آخر تحديث: November 1, 2026

🗺️ خريطة طريق لأربع سنوات · السنة 2, الربيع

عن هذه الدورة

يتضمن هذا المقرر المجاني 10 وحدات و6 مختبرات. هذه الأعداد الحقيقية وليست منهجًا أطول جرى اختصاره.

التحقق هو رقم أو نتيجة برمجية في صفحة مقرر يعيد سكربت حسابها قبل النشر. يجب أن يطابق الرقم المعروض الرقم المعاد حسابه.

هذا مخطط دورة مجانية للتعلّم الذاتي كتبته Saving Planets. وهو ليس مقررًا جامعيًا، ولا يمنح ساعات معتمدة، ولا تشارك فيه أي مؤسسة تعليمية.

يتبع نطاقه مقررًا في الجبر الخطي مدته فصل دراسي واحد للسنة الثانية. وهو مبني على موضوعات وعمق MIT 18.06 Linear Algebra الذي يدرّسه Gilbert Strang (مجانًا على MIT OpenCourseWare)، وعلى مقررات الجبر الخطي للسنة الثانية في Georgia Tech وPurdue، مستخدمًا النص المجاني من Georgia Tech بعنوان Interactive Linear Algebra لـ Dan Margalit وJoseph Rabinoff، وكتاب Jim Hefferon المجاني Linear Algebra، اللذين نربط إليهما حيث يفيدان. لا يؤيد أي من هؤلاء المؤلفين أو المؤسسات هذه الصفحة.

ما نضيفه: كل وحدة مرتبطة بعمل حقيقي على الكوكب مع مصدر عام موثّق (GPS، وLandsat 9، وأقمار ناسا لمستوى سطح البحر، وحواسيب NOAA الفائقة للطقس، وبيانات EPA للمدخلات–المخرجات وإعادة التدوير، ودراسات USGS للمباني، ومطياف المعادن EMIT التابع لناسا)، وكل رقم في الصفحة يُعاد حسابه بنص تحقق برمجي قبل النشر، وكل مختبر يُنفَّذ في جدول بيانات مجاني أو على الورق.

تابعها بالترتيب. في كل وحدة أهداف وأفكار أساسية ومعادلات وأمثلة خطوة بخطوة وتمارين بإجابات كاملة وأخطاء شائعة وبطاقات تعليمية واختبار قصير. يُحفظ تقدّمك في هذا المتصفح فقط.

كيف تساعد هذه الدورة في إنقاذ الكوكب

الجبر الخطي هو لغة البيانات عن الكوكب. بكسل القمر الصناعي متجه، وتحديد الموقع بـ GPS هو حل نظام خطي، والتنبؤ بالطقس ملايين المعادلات تُحل مرارًا وتكرارًا، ويمكن تتبع تلوث اقتصاد بأكمله بمصفوفة واحدة.

الأفكار القليلة نفسها، الحذف والإسقاط والقيم الذاتية وSVD، تحوّل القياسات الخام إلى خرائط للغابات واتجاهات مستوى سطح البحر والغبار المعدني. تنتهي كل وحدة بقسم قصير موثّق. القيم غير المأخوذة من مصدر موسومة بأنها قيم توضيحية.

للمعلمين

يمكنك تدريس هذا المقرر، أو أن يتابعه الطالب وحده. إنه مجاني. Saving Planets لا تمنح درجة ولا ساعات معتمدة.

- هذه الصفحة هي المقرر كاملًا: 10 وحدات و6 مختبرات (MATH 230).

- خطّط لخمسة عشر أسبوعًا، نحو 6 إلى 9 ساعات في الأسبوع، بما في ذلك أسابيع المختبر.
- اتبع جدول الخمسة عشر أسبوعًا. اقرأ الوحدة، حلّ التمارين على الورق، ثم افتح الإجابة. في أسبوع المختبر، نفّذ المختبر أو نسخته المنزلية.
- التحقق هو رقم أو نتيجة برمجية في الصفحة يعيد سكربت حسابها قبل النشر. يجب أن يطابق الرقم الظاهر الرقم المعاد حسابه.
- استخدم طباعة هذه الصفحة، أو نزّل دليل الدراسة PDF. ورقة القوانين قرب النهاية.
- اسأل: كيف تساعد هذه الوحدة الناس والكوكب؟ في كل وحدة مربع أخضر فيه حقيقة مع مصدرها.
- انسخ نموذج دليل المعلم واكتب اسم صفك والوقت المتاح والأسئلة التي ستطرحها. افتح نموذج دليل المعلم

قبل أن تبدأ

المتطلبات السابقة

- جبر المرحلة الثانوية: حل معادلتين في مجهولين، والتعامل مع الدوال.
- التفاضل والتكامل I يساعد في النهايات والمشتقات في بعض الأمثلة، لكن معظم المقرر لا يحتاج إلى تفاضل وتكامل.
- الارتياح لاستخدام جداول البيانات؛ ومقدمة في البرمجة تساعد في نسخ Python الاختيارية من المختبرات.
- التفاضل والتكامل III والمعادلات التفاضلية يتكاملان جيدًا مع هذا المقرر لكنهما غير مطلوبين.

كيف تذاكر

- أجرِ كل حساب يدويًا أولًا على أمثلة صغيرة (2 × 2 و3 × 3)، ثم تحقق منه بجدول بيانات أو آلة حاسبة.
- فكّر في Ax بطريقتين: كضرب قياسي للصفوف في x، وكتركيب من أعمدة A.
- تحقق من كل إجابة: عوّض x في Ax = b، أو اضرب A في معكوسها، أو اختبر Av = λv.
- تتبّع الأبعاد: مصفوفة m × n مضروبة في مصفوفة n × p تعطي m × p، والأبعاد غير المتوافقة تعني خطأ.
- ارسم في 2D و3D: المستقيمات والمستويات والإسقاطات والتمددات تجعل القواعد سهلة التذكر.
- حل كل تمرين على الورق قبل فتح الإجابة، وأعد الاختبارات القصيرة بعد بضعة أيام.

ماذا تحتاج

- حاسوب مع برنامج جداول بيانات مجاني (دواله MMULT وMINVERSE وMDETERM وLINEST تؤدي عمليات المصفوفات).
- ورق رسم بياني ومسطرة ومنقلة وقلم رصاص.
- اختياري: Python مجاني مع NumPy للنسخ الأكبر من المختبرات.
- خيط ودبابيس أو شريط لاصق لمختبر التثليث الجانبي، وخريطة مطبوعة أو ورقة.
- صورة بتدرج الرمادي أو شبكة صغيرة من الأرقام لمختبر ضغط الصور.

جدول مقترح من 15 أسبوعًا

نحو 6 إلى 9 ساعات أسبوعيًا: قراءة وتمارين، وفي أسابيع المختبر، المختبر.

الأسبوع	الوحدة	الموضوعات	القراءة
1	المتجهات: التركيبات الخطية والأطوال والضرب القياسي	المتجهات، والتركيبات الخطية، والمدى الخطي، والطول	MIT 18.06 L1; ILA 2.1–2.2

الأسبوع	الوحدة	الموضوعات	القراءة
2	المتجهات: التركيبات الخطية والأطوال والضرب القياسي	الضرب القياسي، والزوايا، والتعامد؛ المختبر A؛ بدء الحذف	ILA 6.1
3	أنظمة المعادلات الخطية وحذف غاوس	الحذف، والأشكال الدرجية، ومجموعات الحلول؛ المختبر B	MIT 18.06 L2; ILA 1.1–1.3
4	جبر المصفوفات: الضرب والمعكوسات وتحليل LU	ضرب المصفوفات، والمعكوسات، A = LU؛ المختبر C	MIT 18.06 L3–4; ILA 3.4–3.5
5	النماذج الخطية: اقتصاد المدخلات–المخرجات (ليونتيف) والشبكات والموازنة	نماذج المدخلات–المخرجات، والشبكات، والموازنة	Hefferon Topics; EPA USEEIO
6	فضاءات المتجهات والفضاءات الجزئية والاستقلال والأساس والرتبة والفضاءات الجزئية الأساسية الأربعة	الفضاءات الجزئية، وفضاء الأعمدة، والفضاء الصفري، Ax = 0	MIT 18.06 L5–7; ILA 2.6
7	فضاءات المتجهات والفضاءات الجزئية والاستقلال والأساس والرتبة والفضاءات الجزئية الأساسية الأربعة	الاستقلال، والأساس، والبعد، والرتبة، والفضاءات الجزئية الأربعة؛ تدريب منتصف الفصل	MIT 18.06 L8–10; ILA 2.5, 2.7, 2.9
8	التعامد والإسقاطات والمربعات الصغرى وغرام–شميت	التعامد والإسقاطات	MIT 18.06 L14–15; ILA 6.3
9	التعامد والإسقاطات والمربعات الصغرى وغرام–شميت	المربعات الصغرى، وغرام–شميت، A = QR؛ المختبر D	MIT 18.06 L16–17; ILA 6.4–6.5
10	المحددات: الخواص والعوامل المرافقة وقاعدة كرامر والحجم	المحددات، والعوامل المرافقة، وقاعدة كرامر، والحجم	MIT 18.06 L18–20; ILA 4.1–4.3
11	القيم الذاتية والمتجهات الذاتية	القيم الذاتية، والمتجهات الذاتية، وطريقة القوى، والأنماط	MIT 18.06 L21; ILA 5.1–5.2, 5.5
12	التقطير وقوى المصفوفات وسلاسل ماركوف والأنظمة الديناميكية الخطية	التقطير، وسلاسل ماركوف، والأنظمة الديناميكية؛ المختبر E	MIT 18.06 L22–25; ILA 5.4, 5.6
13	تحليل القيم المفردة وتحليل المكونات الرئيسية والمصفوفات الموجبة التحديد	المصفوفات الموجبة التحديد وSVD	MIT 18.06 L27–29
14	تحليل القيم المفردة وتحليل المكونات الرئيسية والمصفوفات الموجبة التحديد	التقريب منخفض الرتبة، وPCA، وعدد الحالة؛ المختبر F	MIT 18.06 L29؛ موقع كتاب Strang
15	المراجعة	مراجعة ومجموعة تمارين نهائية	كل الوحدات

تقدّمك

ضع علامة على الوحدات والمختبرات عند إنهائها، وخض الاختبارات. يُحفظ التقدم ونتائج الاختبارات في هذا المتصفح فقط، ولا تُرسل إلينا أبدًا.

الوحدات

المتجهات: التركيبات الخطية والأطوال والضرب القياسي

المتجهات في بعدين وثلاثة وn بُعدًا، وجمعها وضربها في عدد، والتركيبات الخطية والمدى الخطي، والطول، ومتجهات الوحدة، والضرب القياسي، والزاوية بين المتجهات، والتعامد، ومتباينتا كوشي–شوارتز والمثلث.

أهداف التعلّم

في نهاية هذه الوحدة ستستطيع أن:

- اجمع المتجهات واضربها في أعداد وركّبها يدويًا وبالرسم.
- احسب الأطوال ومتجهات الوحدة والضرب القياسي.
- أوجد الزاوية بين متجهين واختبر التعامد.
- صِف المدى الخطي لمتجه واحد أو اثنين أو ثلاثة.

المفاهيم الأساسية

- المتجه في ℝⁿ قائمة مرتبة من n عددًا. في 2D و3D هو سهم؛ وفي الأبعاد الأعلى هو قائمة، مثل قيم النطاقات الـ 11 لبكسل واحد من القمر الصناعي.
- التركيب الخطي c₁v₁ + c₂v₂ + … يضرب المتجهات في أعداد ويجمعها. والمدى الخطي هو مجموعة كل التركيبات الخطية: مستقيم أو مستوٍ أو الفضاء كله.
- الطول ‖v‖ = √(v·v). القسمة على الطول تعطي متجه وحدة u = v/‖v‖ طوله 1.
- الضرب القياسي v·w = v₁w₁ + v₂w₂ + … = ‖v‖‖w‖cos θ. إذا كان v·w = 0 فالمتجهان متعامدان.
- كوشي–شوارتز: |v·w| ≤ ‖v‖‖w‖. متباينة المثلث: ‖v + w‖ ≤ ‖v‖ + ‖w‖.

المعادلات الأساسية

$$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$$

\|v\|=_1^2+v_2^2+⋯s+v_n^2

الطول

$$v \cdot w = v_1 w_1 + \cdots + v_n w_n$$

v⋅ w=v_1w_1+⋯s+v_nw_n

الضرب القياسي

$$\cos\theta = \frac{v \cdot w}{\|v\|\,\|w\|}$$

θ=(v⋅ w)/(\|v\| \|w\|)

الزاوية بين المتجهات

$$|v \cdot w| \le \|v\|\,\|w\|$$

متباينة كوشي–شوارتز

أمثلة محلولة خطوة بخطوة

مثال 1.1 أوجد طول $v = (3, 4)$ ومتجه الوحدة في اتجاهه.

