Última actualización: November 1, 2026

🗺️ Ruta de cuatro años · Año 2, Primavera

Sobre este curso

Este curso gratuito tiene 10 unidades y 6 laboratorios. Son los totales reales, no un programa más largo recortado.

Una comprobación es un número o un resultado de código en una página de curso que un script vuelve a calcular antes de publicar. El número impreso y el recalculado tienen que coincidir.

> Este es el esquema de un curso gratuito de autoestudio escrito por Saving Planets. No es un curso universitario, no otorga créditos académicos y ninguna institución participa.
>
> Su alcance sigue un curso de álgebra lineal de un semestre de segundo año. Se basa en los temas y la profundidad de MIT 18.06 Linear Algebra impartido por Gilbert Strang (gratis en MIT OpenCourseWare) y en los cursos de álgebra lineal de segundo año de Georgia Tech y Purdue, usando el texto gratuito de Georgia Tech Interactive Linear Algebra de Dan Margalit y Joseph Rabinoff y el libro gratuito Linear Algebra de Jim Hefferon, que enlazamos donde ayudan. Ninguno de esos autores o instituciones respalda esta página.
>
> Lo que añadimos: cada unidad se vincula a trabajo real sobre el planeta con una fuente pública citada (GPS, Landsat 9, satélites del nivel del mar de la NASA, supercomputadoras meteorológicas de la NOAA, datos de insumo–producto y reciclaje de la EPA, estudios de edificios del USGS, espectrómetro mineral EMIT de la NASA), cada número de la página se recalcula con un script de verificación antes de publicarse, y cada práctica se hace en una hoja de cálculo gratuita o en papel.
>
> Síguelo en orden. Cada unidad tiene objetivos, ideas clave, ecuaciones, ejemplos paso a paso, práctica con respuestas completas, errores comunes, tarjetas de estudio y un cuestionario. Tu progreso se guarda solo en este navegador.

Cómo ayuda este curso a salvar el planeta

El álgebra lineal es el lenguaje de los datos sobre el planeta. Un píxel de satélite es un vector, una posición GPS es la solución de un sistema lineal, un pronóstico del tiempo son millones de ecuaciones resueltas una y otra vez, y la contaminación de una economía puede rastrearse con una sola matriz.

Las mismas pocas ideas, eliminación, proyección, valores propios y la SVD, convierten mediciones en bruto en mapas de bosques, tendencias del nivel del mar y polvo mineral. Cada unidad termina

con una breve sección con fuentes. Los valores que no provienen de una fuente se marcan como valores de ejemplo.

Para docentes

Puedes enseñar este curso o dejar que un estudiante lo haga solo. Es gratis. Saving Planets no pone nota ni da crédito escolar.

- Esta página es el curso completo: 10 unidades y 6 laboratorios (MATH 230).
- Calcula 15 semanas, unas 6 a 9 horas por semana, incluidas las semanas de laboratorio.
- Sigue el calendario de 15 semanas. Lee la unidad, haz la práctica en papel y luego abre la respuesta. En una semana de laboratorio, haz el laboratorio o la versión en casa.
- Una comprobación es un número o un resultado de código en la página que un script vuelve a calcular antes de publicar. El número que ves y el recalculado tienen que coincidir.
- Usa Imprimir esta página, o descarga la guía de estudio en PDF. La hoja de fórmulas está cerca del final.
- Pregunta: ¿cómo ayuda esta unidad a las personas y al planeta? Cada unidad tiene un recuadro verde con un dato y su fuente.
- Copia la plantilla de guía docente y escribe el nombre de tu clase, el tiempo que tienes y las preguntas que harás. Abrir la plantilla de guía docente

Antes de empezar

Requisitos previos

- Álgebra de secundaria: resolver dos ecuaciones con dos incógnitas y trabajar con funciones.
- Cálculo I ayuda con límites y derivadas en algunos ejemplos, pero no se necesita cálculo en la mayor parte del curso.
- Soltura con una hoja de cálculo; Introducción a la programación ayuda en las versiones opcionales de las prácticas en Python.
- Cálculo III y Ecuaciones diferenciales combinan bien con este curso pero no son obligatorios.

Cómo estudiar

- Haz primero cada cálculo a mano con ejemplos pequeños (2 × 2 y 3 × 3) y luego compruébalo con una hoja de cálculo o calculadora.
- Piensa en Ax de dos formas: como productos escalares de las filas con x, y como una combinación de las columnas de A.
- Comprueba cada respuesta: sustituye x en Ax = b, multiplica A por su inversa o verifica Av = λv.
- Controla los tamaños: una matriz m × n por una n × p da m × p, y tamaños que no coinciden indican un error.

- Haz dibujos en 2D y 3D: rectas, planos, proyecciones y estiramientos hacen las reglas fáciles de recordar.
- Haz cada ejercicio en papel antes de abrir la respuesta, y repite los cuestionarios unos días después.

Qué necesitas

- Un ordenador con una hoja de cálculo gratuita (sus funciones MMULT, MINVERSE, MDETERM y LINEST hacen el trabajo matricial).
- Papel cuadriculado, una regla, un transportador y un lápiz.
- Opcional: Python gratuito con NumPy para las versiones más grandes de las prácticas.
- Un cordel y chinchetas o cinta adhesiva para la práctica de trilateración, y un mapa impreso o una hoja de papel.
- Una foto en escala de grises o una pequeña cuadrícula de números para la práctica de compresión de imágenes.

Calendario sugerido de 15 semanas

Unas 6 a 9 horas por semana: lectura, problemas de práctica y, en las semanas de laboratorio, el laboratorio.

Semana	Unidad	Temas	Lectura
1	Vectores: combinaciones lineales, longitudes y productos escalares	Vectores, combinaciones lineales, espacio generado, longitud	MIT 18.06 L1; ILA 2.1–2.2
2	Vectores: combinaciones lineales, longitudes y productos escalares	Productos escalares, ángulos, ortogonalidad; Práctica A; inicio de la eliminación	ILA 6.1
3	Sistemas de ecuaciones lineales y eliminación gaussiana	Eliminación, formas escalonadas, conjuntos solución; Práctica B	MIT 18.06 L2; ILA 1.1–1.3
4	Álgebra de matrices: multiplicación, inversas y factorización LU	Multiplicación de matrices, inversas, A = LU; Práctica C	MIT 18.06 L3–4; ILA 3.4–3.5
5	Modelos lineales: economía de insumo–producto (Leontief), redes y balanceo	Modelos de insumo–producto, redes, balanceo	Hefferon Topics; EPA USEEIO
6	Espacios vectoriales, subespacios, independencia, base, rango y los cuatro subespacios fundamentales	Subespacios, espacio columna, espacio nulo, Ax = 0	MIT 18.06 L5–7; ILA 2.6

Semana	Unidad	Temas	Lectura
7	Espacios vectoriales, subespacios, independencia, base, rango y los cuatro subespacios fundamentales	Independencia, base, dimensión, rango, cuatro subespacios; práctica de examen parcial	MIT 18.06 L8–10; ILA 2.5, 2.7, 2.9
8	Ortogonalidad, proyecciones, mínimos cuadrados y Gram–Schmidt	Ortogonalidad y proyecciones	MIT 18.06 L14–15; ILA 6.3
9	Ortogonalidad, proyecciones, mínimos cuadrados y Gram–Schmidt	Mínimos cuadrados, Gram–Schmidt, A = QR; Práctica D	MIT 18.06 L16–17; ILA 6.4–6.5
10	Determinantes: propiedades, cofactores, regla de Cramer y volumen	Determinantes, cofactores, regla de Cramer, volumen	MIT 18.06 L18–20; ILA 4.1–4.3
11	Valores propios y vectores propios	Valores propios, vectores propios, método de la potencia, modos	MIT 18.06 L21; ILA 5.1–5.2, 5.5
12	Diagonalización, potencias de matrices, cadenas de Markov y sistemas dinámicos lineales	Diagonalización, cadenas de Markov, sistemas dinámicos; Práctica E	MIT 18.06 L22–25; ILA 5.4, 5.6
13	La descomposición en valores singulares, el análisis de componentes principales y las matrices definidas positivas	Matrices definidas positivas y la SVD	MIT 18.06 L27–29
14	La descomposición en valores singulares, el análisis de componentes principales y las matrices definidas positivas	Aproximación de rango bajo, PCA, número de condición; Práctica F	MIT 18.06 L29; sitio del libro de Strang
15	Repaso	Repaso y serie de práctica final	Todas las unidades

Tu progreso

Marca las unidades y los laboratorios al terminarlos y haz los cuestionarios. El progreso y las puntuaciones se guardan solo en este navegador y nunca se nos envían.

Unidades

Vectores: combinaciones lineales, longitudes y productos escalares

Vectores en dos, tres y n dimensiones, suma y escalado, combinaciones lineales y espacio generado, longitud, vectores unitarios, producto escalar, ángulo entre vectores, ortogonalidad y las desigualdades de Cauchy–Schwarz y triangular.

Objetivos de aprendizaje

Al terminar esta unidad podrás:

- Sumar, escalar y combinar vectores a mano y con dibujos.
- Calcular longitudes, vectores unitarios y productos escalares.
- Hallar el ángulo entre dos vectores y comprobar la ortogonalidad.
- Describir el espacio generado por uno, dos o tres vectores.

Conceptos clave

- Un vector en $\mathbb{R}^n$ es una lista ordenada de n números. En 2D y 3D es una flecha; en dimensiones mayores es una lista, como los 11 valores de banda de un píxel de satélite.
- Una combinación lineal $c_1v_1 + c_2v_2 + \dots$ escala vectores y los suma. El espacio generado es el conjunto de todas las combinaciones lineales: una recta, un plano o todo el espacio.
- Longitud $\|v\| = \sqrt{(v \cdot v)}$. Dividir por la longitud da un vector unitario $u = v/\|v\|$ de longitud 1.
- Producto escalar $v \cdot w = v_1w_1 + v_2w_2 + \dots = \|v\|\|w\|\cos\theta$. Si $v \cdot w = 0$ los vectores son ortogonales (perpendiculares).
- Cauchy–Schwarz: $|v \cdot w| \le \|v\|\|w\|$. Desigualdad triangular: $\|v + w\| \le \|v\| + \|w\|$.

Ecuaciones clave

$$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$$

`\|v\|=_1^2+v_2^2+·s+v_n^2`

Longitud

$$v \cdot w = v_1 w_1 + \cdots + v_n w_n$$

`v· w=v_1w_1+·s+v_nw_n`

Producto escalar

$$\cos\theta = \frac{v \cdot w}{\|v\|\,\|w\|}$$

θ=(v· w)/(\|v\| \|w\|)

Ángulo entre vectores

$$|v \cdot w| \leq \|v\| \, \|w\|$$

Desigualdad de Cauchy–Schwarz

Ejemplos resueltos paso a paso

Ejemplo 1.1 Halla la longitud de v = (3, 4) y el vector unitario en su dirección.

1. ‖v‖ = √(3² + 4²) = √25 = 5.
2. u = v/5.

Respuesta: ‖v‖ = 5, u = (0.6, 0.8).

Ejemplo 1.2 Halla el ángulo entre v = (3, 4) y w = (1, 2).

1. v·w = 3 + 8 = 11.
2. ‖v‖ = 5, ‖w‖ = √5 = 2.236.
3. cos θ = 11/(5 × 2.236) = 0.9839.

Respuesta: θ = 10.30°.

Ejemplo 1.3 Escribe 2(1, 0, 1) + 3(0, 1, 1) como un solo vector. ¿Está (2, 3, 4) en el espacio generado por estos dos vectores?

1. 2(1, 0, 1) + 3(0, 1, 1) = (2, 3, 5).
2. Toda combinación $c_1(1, 0, 1) + c_2(0, 1, 1) = (c_1, c_2, c_1 + c_2)$, así que la tercera componente debe ser la suma de las dos primeras.

Respuesta: (2, 3, 5); (2, 3, 4) no está en el espacio generado porque 2 + 3 ≠ 4.

Problemas de práctica

Resuelve cada uno primero en papel y luego comprueba.

1. Halla ‖(1, 2, 2)‖.

   √(1 + 4 + 4) = 3.

2. Halla $(1, 2, 3)\cdot(4, -5, 6)$.

   $4 - 10 + 18 = 12$.

3. ¿Son ortogonales $(2, -1)$ y $(1, 2)$?

   Sí: $2 - 2 = 0$.

4. Halla el vector unitario en la dirección de $(6, 8)$.

   $\|(6, 8)\| = 10$, así que $(0.6, 0.8)$.

Ideas erróneas comunes

Mito: El producto escalar es un vector.

En realidad: Es un solo número (un escalar).

Mito: $\|v + w\| = \|v\| + \|w\|$ siempre.

En realidad: Solo cuando v y w apuntan en el mismo sentido; si no, es menor.

Mito: Los vectores solo tienen sentido en 2D o 3D.

En realidad: Los vectores de datos pueden tener cientos de componentes; se aplican las mismas reglas.

Tarjetas de estudio

Combinación lineal

$c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots$

Espacio generado

Todas las combinaciones lineales de un conjunto de vectores.

Longitud

$\|v\| = \sqrt{(v\cdot v)}$.

Producto escalar

$v\cdot w = \Sigma\, v_i w_i = \|v\|\|w\|\cos\theta$.

Ortogonal

$v\cdot w = 0$.

Vector unitario

$v/\|v\|$.

Cuestionario de autoevaluación

1. $\|(3, 4)\|$ es igual a...

7

5

25

12

5. $\sqrt{(9 + 16)} = 5$.

2. v·w = 0 significa que los vectores son...

paralelos

ortogonales

iguales

unitarios

ortogonales. $\cos \theta = 0$, así que $\theta = 90°$.

