouvent le $A\hat{x}$ le plus proche quand il n'existe pas de solution exacte.

Idée reçue : N'importe quelle base rend les projections faciles.
En réalité : Les bases orthonormées oui ; sinon il faut $(A^TA)^{-1}$.

Idée reçue : Un ajustement par une droite signifie que les données sont linéaires.
En réalité : Vérifiez les résidus ; une courbe peut mieux convenir (ajoutez une colonne t^2).

Cartes mémoire

Projection sur une droite

$p = (a \cdot b / a \cdot a)a$.

Équations normales

$A^TA\hat{x} = A^Tb$.

Matrice de projection

$P = A(A^TA)^{-1}A^T$.

Orthonormé

$q_i \cdot q_j = 0$, $\|q_i\| = 1$.

Gram–Schmidt

Retrancher les projections, normaliser.

QR

$A = QR$.

Quiz d'autocontrôle

1. Les équations normales sont…

$Ax = b$

$A^TA\hat{x} = A^Tb$

$AA^Tx = b$

$A^Tx = b$

$A^TA\hat{x} = A^Tb$. Erreur orthogonale à C(A).

2. Le vecteur d'erreur des moindres carrés est orthogonal...

b

l'espace des colonnes

au noyau

$\hat{x}$

l'espace des colonnes. C'est ce qui le rend le plus court.

3. Pour Q à colonnes orthonormées, Q^TQ =...

0

Q

I

QQ^T

I. Produits scalaires 0 ou 1.

4. Gram–Schmidt produit...

$A = LU$

$A = QR$

$A = PDP^{-1}$

$A = U\Sigma V^T$

A = QR. Q orthonormée, R triangulaire.

Refaire ce quiz

Comment cela aide à sauver la planète

La montée du niveau de la mer se mesure en ajustant des courbes à des données satellitaires bruitées. La NASA indique que les altimètres satellitaires, TOPEX/Poseidon, Jason-1, -2 et -3 et désormais Sentinel-6 Michael Freilich, suivent le niveau moyen mondial de la mer depuis 1993, qu'il a monté de 114.4 mm depuis, et que le rythme de la hausse est passé de 0.08 pouce par an (0.20 cm par an) en 1993 à 0.17 pouce par an (0.44 cm par an) aujourd'hui, soit environ 2.2 fois plus vite.

Un ajustement linéaire par moindres carrés donne un rythme moyen ; ajouter une colonne t^2 à A ajuste une courbe dont la pente variable mesure l'accélération décrite par la NASA. Le TP D ajuste des données d'exemple ayant l'allure de la série de la NASA avec exactement les équations normales de ce module.

Sur Saving Planets : Océans · Observation de la Terre

Sources : NASA: Global mean sea level (Vital Signs) (https://sealevel.nasa.gov/vital-signs/global-mean-sea-level/) · Interactive Linear Algebra, 6.5 The method of least squares (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/least-squares.html)

Ressources d'apprentissage gratuites

- Interactive Linear Algebra, 6.3 Orthogonal projection (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/projections.html): Section de texte gratuit.
- Interactive Linear Algebra, 6.5 The method of least squares (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/least-squares.html): Les moindres carrés en images.
- Interactive Linear Algebra, 6.4 Orthogonal sets (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/orthogonal-sets.html): Gram–Schmidt.
- MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra (Strang, Spring 2010) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/): Cours 14–17 : orthogonalité, projections, moindres carrés, Gram–Schmidt.

Regarder le cours magistral

Lecture 16: Projection matrices and least squares (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/resources/lecture-16-projection-matrices-and-least-squares/) (en anglais)

MIT 18.06 Linear Algebra (Spring 2010), MIT OpenCourseWare. Licence : CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Conditions d'utilisation (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Lien fourni uniquement pour l'étude gratuite ; Saving Planets n'est ni affilié à cette université ni soutenu par elle.

☐ **J'ai terminé cette unité**

Déterminants : propriétés, cofacteurs, règle de Cramer et volume

Le déterminant à partir de ses propriétés, son calcul par élimination et par développement en cofacteurs, det(AB) = det A det B, le critère d'inversibilité, la règle de Cramer, et le déterminant comme facteur d'échelle d'aire ou de volume d'une application linéaire.

Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette unité, vous saurez :

- Calculer des déterminants 2 × 2 et 3 × 3 par cofacteurs et par élimination.
- Utiliser les propriétés des déterminants sous les opérations sur les lignes.
- Résoudre de petits systèmes par la règle de Cramer.
- Interpréter |det A| comme un facteur d'échelle d'aire ou de volume.

Notions clés

- det A ≠ 0 exactement quand A est inversible. Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux, donc det A = ± (produit des pivots).
- Opérations sur les lignes : un échange change le signe, multiplier une ligne par c multiplie det par c, et ajouter à une ligne un multiple d'une autre laisse det inchangé.
- det(AB) = det A · det B, det(A^T) = det A et det(A^{-1}) = 1/det A.
- Développement en cofacteurs selon une ligne : det A = Σ $a_{ij}C_{ij}$ avec C_{ij} = $(-1)^{i+j}$ fois le mineur. Règle de Cramer : x_i = det(B_i)/det A, où B_i a b en colonne i.
- Une application linéaire x ↦ Ax multiplie les aires (2D) ou les volumes (3D) par |det A| ; un déterminant négatif inverse aussi l'orientation.

Équations clés

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

```
&b\&d=ad-bc
```

Déterminant 2 × 2

$$\det(AB) = \det A \, \det B$$

```
(AB)= A B
```

Règle du produit

$$x_i = \frac{\det B_i}{\det A}$$

`x_i=( B_i)/( A)`

Règle de Cramer

$$\text{area}(AS) = |\det A| \, \text{area}(S)$$

`area(AS)=| A| area(S)`

Facteur d’échelle des aires

Exemples résolus pas à pas

Exemple 7.1 Trouvez det [[1, 2, 0], [0, 1, 3], [2, 0, 1]] par cofacteurs selon la ligne 1.

1. 1 × (1 × 1 − 3 × 0) = 1.
2. − 2 × (0 × 1 − 3 × 2) = −2 × (−6) = 12.
3. + 0 × (...) = 0.

Réponse : det = 13.

Exemple 7.2 Résolvez 2x + y = 5, x + 3y = 10 par la règle de Cramer.

1. det A = 6 − 1 = 5.
2. x = det[[5, 1], [10, 3]]/5 = (15 − 10)/5.
3. y = det[[2, 5], [1, 10]]/5 = (20 − 5)/5.

Réponse : x = 1, y = 3.

Exemple 7.3 Trouvez l’aire du parallélogramme de côtés (3, 0) et (1, 2).

1. Aire = |det [[3, 1], [0, 2]]| = |6 − 0|.

Réponse : 6 unités d’aire.

Exercices

Faites chacun d’abord sur papier, puis vérifiez.

1. det [[3, 1], [2, 4]] ?

$12 - 2 = 10$.

2. det [[2, 0, 1], [1, 3, 2], [1, 1, 1]] ?

   $2(3 - 2) - 0 + 1(1 - 3) = 0$, elle est donc singulière.

3. Si det A = 4 pour une matrice A 3 × 3, que vaut det(2A) ?

   $2^3 \times 4 = 32$.

4. Si det A = 5, que vaut $\det(A^{-1})$?

   $1/5 = 0.2$.

Idées reçues fréquentes

Idée reçue : det(A + B) = det A + det B.

En réalité : Faux en général ; seul det(AB) se factorise.

Idée reçue : det(2A) = 2 det A.

En réalité : Pour n × n, $\det(2A) = 2^n \det A$.