1. $\|v\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$.
2. $u = v/5$.

الإجابة: $\|v\| = 5$, $u = (0.6, 0.8)$.

مثال 1.2 أوجد الزاوية بين $v = (3, 4)$ و$w = (1, 2)$.

1. $v \cdot w = 3 + 8 = 11$.
2. $\|v\| = 5$, $\|w\| = \sqrt{5} = 2.236$.
3. $\cos\theta = 11/(5 \times 2.236) = 0.9839$.

الإجابة: $\theta = 10.30^\circ$.

مثال 1.3 اكتب $3(0, 1, 1) + 2(1, 0, 1)$ كمتجه واحد. هل $(2, 3, 4)$ ضمن المدى الخطي لهذين المتجهين؟

1. $2(1, 0, 1) + 3(0, 1, 1) = (2, 3, 5)$.
2. أي تركيب $c_1(1, 0, 1) + c_2(0, 1, 1) = (c_1, c_2, c_1 + c_2)$، لذا يجب أن تساوي المركبة الثالثة مجموع الأوليين.

الإجابة: $(2, 3, 5)$؛ و$(2, 3, 4)$ ليس ضمن المدى الخطي لأن $4 \neq 3 + 2$.

تمارين

حلّ كلًّا منها على الورق أولًا، ثم تحقق.

1. أوجد $\|(1, 2, 2)\|$.

   $\sqrt{1 + 4 + 4} = 3$.

2. أوجد $(4, -5, 6) \cdot (1, 2, 3)$.

   $4 - 10 + 18 = 12$.

3. هل $(-1, 2)$ و$(1, 2)$ متعامدان؟

نعم: 0 = 2 − 2.

4. أوجد متجه الوحدة في اتجاه (6, 8).

||(6, 8)|| = 10، إذن (0.6, 0.8).

مفاهيم خاطئة شائعة

خرافة: الضرب القياسي متجه.
في الحقيقة: إنه عدد واحد (كمية قياسية).

خرافة: ||v + w|| = ||v|| + ||w|| دائمًا.
في الحقيقة: فقط حين يشير v وw في الاتجاه نفسه؛ وإلا فهو أصغر.

خرافة: المتجهات لا معنى لها إلا في 2D أو 3D.
في الحقيقة: متجهات البيانات قد تحوي مئات المركبات؛ والقواعد نفسها تنطبق.

بطاقات تعليمية

التركيب الخطي

$c_1v_1 + c_2v_2 + \dots$

المدى الخطي

كل التركيبات الخطية لمجموعة من المتجهات.

الطول

$\|v\| = \sqrt{(v \cdot v)}$.

الضرب القياسي

$v \cdot w = \Sigma\, v_i w_i = \|v\|\|w\|\cos\theta$.

متعامد

$v \cdot w = 0$.

متجه الوحدة

$v/\|v\|$.

اختبار ذاتي

1. ||(3, 4)|| يساوي...

7

5

25

12

5. √(9 + 16) = 5.

2. v·w = 0 يعني أن المتجهين…

متوازيين

متعامدان

متساويان

متجها وحدة

متعامدان. cos θ = 0، إذن θ = 90°.

3. المدى الخطي لمتجهين غير متوازيين في ℝ³ هو…

نقطة

خطًا مستقيمًا

مستوٍ

كل ℝ³

مستوٍ. اتجاهان مستقلان يملآن مستويًا.

4. مضاعفة v تغيّر ||v|| بمعامل…

1

2

4

2√

2. ||cv|| = |c|||v||.

أعد هذا الاختبار

كيف يساعد هذا في إنقاذ الكوكب

كل بكسل من Landsat 9 متجه. وفقًا لـ USGS، يسجل Operational Land Imager 2 في Landsat 9 تسعة نطاقات طيفية (9) بدقة 30 m (15 m للنطاق البانكروماتي)، ويسجل Thermal Infrared Sensor 2 نطاقين حراريين (2) بدقة 100 m، فتصبح كل بقعة على الأرض قائمة من 11 عددًا. البيانات بعمق 14 بت، أي $2^{14} = 16384$ درجة لكل نطاق، ويجمع Landsat 9 نحو 750 مشهدًا يوميًا، وكلها مجانية.

تُقرأ صحة الغابات والمحاصيل من النطاق الأحمر (النطاق 4، 0.64–0.67 µm) ونطاق الأشعة تحت الحمراء القريبة (النطاق 5، 0.85–0.88 µm). مؤشر الغطاء النباتي $\mathrm{NDVI} = (\mathrm{NIR} - \mathrm{red})/(\mathrm{NIR} + \mathrm{red})$ يقارن مركبتين من متجه البكسل. مع انعكاسيات توضيحية 0.40 (NIR) و0.08 (أحمر)، يكون $\mathrm{NDVI} = 0.32/0.48 = 0.667$، وهو نموذجي للنباتات السليمة؛ أما التربة العارية فتعطي قيمًا قريبة من الصفر.

على Saving Planets: رصد الأرض · إزالة الغابات

المصادر: Interactive Linear Algebra, 2.1 Vectors (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/vectors.html) · USGS: Landsat 9 (https://www.usgs.gov/landsat-missions/landsat-9)

مصادر تعلّم مجانية

- Interactive Linear Algebra, 2.1 Vectors (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/vectors.html): نص مجاني بصور تفاعلية.
- Interactive Linear Algebra, 6.1 Dot products and orthogonality (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/dot-product.html): الأطوال والزوايا والتعامد.
- MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra (Strang, Spring 2010) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/): المحاضرة 1: هندسة المعادلات الخطية.
- PhET: Vector Addition (https://phet.colorado.edu/en/simulations/vector-addition): تفاعلي.

أنهيت هذه الوحدة

أنظمة المعادلات الخطية وحذف غاوس

الأنظمة الخطية بصورة الصفوف وصورة الأعمدة، والمصفوفات الموسّعة، والحذف إلى الشكل الدرجي، والتعويض العكسي، والشكل الدرجي المختزل، والمحاور والمتغيرات الحرة، ومتى يكون للنظام حل واحد أو لا حل أو عدد لا نهائي من الحلول.

أهداف التعلّم

في نهاية هذه الوحدة ستستطيع أن:

- اكتب نظامًا بالصورة Ax = b وكمصفوفة موسّعة.
- حل الأنظمة بالحذف والتعويض العكسي.
- أوجد الشكل الدرجي المختزل وحدد المحاور والمتغيرات الحرة.
- قرّر ما إذا كان للنظام حل واحد أو لا حل أو عدد لا نهائي من الحلول.

المفاهيم الأساسية

- صورة الصفوف: كل معادلة مستقيم (2D) أو مستوٍ (3D) والحل هو نقطة التقائها. صورة الأعمدة: b تركيب من أعمدة A بأوزان x.
- ثلاث عمليات على الصفوف لا تغير الحلول: تبديل الصفوف، وضرب صف في عدد غير صفري، وإضافة مضاعف صف إلى آخر.
- الحذف ينتج شكلًا مثلثيًا علويًا (درجيًا)؛ ثم يحل التعويض العكسي من الأسفل إلى الأعلى. المحاور هي أول المدخلات غير الصفرية في كل صف.
- العمود بلا محور يعطي متغيرًا حرًا وعددًا لا نهائيًا من الحلول. والصف 0 = c مع c ≠ 0 يعني عدم وجود حل (نظام متناقض).
- معادلات مربع المسافة مثل (x − a)² + (y − b)² = d² ليست خطية، لكن طرح إحداها من أخرى يحذف x² وy² ويترك معادلات خطية. هكذا تصبح مسائل تحديد الموقع أنظمة خطية.

المعادلات الأساسية

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

الصورة المصفوفية

$$R_i \leftarrow R_i - \ell_{ij} R_j, \;\; \ell_{ij} = a_{ij}/a_{jj}$$

```
R_i R_i-_ijR_j,\ \ _ij=a_ij/a_jj
```

خطوة الحذف والمضروب

$$\text{solutions: one, none, or infinitely many}$$

الحالات الثلاث الوحيدة

$$d = c\,t$$

```
d=c t
```

أمثلة محلولة خطوة بخطوة

مثال 2.1 حل $x + y + z = 6$، $2x + y - z = 1$، $x - y + 2z = 5$.

1. $R_2 - 2R_1$: $-y - 3z = -11$. $R_3 - R_1$: $-2y + z = -1$.
2. $R_3 - 2R_2$: $7z = 21$، إذن $z = 3$.
3. بالتعويض العكسي: $-y - 9 = -11$ يعطي $y = 2$؛ ثم $x = 6 - 2 - 3 = 1$.

الإجابة: $(x, y, z) = (1, 2, 3)$.

مثال 2.2 منارات عند $(0, 0)$ و$(10, 0)$ و$(0, 10)$ km. مستقبل يقيس مربعات المسافات 25 و65 و45 km². أوجد موقعه.

1. المعادلة 1 ناقص المعادلة 2: $x^2 + y^2 - [(x-10)^2 + y^2] = 25 - 65$، إذن $20x - 100 = -40$.
2. المعادلة 1 ناقص المعادلة 3: $20y - 100 = -20$.
3. حل المعادلتين الخطيتين.

الإجابة: $(x, y) = (3, 4)$ km.

مثال 2.3 كم حلًا للنظام $x + 2y = 3$، $2x + 4y = 6$؟ وللنظام $x + 2y = 3$، $2x + 4y = 7$؟

1. $R_2 - 2R_1$ يعطي $0 = 0$ في النظام الأول: محور واحد ومتغير حر واحد.
2. في الثاني، $R_2 - 2R_1$ يعطي $0 = 1$.

الإجابة: عدد لا نهائي؛ لا حل.

تمارين

حلّ كلًّا منها على الورق أولًا، ثم تحقق.

1. حل $x + y = 5$، $x - y = 1$.

   بالجمع: $2x = 6$، إذن $x = 3$، $y = 2$.

2. إشارة من نوع GPS تستغرق 0.00505783 s لتصل. ما المسافة التي قطعتها بسرعة 299792458 m/s؟

   $d = ct = 1516299$ m، أي نحو 1516 km.

3. أوجد الشكل الدرجي المختزل للمصفوفة $[[1, 2, 3], [2, 5, 8]]$ (موسّعة).

   $x = -1, y = 2$: $R_1 - 2R_2 = [1, 0, -1]$; $R_2 - 2R_1 = [0, 1, 2]$.

4. نظام 5 × 3 له 3 محاور. كم متغيرًا حرًا؟

5. 3 − 2 = 2.

مفاهيم خاطئة شائعة

خرافة: ضرب صف في 0 عملية صفوف مسموحة.
في الحقيقة: إنه يدمّر المعلومات؛ يجب أن يكون المضروب غير صفري.

خرافة: النظام ذو المجاهيل الأكثر من المعادلات لا حل له.
في الحقيقة: إن كان متسقًا فله عدد لا نهائي من الحلول؛ وقد يكون أيضًا متناقضًا.

خرافة: الصف الصفري يعني عدم وجود حل.
في الحقيقة: فقط الصف c = 0 مع c ≠ 0 يعني ذلك؛ أما 0 = 0 فيعني متغيرًا حرًا فحسب.

بطاقات تعليمية

المصفوفة الموسّعة

[A | b].

المحور

أول مدخل غير صفري في صف من الشكل الدرجي.

المتغير الحر

متغير لا محور في عموده.

RREF

محاور تساوي 1 وأصفار فوقها وتحتها.

متناقض

صف c = 0، c ≠ 0.

التعويض العكسي

حل النظام المثلثي من الأسفل إلى الأعلى.

اختبار ذاتي

1. الصف 0 0 0 | 5 في الشكل الدرجي يعني...

حلًا واحدًا

لا حل

عددًا لا نهائيًا

x = 5

لا حل. 5 = 0 مستحيل.

2. أيّ مما يلي ليس عملية صفوف؟

تبديل صفين

إضافة مضاعف صف إلى آخر

ضرب صف في 3

تربيع صف

تربيع صف. التربيع ليس خطيًا.

3. العمود بلا محور يعطي...

متغيرًا حرًا

لا حل

محددًا صفريًا فقط

حلًا وحيدًا

متغيرًا حرًا. يمكن اختيار متغيره بحرية.

4. في صورة الأعمدة، يسأل Ax = b عما إذا كان b...

عموديًا على A

تركيبًا من أعمدة A

صفًا من A

متجهًا ذاتيًا

تركيبًا من أعمدة $A. Ax = x_1a_1 + x_2a_2 + ...$

أعد هذا الاختبار

كيف يساعد هذا في إنقاذ الكوكب

GPS آلة جبر خطي. يفيد GPS.gov بأن 24 قمرًا تشغيليًا على الأقل تبقى متاحة 95% من الوقت، وأن 31 قمرًا تشغيليًا تعمل منذ أكثر من عقد، على ارتفاع نحو 20200 km، يدور كل منها حول الأرض مرتين يوميًا. وهي موزعة على ستة مستويات مدارية متساوية التباعد بحيث يرى المستخدمون أربعة أقمار على الأقل من أي نقطة تقريبًا على الكوكب.