3. El espacio generado por dos vectores no paralelos en $\mathbb{R}^3$ es...

un punto

una recta

un plano

todo $\mathbb{R}^3$

un plano. Dos direcciones independientes llenan un plano.

4. Duplicar v cambia $\|v\|$ en un factor de...

1

2

4

$\sqrt{2}$

2. $\|cv\| = |c|\|v\|$.

Repetir este cuestionario

Cómo ayuda esto a salvar el planeta

Cada píxel de Landsat 9 es un vector. Según el USGS, el Operational Land Imager 2 de Landsat 9 registra 9 bandas espectrales a 30 m (15 m para la banda pancromática) y su Thermal Infrared Sensor 2 registra 2 bandas térmicas a 100 m, así que cada punto del suelo se convierte en una lista de 11 números. Los datos son de 14 bits, $2^{14} = 16384$ tonos por banda, y Landsat 9 adquiere unas 750 escenas al día, todas gratuitas.

La salud de bosques y cultivos se lee en la banda roja (banda 4, 0.64–0.67 µm) y la banda del infrarrojo cercano (banda 5, 0.85–0.88 µm). El índice de vegetación NDVI = (NIR − red)/(NIR + red) compara dos componentes del vector píxel. Con reflectancias de ejemplo de 0.40 (NIR) y 0.08 (rojo), NDVI = 0.32/0.48 = 0.667, típico de vegetación sana; el suelo desnudo da valores cercanos a cero.

En Saving Planets: Observación de la Tierra · Deforestación

Fuentes: USGS: Landsat 9 (https://www.usgs.gov/landsat-missions/landsat-9) · Interactive Linear Algebra, 2.1 Vectors (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/vectors.html)

Recursos de aprendizaje gratuitos

- Interactive Linear Algebra, 2.1 Vectors (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/vectors.html): Texto gratuito con figuras interactivas.
- Interactive Linear Algebra, 6.1 Dot products and orthogonality (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/dot-product.html): Longitudes, ángulos y ortogonalidad.
- MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra (Strang, Spring 2010) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/): Clase 1: la geometría de las ecuaciones lineales.
- PhET: Vector Addition (https://phet.colorado.edu/en/simulations/vector-addition): Interactivo.

Terminé esta unidad

UNIDAD 2 · SEMANAS 2–3

Sistemas de ecuaciones lineales y eliminación gaussiana

Sistemas lineales vistos por filas y por columnas, matrices aumentadas, eliminación hasta la forma escalonada, sustitución hacia atrás, forma escalonada reducida, pivotes y variables libres, y cuándo un sistema tiene una, ninguna o infinitas soluciones.

Objetivos de aprendizaje

Al terminar esta unidad podrás:

- Escribir un sistema como Ax = b y como matriz aumentada.
- Resolver sistemas por eliminación y sustitución hacia atrás.
- Hallar la forma escalonada reducida e identificar pivotes y variables libres.
- Decidir si un sistema tiene una, ninguna o infinitas soluciones.

Conceptos clave

- Vista por filas: cada ecuación es una recta (2D) o un plano (3D) y la solución es donde se cortan. Vista por columnas: b es una combinación de las columnas de A, con pesos x.
- Tres operaciones de fila no cambian las soluciones: intercambiar filas, multiplicar una fila por un número no nulo y sumar a una fila un múltiplo de otra.
- La eliminación produce una forma triangular superior (escalonada); la sustitución hacia atrás resuelve después de abajo arriba. Los pivotes son las primeras entradas no nulas de cada fila.
- Una columna sin pivote da una variable libre e infinitas soluciones. Una fila 0 = c con c ≠ 0 significa que no hay solución (incompatible).
- Las ecuaciones de distancia al cuadrado como (x − a)² + (y − b)² = d² no son lineales, pero restar una de otra cancela x² e y² y deja ecuaciones lineales. Así es como los problemas de posicionamiento se convierten en sistemas lineales.

Ecuaciones clave

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Forma matricial

$$R_i \leftarrow R_i - \ell_{ij} R_j, \;\; \ell_{ij} = a_{ij}/a_{jj}$$

```
R_i R_i-_ijR_j,\ \ _ij=a_ij/a_jj
```

Paso de eliminación y multiplicador

$$\text{solutions: one, none, or infinitely many}$$

Los tres únicos casos

$$d = c\,t$$

```
d=c t
```

Distancia a partir del tiempo de viaje de la señal (GPS)

Ejemplos resueltos paso a paso

Ejemplo 2.1 Resuelve x + y + z = 6, 2x + y − z = 1, x − y + 2z = 5.

1. $R_2 - 2R_1$: −y − 3z = −11. $R_3 - R_1$: −2y + z = −1.
2. $R_3 - 2R_2$: 7z = 21, así que z = 3.
3. Sustitución hacia atrás: −y − 9 = −11 da y = 2; luego x = 6 − 2 − 3 = 1.

Respuesta: (x, y, z) = (1, 2, 3).

Ejemplo 2.2 Hay balizas en (0, 0), (10, 0) y (0, 10) km. Un receptor mide distancias al cuadrado de 25, 65 y 45 km². Halla su posición.

1. Ecuación 1 menos ecuación 2: $x^2 + y^2 - [(x-10)^2 + y^2] = 25 - 65$, así que 20x − 100 = −40.
2. Ecuación 1 menos ecuación 3: 20y − 100 = −20.
3. Resuelve las dos ecuaciones lineales.

Respuesta: (x, y) = (3, 4) km.

Ejemplo 2.3 ¿Cuántas soluciones tienen x + 2y = 3, 2x + 4y = 6? ¿Y x + 2y = 3, 2x + 4y = 7?

1. $R_2 - 2R_1$ da 0 = 0 en el primer sistema: un pivote, una variable libre.
2. En el segundo, $R_2 - 2R_1$ da 0 = 1.

Respuesta: Infinitas; ninguna.

Problemas de práctica

Resuelve cada uno primero en papel y luego comprueba.

1. Resuelve x + y = 5, x − y = 1.

   Sumando se obtiene 2x = 6: x = 3, y = 2.

2. Una señal tipo GPS tarda 0.00505783 s en llegar. ¿Qué distancia recorrió a 299792458 m/s?

$d = ct = 1516299$ m, unos 1516 km.

3. Halla la forma escalonada reducida de [[1, 2, 3], [2, 5, 8]] (aumentada).

   $R_2 - 2R_1 = [0, 1, 2]$; $R_1 - 2R_2 = [1, 0, -1]$: $x = -1$, $y = 2$.

4. Un sistema 3 × 5 tiene 3 pivotes. ¿Cuántas variables libres hay?

   $5 - 3 = 2$.

Ideas erróneas comunes

Mito: Multiplicar una fila por 0 es una operación de fila válida.

En realidad: Destruye información; el multiplicador debe ser no nulo.

Mito: Un sistema con más incógnitas que ecuaciones no tiene solución.

En realidad: Si es compatible, tiene infinitas; también puede ser incompatible.

Mito: Una fila de ceros significa que no hay solución.

En realidad: Solo una fila $0 = c$ con $c \neq 0$ lo significa; $0 = 0$ solo indica una variable libre.

Tarjetas de estudio

Matriz aumentada

[A | b].

Pivote

Primera entrada no nula de una fila en forma escalonada.

Variable libre

Variable cuya columna no tiene pivote.

RREF

Pivotes 1, ceros arriba y abajo.

Incompatible

Una fila $0 = c$, $c \neq 0$.

Sustitución hacia atrás

Resolver el sistema triangular de abajo arriba.

Cuestionario de autoevaluación

1. Una fila 0 0 0 | 5 en forma escalonada significa...

una solución

ninguna solución

infinitas

x = 5

ninguna solución. 0 = 5 es imposible.

2. ¿Cuál NO es una operación de fila?

intercambiar dos filas

sumar a una fila un múltiplo de otra

multiplicar una fila por 3

elevar una fila al cuadrado

elevar una fila al cuadrado. Elevar al cuadrado no es lineal.

3. Una columna sin pivote da...

una variable libre

ninguna solución

solo un determinante cero

una solución única

una variable libre. Su variable puede elegirse libremente.

4. En la vista por columnas, Ax = b pregunta si b es...

ortogonal a A

una combinación de las columnas de A

una fila de A

un vector propio

una combinación de las columnas de A. $Ax = x_1a_1 + x_2a_2 + ...$

Repetir este cuestionario

Cómo ayuda esto a salvar el planeta

El GPS es una máquina de álgebra lineal. GPS.gov informa que al menos 24 satélites operativos se mantienen disponibles el 95 % del tiempo y que se han operado 31 satélites durante más de una década, a unos 20200 km de altitud, cada uno dando dos vueltas a la Tierra al día. Están en seis planos orbitales igualmente espaciados para que los usuarios vean al menos cuatro satélites desde prácticamente cualquier punto del planeta.

La actividad de trilateración de GPS.gov explica la idea: distancia = velocidad × tiempo, con la velocidad igual a la de la luz, 299792458 m/s, y las distancias a al menos 3 satélites fijan una posición 3D. El reloj de un receptor real también es desconocido, así que en el modelo estándar de los libros las incógnitas son x, y, z y el desfase del reloj, cuatro incógnitas que necesitan cuatro satélites; restar las ecuaciones de distancia, como en el ejemplo resuelto, las convierte en un sistema lineal. Un error de reloj de solo un microsegundo desviaría una distancia en 299.8 m. Las posiciones precisas guían tractores que aplican menos fertilizante, barcos en rutas eficientes y las estaciones de medición que vigilan el nivel del mar y el hielo.

En Saving Planets: Observación de la Tierra · Espacio

Fuentes: GPS.gov: Space segment (https://www.gps.gov/space-segment) · GPS.gov: Trilateration (NOAA classroom activity) (https://www.gps.gov/trilateration)

Recursos de aprendizaje gratuitos

- Interactive Linear Algebra, 1.1 Systems of linear equations (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/systems-of-eqns.html): Sección de texto gratuito.
- Interactive Linear Algebra, 1.2 Row reduction (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/row-reduction.html): Formas escalonadas paso a paso.
- MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra (Strang, Spring 2010) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/): Clase 2: eliminación con matrices.
- Jim Hefferon, Linear Algebra (free text) (https://hefferon.net/linearalgebra/): Capítulo uno: sistemas lineales.

Ver la clase

Lecture 1: The geometry of linear equations (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/resources/lecture-1-the-geometry-of-linear-equations/) (en inglés)

MIT 18.06 Linear Algebra (Spring 2010), MIT OpenCourseWare. Licencia: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Condiciones de uso (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Enlace solo para estudio gratuito; Saving Planets no está afiliado a esta universidad ni cuenta con su respaldo.

- [ ] **Terminé esta unidad**

Álgebra de matrices: multiplicación, inversas y factorización LU

Productos matriz–vector y matriz–matriz, las reglas (y no reglas) del álgebra de matrices, traspuestas, matrices de eliminación, la inversa y Gauss–Jordan, la fórmula de la inversa 2 × 2, A = LU y el coste de la eliminación.

Objetivos de aprendizaje

Al terminar esta unidad podrás:

- Multiplicar matrices comprobando que los tamaños coinciden.
- Hallar inversas con la fórmula 2 × 2 y con Gauss–Jordan.
- Factorizar A = LU y usarla para resolver sistemas.
- Estimar el coste de la eliminación al crecer n.

Conceptos clave

- $(AB)_{ij}$ = producto escalar de la fila i de A con la columna j de B. Una matriz m × n por una n × p es m × p. En general AB ≠ BA.
- La inversa A^{-1} cumple $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Existe exactamente cuando A tiene n pivotes (det A ≠ 0). $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ y $(AB)^{T} = B^{T}A^{T}$.
- Gauss–Jordan: reducir por filas [A | I] a [I | A^{-1}].
- La eliminación sin intercambios de filas guarda sus multiplicadores en una L triangular inferior con unos en la diagonal, lo que da A = LU. Resuelve Lc = b y luego Ux = c; con L y U guardadas, cada nuevo término independiente es barato.
- La eliminación en una matriz n × n cuesta unas $n^3/3$ operaciones de multiplicación–suma; resolver con L y U guardadas cuesta unas n^2 por término independiente.

Ecuaciones clave

$$(AB)_{ij} = \sum_{k} a_{ik} b_{kj}$$

```
(AB)_ij=_k a_ikb_kj
```

Producto de matrices

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

```
&b\&d^-1=(1)/(ad-bc)&-b\\-c&a
```

Inversa 2 × 2

$$A = LU$$

A=LU

Factorización LU

$$\text{cost} \approx n^3/3$$

Número de operaciones de la eliminación

Ejemplos resueltos paso a paso

Ejemplo 3.1 Halla AB y BA para A = [[1, 2], [3, 4]] y B = [[0, 1], [1, 0]].

1. AB: fila 1 · columnas = (2, 1); fila 2 = (4, 3).
2. BA intercambia las filas de A: [[3, 4], [1, 2]].

Respuesta: AB = [[2, 1], [4, 3]], BA = [[3, 4], [1, 2]], así que AB ≠ BA.

Ejemplo 3.2 Invierte A = [[4, 7], [2, 6]].

1. ad − bc = 24 − 14 = 10.
2. A^{-1} = (1/10)[[6, −7], [−2, 4]].

Respuesta: A^{-1} = [[0.6, −0.7], [−0.2, 0.4]].

Ejemplo 3.3 Factoriza A = [[2, 1], [6, 8]] como LU.

1. Multiplicador ℓ_{21} = 6/2 = 3.
2. $R_2 - 3R_1$ = [0, 5].

Respuesta: L = [[1, 0], [3, 1]], U = [[2, 1], [0, 5]].

Problemas de práctica

Resuelve cada uno primero en papel y luego comprueba.

1. ¿Qué tamaño tiene una matriz 3 × 2 por una 2 × 4?

   3 × 4.