Idée reçue : Le développement en cofacteurs est la méthode rapide.

En réalité : Il demande environ n! étapes ; l'élimination environ $n^3/3$.

Cartes mémoire

det 2 × 2

ad − bc.

Inversibilité

det A ≠ 0.

Règle du produit

det(AB) = det A det B.

Échange de lignes

Change le signe.

Règle de Cramer

$x_i = \det B_i / \det A$.

Facteur d'aire

|det A|.

Quiz d'autocontrôle

1. Échanger deux lignes multiplie det par…

0

1

−1

2

−1. Le signe change.

2. det A = 0 signifie que A est…

orthogonaux

singulière

symétrique

l’identité

singulière. Non inversible.

3. Le det d’une matrice triangulaire est…

la trace

le produit des coefficients diagonaux

zéro

la somme des coefficients diagonaux

le produit des coefficients diagonaux. Développez le long de la diagonale.

4. Une application de det = 3 multiplie les aires par…

1/3

3

9

√3

3. |det A|.

Refaire ce quiz

Comment cela aide à sauver la planète

Convertir des pixels en surface au sol est un déterminant. L'USGS indique pour Landsat 9 des bandes multispectrales à 30 m et une bande panchromatique à 15 m. L'application qui envoie les indices de pixel (i, j) sur les coordonnées au sol est, localement, une matrice ; pour une grille alignée de 30 m c'est diag(30, 30) m, de déterminant 900, donc chaque pixel couvre 900 m². La grille panchromatique de 15 m a pour déterminant 225 m², si bien que quatre pixels panchromatiques tiennent dans un pixel multispectral.

Compter les pixels classés comme forêt et multiplier par ce facteur d'échelle, c'est ainsi que les relevés satellitaires mesurent la perte de forêt en hectares (1 ha = 10000 m², environ 11.1 pixels Landsat). Quand une image est tournée ou cisaillée pour coller à une carte, le déterminant de la nouvelle matrice garde l'aire exacte.

Sur Saving Planets : Déforestation · Observation de la Terre

Sources : USGS: Landsat 9 (https://www.usgs.gov/landsat-missions/landsat-9) · Interactive Linear Algebra, 4.3 Determinants and volumes (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/determinants-volumes.html)

Ressources d'apprentissage gratuites

- Interactive Linear Algebra, 4.1 Determinants: definition (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/determinants-definitions-properties.html): Section de texte gratuit.
- Interactive Linear Algebra, 4.3 Determinants and volumes (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/determinants-volumes.html): Sens géométrique.
- MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra (Strang, Spring 2010) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/): Cours 18–20 : déterminants, cofacteurs, règle de Cramer.
- Jim Hefferon, Linear Algebra (free text) (https://hefferon.net/linearalgebra/): Chapitre quatre : déterminants.

Regarder le cours magistral

Lecture 20: Cramer's rule, inverse matrix, and volume (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/resources/lecture-20-cramers-rule-inverse-matrix-and-volume/) (en anglais)

MIT 18.06 Linear Algebra (Spring 2010), MIT OpenCourseWare. Licence : CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Conditions d'utilisation (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Lien fourni uniquement pour l'étude gratuite ; Saving Planets n'est ni affilié à cette université ni soutenu par elle.

☐ **J'ai terminé cette unité**

Valeurs propres et vecteurs propres

Les vecteurs propres comme directions qu'une matrice ne fait qu'étirer, l'équation caractéristique det(A − λI) = 0, les vérifications par la trace et le déterminant, les valeurs propres de matrices particulières, valeurs propres complexes et rotations, la méthode de la puissance itérée, et les modes propres des structures en vibration.

Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette unité, vous saurez :

- Trouver les valeurs propres via det(A − λI) = 0 et les vecteurs propres dans le noyau de A − λI.
- Vérifier les valeurs propres avec la trace et le déterminant.
- Reconnaître des valeurs propres réelles, multiples et complexes.
- Utiliser la puissance itérée pour trouver la valeur propre dominante.

Notions clés

- Av = λv avec v ≠ 0 : le vecteur propre v garde sa direction et est multiplié par la valeur propre λ.
- Les valeurs propres sont les racines de det(A − λI) = 0, un polynôme de degré n. Pour chaque λ, les vecteurs propres remplissent le noyau de A − λI.
- Vérifications : la somme des valeurs propres est la trace (somme de la diagonale) et leur produit est det A.
- Les matrices symétriques ont des valeurs propres réelles et des vecteurs propres orthogonaux. Les matrices de rotation ont des valeurs propres complexes. Les matrices triangulaires affichent leurs valeurs propres sur la diagonale.
- Puissance itérée : multipliez sans cesse un vecteur de départ par A et renormalisez ; il s'aligne sur le vecteur propre du plus grand |λ|. Pour les vibrations, Kv = ω²Mv donne les pulsations propres ω et les déformées modales v.

Équations clés

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

Équation aux valeurs propres

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

`(A- I)=0`

Équation caractéristique

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = \operatorname{tr} A, \quad \lambda_1 \cdots \lambda_n = \det A$$

_1+·s+_n=,\ \ _1·s_n= A

Vérifications par la trace et le déterminant

$$K\mathbf{v} = \omega^2 M\mathbf{v}$$

K=ω^2M

Modes propres d’une structure

Exemples résolus pas à pas

Exemple 8.1 Trouvez les valeurs propres et vecteurs propres de A = [[2, 1], [1, 2]].

1. det(A − λI) = (2 − λ)² − 1 = λ² − 4λ + 3 = 0.
2. λ = 3 : A − 3I = [[−1, 1], [1, −1]] donne v = (1, 1). λ = 1 : v = (1, −1).
3. Vérification : 3 + 1 = 4 = trace ; 3 × 1 = 3 = det.

Réponse : λ = 3 avec (1, 1) ; λ = 1 avec (1, −1).

Exemple 8.2 Trouvez les valeurs propres de [[4, 1], [2, 3]].

1. λ² − 7λ + 10 = 0 (trace 7, det 10).
2. (λ − 5)(λ − 2) = 0.

Réponse : λ = 5 et λ = 2.

Exemple 8.3 Un bâtiment d’exemple à deux niveaux a des masses de plancher égales m et une rigidité d’étage k, avec K/m = (k/m)[[2, −1], [−1, 1]] et k/m = 100 s⁻². Trouvez la fréquence fondamentale.

1. Valeurs propres de [[2, −1], [−1, 1]] : λ = (3 ± √5)/2 = 0.382 et 2.618.
2. ω_1^2 = 100 × 0.382 = 38.2 s⁻², ω_1 = 6.18 rad/s.
3. $f_1 = \omega_1/(2\pi)$, $T_1 = 1/f_1$.

Réponse : f_1 = 0.984 Hz, période T_1 = 1.02 s (valeurs d’exemple).

Exercices

Faites chacun d’abord sur papier, puis vérifiez.

1. Valeurs propres de [[5, 0], [0, −2]] ?

5 et −2 (diagonale).

2. Une matrice 3 × 3 a pour valeurs propres 1, 2, 3. Trouvez sa trace et son déterminant.

   Trace 6, det 6.

3. Valeurs propres de la rotation de 90° [[0, −1], [1, 0]] ?

   $\lambda^2 + 1 = 0$: $\lambda = \pm i$.

4. Si $Av = 4v$, que vaut A^2v ?

   16v.

Idées reçues fréquentes

Idée reçue : Le vecteur nul est un vecteur propre.
En réalité : Les vecteurs propres doivent être non nuls.

Idée reçue : L'échelonnement conserve les valeurs propres.
En réalité : Il les modifie ; utilisez $\det(A - \lambda I)$.