يشرح نشاط التثليث الجانبي في GPS.gov الفكرة: المسافة = السرعة × الزمن، والسرعة هي سرعة الضوء 299792458 m/s، والمسافات من 3 أقمار على الأقل تحدد موقعًا 3D. وساعة المستقبل الحقيقي مجهولة أيضًا، لذا في النموذج القياسي في الكتب تكون المجاهيل x وy وz وانحراف الساعة، أي أربعة مجاهيل تحتاج أربعة أقمار؛ وطرح معادلات المسافة، كما في المثال المحلول، يحولها إلى نظام خطي. وخطأ في الساعة قدره ميكروثانية واحدة فقط يزيح المسافة 299.8 m. والمواقع الدقيقة توجّه الجرارات الزراعية التي تستخدم أسمدة أقل، والسفن على مسارات كفؤة، ومحطات المسح التي تقيس مستوى سطح البحر والجليد.

على Saving Planets: رصد الأرض · الفضاء

المصادر: GPS.gov: Trilateration (NOAA classroom activity) (https://www.gps.gov/trilateration) · GPS.gov: Space segment (https://www.gps.gov/space-segment)

مصادر تعلّم مجانية

- Interactive Linear Algebra, 1.1 Systems of linear equations (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/systems-of-eqns.html): قسم من نص مجاني.
- Interactive Linear Algebra, 1.2 Row reduction (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/row-reduction.html): الأشكال الدرجية خطوة بخطوة.
- MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra (Strang, Spring 2010) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/): المحاضرة 2: الحذف باستخدام المصفوفات.
- Jim Hefferon, Linear Algebra (free text) (https://hefferon.net/linearalgebra/): الفصل الأول: الأنظمة الخطية.

شاهد المحاضرة

Lecture 1: The geometry of linear equations (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/resources/lecture-1-the-geometry-of-linear-equations/) (باللغة الإنجليزية)

MIT 18.06 Linear Algebra (Spring 2010), MIT OpenCourseWare. الترخيص: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · شروط الاستخدام (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). الرابط للدراسة المجانية فقط؛ Saving Planets غير تابع لهذه الجامعة ولا يحظى بتأييدها.

أنهيت هذه الوحدة

جبر المصفوفات: الضرب والمعكوسات وتحليل LU

ضرب المصفوفة في المتجه وضرب المصفوفات، وقواعد جبر المصفوفات (وما ليس قاعدة)، والمنقولات، ومصفوفات الحذف، والمعكوس وغاوس–جوردان، وصيغة معكوس 2 × 2، وA = LU، وتكلفة الحذف.

أهداف التعلّم

في نهاية هذه الوحدة ستستطيع أن:

- اضرب المصفوفات وتحقق من توافق الأبعاد.
- أوجد المعكوسات بصيغة 2 × 2 وبطريقة غاوس–جوردان.
- حلّل A = LU واستخدمها لحل الأنظمة.
- قدّر تكلفة الحذف مع ازدياد n.

المفاهيم الأساسية

- $(AB)_{ij}$ = الضرب القياسي للصف i من A في العمود j من B. مصفوفة m × n مضروبة في n × p تعطي m × p. وعمومًا AB ≠ BA.
- المعكوس A^{-1} يحقق $A^{-1}A = I$ = AA^{-1}. ويوجد تمامًا حين يكون لـ A عدد n من المحاور (det A ≠ 0). $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ و$(AB)^{T} = B^{T}A^{T}$.
- غاوس–جوردان: اختزل [A | I] بالصفوف إلى [I | A^{-1}].
- الحذف دون تبديل صفوف يسجل مضاريبه في مصفوفة مثلثية سفلية L قطرها آحاد، فنحصل على A = LU. حل Lc = b ثم Ux = c؛ ومع حفظ L وU يصبح كل طرف أيمن جديد رخيصًا.
- الحذف على مصفوفة n × n يكلف نحو $n^3/3$ عملية ضرب–جمع؛ والحل باستخدام L وU المحفوظتين يكلف نحو n^2 لكل طرف أيمن.

المعادلات الأساسية

$$(AB)_{ij} = \sum_{k} a_{ik} b_{kj}$$

```
(AB)_ij=_k a_ikb_kj
```

ضرب المصفوفات

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

```
&b\\&d^-1=(1)/(ad-bc)&-b\\-c&a
```

معكوس 2 × 2

$$A = LU$$

```
A=LU
```

تحليل LU

$$\text{cost} \approx n^3/3$$

عدد عمليات الحذف

أمثلة محلولة خطوة بخطوة

مثال 3.1 أوجد AB وBA حيث A = [[1, 2], [3, 4]] و[[0, 1], [1, 0]] = B.

1. AB: الصف 1 · الأعمدة (2, 1) =؛ الصف (4, 3) = 2.
2. BA يبدّل صفوف [[3, 4], [1, 2]] :A.

الإجابة: AB = [[2, 1], [4, 3]]، BA = [[3, 4], [1, 2]]، إذن AB ≠ BA.

مثال 3.2 اعكس A = [[4, 7], [2, 6]].

1. ad − bc = 24 − 14 = 10.
2. $A^{-1} = (1/10)[[6, -7], [-2, 4]]$.

الإجابة: $A^{-1} = [[0.6, -0.7], [-0.2, 0.4]]$.

مثال 3.3 حلّل A = [[2, 1], [6, 8]] إلى LU.

1. المضروب $\ell_{21} = 6/2 = 3$.
2. $R_2 - 3R_1 = [0, 5]$.

الإجابة: L = [[1, 0], [3, 1]]، U = [[2, 1], [0, 5]].

تمارين

حلّ كلًّا منها على الورق أولًا، ثم تحقق.

1. ما أبعاد حاصل ضرب مصفوفة 2 × 3 في مصفوفة 4 × 2؟

   3 × 4.

2. اعكس [[2, 1], [5, 3]].

   det = 1، والمعكوس [[3, −1], [−5, 2]].

3. كم عملية تقريبًا يتطلب الحذف عند n = 1000؟

   $n^3/3 \approx 3.33 \times 10^8$.

4. إذا كانت A وB قابلتين للعكس، فما $(AB)^{-1}$؟

$B^{-1}A^{-1}$.

مفاهيم خاطئة شائعة

خرافة: $AB = BA$.
في الحقيقة: ضرب المصفوفات عادةً غير تبديلي.

خرافة: $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.
في الحقيقة: الترتيب ينعكس: $B^{-1}A^{-1}$.

خرافة: تحل الحواسيب $Ax = b$ بحساب A^{-1}.
في الحقيقة: إنها تحلّل $A = LU$ (أو ما يشبهه)؛ فتكوين A^{-1} أبطأ وأقل دقة.

بطاقات تعليمية

مصفوفة الوحدة

$AI = IA = A$.

المعكوس

$AA^{-1} = I$.

معكوس 2 × 2

بدّل a وd؛ واعكس إشارة b وc؛ واقسم على $ad - bc$.

قاعدة المنقول

$(AB)^T = B^TA^T$.

LU

$A = LU$ من الحذف.

التكلفة

نحو $n^3/3$ للحذف.

اختبار ذاتي

1. مصفوفة 3 × 2 مضروبة في مصفوفة 5 × 3 تعطي...

2 × 5

3 × 3

5 × 2

غير معرّفة

5 × 2. الأبعاد الخارجية.

2. المصفوفة قابلة للعكس تمامًا حين يكون لها…

لا أصفار

n محورًا

صف صفري

مدخلات متساوية

n محورًا. مجموعة كاملة من المحاور.

3. مضاعفة n تضرب تكلفة الحذف في نحو…

2

4

8

16

n^3 .8 تنمو $2^3 = 8$ مرات.

4. L في A = LU تحوي…

المحاور

المضاريب

المعكوس

القيم الذاتية

المضاريب. المضاريب تحت القطر، وآحاد على القطر.

أعد هذا الاختبار

كيف يساعد هذا في إنقاذ الكوكب

التنبؤات الجوية والمناخية في جوهرها مهام جبر خطي هائلة تتكرر مرات عديدة يوميًا. أعلنت NOAA في أغسطس 2023 أن حاسوبيها الفائقين التشغيليين التوأمين، Dogwood في ماناساس بولاية فيرجينيا وCactus في فينيكس بولاية أريزونا، رُقّيا بنسبة 20% إلى 14.5 بيتافلوب لكل منهما، بحيث يستطيع نظام التنبؤ معًا معالجة 29 كوادريليون عملية حسابية في الثانية، وأن سعتها الكلية مع حواسيبها البحثية الفائقة تبلغ 49 بيتافلوب.

قاعدة $n^3/3$ تبيّن أهمية السرعة. على سبيل المثال، نظام كثيف فيه $n = 100000$ مجهول يحتاج نحو 3.33×10^{14} عملية؛ وبمعدل مستمر قدره 14.5×10^{15} عملية في الثانية يستغرق ذلك نحو 0.023 s، لكن مضاعفة n تضرب العمل في 8. النماذج الحقيقية تستخدم مصفوفات متناثرة وحلّالات ذكية، لكن هذا النمو التكعيبي نفسه هو ما تقول NOAA إن القدرة الإضافية ستغطيه: نماذج أعلى دقة تحسّن التنبؤات والإنذارات.

على Saving Planets: مقدمة في البرمجة · الحلول

المصادر: NOAA: NOAA completes upgrade to weather and climate supercomputer system (Aug. 10, 2023) (https://www.noaa.gov/news-release/noaa-completes-upgrade-to-weather-and-climate-supercomputer-system) · MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra (Strang, Spring 2010) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/)

مصادر تعلّم مجانية

- Interactive Linear Algebra, 3.4 Matrix multiplication (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/matrix-multiplication.html): قسم من نص مجاني.
- Interactive Linear Algebra, 3.5 Matrix inverses (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/matrix-inverses.html): المعكوسات وغاوس–جوردان.
- MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra (Strang, Spring 2010) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/): المحاضرتان 3–4: الضرب والمعكوسات وA = LU.
- MIT OpenCourseWare 18.06SC Linear Algebra (self-paced, Fall 2011) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06sc-linear-algebra-fall-2011/): مقاطع فيديو لحصص التمارين حول LU.

شاهد المحاضرة

Lecture 3: Multiplication and inverse matrices (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/resources/lecture-3-multiplication-and-inverse-matrices/) (باللغة الإنجليزية)

MIT 18.06 Linear Algebra (Spring 2010), MIT OpenCourseWare. الترخيص: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · شروط الاستخدام (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). الرابط للدراسة المجانية فقط؛ Saving Planets غير تابع لهذه الجامعة ولا يحظى بتأييدها.

أنهيت هذه الوحدة

النماذج الخطية: اقتصاد المدخلات–المخرجات (ليونتيف) والشبكات والموازنة

بناء نماذج خطية من أنظمة حقيقية: نموذج المدخلات–المخرجات لليونتيف x = Ax + d وحله x = (I − A)⁻¹d، والنماذج الموسّعة بيئيًا التي تحوّل الإنفاق إلى انبعاثات، وتدفقات الشبكات، وموازنة المعادلات الكيميائية.

أهداف التعلّم

في نهاية هذه الوحدة ستستطيع أن:

- صُغ نموذج مدخلات–مخرجات لليونتيف وحلّه.
- فسّر مدخلات (I − A)⁻¹.
- وسّع نموذج مدخلات–مخرجات بشدّات الانبعاث لإيجاد البصمة.
- اكتب مسائل موازنة التدفق والموازنة الكيميائية في صورة أنظمة خطية.

المفاهيم الأساسية

- في نموذج المدخلات–المخرجات، يسرد العمود j من مصفوفة الاستهلاك A ما يشتريه القطاع j من كل قطاع لإنتاج دولار واحد من الناتج.
- يجب أن يغطي الناتج الكلي x ما تستخدمه الصناعات (Ax) إضافةً إلى الطلب النهائي d: x = Ax + d، إذن (I − A)x = d و x = (I − A)⁻¹d.
- المدخل (i, j) من معكوس ليونتيف (I − A)⁻¹ هو الناتج الكلي للقطاع i اللازم، مباشرةً وعبر جميع سلاسل الإمداد، لدولار واحد من الطلب النهائي على القطاع j.
- النماذج الموسّعة بيئيًا تضرب الناتج في صف من شدّات الانبعاث e (مثلًا kg CO_2 لكل دولار): البصمة e·x =.
- قوانين الحفظ تعطي معادلات خطية أيضًا: التدفق الداخل يساوي الخارج عند كل عقدة في الشبكة، وذرات كل عنصر تتوازن في التفاعل الكيميائي.