2. Invierte [[2, 1], [5, 3]].

   det = 1, inversa [[3, −1], [−5, 2]].

3. ¿Aproximadamente cuántas operaciones requiere la eliminación para n = 1000?

   $n^3/3 \approx 3.33 \times 10^8$.

4. Si A y B son invertibles, ¿cuánto vale $(AB)^{-1}$?

   $B^{-1}A^{-1}$.

Ideas erróneas comunes

Mito: AB = BA.

En realidad: La multiplicación de matrices normalmente no es conmutativa.

Mito: $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

En realidad: El orden se invierte: $B^{-1}A^{-1}$.

Mito: Los ordenadores resuelven Ax = b calculando A^{-1}.

En realidad: Factorizan A = LU (o similar); formar A^{-1} es más lento y menos preciso.

Tarjetas de estudio

Identidad

AI = IA = A.

Inversa

$AA^{-1} = I$.

Inversa 2 × 2

Intercambia a y d; cambia el signo de b y c; divide entre ad − bc.

Regla de la traspuesta

$(AB)^T = B^TA^T$.

LU

A = LU a partir de la eliminación.

Coste

Unas $n^3/3$ para la eliminación.

Cuestionario de autoevaluación

1. Una matriz 2 × 3 por una 3 × 5 es...

2 × 5

3 × 3

5 × 2

indefinido

2 × 5. Tamaños exteriores.

2. Una matriz es invertible exactamente cuando tiene...

ningún cero

n pivotes

una fila de ceros

entradas iguales

n pivotes. Un conjunto completo de pivotes.

3. Duplicar n multiplica el coste de la eliminación por aproximadamente...

2

4

8

16

8. n^3 crece $2^3 = 8$ veces.

4. L en A = LU contiene...

los pivotes

los multiplicadores

la inversa

los valores propios

los multiplicadores. Multiplicadores bajo la diagonal, unos en la diagonal.

Repetir este cuestionario

Cómo ayuda esto a salvar el planeta

Los pronósticos meteorológicos y climáticos son, en esencia, enormes cálculos de álgebra lineal repetidos muchas veces al día. La NOAA informó en agosto de 2023 que sus dos supercomputadoras operativas gemelas, Dogwood en Manassas, Virginia, y Cactus en Phoenix, Arizona, se mejoraron un 20 % hasta 14.5 petaflops cada una, de modo que juntas el sistema de pronóstico puede procesar 29 mil billones de cálculos por segundo, y que con sus supercomputadoras de investigación su capacidad total es de 49 petaflops.

La regla $n^3/3$ muestra por qué importa la velocidad. Como ejemplo, un sistema denso con n = 100000 incógnitas necesita unas 3.33×10^{14} operaciones; a un ritmo sostenido de 14.5×10^{15} operaciones por segundo son unos 0.023 s, pero duplicar n multiplica el trabajo por 8. Los modelos reales usan matrices dispersas y solucionadores ingeniosos, pero ese mismo crecimiento cúbico es lo que, según la NOAA, pagará la potencia extra: modelos de mayor resolución que mejoran pronósticos y alertas.

En Saving Planets: Introducción a la programación · Soluciones

Fuentes: NOAA: NOAA completes upgrade to weather and climate supercomputer system (Aug. 10, 2023) (https://www.noaa.gov/news-release/noaa-completes-upgrade-to-weather-and-climate-supercomputer-system) · MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra (Strang, Spring 2010) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/)

Recursos de aprendizaje gratuitos

- Interactive Linear Algebra, 3.4 Matrix multiplication (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/matrix-multiplication.html): Sección de texto gratuito.
- Interactive Linear Algebra, 3.5 Matrix inverses (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/matrix-inverses.html): Inversas y Gauss–Jordan.
- MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra (Strang, Spring 2010) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/): Clases 3–4: multiplicación, inversas y A = LU.
- MIT OpenCourseWare 18.06SC Linear Algebra (self-paced, Fall 2011) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06sc-linear-algebra-fall-2011/): Vídeos de clases prácticas sobre LU.

Ver la clase

Lecture 3: Multiplication and inverse matrices (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/resources/lecture-3-multiplication-and-inverse-matrices/) (en inglés)

MIT 18.06 Linear Algebra (Spring 2010), MIT OpenCourseWare. Licencia: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Condiciones de uso (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Enlace solo para estudio gratuito; Saving Planets no está afiliado a esta universidad ni cuenta con su respaldo.

- [ ] **Terminé esta unidad**

Modelos lineales: economía de insumo–producto (Leontief), redes y balanceo

Construir modelos lineales a partir de sistemas reales: el modelo insumo–producto de Leontief x = Ax + d y su solución x = (I − A)⁻¹d, modelos ampliados ambientalmente que convierten el gasto en emisiones, flujos en redes y ajuste de ecuaciones químicas.

Objetivos de aprendizaje

Al terminar esta unidad podrás:

- Plantear y resolver un modelo insumo–producto de Leontief.
- Interpretar las entradas de $(I - A)^{-1}$.
- Ampliar un modelo insumo–producto con intensidades de emisión para hallar una huella.
- Escribir problemas de balance de flujos y de balance químico como sistemas lineales.

Conceptos clave

- En un modelo insumo–producto, la columna j de la matriz de consumo A indica lo que el sector j compra a cada sector para producir un dólar de producción.
- La producción total x debe cubrir lo que usan las industrias (Ax) más la demanda final d: x = Ax + d, así que (I − A)x = d y x = (I − A)⁻¹d.
- La entrada (i, j) de la inversa de Leontief $(I - A)^{-1}$ es la producción total del sector i necesaria, directamente y a través de todas las cadenas de suministro, por un dólar de demanda final del sector j.
- Los modelos ampliados ambientalmente multiplican la producción por una fila de intensidades de emisión e (por ejemplo kg CO_2 por dólar): huella = e·x.
- Las leyes de conservación también dan ecuaciones lineales: el flujo que entra es igual al que sale en cada nodo de una red, y los átomos de cada elemento se equilibran en una reacción química.

Ecuaciones clave

$$\mathbf{x} = A\mathbf{x} + \mathbf{d}$$

Balance insumo–producto

$$\mathbf{x} = (I - A)^{-1}\mathbf{d}$$

```
=(I-A)^-1
```

Solución de Leontief

$$\text{footprint} = \mathbf{e} \cdot \mathbf{x}$$

`footprint=·`

Modelo ampliado ambientalmente

$$\sum \text{in} = \sum \text{out}$$

`in= out`

Balance de flujo en un nodo

Ejemplos resueltos paso a paso

Ejemplo 4.1 Una economía de dos sectores tiene A = [[0.2, 0.3], [0.1, 0.4]] y demanda final d = (100, 50) (valores de ejemplo, millones de $). Halla la producción total.

1. I − A = [[0.8, −0.3], [−0.1, 0.6]], det = 0.48 − 0.03 = 0.45.
2. $(I - A)^{-1}$ = (1/0.45)[[0.6, 0.3], [0.1, 0.8]].
3. x = (1/0.45)(60 + 15, 10 + 40).

Respuesta: x = (166.7, 111.1) millones de $.

Ejemplo 4.2 Con intensidades de emisión de ejemplo e = (0.5, 2.0) kg CO_2 por dólar, halla la huella de esa demanda final.

1. huella = 0.5 × 166.7 + 2.0 × 111.1 (en kg por $ × millones de $).

Respuesta: 305.6 millones de kg = 305.6 kt CO_2 (ejemplo).

Ejemplo 4.3 Ajusta x CH_4 + y O_2 → z CO_2 + w H_2O.

1. C: x = z. H: 4x = 2w. O: 2y = 2z + w.
2. Haz x = 1: z = 1, w = 2, y = 2.

Respuesta: CH_4 + 2 O_2 → CO_2 + 2 H_2O.

Problemas de práctica

Resuelve cada uno primero en papel y luego comprueba.

1. En el modelo resuelto, ¿cuánta producción del sector 1 requiere en total 1 $ de demanda final del sector 2?

Entrada (1, 2) de $(I - A)^{-1} = 0.3/0.45 = 0.667$.

2. Una economía de un solo sector usa 0.25 de su propia producción. ¿Qué producción total satisface una demanda de 300?

   $x = 300/(1 - 0.25) = 400$.

3. Un nodo tiene entradas de 40 y 25 y una salida f_1 más una salida de 30. Halla f_1.

   $f_1 = 65 - 30 = 35$.

4. Ajusta $H_2 + O_2 \rightarrow H_2O$.

   $2\ H_2 + O_2 \rightarrow 2\ H_2O$.

Ideas erróneas comunes

Mito: La producción total es igual a la demanda final.

En realidad: Las industrias también consumen la producción de las demás, así que x es mayor que d.

Mito: La huella proviene solo del sector al que compras.

En realidad: La inversa de Leontief suma todos los proveedores aguas arriba.

Mito: Cualquier A da una economía sensata.

En realidad: Las sumas de las columnas deben ser menores que 1 para que $(I - A)^{-1}$ tenga entradas no negativas.

Tarjetas de estudio

Matriz de consumo

Insumos por dólar de producción.

Modelo de Leontief

$x = Ax + d$.

Inversa de Leontief

$(I - A)^{-1}$, requerimientos totales.

Modelo ampliado

huella = $e \cdot x$.

Balance de flujo

Entrada = salida en cada nodo.

Sistema homogéneo

$Ax = 0$.

Cuestionario de autoevaluación

1. La solución de Leontief es...

$x = Ad$

$x = (I - A)^{-1}d$

$x = A^{-1}d$

$x = d - A$

$x = (I - A)^{-1}d$. A partir de $x = Ax + d$.

2. La columna j de A describe...

lo que vende el sector j

lo que compra el sector j por dólar de producción

la demanda final

las emisiones

lo que compra el sector j por dólar de producción. Insumos por unidad de producción.

3. En un modelo ampliado, una huella es...

$e \cdot x$

$e + x$

det A

x/e

$e \cdot x$. Intensidad por producción, sumada.

4. Ajustar una ecuación química es un...

problema no lineal

sistema lineal homogéneo

determinante

problema de valores propios

sistema lineal homogéneo. El recuento de átomos da Ax = 0.

Repetir este cuestionario

Cómo ayuda esto a salvar el planeta

La EPA de EE. UU. usa exactamente este modelo para rastrear la contaminación a través de la economía. Según la EPA, sus modelos USEEIO combinan datos de transacciones económicas entre 389 sectores industriales con datos ambientales de esos sectores, que abarcan el uso de suelo, agua, energía y minerales, la contaminación del aire, los nutrientes y los tóxicos, para evaluar los impactos de bienes y servicios. La EPA los describe como útiles para calcular la huella de carbono, y respaldan su trabajo de gestión sostenible de materiales.

Una matriz de consumo de 389 sectores tiene $389^2 = 151321$ entradas, demasiadas para trabajar a mano pero fáciles para los métodos de eliminación y LU de la unidad 3. La inversa de Leontief es lo que permite a una ciudad, empresa u hogar ver las emisiones ocultas en sus cadenas de suministro, no solo en la puerta de la fábrica.

En Saving Planets: Soluciones · Química General I

Fuentes: U.S. EPA: US Environmentally-Extended Input-Output (USEEIO) models (https://www.epa.gov/land-research/us-environmentally-extended-input-output-useeio-models) · Interactive Linear Algebra, 1.1 Systems of linear equations (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/systems-of-eqns.html)

Recursos de aprendizaje gratuitos

- U.S. EPA: US Environmentally-Extended Input-Output (USEEIO) models (https://www.epa.gov/land-research/us-environmentally-extended-input-output-useeio-models): Los modelos insumo–producto ampliados ambientalmente de la EPA.
- Jim Hefferon, Linear Algebra (free text) (https://hefferon.net/linearalgebra/): Tema: análisis insumo–producto de Leontief.
- MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra (Strang, Spring 2010) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/): Clases y listas de problemas de aplicaciones.
- Interactive Linear Algebra, 1.2 Row reduction (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/row-reduction.html): Resolver los sistemas.

☐ **Terminé esta unidad**

UNIDAD 5 · SEMANAS 6–7

Espacios vectoriales, subespacios, independencia, base, rango y los cuatro subespacios fundamentales

Espacios vectoriales y subespacios, espacio columna y espacio nulo, resolución completa de Ax = 0 y Ax = b, independencia lineal, base y dimensión, rango, el teorema del rango y los cuatro subespacios fundamentales de Strang.

Objetivos de aprendizaje

Al terminar esta unidad podrás:

- Comprobar si un conjunto es un subespacio.
- Hallar bases del espacio columna y del espacio nulo de una matriz.
- Comprobar la independencia lineal de vectores.
- Usar el teorema del rango y las dimensiones de los cuatro subespacios fundamentales.

Conceptos clave

- Un subespacio contiene el vector cero y es cerrado bajo la suma y la multiplicación por escalares. Las rectas y planos que pasan por el origen son subespacios; los que no pasan por el origen no lo son.
- Espacio columna C(A): todos los Ax, el conjunto de b para los que Ax = b tiene solución. Espacio nulo N(A): todos los x con Ax = 0.
- Los vectores son linealmente independientes si la única combinación que da cero es la de todos los coeficientes nulos. Una base es un conjunto generador independiente; toda base de un espacio tiene el mismo número de vectores, su dimensión.
- Rango r = número de pivotes = dim C(A). Teorema del rango: r + dim N(A) = n, el número de columnas.
- Cuatro subespacios fundamentales de una matriz m × n de rango r: C(A) (dim r) y N(A^T) (dim m − r) en $\mathbb{R}^m$; C(A^T) (dim r) y N(A) (dim n − r) en $\mathbb{R}^n$. N(A) es ortogonal al espacio fila.