Idée reçue : Toute matrice réelle a des valeurs propres réelles.
En réalité : Les rotations en donnent des complexes ; les matrices symétriques sont le cas sûr.

Cartes mémoire

Vecteur propre

$Av = \lambda v$, $v \neq 0$.

Équation caractéristique

$\det(A - \lambda I) = 0$.

Vérification par la trace

$\Sigma\lambda$ = trace.

Vérification par le déterminant

$\Pi\lambda = \det A$.

Puissance itérée

Des multiplications répétées trouvent le vecteur propre dominant.

Modes propres

$Kv = \omega^2 Mv$.

Quiz d'autocontrôle

1. Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont…

ses pivots après échanges

ses coefficients diagonaux

toutes égales à 1

ses sommes de lignes

ses coefficients diagonaux. det(A − λI) est un produit de termes diagonaux.

2. La somme des valeurs propres est égale…

au déterminant

la trace

au rang

n

la trace. Vérification par la trace.

3. La puissance itérée trouve…

la plus petite valeur propre

la valeur propre dominante

au déterminant

l’inverse

la valeur propre dominante. Le plus grand |λ| l’emporte.

4. Les matrices symétriques ont…

des valeurs propres complexes

des valeurs propres réelles et des vecteurs propres orthogonaux

un déterminant nul

aucun vecteur propre

des valeurs propres réelles et des vecteurs propres orthogonaux. Théorème spectral.

Refaire ce quiz

Comment cela aide à sauver la planète

Les ingénieurs parasismiques lisent les bâtiments à travers leurs valeurs propres. Une étude de l'USGS de Mehmet Çelebi (2022) a utilisé les périodes fondamentales et les pourcentages d'amortissement critique de 41 immeubles de grande hauteur dans plusieurs pays. Elle a trouvé une nette tendance linéaire entre la hauteur du bâtiment et la période fondamentale pour les bâtiments en acier et en béton armé, avec toutefois une grande dispersion due aux différences de conception structurelle, et un amortissement critique nettement inférieur à 3 %, en accord avec d'autres études récentes sur les tours.

La période fondamentale est fixée par la plus petite valeur propre du problème rigidité–masse, comme dans l'exemple du bâtiment à deux niveaux. Un faible amortissement signifie qu'une tour peut vibrer longtemps quand des ondes sismiques de longue période correspondent à cette période ; c'est pourquoi les bâtiments instrumentés et leurs modes mesurés guident des villes plus sûres et plus durables.

Sur Saving Planets : Équations différentielles · Dynamique

Sources : USGS: Preliminary study of correlation of natural periods and damping percentages of tall buildings in several countries (Çelebi, 2022) (https://www.usgs.gov/publications/preliminary-study-correlation-natural-periods-and-damping-percentages-tall-buildings) · Interactive Linear Algebra, 5.1 Eigenvalues and eigenvectors (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/eigenvectors.html)

Ressources d'apprentissage gratuites

- Interactive Linear Algebra, 5.1 Eigenvalues and eigenvectors (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/eigenvectors.html): Section de texte gratuit.
- Interactive Linear Algebra, 5.2 The characteristic polynomial (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/characteristic-polynomial.html): Trouver des valeurs propres.
- Interactive Linear Algebra, 5.5 Complex eigenvalues (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/complex-eigenvalues.html): Rotation et homothétie.
- MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra (Strang, Spring 2010) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/): Cours 21 : valeurs propres et vecteurs propres.

☐ **J'ai terminé cette unité**

Diagonalisation, puissances de matrices, chaînes de Markov et systèmes dynamiques linéaires

Diagonaliser $A = PDP^{-1}$, calculer rapidement les puissances A^k, matrices symétriques et théorème spectral $A = Q\Lambda Q^T$, matrices de Markov (stochastiques) et états stationnaires, et le comportement à long terme de $x_{k+1} = Ax_k$.

Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette unité, vous saurez :

- Diagonaliser une matrice ayant n vecteurs propres indépendants.
- Calculer A^k et prévoir le comportement à long terme de $x_{k+1} = Ax_k$.
- Trouver l'état stationnaire d'une chaîne de Markov.
- Utiliser le théorème spectral pour les matrices symétriques.

Notions clés

- Si A a n vecteurs propres indépendants (les colonnes de P), alors $A = PDP^{-1}$ avec les valeurs propres sur la diagonale de D, et $A^k = PD^kP^{-1}$.
- Écrivez $x_0 = c_1v_1 + \ldots + c_nv_n$. Alors $x_k = A^kx_0 = c_1\lambda_1^kv_1 + \ldots + c_n\lambda_n^kv_n$; le plus grand $|\lambda|$ domine quand k augmente.
- Une matrice de Markov a des coefficients positifs ou nuls et des colonnes de somme 1. Elle a toujours $\lambda = 1$, et les autres valeurs propres vérifient $|\lambda| \leq 1$. L'état stationnaire est le vecteur propre associé à $\lambda = 1$, normalisé pour que ses coefficients aient pour somme 1.
- Le deuxième plus grand $|\lambda|$ fixe la vitesse à laquelle une chaîne de Markov oublie son départ : l'écart décroît comme $|\lambda_2|^k$.
- Théorème spectral : une matrice symétrique réelle peut s'écrire $A = Q\Lambda Q^T$ avec des vecteurs propres orthonormés dans Q.

Équations clés

$$A = PDP^{-1},\ \ A^k = PD^kP^{-1}$$

```
A=PDP^-1,\ \ A^k=PD^kP^-1
```

Diagonalisation et puissances

$$\mathbf{x}_k = c_1\lambda_1^k\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\lambda_n^k\mathbf{v}_n$$

```
_k=c_1_1^k_1+·s+c_n_n^k_n
```

Solution de x_{k+1} = Ax_k

$$P\mathbf{q} = \mathbf{q},\ \ \sum q_i = 1$$

P=,\ \ q_i=1

État stationnaire de Markov

$$A = Q\Lambda Q^T$$

A=Q Q^T

Théorème spectral

Exemples résolus pas à pas

Exemple 9.1 Utilisez la diagonalisation pour trouver A^{10} pour A = [[2, 1], [1, 2]].

1. D'après le module 8 : λ = 3, 1 avec v = (1, 1), (1, −1). P = [[1, 1], [1, −1]], P^{-1} = ½[[1, 1], [1, −1]].
2. A^{10} = P diag(3^{10}, 1) P^{-1} ; chaque coefficient vaut (3^{10} ± 1)/2.

Réponse : A^{10} = [[29525, 29524], [29524, 29525]].

Exemple 9.2 Une matrice de Markov est P = [[0.8, 0.3], [0.2, 0.7]] (valeurs d'exemple). Trouvez l'état stationnaire.

1. (P − I)q = 0 : $-0.2q_1 + 0.3q_2 = 0$, donc $q_1 = 1.5q_2$.
2. $q_1 + q_2 = 1$ donne $q_2 = 0.4$.

Réponse : q = (0.6, 0.4).

Exemple 9.3 En partant de x_0 = (1, 0), trouvez x_2 pour la même P, ainsi que x_k en général.

1. x_1 = (0.8, 0.2); x_2 = (0.64 + 0.06, 0.16 + 0.14).
2. Les valeurs propres sont 1 et 0.5 (trace 1.5, det 0.5), donc x_k = (0.6, 0.4) + 0.5^k(0.4, −0.4).

Réponse : x_2 = (0.70, 0.30); x_k → (0.6, 0.4).

Exercices

Faites chacun d'abord sur papier, puis vérifiez.

1. [[0.5, 0.2], [0.5, 0.8]] est-elle une matrice de Markov ?