المعادلات الأساسية

$$\mathbf{x} = A\mathbf{x} + \mathbf{d}$$

توازن المدخلات–المخرجات

$$\mathbf{x} = (I - A)^{-1}\mathbf{d}$$

```
=(I-A)^-1
```

حل ليونتيف

$$\text{footprint} = \mathbf{e} \cdot \mathbf{x}$$

```
footprint=·
```

النموذج الموسّع بيئيًا

$$\sum \text{in} = \sum \text{out}$$

in= out

توازن التدفق عند عقدة

أمثلة محلولة خطوة بخطوة

مثال 4.1 اقتصاد من قطاعين فيه A = [[0.2, 0.3], [0.1, 0.4]] والطلب النهائي d = (100, 50) (قيم توضيحية، بملايين $). أوجد الناتج الكلي.

1. $I - A = [[0.8, -0.3], [-0.1, 0.6]]$، $\det = 0.48 - 0.03 = 0.45$.
2. $(I - A)^{-1} = (1/0.45)[[0.6, 0.3], [0.1, 0.8]]$.
3. $x = (1/0.45)(60 + 15, 10 + 40)$.

الإجابة: x = (166.7, 111.1) مليون $.

مثال 4.2 باستخدام شدّات انبعاث توضيحية e = (0.5, 2.0) kg CO_2 لكل دولار، أوجد بصمة ذلك الطلب النهائي.

1. البصمة $111.1 \times 2.0 + 166.7 \times 0.5 =$ (بوحدة kg لكل $ × مليون $).

الإجابة: 305.6 مليون kg CO_2 = 305.6 kt (توضيحي).

مثال 4.3 وازن $x\ CH_4 + y\ O_2 \rightarrow z\ CO_2 + w\ H_2O$.

1. C: $x = z$. H: $4x = 2w$. O: $2y = 2z + w$.
2. اجعل $x = 1$: $z = 1$، $w = 2$، $y = 2$.

الإجابة: $CH_4 + 2\ O_2 \rightarrow CO_2 + 2\ H_2O$.

تمارين

حلّ كلًّا منها على الورق أولًا، ثم تحقق.

1. في النموذج المحلول، كم يلزم إجمالًا من ناتج القطاع 1 مقابل 1 $ من الطلب النهائي على القطاع 2؟

   المدخل $(I - A)^{-1}$ (1, 2) من $0.3/0.45 = 0.667$.

2. اقتصاد من قطاع واحد يستهلك 0.25 من ناتجه. ما الناتج الكلي الذي يلبي طلبًا قدره 300؟

   $x = 300/(1 - 0.25) = 400$.

3. عقدة لها تدفقان داخلان 40 و25، وتدفق خارج f_1 وتدفق خارج آخر قدره 30. أوجد f_1.

$f_1 = 65 - 30 = 35$.

4. وازن $H_2 + O_2 \rightarrow H_2O$.

$2\ H_2 + O_2 \rightarrow 2\ H_2O$.

مفاهيم خاطئة شائعة

خرافة: الناتج الكلي يساوي الطلب النهائي.
في الحقيقة: الصناعات تستهلك أيضًا نواتج بعضها، لذا x أكبر من d.

خرافة: البصمة تأتي فقط من القطاع الذي تشتري منه.
في الحقيقة: معكوس ليونتيف يجمع كل الموردين في المراحل السابقة.

خرافة: أي A تعطي اقتصادًا معقولًا.
في الحقيقة: يجب أن تكون مجاميع الأعمدة أقل من 1 كي تكون مدخلات $(I - A)^{-1}$ غير سالبة.

بطاقات تعليمية

مصفوفة الاستهلاك

المدخلات لكل دولار من الناتج.

نموذج ليونتيف

$x = Ax + d$.

معكوس ليونتيف

$(I - A)^{-1}$، المتطلبات الكلية.

النموذج الموسّع

البصمة $= e \cdot x$.

توازن التدفق

الداخل = الخارج عند كل عقدة.

نظام متجانس

$Ax = 0$.

اختبار ذاتي

1. حل ليونتيف هو…

$x = Ad$

$x = (I - A)^{-1}d$

$x = A^{-1}d$

$x = d - A$

$x = (I - A)^{-1}d$. من $x = Ax + d$.

2. العمود j من A يصف...

ما يبيعه القطاع j

ما يشتريه القطاع j لكل دولار من الناتج

الطلب النهائي

الانبعاثات

ما يشتريه القطاع j لكل دولار من الناتج. المدخلات لكل وحدة من الناتج.

3. البصمة في النموذج الموسّع هي...

e·x

e + x

det A

x/e

e·x. الشدّة مضروبة في الناتج، مجموعةً.

4. موازنة معادلة كيميائية هي...

مسألة غير خطية

نظام خطي متجانس

محدِّد

مسألة قيم ذاتية

نظام خطي متجانس. عدّ الذرات يعطي $Ax = 0$.

أعد هذا الاختبار

كيف يساعد هذا في إنقاذ الكوكب

تستخدم وكالة حماية البيئة الأمريكية EPA هذا النموذج تحديدًا لتتبّع التلوث عبر الاقتصاد. ووفقًا لـ EPA، تجمع نماذج USEEIO الخاصة بها بيانات المعاملات الاقتصادية بين 389 قطاعًا صناعيًا مع البيانات البيئية لتلك القطاعات، بما يشمل استخدام الأراضي والمياه والطاقة والمعادن، وتلوث الهواء، والمغذيات والمواد السامة، لتقييم آثار السلع والخدمات. وتصفها EPA بأنها مفيدة لحساب البصمة الكربونية، وهي تدعم عملها في الإدارة المستدامة للمواد.

مصفوفة استهلاك من 389 قطاعًا فيها 151321 = 389² مدخلًا، وهو عدد يفوق كثيرًا العمل اليدوي لكنه سهل على طرق الحذف وLU في الوحدة 3. ومعكوس ليونتيف هو ما يتيح لمدينة أو شركة أو أسرة رؤية الانبعاثات المخفية في سلاسل إمدادها، لا عند بوابة المصنع فقط.

على Saving Planets: الحلول · الكيمياء العامة I

المصادر: U.S. EPA: US Environmentally-Extended Input-Output (USEEIO) models (https://www.epa.gov/land-research/us-environmentally-extended-input-output-useeio-models) · Interactive Linear Algebra, 1.1 Systems of linear equations (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/systems-of-eqns.html)

مصادر تعلّم مجانية

- U.S. EPA: US Environmentally-Extended Input-Output (USEEIO) models (https://www.epa.gov/land-research/us-environmentally-extended-input-output-useeio-models): نماذج المدخلات–المخرجات الموسّعة بيئيًا لدى EPA.
- Jim Hefferon, Linear Algebra (free text) (https://hefferon.net/linearalgebra/): الموضوع: تحليل المدخلات–المخرجات لليونتيف.
- MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra (Strang, Spring 2010) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/): محاضرات ومجموعات مسائل التطبيقات.
- Interactive Linear Algebra, 1.2 Row reduction (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/row-reduction.html): حل الأنظمة.

أنهيت هذه الوحدة

فضاءات المتجهات والفضاءات الجزئية والاستقلال والأساس والرتبة والفضاءات الجزئية الأساسية الأربعة

الفضاءات المتجهية والفضاءات الجزئية، وفضاء الأعمدة والفضاء الصفري، والحل الكامل لـ Ax = 0 وAx = b، والاستقلال الخطي، والأساس والبُعد، والرتبة، ومبرهنة الرتبة والصفرية، والفضاءات الجزئية الأساسية الأربعة لسترانغ.

أهداف التعلّم

في نهاية هذه الوحدة ستستطيع أن:

- اختبر ما إذا كانت مجموعة فضاءً جزئيًا.
- أوجد أساسات لفضاء الأعمدة والفضاء الصفري لمصفوفة.
- اختبر الاستقلال الخطي لمتجهات.
- استخدم مبرهنة الرتبة والصفرية وأبعاد الفضاءات الجزئية الأساسية الأربعة.

المفاهيم الأساسية

- الفضاء الجزئي يحوي المتجه الصفري ومغلق تحت الجمع والضرب في عدد قياسي. المستقيمات والمستويات المارّة بنقطة الأصل فضاءات جزئية؛ أما التي لا تمر بها فليست كذلك.
- فضاء الأعمدة C(A): جميع Ax، أي مجموعة b التي يكون لـ Ax = b حل عندها. الفضاء الصفري N(A): جميع x التي تحقق Ax = 0.
- تكون المتجهات مستقلة خطيًا إذا كان التركيب الوحيد المعطي للصفر هو الذي معاملاته كلها أصفار. الأساس مجموعة مولِّدة مستقلة؛ وكل أساس للفضاء له العدد نفسه من المتجهات، وهو بُعده.
- الرتبة r = عدد المحاور = dim C(A). مبرهنة الرتبة والصفرية: r + dim N(A) = n، عدد الأعمدة.
- الفضاءات الجزئية الأساسية الأربعة لمصفوفة m × n رتبتها r: C(A) (البعد r) وN(Aᵀ) (البعد m − r) في ℝᵐ؛ وC(Aᵀ) (البعد r) وN(A) (البعد n − r) في ℝⁿ. N(A) متعامد مع فضاء الصفوف.

المعادلات الأساسية

$$C(A) = \{A\mathbf{x}\},\ \ N(A) = \{\mathbf{x} : A\mathbf{x} = 0\}$$

C(A)=\,\ \ N(A)=\:A=0\

فضاء الأعمدة والفضاء الصفري

$$r + \dim N(A) = n$$

r+ N(A)=n

الرتبة والصفرية

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_n$$

الحل الكامل لـ Ax = b

$$\dim N(A^T) = m - r$$

N(A^T)=m-r

الفضاء الصفري الأيسر

أمثلة محلولة خطوة بخطوة

مثال 5.1 أوجد الرتبة وأساسًا للفضاء الصفري لـ A = [[1, 2, 3], [2, 4, 6], [1, 0, 1]].

1. $R_2 - 2R_1 = 0$؛ $R_3 - R_1 = [0, -2, -2]$. محوران، إذن $r = 2$.
2. $Ax = 0$: $x + z = 0$ و$-2y - 2z = 0$، مع z حر.
3. خذ $z = 1$: $x = -1$، $y = -1$.

الإجابة: $r = 2$، وN(A) مولَّد بـ $(1, -1, -1)$؛ $\dim N(A) = 3 - 2 = 1$.

مثال 5.2 هل (1, 2, 3) و(4, 5, 6) و(7, 8, 9) مستقلة؟

1. اختزل بالصفوف المصفوفة التي أعمدتها هذه المتجهات: $R_2 - 2R_1$ و$R_3 - 3R_1$ تعطيان الصفين $[0, -3, -6]$ و$[0, -6, -12]$، وهما مضاعفان.
2. محوران فقط.

الإجابة: No: $(7, 8, 9) = 2(4, 5, 6) - (1, 2, 3)$.

مثال 5.3 مصفوفة 8 × 5 رتبتها 3. أعطِ أبعاد فضاءاتها الجزئية الأساسية الأربعة.

1. C(A) و$C(A^T)$: $r = 3$.
2. $N(A)$: $n - r = 8 - 3$; $N(A^T)$: $m - r = 5 - 3$.

الإجابة: 3 و3 و5 و2.

تمارين

حلّ كلًّا منها على الورق أولًا، ثم تحقق.

1. هل المستقيم $y = 2x + 1$ فضاء جزئي من $\mathbb{R}^2$؟

   لا: فهو لا يحوي $(0, 0)$.

2. مصفوفة 4 × 4 بُعد فضائها الصفري 2. ما رتبتها؟

   $4 - 2 = 2$.

3. ما بُعد فضاء المصفوفات 2 × 2؟

4.

4. هل يمكن أن تكون 4 متجهات في $\mathbb{R}^3$ مستقلة؟

لا: 3 على الأكثر.

مفاهيم خاطئة شائعة

خرافة: أي مستوٍ في $\mathbb{R}^3$ فضاء جزئي.
في الحقيقة: فقط المستويات المارّة بنقطة الأصل.

خرافة: الرتبة تعدّ المدخلات غير الصفرية.
في الحقيقة: إنها تعدّ المحاور (الأعمدة المستقلة).

خرافة: الفضاء الصفري يقع في الفضاء نفسه الذي يقع فيه b.
في الحقيقة: $N(A)$ في $\mathbb{R}^n$ (جهة x)؛ وb في $\mathbb{R}^m$.

بطاقات تعليمية

فضاء جزئي

يحوي 0؛ مغلق تحت + والضرب في عدد.

فضاء الأعمدة

All Ax.

الفضاء الصفري

جميع x التي تحقق $Ax = 0$.

أساس

مجموعة مولِّدة مستقلة.

الرتبة

عدد المحاور.

الرتبة والصفرية

$r + \dim N(A) = n$.

اختبار ذاتي

1. تنص مبرهنة الرتبة والصفرية على أن $r + \dim N(A)$ يساوي...

m

n

m + n

r

n. عدد الأعمدة.

2. يكون لـ $Ax = b$ حل تمامًا حين يقع b في...

N(A)

C(A)

$N(A^T)$

$C(A^T)$

C(A). يجب أن يكون b تركيبًا من الأعمدة.