Ecuaciones clave

$$C(A) = \{A\mathbf{x}\},\ \ N(A) = \{\mathbf{x} : A\mathbf{x} = 0\}$$

`C(A)=\,\ \ N(A)=\:A=0\`

Espacio columna y espacio nulo

$$r + \dim N(A) = n$$

`r+ N(A)=n`

Teorema del rango

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_n$$

Solución completa de Ax = b

$$\dim N(A^T) = m - r$$

`N(A^T)=m-r`

Espacio nulo izquierdo

Ejemplos resueltos paso a paso

Ejemplo 5.1 Halla el rango y una base del espacio nulo de A = [[1, 2, 3], [2, 4, 6], [1, 0, 1]].

1. $R_2 - 2R_1 = 0$; $R_3 - R_1 = [0, -2, -2]$. Dos pivotes, así que r = 2.
2. Ax = 0: x + z = 0 y −2y − 2z = 0, con z libre.
3. Toma z = 1: x = −1, y = −1.

Respuesta: r = 2, N(A) generado por (−1, −1, 1); dim N(A) = 3 − 2 = 1.

Ejemplo 5.2 ¿Son independientes (1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9)?

1. Reduce por filas la matriz con esas columnas: $R_2 - 2R_1$ y $R_3 - 3R_1$ dan las filas [0, −3, −6] y [0, −6, −12], que son múltiplos.
2. Solo dos pivotes.

Respuesta: No: (7, 8, 9) = 2(4, 5, 6) − (1, 2, 3).

Ejemplo 5.3 Una matriz 5 × 8 tiene rango 3. Da las dimensiones de sus cuatro subespacios fundamentales.

1. C(A) y $C(A^T)$: r = 3.
2. N(A): n − r = 8 − 3; $N(A^T)$: m − r = 5 − 3.

Respuesta: 3, 3, 5 y 2.

Problemas de práctica

Resuelve cada uno primero en papel y luego comprueba.

1. ¿Es la recta $y = 2x + 1$ un subespacio de $\mathbb{R}^2$?

   No: no contiene (0, 0).

2. Una matriz 4×4 tiene un espacio nulo de dimensión 2. ¿Cuál es su rango?

   $4 - 2 = 2$.

3. ¿Cuál es la dimensión del espacio de matrices 2×2?

   4.

4. ¿Pueden ser independientes 4 vectores de $\mathbb{R}^3$?

   No: como mucho 3.

Ideas erróneas comunes

Mito: Cualquier plano de $\mathbb{R}^3$ es un subespacio.
En realidad: Solo los planos que pasan por el origen.

Mito: El rango cuenta las entradas no nulas.
En realidad: Cuenta los pivotes (columnas independientes).

Mito: El espacio nulo vive en el mismo espacio que b.
En realidad: N(A) está en $\mathbb{R}^n$ (el lado de x); b está en $\mathbb{R}^m$.

Tarjetas de estudio

Subespacio

Contiene 0; cerrado bajo + y escalado.

Espacio columna

All Ax.

Espacio nulo

Todos los x con Ax = 0.

Base

Conjunto generador independiente.

Rango

Número de pivotes.

Teorema del rango

r + dim N(A) = n.

Cuestionario de autoevaluación

1. El teorema del rango dice que r + dim N(A) es igual al...

m

n

m + n

r

n. Número de columnas.

2. Ax = b tiene solución exactamente cuando b está en...

N(A)

C(A)

$N(A^T)$

$C(A^T)$

C(A). b debe ser una combinación de las columnas.

3. El espacio nulo es ortogonal al...

espacio columna

el espacio fila

b

el espacio nulo izquierdo

el espacio fila. Cada fila por x da 0.

4. ¿Cuántos vectores tiene una base de $\mathbb{R}^3$?

2

3

4

cualquier número

3. Dimensión 3.

Repetir este cuestionario

Cómo ayuda esto a salvar el planeta

La dimensión cuenta incógnitas, y mejores pronósticos necesitan más. La NOAA dijo que la mejora de sus supercomputadoras en 2023 permitiría al Global Forecast System de EE. UU. mejorar su resolución horizontal de 13 km a 9 km, lo que ayuda a ver y simular fenómenos de menor escala.

Una malla con espaciado h tiene unas $(1/h)^2$ columnas por unidad de área, así que pasar de 13 km a 9 km multiplica el número de columnas de la malla por $(13/9)^2 = 2.09$. Cada una de esas columnas lleva temperatura, viento, humedad y presión en muchos niveles, de modo que el vector de estado de un pronóstico vive en un espacio de dimensión muchísimo mayor, y las matrices que lo actualizan crecen en consecuencia.

En Saving Planets: Cálculo III · Ecuaciones diferenciales

Fuentes: NOAA: NOAA completes upgrade to weather and climate supercomputer system (Aug. 10, 2023) (https://www.noaa.gov/news-release/noaa-completes-upgrade-to-weather-and-climate-supercomputer-system) · Interactive Linear Algebra, 2.7 Basis and dimension (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/dimension.html)

Recursos de aprendizaje gratuitos

- Interactive Linear Algebra, 2.6 Subspaces (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/subspaces.html): Sección de texto gratuito.
- Interactive Linear Algebra, 2.5 Linear independence (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/linear-independence.html): Pruebas de independencia.
- Interactive Linear Algebra, 2.9 The rank theorem (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/rank-thm.html): Rango y nulidad.
- MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra (Strang, Spring 2010) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/): Clases 5–10: espacios, rango y los cuatro subespacios.

Ver la clase

Lecture 10: The four fundamental subspaces (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/resources/lecture-10-the-four-fundamental-subspaces/) (en inglés)

MIT 18.06 Linear Algebra (Spring 2010), MIT OpenCourseWare. Licencia: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Condiciones de uso (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Enlace solo para estudio gratuito; Saving Planets no está afiliado a esta universidad ni cuenta con su respaldo.

- [ ] **Terminé esta unidad**

UNIDAD 6 · SEMANAS 8–9

Ortogonalidad, proyecciones, mínimos cuadrados y Gram–Schmidt

Vectores y subespacios ortogonales, proyección sobre una recta y sobre un subespacio, las ecuaciones normales $A^TA\hat{x} = A^Tb$, ajuste de rectas y curvas a datos por mínimos cuadrados, bases ortonormales, Gram–Schmidt y $A = QR$.

Objetivos de aprendizaje

Al terminar esta unidad podrás:

- Proyectar un vector sobre una recta y sobre un espacio columna.
- Ajustar una recta a datos con las ecuaciones normales.
- Construir una base ortonormal con Gram–Schmidt.
- Explicar por qué los mínimos cuadrados son una proyección.

Conceptos clave

- La proyección de b sobre la recta que pasa por a es $p = (a\cdot b/a\cdot a)\,a$; el error $e = b - p$ es ortogonal a a.
- Cuando $Ax = b$ no tiene solución (más ecuaciones que incógnitas, datos con ruido), elige $\hat{x}$ para que $\|b - A\hat{x}\|$ sea lo más pequeño posible. El error debe ser ortogonal a C(A), lo que da las ecuaciones normales $A^TA\hat{x} = A^Tb$.
- Para una recta $y = C + Dt$ por los puntos (t_i, y_i), las columnas de A son una de unos y la de los valores t_i.
- Los vectores ortonormales q_i cumplen $q_i\cdot q_j = 0$ $(i \neq j)$ y $\|q_i\| = 1$. Si Q tiene columnas ortonormales, $Q^TQ = I$ y las proyecciones se vuelven $p = QQ^Tb$.
- Gram–Schmidt resta a cada vector nuevo sus proyecciones sobre los anteriores y luego normaliza. El resultado es $A = QR$ con R triangular superior.

Ecuaciones clave

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\,\mathbf{a}$$

Proyección sobre una recta

$$A^TA\hat{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b}$$

A^TA=A^T

Ecuaciones normales

$$P = A(A^TA)^{-1}A^T$$

P=A(A^TA)^-1A^T

Matriz de proyección

$$A = QR$$

A=QR

Factorización de Gram–Schmidt

Ejemplos resueltos paso a paso

Ejemplo 6.1 Proyecta b = (2, 3) sobre a = (1, 1).

1. a·b = 5, a·a = 2.
2. p = 2.5(1, 1); e = b − p = (−0.5, 0.5), y e·a = 0.

Respuesta: p = (2.5, 2.5).

Ejemplo 6.2 Ajusta y = C + Dt a (0, 1), (1, 2), (2, 4) por mínimos cuadrados.

1. A tiene filas (1, 0), (1, 1), (1, 2); A^TA = [[3, 3], [3, 5]], A^Tb = (7, 10).
2. det = 6; C = (5 × 7 − 3 × 10)/6, D = (3 × 10 − 3 × 7)/6.

Respuesta: C = 0.833, D = 1.5: y = 0.833 + 1.5t.

Ejemplo 6.3 Aplica Gram–Schmidt a a_1 = (1, 1, 0), a_2 = (1, 0, 1).

1. q_1 = (1, 1, 0)/√2.
2. $a_2 - (a_2 \cdot q_1)q_1$ = (1, 0, 1) − ½(1, 1, 0) = (0.5, −0.5, 1), de longitud √1.5 = 1.225.

Respuesta: q_1 = (0.707, 0.707, 0), q_2 = (0.408, −0.408, 0.816).

Problemas de práctica

Resuelve cada uno primero en papel y luego comprueba.

1. Proyecta (3, 4) sobre (1, 0).

   (3, 0).

2. Escribe las ecuaciones normales para ajustar y = Dt (sin ordenada en el origen) a (1, 2), (2, 3).

$\Sigma t^2\, D = \Sigma ty$: $5D = 8$, $D = 1.6$.

3. ¿Es ortogonal $Q = [[0, 1], [1, 0]]$?

   Sí: $Q^TQ = I$.

4. Si b ya está en C(A), ¿cuál es el error de mínimos cuadrados?

   Cero: $p = b$.

Ideas erróneas comunes

Mito: Los mínimos cuadrados resuelven $Ax = b$ exactamente.

En realidad: Hallan el $A\hat{x}$ más cercano cuando no existe solución exacta.

Mito: Cualquier base facilita las proyecciones.

En realidad: Las bases ortonormales sí; si no, necesitas $(A^TA)^{-1}$.

Mito: Un ajuste por una recta significa que los datos son lineales.

En realidad: Revisa los residuos; una curva puede ajustar mejor (añade una columna t^2).

Tarjetas de estudio

Proyección sobre una recta

$p = (a \cdot b / a \cdot a)a$.

Ecuaciones normales

$A^TA\hat{x} = A^Tb$.

Matriz de proyección

$P = A(A^TA)^{-1}A^T$.

Ortonormal

$q_i \cdot q_j = 0$, $\|q_i\| = 1$.

Gram–Schmidt

Restar proyecciones, normalizar.

QR

$A = QR$.

Cuestionario de autoevaluación

1. Las ecuaciones normales son...

$Ax = b$

$A^TA\hat{x} = A^Tb$

$AA^Tx = b$

$A^Tx = b$

$A^TA\hat{x} = A^Tb$. Error ortogonal a C(A).

2. El vector de error de mínimos cuadrados es ortogonal al...

b

espacio columna

espacio nulo

$\hat{x}$

espacio columna. Eso es lo que lo hace el más corto.

3. Para Q con columnas ortonormales, Q^TQ =...

0

Q

I

QQ^T

I. Productos escalares 0 o 1.

4. Gram–Schmidt produce...

$A = LU$

$A = QR$

$A = PDP^{-1}$

$A = U\Sigma V^T$

A = QR. Q ortonormal, R triangular.

Repetir este cuestionario

Cómo ayuda esto a salvar el planeta

La subida del nivel del mar se mide ajustando curvas a datos satelitales con ruido. La NASA informa que los altímetros satelitales, TOPEX/Poseidon, Jason-1, -2 y -3 y ahora Sentinel-6 Michael Freilich, han seguido el nivel medio global del mar desde 1993, que ha subido 114.4 mm desde entonces, y que el ritmo de subida ha pasado de 0.08 pulgadas por año (0.20 cm por año) en 1993 a 0.17 pulgadas por año (0.44 cm por año) ahora, unas 2.2 veces más rápido.

Un ajuste lineal por mínimos cuadrados da un ritmo medio; añadir una columna t^2 a A ajusta una curva cuya pendiente variable mide la aceleración que describe la NASA. La Práctica D ajusta datos de ejemplo con la forma del registro de la NASA usando exactamente las ecuaciones normales de esta unidad.

En Saving Planets: Océanos · Observación de la Tierra

Fuentes: NASA: Global mean sea level (Vital Signs) (https://sealevel.nasa.gov/vital-signs/global-mean-sea-level/) · Interactive Linear Algebra, 6.5 The method of least squares (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/least-squares.html)

Recursos de aprendizaje gratuitos

- Interactive Linear Algebra, 6.3 Orthogonal projection (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/projections.html): Sección de texto gratuito.
- Interactive Linear Algebra, 6.5 The method of least squares (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/least-squares.html): Mínimos cuadrados con imágenes.
- Interactive Linear Algebra, 6.4 Orthogonal sets (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/orthogonal-sets.html): Gram–Schmidt.
- MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra (Strang, Spring 2010) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/): Clases 14–17: ortogonalidad, proyecciones, mínimos cuadrados, Gram–Schmidt.

Ver la clase

Lecture 16: Projection matrices and least squares (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/resources/lecture-16-projection-matrices-and-least-squares/) (en inglés)

MIT 18.06 Linear Algebra (Spring 2010), MIT OpenCourseWare. Licencia: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Condiciones de uso (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Enlace solo para estudio gratuito; Saving Planets no está afiliado a esta universidad ni cuenta con su respaldo.

☐ Terminé esta unidad

Determinantes: propiedades, cofactores, regla de Cramer y volumen

El determinante a partir de sus propiedades, su cálculo por eliminación y por desarrollo por cofactores, det(AB) = det A det B, el criterio de invertibilidad, la regla de Cramer y el determinante como factor de escala de área o volumen de una aplicación lineal.