Oui : coefficients positifs ou nuls, colonnes de somme 1.

2. Trouvez son état stationnaire.

   $0.5q_1 = 0.2q_2$, donc $q = (2/7, 5/7) = (0.286, 0.714)$.

3. Si $A = PDP^{-1}$ avec $D = \text{diag}(0.9, 0.5)$, que devient $A^k x$ pour k grand ?

   Il tend vers zéro, dominé par 0.9^k.

4. $[[1, 1], [0, 1]]$ est-elle diagonalisable ?

   Non : $\lambda = 1$ double mais un seul vecteur propre indépendant.

Idées reçues fréquentes

Idée reçue : Toute matrice est diagonalisable.
En réalité : Il faut n vecteurs propres indépendants ; $[[1, 1], [0, 1]]$ n'en a qu'un.

Idée reçue : L'état stationnaire d'une chaîne de Markov dépend du départ.
En réalité : Pour une chaîne régulière, non ; tout départ converge vers le même q.

Idée reçue : A^k revient à élever chaque coefficient à la puissance k.
En réalité : Seules les matrices diagonales fonctionnent ainsi ; c'est pourquoi on diagonalise.

Cartes mémoire

Diagonalisation

$A = PDP^{-1}$.

Puissance de matrice

$A^k = PD^kP^{-1}$.

Matrice de Markov

Coefficients positifs ou nuls, colonnes de somme 1.

État stationnaire

$Pq = q$, coefficients de somme 1.

Théorème spectral

$A = Q\Lambda Q^T$.

Matrice non diagonalisable

Trop peu de vecteurs propres pour diagonaliser.

Quiz d'autocontrôle

1. Toute matrice de Markov a la valeur propre…

0

1

-1

2

1. Colonnes de somme 1.

2. A^k pour $A = PDP^{-1}$ vaut…

P^kDP^k

PD^kP^{-1}

D^kP

$kPDP^{-1}$

PD^kP^{-1}. Les $P^{-1}P$ intérieurs se simplifient.

3. La vitesse de convergence d'une chaîne de Markov est fixée par…

$\lambda_1 = 1$

$|\lambda_2|$

la trace

n

$|\lambda_2|$. L'écart décroît comme $|\lambda_2|^k$.

4. Les matrices symétriques se diagonalisent sous la forme…

LU

$Q\Lambda Q^T$

QR

$U\Sigma V^T$ seulement

$QΛQ^T$. Théorème spectral.

Refaire ce quiz

Comment cela aide à sauver la planète

Le devenir des matériaux est une chaîne de Markov. L'EPA indique que les États-Unis ont produit 292.4 millions de tonnes de déchets ménagers et assimilés en 2018, soit 4.9 livres par personne et par jour. Environ 69 millions de tonnes ont été recyclées et 25 millions de tonnes compostées, soit un taux combiné de 32.1 % ; environ 35 millions de tonnes (11.8 %) ont été incinérées avec valorisation énergétique ; et plus de 146 millions de tonnes (50 %) ont été mises en décharge.

Si les parts de chaque année restaient fixes, un matériau quitterait l'usage vers ces destinations avec ces probabilités, et seule la part recyclée reviendrait dans l'économie. Le TP E construit une matrice de transition d'exemple avec une part de valorisation de 32.1 % et montre, avec les puissances de matrices et le vecteur propre de λ = 1, comment augmenter le recyclage change la durée pendant laquelle le matériau reste en usage et la quantité qui finit en décharge.

Sur Saving Planets : Solutions

Sources : U.S. EPA: National overview, facts and figures on materials, wastes and recycling (https://www.epa.gov/facts-and-figures-about-materials-waste-and-recycling/national-overview-facts-and-figures-materials) · Interactive Linear Algebra, 5.6 Stochastic matrices (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/stochastic-matrices.html)

Ressources d'apprentissage gratuites

- Interactive Linear Algebra, 5.4 Diagonalization (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/diagonalization.html): Section de texte gratuit.
- Interactive Linear Algebra, 5.6 Stochastic matrices (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/stochastic-matrices.html): Chaînes de Markov et états stationnaires.
- MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra (Strang, Spring 2010) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/): Cours 22–25 : diagonalisation, matrices de Markov, matrices symétriques.
- MIT OpenCourseWare 18.06SC Linear Algebra (self-paced, Fall 2011) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06sc-linear-algebra-fall-2011/): Travaux dirigés sur les matrices de Markov.

Regarder le cours magistral

Lecture 22: Diagonalization and powers of A (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/resources/lecture-22-diagonalization-and-powers-of-a/) (en anglais)

MIT 18.06 Linear Algebra (Spring 2010), MIT OpenCourseWare. Licence : CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Conditions d'utilisation (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Lien fourni uniquement pour l'étude gratuite ; Saving Planets n'est ni affilié à cette université ni soutenu par elle.

- [ ] **J’ai terminé cette unité**

La décomposition en valeurs singulières, l’analyse en composantes principales et les matrices définies positives

Matrices définies positives et A^TA, la SVD $A = U\Sigma V^T$, valeurs singulières et géométrie d’une matrice comme rotation–étirement–rotation, meilleure approximation de rang faible et compression d’images, conditionnement, et analyse en composantes principales de données.

Objectifs d’apprentissage

À la fin de cette unité, vous saurez :

- Tester si une matrice symétrique est définie positive.
- Calculer les valeurs singulières à partir des valeurs propres de A^TA.
- Construire une approximation de rang k et mesurer ce qu’elle conserve.
- Réaliser une petite analyse en composantes principales.

Notions clés

- Une matrice symétrique est définie positive quand $x^TAx > 0$ pour tout $x \neq 0$; de façon équivalente, toutes ses valeurs propres (ou tous ses pivots) sont positives. A^TA est toujours symétrique et semi-définie positive.
- Toute matrice m × n a une SVD $A = U\Sigma V^T$: V et U ont des colonnes orthonormées, et Σ contient les valeurs singulières $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq 0$, racines carrées des valeurs propres de A^TA.
- $A = \sigma_1 u_1 v_1^T + \sigma_2 u_2 v_2^T + \ldots$. Garder les k premiers termes donne la meilleure approximation de rang k (Eckart–Young) ; l’erreur en norme 2 est σ_{k+1}.
- Le conditionnement σ_1/σ_n mesure à quel point des erreurs sur b peuvent être amplifiées en résolvant Ax = b.
- ACP : centrez les données (retranchez les moyennes des colonnes) ; les vecteurs singuliers à droite (vecteurs propres de la matrice de covariance) sont alors les directions principales, et σ_i^2 mesure la variance expliquée par chacune.

Équations clés

$$A = U\Sigma V^T$$

```
A=U V^T
```

Décomposition en valeurs singulières

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(A^TA)}$$

```
σ_i=√_i(A^TA)
```

Valeurs singulières

$$A_k = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T$$

A_k=_i=1^kσ_i_i_i^T

Meilleure approximation de rang k

$$\kappa = \sigma_1 / \sigma_n$$

Conditionnement

Exemples résolus pas à pas

Exemple 10.1 Trouvez les valeurs singulières de A = [[3, 0], [4, 5]].

1. A^TA = [[25, 20], [20, 25]], valeurs propres 45 et 5.
2. $\sigma_1 = \sqrt{45}$, $\sigma_2 = \sqrt{5}$. Vérification : $\sigma_1\sigma_2 = 15 = |\det A|$.

Réponse : σ_1 = 6.708, σ_2 = 2.236.

Exemple 10.2 Quelle part de l'« énergie » $\Sigma\sigma^2$ de A^TA l'approximation de rang 1 de cette A conserve-t-elle ?