3. الفضاء الصفري متعامد مع...

فضاء الأعمدة

فضاء الصفوف

b

الفضاء الصفري الأيسر

فضاء الصفوف. حاصل الضرب القياسي لكل صف في x يساوي 0.

4. كم متجهًا في أساس $\mathbb{R}^3$؟

2

3

4

أي عدد

3. البعد 3.

أعد هذا الاختبار

كيف يساعد هذا في إنقاذ الكوكب

البعد يعدّ المجاهيل، والتنبؤات الأفضل تحتاج إلى المزيد منها. قالت NOAA إن ترقية حواسيبها الفائقة في 2023 ستتيح لنظام التنبؤ العالمي الأمريكي (Global Forecast System) تحسين دقته الأفقية من 13 km إلى 9 km، مما يساعد على رؤية الظواهر الأصغر نطاقًا ومحاكاتها.

شبكة تباعدها h فيها نحو (1/h)² عمود لكل وحدة مساحة، لذا فإن الانتقال من 13 km إلى 9 km يضرب عدد أعمدة الشبكة في (13/9)² = 2.09. وكل عمود منها يحمل درجة الحرارة والرياح والرطوبة والضغط عند مستويات كثيرة، فيقع متجه حالة التنبؤ في فضاء ذي بُعد أكبر بكثير، وتكبر المصفوفات التي تحدّثه تبعًا لذلك.

على Saving Planets: التفاضل والتكامل 3 · المعادلات التفاضلية

المصادر: NOAA: NOAA completes upgrade to weather and climate supercomputer system (Aug. 10, 2023) (https://www.noaa.gov/news-release/noaa-completes-upgrade-to-weather-and-climate-supercomputer-system) · Interactive Linear Algebra, 2.7 Basis and dimension (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/dimension.html)

مصادر تعلّم مجانية

- Interactive Linear Algebra, 2.6 Subspaces (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/subspaces.html): قسم من نص مجاني.
- Interactive Linear Algebra, 2.5 Linear independence (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/linear-independence.html): اختبارات الاستقلال.
- Interactive Linear Algebra, 2.9 The rank theorem (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/rank-thm.html): الرتبة والصفرية.
- MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra (Strang, Spring 2010) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/): المحاضرات 1–5: الفضاءات والرتبة والفضاءات الجزئية الأربعة.

شاهد المحاضرة

Lecture 10: The four fundamental subspaces (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/resources/lecture-10-the-four-fundamental-subspaces/) (باللغة الإنجليزية)

MIT 18.06 Linear Algebra (Spring 2010), MIT OpenCourseWare. الترخيص: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · شروط الاستخدام (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). الرابط للدراسة المجانية فقط؛ Saving Planets غير تابع لهذه الجامعة ولا يحظى بتأييدها.

☐ أنهيت هذه الوحدة

التعامد والإسقاطات والمربعات الصغرى وغرام–شميت

المتجهات والفضاءات الجزئية المتعامدة، والإسقاط على مستقيم وعلى فضاء جزئي، والمعادلات الطبيعية $A^TA\hat{x} = A^Tb$، وملاءمة المستقيمات والمنحنيات للبيانات بالمربعات الصغرى، والأساسات المتعامدة المعيارية، وغرام–شميت و$A = QR$.

أهداف التعلّم

في نهاية هذه الوحدة ستستطيع أن:

- أسقط متجهًا على مستقيم وعلى فضاء أعمدة.
- لائم مستقيمًا للبيانات بالمعادلات الطبيعية.
- ابنِ أساسًا متعامدًا معياريًا بطريقة غرام–شميت.
- اشرح لماذا تكون المربعات الصغرى إسقاطًا.

المفاهيم الأساسية

- إسقاط b على المستقيم المار بـ a هو $p = (a{\cdot}b/a{\cdot}a)\,a$؛ والخطأ $e = b - p$ متعامد مع a.
- عندما لا يكون $Ax = b$ حل (معادلات أكثر من المجاهيل، بيانات مشوّشة)، اختر $\hat{x}$ بحيث يكون $\|b - Ax\|$ أصغر ما يمكن. يجب أن يكون الخطأ متعامدًا مع C(A)، فنحصل على المعادلات الطبيعية $A^TA\hat{x} = A^Tb$.
- لمستقيم $y = C + Dt$ يمر بالنقاط (t_i, y_i)، أعمدة A هي عمود من الآحاد وقيم t_i.
- المتجهات المتعامدة المعيارية q_i تحقق $q_i{\cdot}q_j = 0$ $(i \neq j)$ و$\|q_i\| = 1$. إذا كانت أعمدة Q متعامدة معيارية، فإن $Q^TQ = I$ وتصبح الإسقاطات $p = QQ^Tb$.
- تطرح طريقة غرام–شميت من كل متجه جديد إسقاطاته على المتجهات السابقة، ثم تجعله معياريًا. والنتيجة $A = QR$ حيث R مثلثية علوية.

المعادلات الأساسية

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\,\mathbf{a}$$

الإسقاط على مستقيم

$$A^{T}A\hat{\mathbf{x}} = A^{T}\mathbf{b}$$

A^TA=A^T

المعادلات الطبيعية

$$P = A(A^{T}A)^{-1}A^{T}$$

P=A(A^TA)^-1A^T

مصفوفة الإسقاط

$$A = QR$$

A=QR

تحليل غرام–شميت

أمثلة محلولة خطوة بخطوة

مثال 6.1 أسقط b = (2, 3) على a = (1, 1).

1. a·b = 5, a·a = 2.
2. p = 2.5(1, 1) = (2.5, 2.5)؛ e = b − p = (−0.5, 0.5)، وe·a = 0.

الإجابة: p = (2.5, 2.5).

مثال 6.2 لائم y = C + Dt للنقاط (0, 1) و(1, 2) و(2, 4) بالمربعات الصغرى.

1. صفوف A هي (1, 0) و(1, 1) و(1, 2)؛ $A^TA = [[3, 3], [3, 5]]$، $A^Tb = (7, 10)$.
2. det = 6؛ C = (5 × 7 − 3 × 10)/6، D = (3 × 10 − 3 × 7)/6.

الإجابة: C = 0.833, D = 1.5: y = 0.833 + 1.5t.

مثال 6.3 طبّق غرام–شميت على $a_1 = (1, 1, 0)$ و$a_2 = (1, 0, 1)$.

1. $q_1 = (1, 1, 0)/\sqrt{2}$.
2. $q_1 = (1, 1, 0) = (0.5, -0.5, 1)$ − ½(1, 1, 0)، $a_2 - (a_2 \cdot q_1)q_1 = (1, 0, 1)$، وطوله $\sqrt{1.5} = 1.225$.

الإجابة: $q_1 = (0.707, 0.707, 0)$, $q_2 = (0.408, -0.408, 0.816)$.

تمارين

حلّ كلًّا منها على الورق أولًا، ثم تحقق.

1. أسقط (3, 4) على (1, 0).

   (3, 0).

2. اكتب المعادلات الطبيعية لملاءمة y = Dt (دون مقطع) للنقطتين (1, 2) و(2, 3).

   $\Sigma t^2\, D = \Sigma ty$: 5D = 8, D = 1.6.

3. هل Q = [[0, 1], [1, 0]] متعامدة؟

نعم: $Q^TQ = I$.

4. إذا كان b في C(A) أصلًا، فما خطأ المربعات الصغرى؟

صفر: $p = b$.

مفاهيم خاطئة شائعة

خرافة: المربعات الصغرى تحل $Ax = b$ حلًا تامًا.
في الحقيقة: إنها تجد أقرب $A\hat{x}$ حين لا يوجد حل تام.

خرافة: أي أساس يجعل الإسقاطات سهلة.
في الحقيقة: الأساسات المتعامدة المعيارية فقط؛ وإلا فأنت تحتاج إلى $(A^TA)^{-1}$.

خرافة: ملاءمة مستقيم تعني أن البيانات خطية.
في الحقيقة: افحص البواقي؛ فقد يلائم منحنى بشكل أفضل (أضف عمود t^2).

بطاقات تعليمية

الإسقاط على مستقيم

$p = (a \cdot b / a \cdot a)a$.

المعادلات الطبيعية

$A^TA\hat{x} = A^Tb$.

مصفوفة الإسقاط

$P = A(A^TA)^{-1}A^T$.

متعامد معياري

$\|q_i\|_j = 0, \|q_i \cdot q = 1$.

غرام–شميت

اطرح الإسقاطات، ثم اجعل معياريًا.

QR

$A = QR$.

اختبار ذاتي

1. المعادلات الطبيعية هي...

$Ax = b$

$A^TA\hat{x} = A^Tb$

$AA^Tx = b$

$A^Tx = b$

$A^Tb = A^TA\hat{x}$ =. الخطأ متعامد مع C(A).

2. متجه خطأ المربعات الصغرى متعامد مع...

b

فضاء الأعمدة

الفضاء الصفري

$\hat{x}$

فضاء الأعمدة. وهذا ما يجعله الأقصر.

3. إذا كانت أعمدة Q متعامدة معيارية، فإن Q^TQ =...

0

Q

I

QQ^T

I. حواصل الضرب القياسي 0 أو 1.

4. تنتج طريقة غرام–شميت...

A = LU

A = QR

$A = PDP^{-1}$

$A = U\Sigma V^T$

A = QR. Q متعامدة معيارية، وR مثلثية.

أعد هذا الاختبار

كيف يساعد هذا في إنقاذ الكوكب

يُقاس ارتفاع مستوى سطح البحر بملاءمة منحنيات لبيانات أقمار صناعية مشوّشة. تفيد NASA بأن مقاييس الارتفاع الساتلية، TOPEX/Poseidon وJason-1 و-2 و-3 والآن Sentinel-6 Michael Freilich، ترصد المتوسط العالمي لمستوى سطح البحر منذ 1993، وأنه ارتفع 114.4 mm منذ ذلك الحين، وأن معدل الارتفاع ازداد من 0.08 بوصة سنويًا (0.20 cm سنويًا) في 1993 إلى 0.17 بوصة سنويًا (0.44 cm سنويًا) الآن، أي أسرع بنحو 2.2 مرة.

الملاءمة بمستقيم بالمربعات الصغرى تعطي معدلًا متوسطًا؛ وإضافة عمود t^2 إلى A تلائم منحنى يقيس ميله المتغير التسارعَ الذي تصفه NASA. يلائم المختبر D بيانات توضيحية على شكل سجل NASA باستخدام المعادلات الطبيعية نفسها من هذه الوحدة.

على Saving Planets: المحيطات · رصد الأرض

المصادر: Interactive · NASA: Global mean sea level (Vital Signs) (https://sealevel.nasa.gov/vital-signs/global-mean-sea-level/) Linear Algebra, 6.5 The method of least squares (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/least-squares.html)

مصادر تعلّم مجانية

- Interactive Linear Algebra, 6.3 Orthogonal projection (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/projections.html): قسم من نص مجاني.
- Interactive Linear Algebra, 6.5 The method of least squares (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/least-squares.html): المربعات الصغرى بالصور.
- Interactive Linear Algebra, 6.4 Orthogonal sets (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/orthogonal-sets.html): غرام–شميت.
- MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra (Strang, Spring 2010) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/): المحاضرات 17–14: التعامد والإسقاطات والمربعات الصغرى وغرام–شميت.

شاهد المحاضرة

Lecture 16: Projection matrices and least squares (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/resources/lecture-16-projection-matrices-and-least-squares/) (باللغة الإنجليزية)

MIT 18.06 Linear Algebra (Spring 2010), MIT OpenCourseWare. الترخيص: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · شروط الاستخدام (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). الرابط للدراسة المجانية فقط؛ Saving Planets غير تابع لهذه الجامعة ولا يحظى بتأييدها.

☐ **أنهيت هذه الوحدة**

المحددات: الخواص والعوامل المرافقة وقاعدة كرامر والحجم

المحدِّد انطلاقًا من خواصه، وحسابه بالحذف وبالنشر بالمرافقات، وdet(AB) = det A det B، واختبار قابلية العكس، وقاعدة كرامر، والمحدِّد بوصفه معامل تغيير المساحة أو الحجم لتحويل خطي.

أهداف التعلّم

في نهاية هذه الوحدة ستستطيع أن:

- احسب محددات 2 × 2 و3 × 3 بالمرافقات وبالحذف.
- استخدم خواص المحددات تحت عمليات الصفوف.
- حل أنظمة صغيرة بقاعدة كرامر.
- فسّر |det A| بوصفه معامل تغيير المساحة أو الحجم.