Objetivos de aprendizaje

Al terminar esta unidad podrás:

- Calcular determinantes 2 × 2 y 3 × 3 por cofactores y por eliminación.
- Usar las propiedades de los determinantes bajo operaciones de fila.
- Resolver sistemas pequeños con la regla de Cramer.
- Interpretar |det A| como un factor de escala de área o volumen.

Conceptos clave

- det A ≠ 0 exactamente cuando A es invertible. El determinante de una matriz triangular es el producto de sus entradas diagonales, así que det A = ± (producto de los pivotes).
- Operaciones de fila: un intercambio cambia el signo, multiplicar una fila por c multiplica det por c, y sumar a una fila un múltiplo de otra deja det sin cambios.
- det(AB) = det A · det B, $\det(A^T) = \det A$ y $\det(A^{-1}) = 1/\det A$.
- Desarrollo por cofactores a lo largo de una fila: $\det A = \Sigma\, a_{ij}C_{ij}$ con $C_{ij} = (-1)^{i+j}$ por el menor. Regla de Cramer: $x_i = \det(B_i)/\det A$, donde B_i tiene b en la columna i.
- Una aplicación lineal x ↦ Ax multiplica las áreas (2D) o los volúmenes (3D) por |det A|; un determinante negativo además invierte la orientación.

Ecuaciones clave

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

```
&b\&d=ad-bc
```

Determinante 2 × 2

$$\det(AB) = \det A \, \det B$$

```
(AB)= A B
```

Regla del producto

$$x_i = \frac{\det B_i}{\det A}$$

`x_i=( B_i)/( A)`

Regla de Cramer

$$\text{area}(AS) = |\det A|\,\text{area}(S)$$

`area(AS)=| A| area(S)`

Factor de escala de áreas

Ejemplos resueltos paso a paso

Ejemplo 7.1 Halla det [[1, 2, 0], [0, 1, 3], [2, 0, 1]] por cofactores a lo largo de la fila 1.

1. 1 × (1 × 1 − 3 × 0) = 1.
2. − 2 × (0 × 1 − 3 × 2) = −2 × (−6) = 12.
3. + 0 × (...) = 0.

Respuesta: det = 13.

Ejemplo 7.2 Resuelve 2x + y = 5, x + 3y = 10 con la regla de Cramer.

1. det A = 6 − 1 = 5.
2. x = det[[5, 1], [10, 3]]/5 = (15 − 10)/5.
3. y = det[[2, 5], [1, 10]]/5 = (20 − 5)/5.

Respuesta: x = 1, y = 3.

Ejemplo 7.3 Halla el área del paralelogramo de lados (3, 0) y (1, 2).

1. Área = |det [[3, 1], [0, 2]]| = |6 − 0|.

Respuesta: 6 unidades cuadradas.

Problemas de práctica

Resuelve cada uno primero en papel y luego comprueba.

1. ¿det [[3, 1], [2, 4]]?

12 − 2 = 10.

2. ¿det [[2, 0, 1], [1, 3, 2], [1, 1, 1]]?

   2(3 − 2) − 0 + 1(1 − 3) = 0, así que es singular.

3. Si det A = 4 para una A 3 × 3, ¿cuánto vale det(2A)?

   $2^3 \times 4 = 32$.

4. Si det A = 5, ¿cuánto vale $\det(A^{-1})$?

   1/5 = 0.2.

Ideas erróneas comunes

Mito: det(A + B) = det A + det B.

En realidad: Falso en general; solo det(AB) se separa.

Mito: det(2A) = 2 det A.

En realidad: Para n × n, $\det(2A) = 2^n \det A$.

Mito: El desarrollo por cofactores es el método rápido.

En realidad: Requiere unos n! pasos; la eliminación unos $n^3/3$.

Tarjetas de estudio

det 2 × 2

ad − bc.

Invertibilidad

det A ≠ 0.

Regla del producto

det(AB) = det A det B.

Intercambio de filas

Cambia el signo.

Regla de Cramer

$x_i = \det B_i / \det A$.

Factor de área

|det A|.

Cuestionario de autoevaluación

1. Intercambiar dos filas multiplica det por...

0

1

−1

2

−1. El signo cambia.

2. det A = 0 significa que A es...

ortogonales

singular

simétrica

la identidad

singular. No invertible.

3. El det de una matriz triangular es...

la traza

el producto de la diagonal

cero

la suma de la diagonal

el producto de la diagonal. Desarrolla a lo largo de la diagonal.

4. Una aplicación con det = 3 cambia las áreas en un factor de...

1/3

3

9

√3

3. |det A|.

Repetir este cuestionario

Cómo ayuda esto a salvar el planeta

Convertir píxeles en superficie terrestre es un determinante. El USGS indica para Landsat 9 bandas multiespectrales de 30 m y una banda pancromática de 15 m. La aplicación de los índices de píxel (i, j) a coordenadas del terreno es, localmente, una matriz; para una malla alineada de 30 m es diag(30, 30) m, cuyo determinante es 900, así que cada píxel cubre 900 m². La malla pancromática de 15 m tiene determinante 225 m², de modo que cuatro píxeles pancromáticos caben en un píxel multiespectral.

Contar los píxeles clasificados como bosque y multiplicar por este factor de escala es como los registros satelitales miden la pérdida de bosque en hectáreas (1 ha = 10000 m², unos 11.1 píxeles Landsat). Cuando una imagen se rota o se cizalla para encajar en un mapa, el determinante de la nueva matriz mantiene correcta el área.

En Saving Planets: Deforestación · Observación de la Tierra

Fuentes: USGS: Landsat 9 (https://www.usgs.gov/landsat-missions/landsat-9) · Interactive Linear Algebra, 4.3 Determinants and volumes (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/determinants-volumes.html)

Recursos de aprendizaje gratuitos

- Interactive Linear Algebra, 4.1 Determinants: definition (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/determinants-definitions-properties.html): Sección de texto gratuito.
- Interactive Linear Algebra, 4.3 Determinants and volumes (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/determinants-volumes.html): Significado geométrico.
- MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra (Strang, Spring 2010) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/): Clases 18–20: determinantes, cofactores, regla de Cramer.
- Jim Hefferon, Linear Algebra (free text) (https://hefferon.net/linearalgebra/): Capítulo cuatro: determinantes.

Ver la clase

Lecture 20: Cramer's rule, inverse matrix, and volume (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/resources/lecture-20-cramers-rule-inverse-matrix-and-volume/) (en inglés)

MIT 18.06 Linear Algebra (Spring 2010), MIT OpenCourseWare. Licencia: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Condiciones de uso (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Enlace solo para estudio gratuito; Saving Planets no está afiliado a esta universidad ni cuenta con su respaldo.

☐ **Terminé esta unidad**

Valores propios y vectores propios

Los vectores propios como direcciones que una matriz solo estira, la ecuación característica det(A − λI) = 0, las comprobaciones con traza y determinante, valores propios de matrices especiales, valores propios complejos y rotación, el método de la potencia y los modos naturales de estructuras que vibran.

Objetivos de aprendizaje

Al terminar esta unidad podrás:

- Hallar valores propios con det(A − λI) = 0 y vectores propios en el espacio nulo de A − λI.
- Comprobar valores propios con la traza y el determinante.
- Reconocer valores propios reales, repetidos y complejos.
- Usar el método de la potencia para hallar el valor propio dominante.

Conceptos clave

- Av = λv con v ≠ 0: el vector propio v mantiene su dirección y se escala por el valor propio λ.
- Los valores propios son las raíces de det(A − λI) = 0, un polinomio de grado n. Para cada λ, los vectores propios llenan el espacio nulo de A − λI.
- Comprobaciones: los valores propios suman la traza (suma de la diagonal) y su producto es det A.
- Las matrices simétricas tienen valores propios reales y vectores propios ortogonales. Las matrices de rotación tienen valores propios complejos. Las matrices triangulares muestran sus valores propios en la diagonal.
- Método de la potencia: multiplica repetidamente un vector inicial por A y reescálalo; se alinea con el vector propio del mayor |λ|. En vibraciones, Kv = ω²Mv da las frecuencias naturales ω y las formas modales v.

Ecuaciones clave

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

Ecuación de valores propios

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

```
(A- I)=0
```

Ecuación característica

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = \operatorname{tr} A, \quad \lambda_1 \cdots \lambda_n = \det A$$

```
_1+·s+_n=,\ \ _1·s_n= A
```

Comprobaciones con traza y determinante

$$K\mathbf{v} = \omega^2 M\mathbf{v}$$

K=ω^2M

Modos naturales de una estructura

Ejemplos resueltos paso a paso

Ejemplo 8.1 Halla los valores y vectores propios de A = [[2, 1], [1, 2]].

1. det(A − λI) = (2 − λ)² − 1 = λ² − 4λ + 3 = 0.
2. λ = 3: A − 3I = [[−1, 1], [1, −1]] da v = (1, 1). λ = 1: v = (1, −1).
3. Comprobación: 3 + 1 = 4 = traza; 3 × 1 = 3 = det.

Respuesta: λ = 3 con (1, 1); λ = 1 con (1, −1).

Ejemplo 8.2 Halla los valores propios de [[4, 1], [2, 3]].

1. λ² − 7λ + 10 = 0 (traza 7, det 10).
2. (λ − 5)(λ − 2) = 0.

Respuesta: λ = 5 y λ = 2.

Ejemplo 8.3 Un edificio de ejemplo de dos plantas tiene masas de piso iguales m y rigidez de entrepiso k, con K/m = (k/m)[[2, −1], [−1, 1]] y k/m = 100 s^{-2}. Halla la frecuencia fundamental.

1. Valores propios de [[2, −1], [−1, 1]]: λ = (3 ± √5)/2 = 0.382 y 2.618.
2. ω_1^2 = 100 × 0.382 = 38.2 s^{-2}, ω_1 = 6.18 rad/s.
3. $f_1 = \omega_1/(2\pi)$, $T_1 = 1/f_1$.

Respuesta: f_1 = 0.984 Hz, periodo T_1 = 1.02 s (valores de ejemplo).

Problemas de práctica

Resuelve cada uno primero en papel y luego comprueba.

1. ¿Valores propios de [[5, 0], [0, −2]]?

   5 y −2 (diagonal).

2. Una matriz 3 × 3 tiene valores propios 1, 2, 3. Halla su traza y su determinante.

   Traza 6, det 6.

3. ¿Valores propios de la rotación de 90° [[0, −1], [1, 0]]?

   $\lambda^2 + 1 = 0$: $\lambda = \pm i$.

4. Si $Av = 4v$, ¿cuánto vale A^2v?

   16v.

Ideas erróneas comunes

Mito: El vector cero es un vector propio.

En realidad: Los vectores propios deben ser no nulos.

Mito: La reducción por filas conserva los valores propios.

En realidad: Los cambia; usa $\det(A - \lambda I)$.

Mito: Toda matriz real tiene valores propios reales.

En realidad: Las rotaciones dan complejos; las matrices simétricas son el caso seguro.

Tarjetas de estudio

Vector propio

$Av = \lambda v$, $v \neq 0$.

Ecuación característica

$\det(A - \lambda I) = 0$.

Comprobación con la traza

$\Sigma\lambda$ = traza.

Comprobación con el determinante

$\Pi\lambda = \det A$.

Método de la potencia

La multiplicación repetida halla el vector propio dominante.

Modos naturales

$Kv = \omega^2 Mv$.

Cuestionario de autoevaluación

1. Los valores propios de una matriz triangular son...

sus pivotes tras los intercambios

sus entradas diagonales

todos 1

sus sumas por filas

sus entradas diagonales. det(A − λI) es un producto de términos diagonales.

2. La suma de los valores propios es igual a...

el determinante

la traza

el rango

n

la traza. Comprobación con la traza.

3. El método de la potencia halla...

el valor propio más pequeño

el valor propio dominante

el determinante

la inversa

el valor propio dominante. Gana el mayor |λ|.

4. Las matrices simétricas tienen...

valores propios complejos

valores propios reales y vectores propios ortogonales

determinante cero

ningún vector propio

valores propios reales y vectores propios ortogonales. Teorema espectral.

Repetir este cuestionario

Cómo ayuda esto a salvar el planeta

Los ingenieros sísmicos leen los edificios a través de sus valores propios. Un estudio del USGS de Mehmet Çelebi (2022) usó los periodos fundamentales y los porcentajes de amortiguamiento crítico de 41 edificios altos de varios países. Encontró una clara tendencia lineal entre la altura del edificio y el periodo fundamental para edificios de acero y de hormigón armado, aunque con gran dispersión por las diferencias de diseño estructural, y que el amortiguamiento crítico era claramente inferior al 3 %, en línea con otros estudios recientes sobre edificios altos.

El periodo fundamental lo fija el menor valor propio del problema rigidez–masa, como en el ejemplo del edificio de dos plantas. Un amortiguamiento bajo significa que un edificio alto puede vibrar mucho tiempo cuando ondas sísmicas de periodo largo coinciden con ese periodo; por eso los edificios instrumentados y sus modos medidos orientan ciudades más seguras y duraderas.

En Saving Planets: Ecuaciones diferenciales · Dinámica

Fuentes: USGS: Preliminary study of correlation of natural periods and damping percentages of tall buildings in several countries (Çelebi, 2022) (https://www.usgs.gov/publications/preliminary-study-correlation-natural-periods-and-damping-percentages-tall-buildings) · Interactive Linear Algebra, 5.1 Eigenvalues and eigenvectors (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/eigenvectors.html)

Recursos de aprendizaje gratuitos

- Interactive Linear Algebra, 5.1 Eigenvalues and eigenvectors (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/eigenvectors.html): Sección de texto gratuito.
- Interactive Linear Algebra, 5.2 The characteristic polynomial (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/characteristic-polynomial.html): Hallar valores propios.
- Interactive Linear Algebra, 5.5 Complex eigenvalues (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/complex-eigenvalues.html): Rotación y escalado.
- MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra (Strang, Spring 2010) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/): Clase 21: valores propios y vectores propios.