1. $\sigma_1^2/(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) = 45/50$.

Réponse : 90%.

Exemple 10.3 Une image en niveaux de gris de 1000 × 1000 est stockée sous forme de SVD de rang 50. Combien de nombres sont stockés, par rapport à l'image complète ?

1. Chaque terme demande un u (1000), un v (1000) et un σ : 2001 nombres.
2. 50 × 2001 = 100050 contre 1000000.

Réponse : 100050 nombres, environ 10.0 % de l'original.

Exercices

Faites chacun d'abord sur papier, puis vérifiez.

1. [[2, 1], [1, 2]] est-elle définie positive ?

   Oui : les valeurs propres 3 et 1 sont positives.

2. Trouvez le conditionnement de diag(10, 0.1).

   10/0.1 = 100.

3. Des données 2D centrées ont pour covariance [[2, 1], [1, 2]]. Quelle part de la variance la première composante principale explique-t-elle ?

   Valeurs propres 3 et 1 : 3/4 = 75 %, selon (1, 1).

4. Quelles sont les valeurs singulières d'une matrice orthogonale ?

   Toutes égales à 1.

Idées reçues fréquentes

Idée reçue : Les valeurs singulières sont les valeurs propres de A.

En réalité : Ce sont les racines carrées des valeurs propres de A^TA, et elles ne sont jamais négatives.

Idée reçue : Seules les matrices carrées ont une SVD.

En réalité : Toutes les matrices en ont une.

Idée reçue : L'ACP fonctionne sur les données brutes.

En réalité : Centrez d'abord les données, et mettez à l'échelle les variables mesurées dans des unités différentes.

Cartes mémoire

SVD

$A = U\Sigma V^T$.

Valeur singulière

$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}(A^TA)$.

Définie positive

$x^TAx > 0$, tous les $\lambda > 0$.

Eckart–Young

La SVD tronquée est la meilleure approximation de rang k.

Conditionnement

σ_1/σ_n.

PCA

SVD des données centrées.

Quiz d’autocontrôle

1. Les valeurs singulières sont…

des réels quelconques

positives ou nulles

toujours entières

les valeurs propres de A

positives ou nulles. Racines carrées des valeurs propres de A^TA, ≥ 0.

2. La meilleure approximation de rang k conserve…

les k premières lignes

les k plus grands termes singuliers

k colonnes au hasard

les k plus petits σ

les k plus grands termes singuliers. Eckart–Young.

3. Un grand conditionnement signifie…

un système bien conditionné

que les erreurs peuvent être amplifiées

que A est orthogonale

que det A = 1

que les erreurs peuvent être amplifiées. Presque singulière.

4. En ACP, la première direction principale est…

la moyenne

le premier vecteur singulier à droite des données centrées

au noyau

la première ligne

le premier vecteur singulier à droite des données centrées. La direction de plus grande variance.

Refaire ce quiz

Comment cela aide à sauver la planète

Le spectromètre imageur EMIT du JPL de la NASA, à bord de la Station spatiale internationale, cartographie les minéraux des régions sources de poussière de la Terre. Le JPL indique qu'il recueille plus de 100000 spectres par seconde, soit 3.6×10^8 spectres par heure, et que sa mission a été prolongée au moins jusqu'en 2026. La poussière compte pour le climat : le JPL note que les minéraux sombres absorbent la lumière du soleil et réchauffent l'air, tandis que les minéraux clairs la réfléchissent et refroidissent.

Chaque spectre est un long vecteur de réflectances à de nombreuses longueurs d'onde, et les longueurs d'onde voisines sont fortement corrélées. L'ACP et la SVD compressent ces données en quelques composantes, séparent le signal du bruit et isolent les signatures de minéraux individuels : les mêmes mathématiques que le TP de compression d'images.

Sur Saving Planets : Observation de la Terre · Espace

Sources : NASA JPL: EMIT, Earth Surface Mineral Dust Source Investigation (https://earth.jpl.nasa.gov/emit/) · MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra (Strang, Spring 2010) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/)

Ressources d'apprentissage gratuites

- MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra (Strang, Spring 2010) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/): Cours 27–29 : matrices définies positives et SVD.
- MIT OpenCourseWare 18.06SC Linear Algebra (self-paced, Fall 2011) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06sc-linear-algebra-fall-2011/): Séance sur la décomposition en valeurs singulières.
- Gilbert Strang, Introduction to Linear Algebra (book site) (https://math.mit.edu/~gs/linearalgebra/): Notes de Strang sur la SVD et les données.
- Jim Hefferon, Linear Algebra (free text) (https://hefferon.net/linearalgebra/): Thèmes sur les matrices orthogonales et les projections.

Regarder le cours magistral

Lecture 25: Symmetric matrices and positive definiteness (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/resources/lecture-25-symmetric-matrices-and-positive-definiteness/) (en anglais)

MIT 18.06 Linear Algebra (Spring 2010), MIT OpenCourseWare. Licence : CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Conditions d'utilisation (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Lien fourni uniquement pour l'étude gratuite ; Saving Planets n'est ni affilié à cette université ni soutenu par elle.

☐ **J'ai terminé cette unité**

Exercices

Ces exercices sont dans chaque unité. Faites-les sur papier, puis ouvrez la réponse.

1. Vecteurs : combinaisons linéaires, normes et produits scalaires
   4 exercices
2. Systèmes d'équations linéaires et élimination de Gauss
   4 exercices
3. Algèbre matricielle : multiplication, inverses et factorisation LU
   4 exercices
4. Modèles linéaires : économie entrées–sorties (Leontief), réseaux et équilibrage
   4 exercices
5. Espaces vectoriels, sous-espaces, indépendance, base, rang et les quatre sous-espaces fondamentaux
   4 exercices
6. Orthogonalité, projections, moindres carrés et Gram–Schmidt
   4 exercices
7. Déterminants : propriétés, cofacteurs, règle de Cramer et volume
   4 exercices
8. Valeurs propres et vecteurs propres
   4 exercices
9. Diagonalisation, puissances de matrices, chaînes de Markov et systèmes dynamiques linéaires
   4 exercices
10. La décomposition en valeurs singulières, l'analyse en composantes principales et les matrices définies positives
    4 exercices

Le laboratoire (Computation lab)

Le labo est la partie pratique du cours. Ici, il est gratuit et sert uniquement à s'entraîner, sans crédits.

Chaque TP se fait dans un tableur gratuit ou sur papier ; les versions Python sont facultatives. Faites des pauses régulières loin de l'écran, et manipulez épingles et ciseaux avec précaution.

Référence de sécurité : OSHA: Computer workstations eTool (https://www.osha.gov/etools/computer-workstations)

TP A : vecteurs de pixels et indice de végétation

SEMAINE 2

Objectif : Traiter les pixels satellitaires comme des vecteurs : calculer des longueurs, des angles entre pixels et le NDVI, et voir que végétation, sol et eau pointent dans des directions différentes.

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}}{\|\mathbf{p}\|\|\mathbf{q}\|}, \quad \mathrm{NDVI} = \frac{\mathrm{NIR}-\mathrm{red}}{\mathrm{NIR}+\mathrm{red}}$$

θ=·\|\|\|\|, NDVI=-redNIR+red

Angle entre pixels et NDVI

Mode opératoire

1. Dans un tableur, saisissez trois pixels d'exemple comme lignes de réflectances (vert, rouge, NIR) : végétation (0.10, 0.08, 0.40), sol (0.20, 0.25, 0.30), eau (0.06, 0.04, 0.02).
2. Calculez la longueur de chaque pixel avec SQRT(SUMSQ(…)) et le produit scalaire de chaque paire avec SUMPRODUCT.
3. Trouvez l'angle entre chaque paire avec ACOS et DEGREES.
4. Calculez le NDVI de chaque pixel. Facultatif : téléchargez une scène Landsat gratuite et recommencez avec de vrais pixels.