المفاهيم الأساسية

- det A ≠ 0 تمامًا حين تكون A قابلة للعكس. محدِّد المصفوفة المثلثية هو حاصل ضرب مدخلاتها القطرية، لذا det A = ± (حاصل ضرب المحاور).
- عمليات الصفوف: التبديل يعكس الإشارة، وضرب صف في c يضرب det في c، وإضافة مضاعف صف إلى آخر لا تغيّر det.
- det(AB) = det A · det B، وdet(Aᵀ) = det A، وdet(A⁻¹) = 1/det A.
- النشر بالمرافقات على طول صف: det A = Σ aᵢⱼCᵢⱼ حيث Cᵢⱼ = (−1)^{i+j} مضروبًا في المصغَّر. قاعدة كرامر: xᵢ = det(Bᵢ)/det A، حيث Bᵢ فيها b في العمود i.
- التحويل الخطي x ↦ Ax يضرب المساحات (2D) أو الأحجام (3D) في |det A|؛ والمحدِّد السالب يعكس الاتجاه أيضًا.

المعادلات الأساسية

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

```
&b\\&d=ad-bc
```

محدِّد 2 × 2

$$\det(AB) = \det A \, \det B$$

```
(AB)= A B
```

قاعدة الضرب

$$x_i = \frac{\det B_i}{\det A}$$

```
x_i=( B_i)/( A)
```

قاعدة كرامر

$$\text{area}(AS) = |\det A| \, \text{area}(S)$$

area(AS)=| A| area(S)

معامل تغيير المساحة

أمثلة محلولة خطوة بخطوة

مثال 7.1 أوجد det [[1, 2, 0], [0, 1, 3], [2, 0, 1]] بالمرافقات على طول الصف 1.

1. 1 × (1 × 1 − 3 × 0) = 1.
2. −2 × (2 × 1 − 3 × 0) = −2 × (−6) = 12.
3. 0 × (...) + 0 = 0.

الإجابة: det = 13.

مثال 7.2 حل 2x + y = 5، x + 3y = 10 بقاعدة كرامر.

1. det A = 6 − 1 = 5.
2. x = det[[5, 1], [10, 3]]/5 = (15 − 10)/5.
3. y = det[[2, 5], [1, 10]]/5 = (20 − 5)/5.

الإجابة: x = 1, y = 3.

مثال 7.3 أوجد مساحة متوازي الأضلاع الذي ضلعاه (3, 0) و(1, 2).

1. المساحة = |det [[3, 1], [0, 2]]| = |6 − 0|.

الإجابة: 6 وحدات مربعة.

تمارين

حلّ كلًّا منها على الورق أولًا، ثم تحقق.

1. det [[3, 1], [2, 4]]؟

   10 = 12 − 2.

2. det [[2, 0, 1], [1, 3, 2], [1, 1, 1]]؟

   2(3 − 2) − 0 + 1(1 − 3) = 0، إذن هي منفردة.

3. إذا كان $\det A = 4$ لمصفوفة A من النوع 3×3، فما $\det(2A)$؟

$2^3 \times 4 = 32$.

4. إذا كان $\det A = 5$، فما $\det(A^{-1})$؟

$1/5 = 0.2$.

مفاهيم خاطئة شائعة

خرافة: $\det(A + B) = \det A + \det B$.

في الحقيقة: خطأ عمومًا؛ $\det(AB)$ وحده ينفصل.

خرافة: $\det(2A) = 2 \det A$.

في الحقيقة: لمصفوفة $n \times n$، $\det(2A) = 2^n \det A$.

خرافة: النشر بالمرافقات هو الطريقة السريعة.

في الحقيقة: يتطلب نحو $n!$ خطوة؛ والحذف نحو $n^3/3$.

بطاقات تعليمية

محدِّد 2×2

$ad - bc$.

قابلية العكس

$\det A \neq 0$.

قاعدة الضرب

$\det(AB) = \det A \det B$.

تبديل الصفوف

يعكس الإشارة.

قاعدة كرامر

$x_i = \det B_i / \det A$.

معامل المساحة

$|\det A|$.

اختبار ذاتي

1. تبديل صفين يضرب det في...

0

1

−1

2

−1. الإشارة تنعكس.

2. det A = 0 يعني أن A...

متعامدان

منفردة

متناظرة

مصفوفة الوحدة

منفردة. غير قابلة للعكس.

3. محدِّد المصفوفة المثلثية هو...

الأثر

حاصل ضرب القطر

صفر

مجموع القطر

حاصل ضرب القطر. انشر على طول القطر.

4. تحويل محدِّده det = 3 يغيّر المساحات بمعامل...

1/3

3

9

3٧

3. |det A|.

أعد هذا الاختبار

كيف يساعد هذا في إنقاذ الكوكب

تحويل البكسلات إلى مساحة أرضية هو محدِّد. تذكر USGS أن نطاقات Landsat 9 متعددة الأطياف بدقة 30 m ونطاقها البانكروماتي بدقة 15 m. التحويل من مؤشرات البكسل (i, j) إلى الإحداثيات الأرضية هو محليًا مصفوفة؛ ولشبكة محاذية بدقة 30 m هو diag(30, 30) m، ومحدِّده 900، فيغطي كل بكسل 900 m². وللشبكة البانكروماتية بدقة 15 m محدِّد قدره 225 m²، فتتسع أربعة بكسلات بانكروماتية في بكسل واحد متعدد الأطياف.

عدّ البكسلات المصنفة غابةً وضربها في معامل التغيير هذا هو الطريقة التي تقيس بها السجلات الساتلية فقدان الغابات بالهكتارات (1 ha = 10000 m²، أي نحو 11.1 بكسل Landsat). وعند تدوير صورة أو قصّها لتطابق خريطة، يحافظ محدِّد المصفوفة الجديدة على صحة المساحة.

على Saving Planets: إزالة الغابات · رصد الأرض

المصادر: Interactive Linear Algebra, 4.3 Determinants and volumes (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/determinants-volumes.html) · USGS: Landsat 9 (https://www.usgs.gov/landsat-missions/landsat-9)

مصادر تعلّم مجانية

- Interactive Linear Algebra, 4.1 Determinants: definition (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/determinants-definitions-properties.html): قسم من نص مجاني.
- Interactive Linear Algebra, 4.3 Determinants and volumes (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/determinants-volumes.html): المعنى الهندسي.
- MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra (Strang, Spring 2010) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/): المحاضرات 20–18: المحددات والمرافقات وقاعدة كرامر.
- Jim Hefferon, Linear Algebra (free text) (https://hefferon.net/linearalgebra/): الفصل الرابع: المحددات.

شاهد المحاضرة

Lecture 20: Cramer's rule, inverse matrix, and volume (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/resources/lecture-20-cramers-rule-inverse-matrix-and-volume/) (باللغة الإنجليزية)

MIT 18.06 Linear Algebra (Spring 2010), MIT OpenCourseWare. الترخيص: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · شروط الاستخدام (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). الرابط للدراسة المجانية فقط؛ Saving Planets غير تابع لهذه الجامعة ولا يحظى بتأييدها.

☐ **أنهيت هذه الوحدة**

القيم الذاتية والمتجهات الذاتية

المتجهات الذاتية بوصفها اتجاهات تمطّها المصفوفة فقط، والمعادلة المميزة det(A − λI) = 0، والتحقق بالأثر والمحدِّد، والقيم الذاتية لمصفوفات خاصة، والقيم الذاتية العقدية والدوران، وطريقة القوى، والأنماط الطبيعية للمنشآت المهتزة.

أهداف التعلّم

في نهاية هذه الوحدة ستستطيع أن:

- أوجد القيم الذاتية من det(A − λI) = 0 والمتجهات الذاتية من الفضاء الصفري لـ A − λI.
- تحقق من القيم الذاتية بالأثر والمحدِّد.
- ميّز القيم الذاتية الحقيقية والمكررة والعقدية.
- استخدم طريقة القوى لإيجاد القيمة الذاتية المهيمنة.

المفاهيم الأساسية

- Av = λv مع v ≠ 0: يحافظ المتجه الذاتي v على اتجاهه ويُضرب في القيمة الذاتية λ.
- القيم الذاتية هي جذور det(A − λI) = 0، وهي كثيرة حدود من الدرجة n. ولكل λ تملأ المتجهاتُ الذاتية الفضاءَ الصفري لـ A − λI.
- التحقق: مجموع القيم الذاتية يساوي الأثر (مجموع القطر) وحاصل ضربها يساوي det A.
- المصفوفات المتناظرة لها قيم ذاتية حقيقية ومتجهات ذاتية متعامدة. مصفوفات الدوران لها قيم ذاتية عقدية. والمصفوفات المثلثية تُظهر قيمها الذاتية على القطر.
- طريقة القوى: اضرب متجهًا ابتدائيًا في A مرارًا وأعد تحجيمه؛ فيصطف مع المتجه الذاتي لأكبر |λ|. وفي الاهتزازات، تعطي Kv = ω²Mv الترددات الطبيعية ω وأشكال الأنماط v.

المعادلات الأساسية

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

معادلة القيم الذاتية

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

```
(A- I)=0
```

المعادلة المميزة

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = \operatorname{tr} A, \;\; \lambda_1 \cdots \lambda_n = \det A$$

```
_1+·s+_n=,\ \ _1·s_n= A
```

التحقق بالأثر والمحدِّد

$$K\mathbf{v} = \omega^2 M\mathbf{v}$$

أمثلة محلولة خطوة بخطوة

مثال 8.1 أوجد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية لـ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

1. $\det(A - \lambda I) = (2-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$.
2. $\lambda = 3$: $A - 3I = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ تعطي $v = (1, 1)$. $\lambda = 1$: $v = (1, -1)$.
3. تحقق: $3 + 1 = 4 = \text{الأثر}$؛ $3 \times 1 = 3 = \det$.

الإجابة: $\lambda = 3$ مع $(1, 1)$؛ $\lambda = 1$ مع $(1, -1)$.

مثال 8.2 أوجد القيم الذاتية لـ $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

1. $\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$ (الأثر 7، $\det 10$).
2. $(\lambda - 2)(\lambda - 5) = 0$.

الإجابة: $\lambda = 2$ و$\lambda = 5$.

مثال 8.3 مبنى توضيحي من طابقين فيه كتل طوابق متساوية m وصلابة طابق k، حيث $K/m = (k/m)\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ و$k/m = 100\ \text{s}^{-2}$. أوجد التردد الأساسي.

1. القيم الذاتية لـ $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$: $\lambda = (3 \pm \sqrt{5})/2 = 0.382$ و2.618.
2. $\omega_1^2 = 100 \times 0.382 = 38.2\ \text{s}^{-2}$، $\omega_1 = 6.18\ \text{rad/s}$.
3. $T_1 = 1/f_1$, $f_1 = \omega_1/(2\pi)$.

الإجابة: $f_1 = 0.984\ \text{Hz}$، والدور $T_1 = 1.02\ \text{s}$ (قيم توضيحية).

تمارين

حلّ كلًّا منها على الورق أولًا، ثم تحقق.

1. القيم الذاتية لـ $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$؟

   5 و-2 (القطر).

2. مصفوفة 3×3 قيمها الذاتية 1 و2 و3. أوجد أثرها ومحدِّدها.

   الأثر 6، $\det 6$.

3. القيم الذاتية للدوران بزاوية $90°$ $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$؟

$\lambda^2 + 1 = 0$: $\lambda = \pm i$.

4. إذا كان $Av = 4v$، فما A^2v؟

$16v$.

مفاهيم خاطئة شائعة

خرافة: المتجه الصفري متجه ذاتي.
في الحقيقة: يجب أن تكون المتجهات الذاتية غير صفرية.

خرافة: الاختزال بالصفوف يحافظ على القيم الذاتية.
في الحقيقة: إنه يغيّرها؛ استخدم $\det(A - \lambda I)$.

خرافة: كل مصفوفة حقيقية لها قيم ذاتية حقيقية.
في الحقيقة: الدورانات تعطي قيمًا عقدية؛ والمصفوفات المتناظرة هي الحالة الآمنة.

بطاقات تعليمية

متجه ذاتي

$Av = \lambda v, v \neq 0$.

المعادلة المميزة

$\det(A - \lambda I) = 0$.

التحقق بالأثر

$\Sigma\lambda$ = الأثر.

التحقق بالمحدِّد

$\Pi\lambda = \det A$.

طريقة القوى

الضرب المتكرر يجد المتجه الذاتي المهيمن.

الأنماط الطبيعية

$Kv = \omega^2 Mv$.

اختبار ذاتي

1. القيم الذاتية لمصفوفة مثلثية هي...

محاورها بعد التبديلات

مدخلاتها القطرية

كلها 1

مجاميع صفوفها

مدخلاتها القطرية. det(A − λI) حاصل ضرب حدود قطرية.

2. مجموع القيم الذاتية يساوي...

المحدِّد

الأثر

الرتبة

n

الأثر. التحقق بالأثر.

3. طريقة القوى تجد...

أصغر قيمة ذاتية

القيمة الذاتية المهيمنة

المحدِّد

المعكوس

القيمة الذاتية المهيمنة. أكبر |λ| يغلب.

4. المصفوفات المتناظرة لها...