☐ **Terminé esta unidad**

Diagonalización, potencias de matrices, cadenas de Markov y sistemas dinámicos lineales

Diagonalizar $A = PDP^{-1}$, calcular rápidamente potencias A^k, matrices simétricas y el teorema espectral $A = Q\Lambda Q^T$, matrices de Markov (estocásticas) y estados estacionarios, y el comportamiento a largo plazo de $x_{k+1} = Ax_k$.

Objetivos de aprendizaje

Al terminar esta unidad podrás:

- Diagonalizar una matriz con n vectores propios independientes.
- Calcular A^k y predecir el comportamiento a largo plazo de $x_{k+1} = Ax_k$.
- Hallar el estado estacionario de una cadena de Markov.
- Usar el teorema espectral para matrices simétricas.

Conceptos clave

- Si A tiene n vectores propios independientes (las columnas de P), entonces $A = PDP^{-1}$ con los valores propios en la diagonal de D, y $A^k = PD^kP^{-1}$.
- Escribe $x_0 = c_1v_1 + \dots + c_nv_n$. Entonces $x_k = A^kx_0 = c_1\lambda_1^kv_1 + \dots + c_n\lambda_n^kv_n$; el mayor $|\lambda|$ domina al crecer k.
- Una matriz de Markov tiene entradas no negativas y columnas que suman 1. Siempre tiene $\lambda = 1$, y los demás valores propios cumplen $|\lambda| \le 1$. El estado estacionario es el vector propio de $\lambda = 1$, escalado para que sus entradas sumen 1.
- El segundo mayor $|\lambda|$ fija lo rápido que una cadena de Markov olvida su inicio: la diferencia se reduce como $|\lambda_2|^k$.
- Teorema espectral: una matriz simétrica real puede escribirse $A = Q\Lambda Q^T$ con vectores propios ortonormales en Q.

Ecuaciones clave

$$A = PDP^{-1},\ \ A^k = PD^kP^{-1}$$

```
A=PDP^-1,\ \ A^k=PD^kP^-1
```

Diagonalización y potencias

$$\mathbf{x}_k = c_1\lambda_1^k\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\lambda_n^k\mathbf{v}_n$$

```
_k=c_1_1^k_1+·s+c_n_n^k_n
```

Solución de x_{k+1} = Ax_k

$$P\mathbf{q} = \mathbf{q},\ \ \sum q_i = 1$$

P=,\ \ q_i=1

Estado estacionario de Markov

$$A = Q\Lambda Q^T$$

A=Q Q^T

Teorema espectral

Ejemplos resueltos paso a paso

Ejemplo 9.1 Usa la diagonalización para hallar A^{10} para A = [[2, 1], [1, 2]].

1. De la unidad 8: λ = 3, 1 con v = (1, 1), (1, −1). P = [[1, 1], [1, −1]], P^{-1} = ½[[1, 1], [1, −1]].
2. A^{10} = P diag(3^{10}, 1) P^{-1}; cada entrada es (3^{10} ± 1)/2.

Respuesta: A^{10} = [[29525, 29524], [29524, 29525]].

Ejemplo 9.2 Una matriz de Markov es P = [[0.8, 0.3], [0.2, 0.7]] (valores de ejemplo). Halla el estado estacionario.

1. (P − I)q = 0: $-0.2q_1 + 0.3q_2 = 0$, así que $q_1 = 1.5q_2$.
2. $q_1 + q_2 = 1$ da $q_2 = 0.4$.

Respuesta: q = (0.6, 0.4).

Ejemplo 9.3 Partiendo de x_0 = (1, 0), halla x_2 para la misma P, y el x_k general.

1. x_1 = (0.8, 0.2); x_2 = (0.64 + 0.06, 0.16 + 0.14).
2. Los valores propios son 1 y 0.5 (traza 1.5, det 0.5), así que x_k = (0.6, 0.4) + 0.5^k(0.4, −0.4).

Respuesta: x_2 = (0.70, 0.30); $x_k \to$ (0.6, 0.4).

Problemas de práctica

Resuelve cada uno primero en papel y luego comprueba.

1. ¿Es [[0.5, 0.2], [0.5, 0.8]] una matriz de Markov?

Sí: entradas no negativas, columnas que suman 1.

2. Halla su estado estacionario.

   $0.5q_1 = 0.2q_2$, así que $q = (2/7, 5/7) = (0.286, 0.714)$.

3. Si $A = PDP^{-1}$ con $D = \text{diag}(0.9, 0.5)$, ¿qué pasa con $A^k x$ para k grande?

   Decae a cero, dominado por 0.9^k.

4. ¿Se puede diagonalizar [[1, 1], [0, 1]]?

   No: $\lambda = 1$ doble pero solo un vector propio independiente.

Ideas erróneas comunes

Mito: Toda matriz se puede diagonalizar.

En realidad: Necesita n vectores propios independientes; [[1, 1], [0, 1]] solo tiene uno.

Mito: El estado estacionario de una cadena de Markov depende del inicio.

En realidad: En una cadena regular no; todo inicio converge al mismo q.

Mito: A^k significa elevar cada entrada a la potencia k.

En realidad: Solo las matrices diagonales funcionan así; por eso diagonalizamos.

Tarjetas de estudio

Diagonalización

$A = PDP^{-1}$.

Potencia de una matriz

$A^k = PD^kP^{-1}$.

Matriz de Markov

No negativa, columnas que suman 1.

Estado estacionario

$Pq = q$, entradas que suman 1.

Teorema espectral

$A = Q\Lambda Q^T$.

Matriz defectuosa

Demasiados pocos vectores propios para diagonalizar.

Cuestionario de autoevaluación

1. Toda matriz de Markov tiene el valor propio...

0

1

-1

2

1. Las columnas suman 1.

2. A^k para $A = PDP^{-1}$ es...

P^kDP^k

PD^kP^{-1}

D^kP

$kPDP^{-1}$

PD^kP^{-1}. Los $P^{-1}P$ interiores se cancelan.

3. La velocidad de convergencia de una cadena de Markov la fija...

$\lambda_1 = 1$

$|\lambda_2|$

la traza

n

$|\lambda_2|$. La diferencia se reduce como $|\lambda_2|^k$.

4. Las matrices simétricas se diagonalizan como...

LU

$Q\Lambda Q^T$

QR

solo $U\Sigma V^T$

$QΛQ^T$. Teorema espectral.

Repetir este cuestionario

Cómo ayuda esto a salvar el planeta

El destino de los materiales es una cadena de Markov. La EPA informa que Estados Unidos generó 292.4 millones de toneladas de residuos sólidos urbanos en 2018, 4.9 libras por persona y día. Unos 69 millones de toneladas se reciclaron y 25 millones de toneladas se compostaron, una tasa combinada del 32.1 %; unos 35 millones de toneladas (11.8 %) se quemaron con recuperación de energía; y más de 146 millones de toneladas (50 %) fueron a vertedero.

Si las proporciones de cada año se mantuvieran fijas, un material dejaría de usarse hacia esos destinos con esas probabilidades, y solo la parte reciclada volvería a la economía. La Práctica E construye una matriz de transición de ejemplo con una proporción de recuperación del 32.1 % y muestra, con potencias de matrices y el vector propio de $\lambda = 1$, cómo aumentar el reciclaje cambia cuánto tiempo sigue en uso el material y cuánto llega al vertedero.

En Saving Planets: Soluciones

Fuentes: U.S. EPA: National overview, facts and figures on materials, wastes and recycling (https://www.epa.gov/facts-and-figures-about-materials-waste-and-recycling/national-overview-facts-and-figures-materials) · Interactive Linear Algebra, 5.6 Stochastic matrices (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/stochastic-matrices.html)

Recursos de aprendizaje gratuitos

- Interactive Linear Algebra, 5.4 Diagonalization (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/diagonalization.html): Sección de texto gratuito.
- Interactive Linear Algebra, 5.6 Stochastic matrices (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/stochastic-matrices.html): Cadenas de Markov y estados estacionarios.
- MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra (Strang, Spring 2010) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/): Clases 22–25: diagonalización, matrices de Markov, matrices simétricas.
- MIT OpenCourseWare 18.06SC Linear Algebra (self-paced, Fall 2011) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06sc-linear-algebra-fall-2011/): Clases prácticas sobre matrices de Markov.

Ver la clase

Lecture 22: Diagonalization and powers of A (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/resources/lecture-22-diagonalization-and-powers-of-a/) (en inglés)

MIT 18.06 Linear Algebra (Spring 2010), MIT OpenCourseWare. Licencia: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Condiciones de uso (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Enlace solo para estudio gratuito; Saving Planets no está afiliado a esta universidad ni cuenta con su respaldo.

- [ ] **Terminé esta unidad**

UNIDAD 10 · SEMANAS 13–14

La descomposición en valores singulares, el análisis de componentes principales y las matrices definidas positivas

Matrices definidas positivas y A^TA, la SVD $A = U\Sigma V^T$, valores singulares y la geometría de una matriz como rotar–estirar–rotar, la mejor aproximación de rango bajo y la compresión de imágenes, el número de condición y el análisis de componentes principales de datos.

Objetivos de aprendizaje

Al terminar esta unidad podrás:

- Comprobar si una matriz simétrica es definida positiva.
- Calcular valores singulares a partir de los valores propios de A^TA.
- Construir una aproximación de rango k y medir lo que conserva.
- Realizar un pequeño análisis de componentes principales.

Conceptos clave

- Una matriz simétrica es definida positiva cuando $x^TAx > 0$ para todo $x \neq 0$; equivalentemente, todos sus valores propios (o todos sus pivotes) son positivos. A^TA es siempre simétrica y semidefinida positiva.
- Toda matriz m × n tiene una SVD $A = U\Sigma V^T$: V y U tienen columnas ortonormales, y Σ contiene los valores singulares $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq 0$, las raíces cuadradas de los valores propios de A^TA.
- $A = \sigma_1 u_1 v_1^T + \sigma_2 u_2 v_2^T + \ldots$. Conservar los k primeros términos da la mejor aproximación de rango k (Eckart–Young); el error en la norma 2 es σ_{k+1}.
- El número de condición σ_1/σ_n mide cuánto pueden amplificarse los errores en b al resolver $Ax = b$.
- PCA: centra los datos (resta las medias de las columnas); entonces los vectores singulares derechos (vectores propios de la matriz de covarianza) son las direcciones principales, y σ_i^2 mide la varianza que explica cada una.

Ecuaciones clave

$$A = U\Sigma V^T$$

`A=U V^T`

Descomposición en valores singulares

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(A^TA)}$$

`σ_i=_i(A^TA)`

Valores singulares

$$A_k = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T$$

A_k=_i=1^kσ_i_i_i^T

Mejor aproximación de rango k

$$\kappa = \sigma_1 / \sigma_n$$

Número de condición

Ejemplos resueltos paso a paso

Ejemplo 10.1 Halla los valores singulares de A = [[3, 0], [4, 5]].

1. A^TA = [[25, 20], [20, 25]], valores propios 45 y 5.
2. $\sigma_1 = \sqrt{45}$, $\sigma_2 = \sqrt{5}$. Comprobación: $\sigma_1\sigma_2 = 15 = |\det A|$.

Respuesta: $\sigma_1 = 6.708$, $\sigma_2 = 2.236$.

Ejemplo 10.2 ¿Qué parte de la «energía» $\Sigma\sigma^2$ de A^TA conserva la aproximación de rango 1 de esa A?

1. $\sigma_1^2/(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) = 45/50$.

Respuesta: 90%.

Ejemplo 10.3 Una imagen en escala de grises de 1000 × 1000 se guarda como una SVD de rango 50. ¿Cuántos números se guardan, comparado con la imagen completa?

1. Cada término necesita un u (1000), un v (1000) y un σ: 2001 números.
2. 50 × 2001 = 100050 frente a 1000000.

Respuesta: 100050 números, aproximadamente el 10.0 % del original.

Problemas de práctica

Resuelve cada uno primero en papel y luego comprueba.

1. ¿Es [[2, 1], [1, 2]] definida positiva?

Sí: los valores propios 3 y 1 son positivos.

2. Halla el número de condición de diag(10, 0.1).

   10/0.1 = 100.

3. Unos datos 2D centrados tienen covarianza [[2, 1], [1, 2]]. ¿Qué parte de la varianza explica la primera componente principal?

   Valores propios 3 y 1: 3/4 = 75 %, a lo largo de (1, 1).

4. ¿Cuáles son los valores singulares de una matriz ortogonal?

   Todos iguales a 1.

Ideas erróneas comunes

Mito: Los valores singulares son los valores propios de A.

En realidad: Son las raíces cuadradas de los valores propios de A^TA, y nunca son negativos.

Mito: Solo las matrices cuadradas tienen SVD.

En realidad: Todas las matrices la tienen.

Mito: El PCA funciona sobre datos sin procesar.

En realidad: Centra primero los datos, y escala las variables medidas en unidades distintas.

Tarjetas de estudio

SVD

$A = U\Sigma V^T$.

Valor singular

$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}(A^TA)$.

Definida positiva

$x^TAx > 0$, todos los $\lambda > 0$.

Eckart–Young

La SVD truncada es la mejor aproximación de rango k.

Número de condición

σ_1/σ_n.

PCA

SVD de los datos centrados.

Cuestionario de autoevaluación

1. Los valores singulares son...

cualquier número real

no negativos

siempre enteros

los valores propios de A

no negativos. Raíces cuadradas de los valores propios de A^TA, ≥ 0.