Tableau de données

Pixel	Vert	Red	NIR	NDVI
Végétation	0.10	0.08	0.40	0.667
Sol	0.20	0.25	0.30	0.091
Eau	0.06	0.04	0.02	−0.333

Réflectances d'exemple choisies pour ressembler à une végétation, un sol nu et une eau typiques.

Exemple de calcul

1. NDVI végétation = (0.40 − 0.08)/(0.40 + 0.08) = 0.667.
2. NDVI sol = 0.05/0.55 = 0.091 ; NDVI eau = −0.02/0.06 = −0.333.
3. Angle végétation–sol : produit scalaire = 0.160, longueurs 0.420 et 0.4387, cos θ = 0.8683, θ = 29.7°.

> **Sécurité**
>
> - Faites une courte pause d'écran toutes les demi-heures.

Alternative à la maison ou virtuelle

- Tout le TP se fait dans un tableur gratuit.

PhET : Vector Addition (https://phet.colorado.edu/en/simulations/vector-addition) · USGS: Landsat 9 (https://www.usgs.gov/landsat-missions/landsat-9)

Lien avec la planète : L'USGS indique les bandes rouge (bande 4) et proche infrarouge (bande 5) de Landsat 9, et ses données sont gratuites, donc chacun peut cartographier la végétation ainsi. USGS: Landsat 9 (https://www.usgs.gov/landsat-missions/landsat-9)

☐ **J'ai terminé ce TP (réel ou virtuel)**

TP B : trilatération, des ficelles à un système linéaire

SEMAINE 3

Objectif : Trouver une position à partir de distances, d'abord avec des ficelles sur une carte comme dans l'activité de GPS.gov, puis en transformant les équations de cercles en un système linéaire résolu par élimination.

$$2(a_2 - a_1)x + 2(b_2 - b_1)y = d_1^2 - d_2^2 + a_2^2 - a_1^2 + b_2^2 - b_1^2$$

```
2(a_2-a_1)x+2(b_2-b_1)y=d_1^2-d_2^2+a_2^2-a_1^2+b_2^2-b_1^2
```

Différence de deux équations de cercles

Mode opératoire

1. Imprimez la carte de trilatération de GPS.gov (sans mise à l'échelle) ou marquez trois « satellites » sur du papier millimétré en (0, 0), (10, 0) et (0, 10) cm.
2. Convertissez les temps de signal en distances avec d = ct (c = 299792458 m/s) ; pour la version papier, utilisez les distances d'exemple ci-dessous.
3. Tracez des cercles avec une ficelle et un crayon et marquez leur point d'intersection.
4. Soustrayez les équations des cercles deux à deux pour obtenir deux équations linéaires, résolvez-les par élimination dans un tableur, et comparez avec votre dessin.

Tableau de données

Balise	Position (cm)	Distance (cm)	d²
1	(0, 0)	5.000	25
2	(10, 0)	8.062	65
3	(0, 10)	6.708	45

Distances d'exemple pour un récepteur en (3, 4) cm. L'activité de GPS.gov utilise quatre satellites sur une carte au 1:21283839.

Exemple de calcul

1. Eq. 1 − Eq. 2: 20x − 100 = −40, x = 3. Eq. 1 − Eq. 3: 20y − 100 = −20, y = 4.
2. Le temps A de GPS.gov = 0.00505783 s donne d = 1516299 m ; au 1:21283839 cela fait 7.12 cm sur la carte.

> **Sécurité**
>
> - Manipulez punaises et ciseaux avec précaution.

Alternative à la maison ou virtuelle

- La version ficelle et papier est le TP à faire chez soi.

GPS.gov: Trilateration activity (https://www.gps.gov/trilateration) · Interactive Linear Algebra, 1.2 Row reduction (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/row-reduction.html)

Lien avec la planète : GPS.gov a conçu cette activité avec la NOAA ; les vrais récepteurs résolvent le même type de système, avec une inconnue d'horloge, plusieurs fois par seconde. GPS.gov: Trilateration (NOAA classroom activity) (https://www.gps.gov/trilateration) · GPS.gov: Space segment (https://www.gps.gov/space-segment)

☐ **J'ai terminé ce TP (réel ou virtuel)**

TP C : les matrices comme transformations du plan

SEMAINE 4

Objectif : Voir les matrices agir sur des formes : étirer, cisailler, tourner et réfléchir un carré sur papier millimétré, et vérifier que les aires sont multipliées par |det A|.

$$\text{area}(AS) = |\det A| \, \text{area}(S)$$

`area(AS)=| A| area(S)`

Facteur d'échelle des aires

Mode opératoire

1. Tracez le carré unité de sommets (0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1).
2. Multipliez chaque sommet par A = [[2, 1], [0, 1]] (un cisaillement et un étirement), par R = [[0, −1], [1, 0]] (une rotation de 90°) et par F = [[1, 0], [0, −1]] (une réflexion).
3. Tracez chaque image et trouvez son aire en comptant les carreaux ou avec la formule du lacet.
4. Comparez chaque aire avec |det| et notez quelles applications inversent l'orientation (det < 0). Vérifiez ensuite det(AR) = det A det R.

Tableau de données

Matrice	det	Aire de l'image	Orientation
A = [[2, 1], [0, 1]]	2	2	conservée
R (rotation de 90°)	1	1	conservée
F (réflexion)	−1	1	inversée
AR	2	2	conservée

Valeurs exactes pour le carré unité.

Exemple de calcul

1. det A = 2 × 1 − 1 × 0 = 2 ; l'image est un parallélogramme de base 2 et de hauteur 1.
2. det(AR) = det A × det R = 2 × 1 = 2.

> **Sécurité**
>
> - Aucun au-delà d'un travail de bureau normal.

Alternative à la maison ou virtuelle

- Du papier millimétré et un crayon suffisent.

Interactive Linear Algebra, 3.1 Matrix transformations (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/matrix-transformations.html) · Interactive Linear Algebra, 4.3 Determinants and volumes (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/determinants-volumes.html)

Lien avec la planète : Les projections cartographiques et le recalage d'images utilisent ces mêmes matrices ; le déterminant garantit des mesures d'aire honnêtes pour les forêts et les inondations. USGS: Landsat 9 (https://www.usgs.gov/landsat-missions/landsat-9)

- [ ] **J'ai terminé ce TP (réel ou virtuel)**

TP D : ajustement par moindres carrés de données du niveau de la mer

SEMAINE 9

Objectif : Ajuster une droite, puis une parabole, à des données du niveau de la mer avec les équations normales, et comparer avec l'ajustement intégré du tableur.

$$A^T A\hat{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b}, \quad A = [\,\mathbf{1}\ \ \mathbf{t}\,]$$

```
A^TA=A^T, A=[ 1\ \ ]
```

Équations normales pour y = C + Dt

Mode opératoire

1. Saisissez les données d'exemple ci-dessous (ou téléchargez la série de la NASA sur sa page Vital Signs) : t en années depuis 1993 et h en mm.
2. Construisez A avec une colonne de uns et une colonne de t. Calculez A^TA et A^Tb avec MMULT et TRANSPOSE, puis $\hat{x}$ = MINVERSE(A^TA)·A^Tb.
3. Vérifiez avec LINEST ou une courbe de tendance de graphique. Tracez les résidus b − A$\hat{x}$.
4. Ajoutez une colonne t^2 et refaites l'ajustement. Un coefficient de t^2 positif signifie que la hausse s'accélère.