قيم ذاتية عقدية

قيم ذاتية حقيقية ومتجهات ذاتية متعامدة

محدِّد صفري

لا متجهات ذاتية

قيم ذاتية حقيقية ومتجهات ذاتية متعامدة. المبرهنة الطيفية.

أعد هذا الاختبار

كيف يساعد هذا في إنقاذ الكوكب

يقرأ مهندسو الزلازل المباني من خلال قيمها الذاتية. استخدمت دراسة لـ USGS أعدّها محمد تشلبي (2022) الأدوار الأساسية ونسب التخميد الحرج لـ 41 مبنى شاهقًا في عدة دول. ووجدت اتجاهًا خطيًا واضحًا بين ارتفاع المبنى ودوره الأساسي للمباني الفولاذية والخرسانية المسلحة، وإن كان مع تشتت كبير ناتج عن اختلاف التصاميم الإنشائية، ووجدت أن التخميد الحرج أقل بوضوح من 3%، بما يتسق مع دراسات حديثة أخرى عن المباني الشاهقة.

يتحدد الدور الأساسي بأصغر قيمة ذاتية لمسألة الصلابة–الكتلة، كما في مثال المبنى ذي الطابقين. والتخميد المنخفض يعني أن المبنى الشاهق قد يظل يهتز طويلًا حين توافق موجات زلزالية طويلة الدور ذلك الدور، ولهذا توجّه المباني المزودة بأجهزة القياس وأنماطها المقيسة نحو مدن أكثر أمانًا وأطول عمرًا.

على Saving Planets: المعادلات التفاضلية · الديناميكا

المصادر: USGS: Preliminary study of correlation of natural periods and damping percentages of tall buildings in several countries (Çelebi, 2022) (https://www.usgs.gov/publications/preliminary-study-correlation-natural-periods-and-damping-percentages-tall-buildings) · Interactive Linear Algebra, 5.1 Eigenvalues and eigenvectors (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/eigenvectors.html)

مصادر تعلّم مجانية

- Interactive Linear Algebra, 5.1 Eigenvalues and eigenvectors (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/eigenvectors.html): قسم من نص مجاني.
- Interactive Linear Algebra, 5.2 The characteristic polynomial (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/characteristic-polynomial.html): إيجاد القيم الذاتية.
- Interactive Linear Algebra, 5.5 Complex eigenvalues (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/complex-eigenvalues.html): الدوران والتحجيم.
- MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra (Strang, Spring 2010) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/): المحاضرة 21: القيم الذاتية والمتجهات الذاتية.

☐ **أنهيت هذه الوحدة**

التقطير وقوى المصفوفات وسلاسل ماركوف والأنظمة الديناميكية الخطية

قطرنة $A = PDP^{-1}$، وحساب القوى A^k بسرعة، والمصفوفات المتناظرة والمبرهنة الطيفية $A = Q\Lambda Q^T$، ومصفوفات ماركوف (العشوائية) والحالات المستقرة، والسلوك طويل الأمد لـ $x_{k+1} = Ax_k$.

أهداف التعلّم

في نهاية هذه الوحدة ستستطيع أن:

- قطرن مصفوفة لها n متجهًا ذاتيًا مستقلًا.
- احسب A^k وتنبأ بالسلوك طويل الأمد لـ $x_{k+1} = Ax_k$.
- أوجد الحالة المستقرة لسلسلة ماركوف.
- استخدم المبرهنة الطيفية للمصفوفات المتناظرة.

المفاهيم الأساسية

- إذا كان لـ A عدد n من المتجهات الذاتية المستقلة (أعمدة P)، فإن $A = PDP^{-1}$ مع القيم الذاتية على قطر D، و$A^k = PD^kP^{-1}$.
- اكتب $x_0 = c_1v_1 + \dots + c_nv_n$. عندئذ $x_k = A^kx_0 = c_1\lambda_1^kv_1 + \dots + c_n\lambda_n^kv_n$؛ وأكبر $|\lambda|$ يهيمن مع ازدياد k.
- مصفوفة ماركوف مدخلاتها غير سالبة ومجموع كل عمود فيها 1. لها دائمًا $\lambda = 1$، والقيم الذاتية الأخرى تحقق $|\lambda| \le 1$. الحالة المستقرة هي المتجه الذاتي لـ $\lambda = 1$، محجّمًا بحيث يكون مجموع مدخلاته 1.
- ثاني أكبر $|\lambda|$ يحدد سرعة نسيان سلسلة ماركوف لبدايتها: الفارق يتقلص مثل $|\lambda_2|^k$.
- المبرهنة الطيفية: يمكن كتابة مصفوفة متناظرة حقيقية بالشكل $A = Q\Lambda Q^T$ مع متجهات ذاتية متعامدة معيارية في Q.

المعادلات الأساسية

$$A = PDP^{-1}, \;\; A^k = PD^kP^{-1}$$

A=PDP^-1,\ \ A^k=PD^kP^-1

القطرنة والقوى

$$\mathbf{x}_k = c_1\lambda_1^k\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\lambda_n^k\mathbf{v}_n$$

_k=c_1_1^k_1+⋯+c_n_n^k_n

حل x_{k+1} = Ax_k

$$P\mathbf{q} = \mathbf{q}, \;\; \sum q_i = 1$$

P=,\ \ q_i=1

الحالة المستقرة لماركوف

$$A = Q\Lambda Q^T$$

أمثلة محلولة خطوة بخطوة

مثال 9.1 استخدم القطرنة لإيجاد A^{10} حيث $A = [[2, 1], [1, 2]]$.

1. من الوحدة 8: $\lambda = 3, 1$ مع $v = (1, 1), (1, -1)$. $P = [[1, 1], [1, -1]]$، $P^{-1} = \tfrac{1}{2}[[1, 1], [1, -1]]$.
2. $A^{10} = P\,\mathrm{diag}(3^{10}, 1)\,P^{-1}$؛ وكل مدخل يساوي $(3^{10} \pm 1)/2$.

الإجابة: $A^{10} = [[29525, 29524], [29524, 29525]]$.

مثال 9.2 مصفوفة ماركوف هي $P = [[0.8, 0.3], [0.2, 0.7]]$ (قيم توضيحية). أوجد الحالة المستقرة.

1. $(P - I)q = 0$: $-0.2q_1 + 0.3q_2 = 0$، إذن $q_1 = 1.5q_2$.
2. $q_1 + q_2 = 1$ تعطي $q_2 = 0.4$.

الإجابة: $q = (0.6, 0.4)$.

مثال 9.3 انطلاقًا من $x_0 = (1, 0)$، أوجد x_2 للمصفوفة P نفسها، وx_k العام.

1. $x_1 = (0.8, 0.2)$; $x_2 = (0.64 + 0.06, 0.16 + 0.14)$.
2. القيم الذاتية 1 و0.5 (الأثر 1.5، $\det 0.5$)، إذن $x_k = (0.6, 0.4) + 0.5^k(0.4, -0.4)$.

الإجابة: $x_2 = (0.70, 0.30)$; $x_k \to (0.6, 0.4)$.

تمارين

حلّ كلًّا منها على الورق أولًا، ثم تحقق.

1. هل $[[0.5, 0.2], [0.5, 0.8]]$ مصفوفة ماركوف؟

   نعم: مدخلات غير سالبة، ومجموع كل عمود 1.

2. أوجد حالتها المستقرة.

   $0.5q_1 = 0.2q_2$، إذن $q = (2/7, 5/7) = (0.286, 0.714)$.

3. إذا كانت $A = PDP^{-1}$ مع $D = \mathrm{diag}(0.9, 0.5)$، فماذا يحدث لـ $A^k x$ عندما تكبر k؟

   يضمحل إلى الصفر، وتهيمن عليه 0.9^k.

4. هل يمكن قطرنة [[1, 1], [0, 1]]؟

لا: 1 = λ مكررة مرتين لكن هناك متجه ذاتي مستقل واحد فقط.

مفاهيم خاطئة شائعة

خرافة: كل مصفوفة قابلة للقطرنة.
في الحقيقة: يلزم n متجهًا ذاتيًا مستقلًا؛ و[[1, 1], [0, 1]] لها متجه واحد فقط.

خرافة: الحالة المستقرة لسلسلة ماركوف تعتمد على البداية.
في الحقيقة: في السلسلة المنتظمة لا؛ فكل بداية تتقارب إلى q نفسه.

خرافة: A^k تعني رفع كل مدخل إلى القوة k.
في الحقيقة: المصفوفات القطرية وحدها تعمل هكذا؛ ولهذا نقطرن.

بطاقات تعليمية

القطرنة

$A = PDP^{-1}$.

قوة المصفوفة

$A^k = PD^kP^{-1}$.

مصفوفة ماركوف

غير سالبة، ومجموع كل عمود 1.

الحالة المستقرة

$Pq = q$، ومجموع المدخلات 1.

المبرهنة الطيفية

$A = Q\Lambda Q^T$.

مصفوفة ناقصة

متجهات ذاتية أقل من اللازم للقطرنة.

اختبار ذاتي

1. كل مصفوفة ماركوف لها القيمة الذاتية...

0

1

−1

2

1. مجموع كل عمود 1.

2. A^k حيث $A = PDP^{-1}$ هي...

P^kDP^k

PD^kP^{-1}

D^kP

$kPDP^{-1}$

PD^kP^{-1}. حدود $P^{-1}P$ الداخلية تُختصر.

3. سرعة تقارب سلسلة ماركوف يحددها...

$\lambda_1 = 1$

$|\lambda_2|$

الأثر

n

$|\lambda_2|$. الفارق يتقلص مثل $|\lambda_2|^k$.

4. المصفوفات المتناظرة تُقطرن بالشكل...

LU

$Q\Lambda Q^T$

QR

$U\Sigma V^T$ فقط

$Q\Lambda Q^T$. المبرهنة الطيفية.

أعد هذا الاختبار

كيف يساعد هذا في إنقاذ الكوكب

مصير المواد سلسلة ماركوف. تفيد EPA بأن الولايات المتحدة أنتجت 292.4 مليون طن من النفايات الصلبة البلدية في 2018، أي 4.9 رطل للفرد يوميًا. أُعيد تدوير نحو 69 مليون طن وحُوِّل 25 مليون طن إلى سماد، بمعدل مشترك قدره 32.1%؛ وأُحرق نحو 35 مليون طن (11.8%) مع استرداد الطاقة؛ وطُمر أكثر من 146 مليون طن (50%) في المكبات.

لو بقيت حصص كل عام ثابتة، لخرجت المادة من الاستخدام إلى هذه الوجهات بهذه الاحتمالات، ولعادت الحصة المعاد تدويرها وحدها إلى الاقتصاد. يبني المختبر E مصفوفة انتقال توضيحية بحصة استرداد قدرها 32.1%، ويبيّن بقوى المصفوفات والمتجه الذاتي لـ λ = 1 كيف تغيّر زيادةُ إعادة التدوير مدةَ بقاء المادة قيد الاستخدام وكميةَ ما يصل إلى المكبات.

على Saving Planets: الحلول

المصادر: U.S. EPA: National overview, facts and figures on materials, wastes and recycling (https://www.epa.gov/facts-and-figures-about-materials-waste-and-recycling/national-overview-facts-and-figures-materials) · Interactive Linear Algebra, 5.6 Stochastic matrices (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/stochastic-matrices.html)

مصادر تعلّم مجانية

- Interactive Linear Algebra, 5.4 Diagonalization (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/diagonalization.html): قسم من نص مجاني.
- Interactive Linear Algebra, 5.6 Stochastic matrices (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/stochastic-matrices.html): سلاسل ماركوف والحالات المستقرة.
- MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra (Strang, Spring 2010) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/): المحاضرات 25–22: القطرنة ومصفوفات ماركوف والمصفوفات المتناظرة.
- MIT OpenCourseWare 18.06SC Linear Algebra (self-paced, Fall 2011) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06sc-linear-algebra-fall-2011/): حصص تمارين حول مصفوفات ماركوف.

شاهد المحاضرة

Lecture 22: Diagonalization and powers of A (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/resources/lecture-22-diagonalization-and-powers-of-a/) (باللغة الإنجليزية)

MIT 18.06 Linear Algebra (Spring 2010), MIT OpenCourseWare. الترخيص: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · شروط الاستخدام (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). الرابط للدراسة المجانية فقط؛ Saving Planets غير تابع لهذه الجامعة ولا يحظى بتأييدها.

☐ أنهيت هذه الوحدة

تحليل القيم المفردة وتحليل المكونات الرئيسية والمصفوفات الموجبة التحديد

المصفوفات الموجبة التحديد وAᵀA، وتحليل القيم المنفردة A = UΣVᵀ، والقيم المنفردة وهندسة المصفوفة بوصفها دورانًا–مطًّا–دورانًا، وأفضل تقريب منخفض الرتبة وضغط الصور، وعدد الشرط، وتحليل المكونات الرئيسية للبيانات.