2. La mejor aproximación de rango k conserva...

las k primeras filas

los k mayores términos singulares

k columnas al azar

los k menores σ

los k mayores términos singulares. Eckart–Young.

3. Un número de condición grande significa...

un sistema bien comportado

que los errores pueden amplificarse

que A es ortogonal

que det A = 1

que los errores pueden amplificarse. Casi singular.

4. En PCA, la primera dirección principal es...

la media

el primer vector singular derecho de los datos centrados

espacio nulo

la primera fila

el primer vector singular derecho de los datos centrados. La dirección de mayor varianza.

Repetir este cuestionario

Cómo ayuda esto a salvar el planeta

El espectrómetro de imágenes EMIT del JPL de la NASA, en la Estación Espacial Internacional, cartografía los minerales de las regiones de origen del polvo de la Tierra. El JPL dice que recoge más de 100000 espectros por segundo, es decir 3.6×10^8 espectros por hora, y que su misión se ha prolongado al menos hasta 2026. El polvo importa para el clima: el JPL señala que los minerales oscuros absorben la luz solar y calientan el aire, mientras que los claros la reflejan y enfrían.

Cada espectro es un vector largo de reflectancias en muchas longitudes de onda, y las longitudes de onda vecinas están muy correlacionadas. El PCA y la SVD comprimen esos datos en unas pocas componentes, separan la señal del ruido y aíslan las firmas de minerales concretos: las mismas matemáticas que la práctica de compresión de imágenes.

En Saving Planets: Observación de la Tierra · Espacio

Fuentes: NASA JPL: EMIT, Earth Surface Mineral Dust Source Investigation (https://earth.jpl.nasa.gov/emit/) · MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra (Strang, Spring 2010) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/)

Recursos de aprendizaje gratuitos

- MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra (Strang, Spring 2010) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/): Clases 27–29: matrices definidas positivas y la SVD.
- MIT OpenCourseWare 18.06SC Linear Algebra (self-paced, Fall 2011) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06sc-linear-algebra-fall-2011/): Sesión sobre la descomposición en valores singulares.
- Gilbert Strang, Introduction to Linear Algebra (book site) (https://math.mit.edu/~gs/linearalgebra/): Notas de Strang sobre la SVD y los datos.
- Jim Hefferon, Linear Algebra (free text) (https://hefferon.net/linearalgebra/): Temas sobre matrices ortogonales y proyecciones.

Ver la clase

Lecture 25: Symmetric matrices and positive definiteness (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/resources/lecture-25-symmetric-matrices-and-positive-definiteness/) (en inglés)

MIT 18.06 Linear Algebra (Spring 2010), MIT OpenCourseWare. Licencia: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Condiciones de uso (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Enlace solo para estudio gratuito; Saving Planets no está afiliado a esta universidad ni cuenta con su respaldo.

☐ **Terminé esta unidad**

Problemas

Estos problemas están dentro de cada unidad. Hazlos en papel y luego abre la respuesta.

1. Vectores: combinaciones lineales, longitudes y productos escalares
   4 problemas
2. Sistemas de ecuaciones lineales y eliminación gaussiana
   4 problemas
3. Álgebra de matrices: multiplicación, inversas y factorización LU
   4 problemas
4. Modelos lineales: economía de insumo–producto (Leontief), redes y balanceo
   4 problemas
5. Espacios vectoriales, subespacios, independencia, base, rango y los cuatro subespacios fundamentales
   4 problemas
6. Ortogonalidad, proyecciones, mínimos cuadrados y Gram–Schmidt
   4 problemas
7. Determinantes: propiedades, cofactores, regla de Cramer y volumen
   4 problemas
8. Valores propios y vectores propios
   4 problemas
9. Diagonalización, potencias de matrices, cadenas de Markov y sistemas dinámicos lineales
   4 problemas
10. La descomposición en valores singulares, el análisis de componentes principales y las matrices definidas positivas
    4 problemas

El laboratorio (Computation lab)

El laboratorio es la parte práctica del curso. Aquí es gratuito y solo para practicar, sin créditos.

Cada práctica se hace en una hoja de cálculo gratuita o en papel; las versiones en Python son opcionales. Haz pausas regulares de la pantalla y maneja alfileres y tijeras con cuidado.

Referencia de seguridad: OSHA: Computer workstations eTool (https://www.osha.gov/etools/computer-workstations)

Práctica A: vectores de píxeles y un índice de vegetación

SEMANA 2

Objetivo: Tratar los píxeles de satélite como vectores: calcular longitudes, ángulos entre píxeles y el NDVI, y ver que la vegetación, el suelo y el agua apuntan en direcciones distintas.

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}}{\|\mathbf{p}\|\|\mathbf{q}\|}, \quad \mathrm{NDVI} = \frac{\mathrm{NIR}-\mathrm{red}}{\mathrm{NIR}+\mathrm{red}}$$

θ=·\|\|\|\|, NDVI=-redNIR+red

Ángulo entre píxeles y NDVI

Procedimiento

1. En una hoja de cálculo, introduce tres píxeles de ejemplo como filas de reflectancias (verde, rojo, NIR): vegetación (0.10, 0.08, 0.40), suelo (0.20, 0.25, 0.30), agua (0.06, 0.04, 0.02).
2. Calcula la longitud de cada píxel con SQRT(SUMSQ(...)) y el producto escalar de cada par con SUMPRODUCT.
3. Halla el ángulo entre cada par con ACOS y DEGREES.
4. Calcula el NDVI de cada píxel. Opcional: descarga una escena Landsat gratuita y repite con píxeles reales.

Tabla de datos

Píxel	Verde	Red	NIR	NDVI
Vegetación	0.10	0.08	0.40	0.667
Suelo	0.20	0.25	0.30	0.091
Agua	0.06	0.04	0.02	−0.333

Reflectancias de ejemplo elegidas para parecerse a vegetación, suelo desnudo y agua típicos.

Cálculo de ejemplo

1. NDVI de la vegetación = (0.40 − 0.08)/(0.40 + 0.08) = 0.667.
2. NDVI del suelo = 0.05/0.55 = 0.091; NDVI del agua = −0.02/0.06 = −0.333.
3. Ángulo vegetación–suelo: producto escalar = 0.160, longitudes 0.420 y 0.4387, cos θ = 0.8683, θ = 29.7°.

> **Seguridad**
>
> - Haz una breve pausa de la pantalla cada media hora.

Alternativa en casa o virtual

- Toda la práctica se hace en una hoja de cálculo gratuita.

PhET: Vector Addition (https://phet.colorado.edu/en/simulations/vector-addition) · USGS: Landsat 9 (https://www.usgs.gov/landsat-missions/landsat-9)

Vínculo con el planeta: El USGS indica las bandas roja (banda 4) e infrarroja cercana (banda 5) de Landsat 9, y sus datos son gratuitos, así que cualquiera puede cartografiar la vegetación de esta forma. USGS: Landsat 9 (https://www.usgs.gov/landsat-missions/landsat-9)

- [ ] **Completé este laboratorio (real o virtual)**

Práctica B: trilateración, de cuerdas a un sistema lineal

SEMANA 3

Objetivo: Hallar una posición a partir de distancias, primero con cuerdas sobre un mapa como en la actividad de GPS.gov y luego convirtiendo las ecuaciones de circunferencias en un sistema lineal y resolviéndolo por eliminación.

$$2(a_2 - a_1)x + 2(b_2 - b_1)y = d_1^2 - d_2^2 + a_2^2 - a_1^2 + b_2^2 - b_1^2$$

`2(a_2-a_1)x+2(b_2-b_1)y=d_1^2-d_2^2+a_2^2-a_1^2+b_2^2-b_1^2`

Diferencia de dos ecuaciones de circunferencias

Procedimiento

1. Imprime el mapa de trilateración de GPS.gov (sin escalar) o marca tres «satélites» en papel cuadriculado en (0, 0), (10, 0) y (0, 10) cm.
2. Convierte los tiempos de señal en distancias con d = ct (c = 299792458 m/s); para la versión en papel usa las distancias de ejemplo de abajo.
3. Traza circunferencias con una cuerda y un lápiz y marca dónde se cortan.
4. Resta las ecuaciones de las circunferencias por pares para obtener dos ecuaciones lineales, resuélvelas por eliminación en una hoja de cálculo y compara con tu dibujo.

Tabla de datos

Baliza	Posición (cm)	Distancia (cm)	d²
1	(0, 0)	5.000	25
2	(10, 0)	8.062	65
3	(0, 10)	6.708	45

Distancias de ejemplo para un receptor en (3, 4) cm. La actividad de GPS.gov usa cuatro satélites en un mapa a escala 1:21283839.

Cálculo de ejemplo

1. Eq. 1 − Eq. 2: 20x − 100 = −40, x = 3. Eq. 1 − Eq. 3: 20y − 100 = −20, y = 4.
2. El tiempo A de GPS.gov = 0.00505783 s da d = 1516299 m; a 1:21283839 son 7.12 cm en el mapa.

> **Seguridad**
>
> - Maneja chinchetas y tijeras con cuidado.

Alternativa en casa o virtual

- La versión con cuerda y papel es la práctica para casa.

GPS.gov: Trilateration activity (https://www.gps.gov/trilateration) · Interactive Linear Algebra, 1.2 Row reduction (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/row-reduction.html)

Vínculo con el planeta: GPS.gov diseñó esta actividad con la NOAA; los receptores reales resuelven el mismo tipo de sistema, con una incógnita de reloj, muchas veces por segundo. GPS.gov: Trilateration (NOAA classroom activity) (https://www.gps.gov/trilateration) · GPS.gov: Space segment (https://www.gps.gov/space-segment)

- [ ] **Completé este laboratorio (real o virtual)**

Práctica C: matrices como transformaciones del plano

SEMANA 4

Objetivo: Ver cómo actúan las matrices sobre formas: estirar, cizallar, rotar y reflejar un cuadrado en papel cuadriculado, y confirmar que las áreas se escalan por |det A|.

$$\operatorname{area}(AS) = |\det A| \operatorname{area}(S)$$

`area(AS)=| A| area(S)`

Factor de escala de áreas

Procedimiento

1. Dibuja el cuadrado unidad con vértices (0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1).
2. Multiplica cada vértice por A = [[2, 1], [0, 1]] (una cizalla y un estiramiento), por R = [[0, −1], [1, 0]] (una rotación de 90°) y por F = [[1, 0], [0, −1]] (una reflexión).
3. Dibuja cada imagen y halla su área contando cuadros o con la fórmula del área de Gauss.
4. Compara cada área con |det| y anota qué aplicaciones invierten la orientación (det < 0). Después comprueba det(AR) = det A det R.

Tabla de datos

Matriz	det	Área de la imagen	Orientación
A = [[2, 1], [0, 1]]	2	2	conservada
R (rotación de 90°)	1	1	conservada
F (reflexión)	−1	1	invertida
AR	2	2	conservada

Valores exactos para el cuadrado unidad.

Cálculo de ejemplo

1. det A = 2 × 1 − 1 × 0 = 2; la imagen es un paralelogramo de base 2 y altura 1.
2. det(AR) = det A × det R = 2 × 1 = 2.

> **Seguridad**
>
> - Ninguno más allá del trabajo de escritorio normal.

Alternativa en casa o virtual

- Solo necesitas papel cuadriculado y un lápiz.

Interactive Linear Algebra, 3.1 Matrix transformations (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/matrix-transformations.html) · Interactive Linear Algebra, 4.3 Determinants and volumes (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/determinants-volumes.html)

Vínculo con el planeta: Las proyecciones cartográficas y el registro de imágenes usan estas mismas matrices; el determinante mantiene honestas las mediciones de área de bosques e inundaciones. USGS: Landsat 9 (https://www.usgs.gov/landsat-missions/landsat-9)

- [ ] **Completé este laboratorio (real o virtual)**

Práctica D: ajuste por mínimos cuadrados de datos del nivel del mar

SEMANA 9

Objetivo: Ajustar una recta, y luego una parábola, a datos del nivel del mar con las ecuaciones normales, y comparar con el ajuste integrado de la hoja de cálculo.

$$A^T A\hat{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b}, \quad A = [\,\mathbf{1}\ \ \mathbf{t}\,]$$

`A^TA=A^T, A=[ 1\ \ ]`

Ecuaciones normales para y = C + Dt

Procedimiento

1. Introduce los datos de ejemplo de abajo (o descarga el registro de la NASA desde su página Vital Signs): t en años desde 1993 y h en mm.
2. Construye A con una columna de unos y una columna de t. Calcula A^TA y A^Tb con MMULT y TRANSPOSE, y luego $\hat{x}$ = MINVERSE(A^TA)·A^Tb.
3. Compara con LINEST o con una línea de tendencia del gráfico. Representa los residuos b − A$\hat{x}$.
4. Añade una columna t^2 y vuelve a ajustar. Un coeficiente de t^2 positivo significa que la subida se acelera.

Tabla de datos

t (años desde 1993)	**0**	**8**	**16**	**24**	**32**
h (mm)	0	22	48	78	114

Valores de ejemplo con la forma del registro de la NASA (que indica 114.4 mm de subida desde 1993); usa los datos reales para una respuesta real.

Cálculo de ejemplo

1. $\bar{t}$ = 16, $\bar{h}$ = 52.4; $\Sigma(t-\bar{t})(h-\bar{h})$ = 2272, $\Sigma(t-\bar{t})^2$ = 640.
2. D = 2272/640 = 3.55 mm/yr; C = 52.4 − 3.55 × 16 = −4.4 mm.
3. Los residuos son positivos en ambos extremos y negativos en el medio: una curva ajusta mejor, como sugiere el ritmo creciente que indica la NASA.

> **Seguridad**
>
> - Haz una breve pausa de la pantalla cada media hora.