Tableau de données

t (années depuis 1993)	**0**	**8**	**16**	**24**	**32**
h (mm)	0	22	48	78	114

Valeurs d'exemple ayant l'allure de la série de la NASA (qui indique 114.4 mm de hausse depuis 1993) ; utilisez les vraies données pour une vraie réponse.

Exemple de calcul

1. $\bar{t}$ = 16, $\bar{h}$ = 52.4; $\Sigma(t-\bar{t})(h-\bar{h})$ = 2272, $\Sigma(t-\bar{t})^2$ = 640.
2. D = 2272/640 = 3.55 mm/yr; C = 52.4 − 3.55 × 16 = −4.4 mm.
3. Les résidus sont positifs aux deux extrémités et négatifs au milieu : une courbe convient mieux, comme le suggère le rythme croissant indiqué par la NASA.

> **Sécurité**
>
> - Faites une courte pause d'écran toutes les demi-heures.

Alternative à la maison ou virtuelle

- Tout le TP se fait dans un tableur gratuit.

NASA: Global mean sea level (https://sealevel.nasa.gov/vital-signs/global-mean-sea-level/) · Interactive Linear Algebra, 6.5 Least squares (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/least-squares.html)

Lien avec la planète : La NASA indique que le rythme de hausse est passé de 0.20 cm par an en 1993 à 0.44 cm par an aujourd'hui, une accélération détectable avec une colonne t^2. NASA: Global mean sea level (Vital Signs) (https://sealevel.nasa.gov/vital-signs/global-mean-sea-level/)

☐ **J'ai terminé ce TP (réel ou virtuel)**

TP E : un modèle de Markov des matériaux et du recyclage

SEMAINE 12

Objectif : Construire une matrice de transition pour la matière en usage et perdue en décharge ou par incinération, utiliser les puissances de matrices pour la suivre dans le temps, et voir comment un taux de recyclage plus élevé garde la matière en usage plus longtemps.

$$\mathbf{x}_{k+1} = P\mathbf{x}_k, \quad P = \begin{bmatrix} 1 - f(1-r) & 0 \\ f(1-r) & 1 \end{bmatrix}$$

```
_k+1=P_k, P=1-f(1-r)&0\(1-r)&1
```

Chaîne à deux états : en usage, perdue

Mode opératoire

1. Choisissez un taux de mise au rebut d'exemple f = 0.2 par an et un taux de valorisation r = 0.321 (la part recyclage plus compostage de l'EPA en 2018).
2. Construisez P dans un tableur et partez de x_0 = (1, 0) : toute la matière en usage.
3. Utilisez MMULT pour avancer de 10 ans, et comparez avec la formule $(1 - f(1 - r))^k$ pour la part encore en usage.
4. Recommencez avec r = 0.5 et comparez la durée moyenne d'usage en années, 1/(f(1 − r)).

Tableau de données

Taux de valorisation r	Probabilité de rester en usage	En usage après 10 ans	Durée moyenne d'usage (années)
0.321	0.8642	0.232	7.36
0.50	0.9000	0.349	10.0

Modèle d'exemple : le taux de mise au rebut f = 0.2 est une valeur d'exemple ; r = 0.321 est la part EPA 2018.

Exemple de calcul

1. Probabilité de rester = 1 − 0.2 × 0.679 = 0.8642 ; 0.8642^{10} = 0.232.
2. Durée moyenne d'usage = 1/0.1358 = 7.36 ans ; avec r = 0.5 elle vaut 1/0.1 = 10.0 ans.
3. λ = 1 correspond à l'état « perdue », qui absorbe tout à long terme ; λ = 0.8642 fixe la vitesse.

> **Sécurité**
>
> - Faites une courte pause d'écran toutes les demi-heures.

Alternative à la maison ou virtuelle

- Tout le TP se fait dans un tableur gratuit.

Interactive Linear Algebra, 5.6 Stochastic matrices (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/stochastic-matrices.html) · EPA: National overview of materials and waste (https://www.epa.gov/facts-and-figures-about-materials-waste-and-recycling/national-overview-facts-and-figures-materials)

Lien avec la planète : L'EPA indique un taux de recyclage et de compostage de 32.1 % en 2018 et 50 % mis en décharge ; des modèles comme celui-ci montrent ce que vaut une hausse de ce taux. U.S. EPA: National overview, facts and figures on materials, wastes and recycling (https://www.epa.gov/facts-and-figures-about-materials-waste-and-recycling/national-overview-facts-and-figures-materials)

☐ **J'ai terminé ce TP (réel ou virtuel)**

TP F : puissance itérée et compression d’images par SVD

SEMAINE 14

Objectif : Trouver une valeur propre dominante par multiplications répétées, puis compresser une petite image en niveaux de gris avec une SVD tronquée et voir avec combien peu de nombres on garde l’image.

$$\mathbf{x}_{k+1} = \frac{A\mathbf{x}_k}{\|A\mathbf{x}_k\|}, \quad A_k = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T$$

```
_k+1=_k\|A_k\|, A_k=_i=1^kσ_i_i_i^T
```

Puissance itérée et SVD tronquée

Mode opératoire

1. Dans un tableur, partez de x_0 = (1, 0) et multipliez dix fois par A = [[2, 1], [1, 2]], en renormalisant à chaque fois ; observez le rapport des longueurs tendre vers 3.
2. Créez une grille 8 × 8 de niveaux de gris (0–255) pour une image simple, ou chargez une photo dans Python (gratuit) avec NumPy.
3. Calculez la SVD (numpy.linalg.svd) et reconstruisez l’image avec k = 1, 2 et 4 termes.
4. Notez le stockage k(8 + 8 + 1) et la part de Σσ² conservée, et jugez quand l’image paraît correcte.

Tableau de données

k	Nombres stockés (image 8 × 8)	Part de 64
1	17	26.6%
2	34	53.1%
4	68	106.3%

Nombres exacts de valeurs stockées. Pour une image 8 × 8, k = 4 stocke déjà plus que les 64 nombres bruts ; les gains apparaissent pour les grandes images (module 10 : le rang 50 d’une image 1000 × 1000 conserve 10.0 %).

Exemple de calcul

1. Puissance itérée : (1, 0) → (2, 1) → (5, 4) → (14, 13) ; ‖(14, 13)‖/‖(5, 4)‖ = 19.10/6.403 = 2.98, proche de λ = 3.
2. Stockage pour k = 1 : 8 + 8 + 1 = 17 nombres, 17/64 = 26.6 %.

> **Sécurité**

- Faites une courte pause d’écran toutes les demi-heures.

Alternative à la maison ou virtuelle

- Les versions tableur et Python gratuit sont toutes deux des TP à faire chez soi.

MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra (Strang, Spring 2010) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/) · Interactive Linear Algebra, 5.1 Eigenvectors (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/eigenvectors.html)

Lien avec la planète : EMIT du JPL de la NASA renvoie plus de 100000 spectres par seconde ; compresser et séparer ces données utilise exactement ces outils. NASA JPL: EMIT, Earth Surface Mineral Dust Source Investigation (https://earth.jpl.nasa.gov/emit/)

☐ **J’ai terminé ce TP (réel ou virtuel)**

Séries d’entraînement aux examens

Chronométrez-vous : environ 10 minutes par problème. Comparez ensuite avec les solutions complètes.

Série d’exercices de mi-parcours (unités 1–5)

1. Trouvez l’angle entre (1, 0, 1) et (0, 1, 1).
    1. Produit scalaire = 1 ; longueurs $\sqrt{2}$ chacune ; $\cos\theta = 1/2$.