Alternativa en casa o virtual

- Toda la práctica se hace en una hoja de cálculo gratuita.

NASA: Global mean sea level (https://sealevel.nasa.gov/vital-signs/global-mean-sea-level/) · Interactive Linear Algebra, 6.5 Least squares (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/least-squares.html)

Vínculo con el planeta: La NASA informa que el ritmo de subida pasó de 0.20 cm por año en 1993 a 0.44 cm por año ahora, una aceleración que puedes detectar con una columna t^2. NASA: Global mean sea level (Vital Signs) (https://sealevel.nasa.gov/vital-signs/global-mean-sea-level/)

- [ ] **Completé este laboratorio (real o virtual)**

Práctica E: un modelo de Markov de materiales y reciclaje

SEMANA 12

Objetivo: Construir una matriz de transición para el material en uso y el perdido en vertedero o incineración, usar potencias de matrices para seguirlo en el tiempo y ver cómo una tasa de reciclaje mayor mantiene el material en uso más tiempo.

$$\mathbf{x}_{k+1} = P\mathbf{x}_k, \quad P = \begin{bmatrix} 1 - f(1-r) & 0 \\ f(1-r) & 1 \end{bmatrix}$$

```
_k+1=P_k, P=1-f(1-r)&0\(1-r)&1
```

Cadena de dos estados: en uso, perdido

Procedimiento

1. Elige una tasa de descarte de ejemplo f = 0.2 por año y una tasa de recuperación r = 0.321 (la proporción de reciclaje más compostaje de la EPA en 2018).
2. Construye P en una hoja de cálculo y empieza con x_0 = (1, 0): todo el material en uso.
3. Usa MMULT para avanzar 10 años y compara con la fórmula $(1 - f(1 - r))^k$ para la proporción que sigue en uso.
4. Repite con r = 0.5 y compara los años medios en uso, 1/(f(1 − r)).

Tabla de datos

Tasa de recuperación r	Probabilidad de seguir en uso	En uso tras 10 años	Años medios en uso
0.321	0.8642	0.232	7.36
0.50	0.9000	0.349	10.0

Modelo de ejemplo: la tasa de descarte f = 0.2 es un valor de ejemplo; r = 0.321 es la proporción de la EPA de 2018.

Cálculo de ejemplo

1. Probabilidad de seguir = 1 − 0.2 × 0.679 = 0.8642; 0.8642^{10} = 0.232.
2. Años medios en uso = 1/0.1358 = 7.36; con r = 0.5 es 1/0.1 = 10.0 años.
3. λ = 1 corresponde al estado «perdido», que absorbe todo a largo plazo; λ = 0.8642 fija la rapidez.

> **Seguridad**
>
> - Haz una breve pausa de la pantalla cada media hora.

Alternativa en casa o virtual

- Toda la práctica se hace en una hoja de cálculo gratuita.

Interactive Linear Algebra, 5.6 Stochastic matrices (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/stochastic-matrices.html) · EPA: National overview of materials and waste (https://www.epa.gov/facts-and-figures-about-materials-waste-and-recycling/national-overview-facts-and-figures-materials)

Vínculo con el planeta: La EPA informa de una tasa de reciclaje y compostaje del 32.1 % en 2018 y un 50 % a vertedero; modelos como este muestran cuánto vale subir esa tasa. U.S. EPA: National overview, facts and figures on materials, wastes and recycling (https://www.epa.gov/facts-and-figures-about-materials-waste-and-recycling/national-overview-facts-and-figures-materials)

☐ **Completé este laboratorio (real o virtual)**

Práctica F: método de la potencia y compresión de imágenes con SVD

SEMANA 14

Objetivo: Hallar un valor propio dominante por multiplicación repetida y luego comprimir una pequeña imagen en escala de grises con una SVD truncada y ver con qué pocos números se conserva la imagen.

$$\mathbf{x}_{k+1} = \frac{A\mathbf{x}_k}{\|A\mathbf{x}_k\|}, \quad A_k = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T$$

```
_k+1=_k\|A_k\|, A_k=_i=1^kσ_i_i_i^T
```

Método de la potencia y SVD truncada

Procedimiento

1. En una hoja de cálculo, empieza con x_0 = (1, 0) y multiplica por A = [[2, 1], [1, 2]] diez veces, reescalando cada vez; observa cómo el cociente de longitudes se acerca a 3.
2. Crea una malla 8 × 8 de niveles de gris (0–255) para un dibujo sencillo, o carga una foto en Python (gratuito) con NumPy.
3. Calcula la SVD (numpy.linalg.svd) y reconstruye la imagen con k = 1, 2 y 4 términos.
4. Anota el almacenamiento k(8 + 8 + 1) y la parte de Σσ² conservada, y juzga cuándo la imagen se ve bien.

Tabla de datos

k	Números almacenados (imagen 8 × 8)	Parte de 64
1	17	26.6%
2	34	53.1%
4	68	106.3%

Recuentos exactos de almacenamiento. Para una imagen 8 × 8, k = 4 ya almacena más que los 64 números originales; el ahorro aparece en imágenes grandes (unidad 10: el rango 50 de una imagen 1000 × 1000 conserva el 10.0 %).

Cálculo de ejemplo

1. Método de la potencia: (1, 0) → (2, 1) → (5, 4) → (14, 13); ‖(14, 13)‖/‖(5, 4)‖ = 19.10/6.403 = 2.98, cerca de λ = 3.
2. Almacenamiento para k = 1: 8 + 8 + 1 = 17 números, 17/64 = 26.6 %.

> **Seguridad**

- Haz una breve pausa de la pantalla cada media hora.

Alternativa en casa o virtual

- Las versiones en hoja de cálculo y en Python gratuito son ambas prácticas para casa.

MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra (Strang, Spring 2010) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/) · Interactive Linear Algebra, 5.1 Eigenvectors (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/eigenvectors.html)

Vínculo con el planeta: EMIT, del JPL de la NASA, devuelve más de 100000 espectros por segundo; comprimir y separar esos datos usa exactamente estas herramientas. NASA JPL: EMIT, Earth Surface Mineral Dust Source Investigation (https://earth.jpl.nasa.gov/emit/)

- [ ] **Completé este laboratorio (real o virtual)**

Series de práctica para exámenes

Cronométrate: unos 10 minutos por problema. Luego compara con las soluciones completas.

Ejercicios de práctica para el parcial (unidades 1–5)

1. Halla el ángulo entre (1, 0, 1) y (0, 1, 1).
    1. Producto escalar = 1; longitudes $\sqrt{2}$ cada una; $\cos\theta = 1/2$.

    Respuesta: 60°.

2. Resuelve $x + 2y = 4$, $3x - y = 5$.
    1. $R_2 - 3R_1$: $-7y = -7$.

    Respuesta: $x = 2$, $y = 1$.

3. Invierte $[[3, 2], [1, 1]]$.
    1. det = 1.

    Respuesta: $[[1, -2], [-1, 3]]$.

4. Una economía de un solo sector usa 0.4 de su propia producción. ¿Qué producción satisface una demanda de 120?
    1. $x = 120/0.6$.

    Respuesta: 200.

5. Una matriz 6 × 9 tiene rango 4. Halla dim N(A) y dim N(A^T).

    1. n − r y m − r.

    Respuesta: 5 y 2.

Serie de práctica final (todas las unidades)

1. Ajusta y = C + Dt a (0, 0), (1, 2), (2, 2) por mínimos cuadrados.

    1. A^TA = [[3, 3], [3, 5]], A^Tb = (4, 6); det 6.

    Respuesta: C = 0.333, D = 1.

2. Halla det [[2, 1, 0], [1, 2, 1], [0, 1, 2]].

    1. 2(4 − 1) − 1(2 − 0) + 0.

    Respuesta: 4.

3. Halla los valores propios de [[6, 2], [2, 3]].

    1. Traza 9, det 14: $\lambda^2 - 9\lambda + 14 = 0$.

    Respuesta: 7 y 2.

4. Halla el estado estacionario de la matriz de Markov [[0.9, 0.2], [0.1, 0.8]].

    1. $0.1q_1 = 0.2q_2$.

    Respuesta: (0.667, 0.333).

5. Halla los valores singulares de [[2, 0], [0, −3]].

    1. A^TA = diag(4, 9).

    Respuesta: 3 y 2.

6. ¿Cuántos números almacena una SVD de rango 20 de una imagen 500 × 800, y qué parte de la imagen completa es eso?

    1. 20(500 + 800 + 1).

    Respuesta: 26020, aproximadamente el 6.5 %.

Hoja de fórmulas

$$\|v\| = \sqrt{v \cdot v},\ \cos\theta = \frac{v \cdot w}{\|v\|\|w\|} \qquad A\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \ A = LU$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1},\ (AB)^T = B^T A^T$$

$$\mathbf{x} = (I - A)^{-1}\mathbf{d}$$

$$r + \dim N(A) = n$$

$$\mathbf{p} = \frac{a \cdot b}{a \cdot a}a,\ \ A^T A\hat{x} = A^T b$$

$$A = QR,\ Q^T Q = I$$

$$\det(AB) = \det A \det B,\ x_i = \det B_i / \det A$$

$$\det(A - \lambda I) = 0,\ \sum \lambda = \operatorname{tr} A,\ \prod \lambda = \det A$$

$$A = PDP^{-1},\ A^k = PD^k P^{-1},\ A = Q\Lambda Q^T$$

$$A = U\Sigma V^T,\ \sigma_i = \sqrt{\lambda_i(A^T A)},\ \kappa = \sigma_1/\sigma_n$$

Constantes

Constante	Valor
Velocidad de la luz (usada para las distancias GPS)	299,792,458 m/s
1 milla	1.609344 km
1 pie	0.3048 m
1 pulgada	25.4 mm
Flops para resolver un sistema n × n por eliminación	unas $n^3/3$ multiplicaciones–sumas (Strang)
Matriz identidad I	Unos en la diagonal, ceros en el resto: AI = IA = A

Fuente: NIST Guide to the SI, Appendix B.9: conversion factors (https://www.nist.gov/pml/special-publication-811/nist-guide-si-appendix-b-conversion-factors/nist-guide-si-appendix-b9)

Textos y clases gratuitos

Usa estos libros de texto, clases y herramientas gratuitos junto con el curso.

- MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra (Strang, Spring 2010) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/): Las clases en vídeo completas, listas de problemas y exámenes de Strang.
- MIT OpenCourseWare 18.06SC Linear Algebra (self-paced, Fall 2011) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06sc-linear-algebra-fall-2011/): Versión a tu ritmo con vídeos de clases prácticas y problemas resueltos.
- Interactive Linear Algebra (Margalit and Rabinoff, Georgia Tech) (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/): Libro de texto interactivo gratuito usado en Georgia Tech.

- Jim Hefferon, Linear Algebra (free text) (https://hefferon.net/linearalgebra/): Libro de texto completo y gratuito con respuestas.
- Gilbert Strang, Introduction to Linear Algebra (book site) (https://math.mit.edu/~gs/linearalgebra/): El sitio del libro de Strang con notas y figuras.
- PhET: Vector Addition (https://phet.colorado.edu/en/simulations/vector-addition): Vectores y componentes interactivos.

Glosario

Base
Un conjunto linealmente independiente que genera un espacio.

Espacio columna
Todas las combinaciones Ax de las columnas de A.

Número de condición
σ_1/σ_n, cuánto pueden crecer los errores al resolver Ax = b.

Determinante
Factor de escala de volumen con signo de A; es cero exactamente cuando A es singular.

Diagonalización
$A = PDP^{-1}$ con los vectores propios en P.

Dimensión
Número de vectores de cualquier base.

Valor propio
λ con $Av = \lambda v$ para algún v no nulo.

Factorización LU
A = LU a partir de la eliminación.

Mínimos cuadrados
El $\hat{x}$ que minimiza $\|b - Ax\|$.

Inversa de Leontief
$(I - A)^{-1}$, producción total necesaria por unidad de demanda final.

Independencia lineal
Solo la combinación nula da el vector cero.

Matriz de Markov
Entradas no negativas, columnas que suman 1.

Espacio nulo
Todos los x con Ax = 0.

Ortonormal
Vectores unitarios ortogonales entre sí.

Pivote
Primera entrada no nula de una fila en forma escalonada.

Definida positiva
Simétrica con $x^TAx > 0$ para $x \neq 0$.

Proyección
Punto más cercano a b en un subespacio.

Rango
Número de pivotes; dimensión del espacio columna.

Valor singular
$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}(A^TA)$.

Espacio generado
Todas las combinaciones lineales de un conjunto de vectores.

Subespacio
Un conjunto que contiene el 0 y es cerrado bajo la suma y el escalado.

Rúbrica de autoevaluación

No se otorga nota ni crédito. Úsala para valorar con honestidad dónde estás en cada unidad.

Nivel	Cómo se ve
4 · Dominio	Elige la herramienta adecuada (eliminación, proyección, valores propios o SVD), calcula a mano los casos pequeños, comprueba las respuestas (Ax = b, traza y determinante) y explica el significado con dibujos y en contexto.
3 · Competente	Resuelve los problemas de práctica con algún error aritmético ocasional.
2 · En desarrollo	Sigue los ejemplos resueltos pero confunde filas y columnas o los cuatro subespacios.
1 · Inicial	Manipula símbolos sin comprobar tamaños ni respuestas; necesita repasar la unidad.

Ponderación sugerida si quieres una nota

Parte	Peso
Problemas de práctica	25%
Prácticas	20%
Serie de práctica de mitad de curso	25%
Serie de práctica final	30%

Apunta al nivel 3 o superior en cada unidad antes de pasar al siguiente curso.

Cursos relacionados

- Mecánica de materiales ENGR 213
- Circuitos ENGR 214 + ENGR 214L
- Cálculo III MATH 210
- Todos los cursos