    Réponse : 60°.

2. Résolvez $x + 2y = 4$, $3x - y = 5$.
    1. $R_2 - 3R_1$: $-7y = -7$.

    Réponse : $x = 2$, $y = 1$.

3. Inversez $[[3, 2], [1, 1]]$.
    1. det = 1.

    Réponse : $[[1, -2], [-1, 3]]$.

4. Une économie à un seul secteur consomme 0.4 de sa propre production. Quelle production satisfait une demande de 120 ?
    1. $x = 120/0.6$.

    Réponse : 200.

5. Une matrice 6 × 9 est de rang 4. Trouvez dim N(A) et dim N(A^T).

    1. n − r et m − r.

    Réponse : 5 et 2.

Série d'entraînement finale (toutes les unités)

1. Ajustez y = C + Dt à (0, 0), (1, 2), (2, 2) par moindres carrés.

    1. A^TA = [[3, 3], [3, 5]], A^Tb = (4, 6) ; det 6.

    Réponse : C = 0.333, D = 1.

2. Trouvez det [[2, 1, 0], [1, 2, 1], [0, 1, 2]].

    1. 2(4 − 1) − 1(2 − 0) + 0.

    Réponse : 4.

3. Trouvez les valeurs propres de [[6, 2], [2, 3]].

    1. Trace 9, det 14 : $\lambda^2 - 9\lambda + 14 = 0$.

    Réponse : 7 et 2.

4. Trouvez l'état stationnaire de la matrice de Markov [[0.9, 0.2], [0.1, 0.8]].

    1. $0.1q_1 = 0.2q_2$.

    Réponse : (0.667, 0.333).

5. Trouvez les valeurs singulières de [[2, 0], [0, −3]].

    1. A^TA = diag(4, 9).

    Réponse : 3 et 2.

6. Combien de nombres une SVD de rang 20 d'une image 500 × 800 stocke-t-elle, et quelle part de l'image complète cela représente-t-il ?

    1. 20(500 + 800 + 1).

    Réponse : 26020, environ 6.5 %.

Fiche de formules

$$\|v\| = \sqrt{v \cdot v},\ \cos\theta = \frac{v \cdot w}{\|v\|\|w\|} \qquad A\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \ A = LU$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1},\ (AB)^T = B^T A^T$$

$$\mathbf{x} = (I - A)^{-1}\mathbf{d}$$

$$r + \dim N(A) = n$$

$$\mathbf{p} = \frac{a \cdot b}{a \cdot a}a,\ \ A^T A\hat{x} = A^T b$$

$$A = QR,\ Q^T Q = I$$

$$\det(AB) = \det A \det B,\ x_i = \det B_i / \det A$$

$$\det(A - \lambda I) = 0,\ \sum \lambda = \operatorname{tr} A,\ \prod \lambda = \det A$$

$$A = PDP^{-1},\ A^k = PD^k P^{-1},\ A = Q\Lambda Q^T$$

$$A = U\Sigma V^T,\ \sigma_i = \sqrt{\lambda_i(A^T A)},\ \kappa = \sigma_1/\sigma_n$$

Constantes

Constante	Valeur
Vitesse de la lumière (utilisée pour les distances GPS)	299,792,458 m/s
1 mile	1.609344 km
1 pied	0.3048 m
1 pouce	25.4 mm
Flops pour résoudre un système n × n par élimination	environ $n^3/3$ multiplications–additions (Strang)
Matrice identité I	Des uns sur la diagonale, des zéros ailleurs : AI = IA = A

Source : NIST Guide to the SI, Appendix B.9: conversion factors (https://www.nist.gov/pml/special-publication-811/nist-guide-si-appendix-b-conversion-factors/nist-guide-si-appendix-b9)

Textes et cours gratuits

Utilisez ces manuels, cours et outils gratuits en parallèle du cours.

- MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra (Strang, Spring 2010) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/): Les cours vidéo complets, séries d'exercices et examens de Strang.
- MIT OpenCourseWare 18.06SC Linear Algebra (self-paced, Fall 2011) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06sc-linear-algebra-fall-2011/): Version en autonomie avec vidéos de travaux dirigés et problèmes corrigés.

- Interactive Linear Algebra (Margalit and Rabinoff, Georgia Tech) (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/): Manuel interactif gratuit utilisé à Georgia Tech.
- Jim Hefferon, Linear Algebra (free text) (https://hefferon.net/linearalgebra/): Manuel complet gratuit avec réponses.
- Gilbert Strang, Introduction to Linear Algebra (book site) (https://math.mit.edu/~gs/linearalgebra/): Le site du livre de Strang avec notes et figures.
- PhET : Vector Addition (https://phet.colorado.edu/en/simulations/vector-addition): Vecteurs et composantes interactifs.

Glossaire

Base
Une famille linéairement indépendante qui engendre un espace.

Espace des colonnes
Toutes les combinaisons Ax des colonnes de A.

Conditionnement
σ_1/σ_n, de combien les erreurs peuvent croître en résolvant Ax = b.

Déterminant
Facteur d'échelle signé des volumes de A ; nul exactement quand A est singulière.

Diagonalisation
$A = PDP^{-1}$ avec les vecteurs propres dans P.

Dimension
Nombre de vecteurs de n'importe quelle base.

Valeur propre
λ tel que $Av = \lambda v$ pour un v non nul.

Factorisation LU
A = LU issue de l'élimination.

Moindres carrés
Le $\hat{x}$ qui minimise $\|b - Ax\|$.

Inverse de Leontief
$(I - A)^{-1}$, production totale nécessaire par unité de demande finale.

Indépendance linéaire
Seule la combinaison nulle donne le vecteur nul.

Matrice de Markov
Coefficients positifs ou nuls, colonnes de somme 1.

Noyau
Tous les x tels que Ax = 0.

Orthonormé
Vecteurs unitaires deux à deux orthogonaux.

Pivot
Premier coefficient non nul d'une ligne d'une forme échelonnée.

Définie positive
Symétrique avec $x^TAx > 0$ pour $x \neq 0$.

Projection
Point le plus proche de b dans un sous-espace.

Rang
Nombre de pivots ; dimension de l'espace des colonnes.

Valeur singulière
$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}(A^TA)$.

Espace engendré
Toutes les combinaisons linéaires d'un ensemble de vecteurs.

Sous-espace
Un ensemble contenant 0, stable par addition et multiplication scalaire.

Grille d'autoévaluation

Aucune note ni aucun crédit ne sont attribués. Utilisez cette grille pour juger honnêtement où vous en êtes dans chaque unité.

Niveau	À quoi cela ressemble
4 · Maîtrise	Choisit le bon outil (élimination, projection, valeurs propres ou SVD), calcule les petits cas à la main, vérifie les réponses (Ax = b, trace et déterminant), et explique le sens par des images et en contexte.
3 · Compétent	Résout les exercices d'entraînement avec quelques erreurs de calcul occasionnelles.
2 · En progression	Suit les exemples corrigés mais confond lignes et colonnes ou les quatre sous-espaces.
1 · Débutant	Manipule des symboles sans vérifier dimensions ni réponses ; doit revoir le module.

Pondération suggérée si vous voulez une note

Partie	Poids
Exercices	25%
Travaux pratiques	20%
Série d'entraînement de mi-parcours	25%
Série d'entraînement finale	30%

Visez le niveau 3 ou mieux dans chaque unité avant de passer au cours suivant.

Cours associés

- Résistance des matériaux ENGR 213
- Circuits ENGR 214 + ENGR 214L
- Analyse III MATH 210
- Tous les cours