أهداف التعلّم

في نهاية هذه الوحدة ستستطيع أن:

- اختبر ما إذا كانت مصفوفة متناظرة موجبة التحديد.
- احسب القيم المنفردة من القيم الذاتية لـ AᵀA.
- ابنِ تقريبًا من الرتبة k وقِس ما يحتفظ به.
- نفّذ تحليل مكونات رئيسية صغيرًا.

المفاهيم الأساسية

- المصفوفة المتناظرة موجبة التحديد حين يكون xᵀAx > 0 لكل x ≠ 0؛ وبصورة مكافئة تكون جميع القيم الذاتية (أو جميع المحاور) موجبة. وAᵀA دائمًا متناظرة وموجبة شبه التحديد.
- لكل مصفوفة m × n تحليل قيم منفردة A = UΣVᵀ: أعمدة V وU متعامدة معيارية، وتحوي Σ القيم المنفردة σ₁ ≥ σ₂ ≥ … ≥ 0، وهي الجذور التربيعية للقيم الذاتية لـ AᵀA.
- A = σ₁u₁v₁ᵀ + σ₂u₂v₂ᵀ + …. الاحتفاظ بأول k حدود يعطي أفضل تقريب من الرتبة k (إيكارت–يونغ)؛ والخطأ في المعيار 2 هو σₖ₊₁.
- عدد الشرط σ₁/σₙ يقيس مقدار تضخم الأخطاء في b عند حل Ax = b.
- تحليل المكونات الرئيسية: مركِز البيانات (اطرح متوسطات الأعمدة)، فتكون المتجهات المنفردة اليمنى (المتجهات الذاتية لمصفوفة التغاير) هي الاتجاهات الرئيسية، وσᵢ² يقيس التباين الذي يفسره كل منها.

المعادلات الأساسية

$$A = U \Sigma V^T$$

```
A=U V^T
```

تحليل القيم المنفردة

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(A^T A)}$$

```
σ_i=_i(A^TA)
```

القيم المنفردة

$$A_k = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T$$

```
A_k=_i=1^kσ_i_i_i^T
```

$$\kappa = \sigma_1 / \sigma_n$$

عدد الشرط

أمثلة محلولة خطوة بخطوة

مثال 10.1 أوجد القيم المنفردة لـ A = [[3, 0], [4, 5]].

1. A^TA = [[25, 20], [20, 25]]، والقيم الذاتية 45 و5.
2. $\sigma_1 = \sqrt{45}$، $\sigma_2 = \sqrt{5}$. تحقق: $\sigma_1\sigma_2 = 15 = |\det A|$.

الإجابة: $\sigma_1 = 6.708$, $\sigma_2 = 2.236$.

مثال 10.2 ما الحصة من «طاقة» $\Sigma\sigma^2$ A^TA التي يحتفظ بها التقريب من الرتبة 1 لتلك A؟

1. $\sigma_1^2/(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) = 45/50$.

الإجابة: 90%.

مثال 10.3 صورة رمادية بحجم 1000 × 1000 مخزنة بوصفها تحليل قيم منفردة من الرتبة 50. كم عددًا يُخزَّن مقارنةً بالصورة الكاملة؟

1. كل حد يحتاج إلى u واحد (1000) وv واحد (1000) وσ واحدة: 2001 عدد.
2. 50 × 2001 = 100050 مقابل 1000000.

الإجابة: 100050 عدد، أي نحو 10.0% من الأصل.

تمارين

حلّ كلًّا منها على الورق أولًا، ثم تحقق.

1. هل [[2, 1], [1, 2]] موجبة التحديد؟

   نعم: القيمتان الذاتيتان 3 و1 موجبتان.

2. أوجد عدد الشرط لـ diag(10, 0.1).

   10/0.1 = 100.

3. بيانات 2D ممركزة تغايرها [[2, 1], [1, 2]]. ما حصة التباين التي يفسرها المكون الرئيسي الأول؟

القيمتان الذاتيتان 3 و1: 75% = 3/4، على امتداد (1, 1).

4. ما القيم المنفردة لمصفوفة متعامدة؟

كلها تساوي 1.

مفاهيم خاطئة شائعة

خرافة: القيم المنفردة هي القيم الذاتية لـ A.
في الحقيقة: إنها الجذور التربيعية للقيم الذاتية لـ A^TA، ولا تكون سالبة أبدًا.

خرافة: المصفوفات المربعة وحدها لها تحليل قيم منفردة.
في الحقيقة: كل مصفوفة لها ذلك.

خرافة: تحليل المكونات الرئيسية يعمل على البيانات الخام.
في الحقيقة: مركِز البيانات أولًا، وحجّم المتغيرات المقيسة بوحدات مختلفة.

بطاقات تعليمية

SVD

$A = U\Sigma V^T$.

قيمة منفردة

$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(A^TA)}$.

موجبة التحديد

$x^TAx > 0$، وجميع $\lambda > 0$.

إيكارت–يونغ

تحليل القيم المنفردة المبتور هو أفضل تقريب من الرتبة k.

عدد الشرط

σ_1/σ_n.

PCA

تحليل القيم المنفردة للبيانات الممركزة.

اختبار ذاتي

1. القيم المنفردة...

أي أعداد حقيقية

غير سالبة

أعداد صحيحة دائمًا

القيم الذاتية لـ A

غير سالبة. الجذور التربيعية للقيم الذاتية لـ A^TA $0 \geq$.

2. أفضل تقريب من الرتبة k يحتفظ بـ...

أول k صفوف

أكبر k حدود منفردة

k أعمدة عشوائية

أصغر k قيم σ

أكبر k حدود منفردة. إيكارت–يونغ.

3. عدد الشرط الكبير يعني...

نظامًا حسن السلوك

أن الأخطاء قد تتضخم

أن A متعامدة

أن $\det A = 1$

أن الأخطاء قد تتضخم. شبه منفردة.

4. في تحليل المكونات الرئيسية، الاتجاه الرئيسي الأول هو...

المتوسط

المتجه المنفرد الأيمن الأول للبيانات الممركزة

الفضاء الصفري

الصف الأول

المتجه المنفرد الأيمن الأول للبيانات الممركزة. اتجاه أكبر تباين.

أعد هذا الاختبار

كيف يساعد هذا في إنقاذ الكوكب

يرسم مطياف التصوير EMIT التابع لمختبر JPL في NASA على متن محطة الفضاء الدولية خرائطَ المعادن في مناطق مصادر الغبار على الأرض. ويقول JPL إنه يجمع أكثر من 100000 طيف في الثانية، أي 3.6×10^8 طيف في الساعة، وإن مهمته مُددت حتى 2026 على الأقل. للغبار أهمية مناخية: يلاحظ JPL أن المعادن الداكنة تمتص ضوء الشمس وتدفئ الهواء، بينما تعكسه المعادن الفاتحة وتبرّد.

كل طيف متجه طويل من الانعكاسيات عند أطوال موجية كثيرة، والأطوال الموجية المتجاورة شديدة الارتباط. يضغط تحليل المكونات الرئيسية وتحليل القيم المنفردة هذه البيانات في مكونات قليلة، ويفصلان الإشارة عن الضجيج، ويستخرجان بصمات المعادن المنفردة، وهي الرياضيات نفسها المستخدمة في مختبر ضغط الصور.

على Saving Planets: رصد الأرض · الفضاء

المصادر: MIT · NASA JPL: EMIT, Earth Surface Mineral Dust Source Investigation (https://earth.jpl.nasa.gov/emit/) · OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra (Strang, Spring 2010) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/)

مصادر تعلّم مجانية

- MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra (Strang, Spring 2010) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/): المحاضرات 29–27: المصفوفات الموجبة التحديد وتحليل القيم المنفردة.
- MIT OpenCourseWare 18.06SC Linear Algebra (self-paced, Fall 2011) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06sc-linear-algebra-fall-2011/): جلسة عن تحليل القيم المنفردة.
- Gilbert Strang, Introduction to Linear Algebra (book site) (https://math.mit.edu/~gs/linearalgebra/): ملاحظات سترانغ عن تحليل القيم المنفردة والبيانات.
- Jim Hefferon, Linear Algebra (free text) (https://hefferon.net/linearalgebra/): موضوعات عن المصفوفات المتعامدة والإسقاطات.

شاهد المحاضرة

Lecture 25: Symmetric matrices and positive definiteness (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/resources/lecture-25-symmetric-matrices-and-positive-definiteness/) (باللغة الإنجليزية)

MIT 18.06 Linear Algebra (Spring 2010), MIT OpenCourseWare. الترخيص: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · شروط الاستخدام (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). الرابط للدراسة المجانية فقط؛ Saving Planets غير تابع لهذه الجامعة ولا يحظى بتأييدها.

أنهيت هذه الوحدة

مجموعات المسائل

هذه التمارين داخل كل وحدة. حلّها على الورق أولًا، ثم افتح الإجابة.

1. المتجهات: التركيبات الخطية والأطوال والضرب القياسي
   4 مسائل

2. أنظمة المعادلات الخطية وحذف غاوس
   4 مسائل
3. جبر المصفوفات: الضرب والمعكوسات وتحليل LU
   4 مسائل
4. النماذج الخطية: اقتصاد المدخلات–المخرجات (ليونتيف) والشبكات والموازنة
   4 مسائل
5. فضاءات المتجهات والفضاءات الجزئية والاستقلال والأساس والرتبة والفضاءات الجزئية الأساسية الأربعة
   4 مسائل
6. التعامد والإسقاطات والمربعات الصغرى وغرام–شميت
   4 مسائل
7. المحددات: الخواص والعوامل المرافقة وقاعدة كرامر والحجم
   4 مسائل
8. القيم الذاتية والمتجهات الذاتية
   4 مسائل
9. التقطير وقوى المصفوفات وسلاسل ماركوف والأنظمة الديناميكية الخطية
   4 مسائل
10. تحليل القيم المفردة وتحليل المكونات الرئيسية والمصفوفات الموجبة التحديد
    4 مسائل

المختبر (Computation lab)

المختبر هو الجزء العملي من المقرر. وهو هنا مجاني وللتدريب فقط، دون ساعات معتمدة.

كل مختبر يُنفَّذ في جدول بيانات مجاني أو على الورق؛ ونسخ Python اختيارية. خذ فترات راحة منتظمة من الشاشة، وتعامل مع الدبابيس والمقصات بحذر.

مرجع السلامة: OSHA: Computer workstations eTool (https://www.osha.gov/etools/computer-workstations)

المختبر A: متجهات البكسلات ومؤشر الغطاء النباتي

الأسبوع 2

الهدف: عامل بكسلات الأقمار الصناعية بوصفها متجهات: احسب الأطوال والزوايا بين البكسلات وNDVI، ولاحظ أن الغطاء النباتي والتربة والماء تشير إلى اتجاهات مختلفة.

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}}{\|\mathbf{p}\|\|\mathbf{q}\|}, \quad \mathrm{NDVI} = \frac{\mathrm{NIR}-\mathrm{red}}{\mathrm{NIR}+\mathrm{red}}$$

```
θ=·\|\|\|\|, NDVI=-redNIR+red
```

الزاوية بين البكسلات وNDVI

الإجراء

1. في جدول بيانات، أدخل ثلاثة بكسلات توضيحية صفوفًا من الانعكاسيات (الأخضر، الأحمر، NIR): غطاء نباتي (0.10, 0.08, 0.40)، وتربة (0.20, 0.25, 0.30)، وماء (0.06, 0.04, 0.02).
2. احسب طول كل بكسل بـ SQRT(SUMSQ(...)) والضرب القياسي لكل زوج بـ SUMPRODUCT.
3. أوجد الزاوية بين كل زوج بـ ACOS وDEGREES.
4. احسب NDVI لكل بكسل. اختياري: نزّل مشهد Landsat مجانيًا وكرر ذلك على بكسلات حقيقية.

جدول البيانات

البكسل	الأخضر	Red	NIR	NDVI
الغطاء النباتي	0.10	0.08	0.40	0.667
التربة	0.20	0.25	0.30	0.091
الماء	0.06	0.04	0.02	−0.333

انعكاسيات توضيحية اختيرت لتشبه غطاءً نباتيًا وتربة عارية وماءً نموذجية.

مثال حسابي

1. NDVI الغطاء النباتي 0.667 = (0.40 + 0.08)/(0.40 − 0.08) =.
2. NDVI التربة 0.091 = 0.05/0.55 =؛ وNDVI الماء 0.333− = 0.02/0.06− =.
3. الزاوية بين الغطاء النباتي والتربة: الضرب القياسي 0.160 =، والطولان 0.420 و0.4387، 0.8683 = θ cos، °29.7 = θ.

السلامة

- خذ استراحة قصيرة من الشاشة كل نصف ساعة.

بديل منزلي أو افتراضي

- المختبر كله يُنفَّذ في جدول بيانات مجاني.

PhET: Vector Addition (https://phet.colorado.edu/en/simulations/vector-addition) · USGS: Landsat 9 (https://www.usgs.gov/landsat-missions/landsat-9)

الصلة بالكوكب: تذكر USGS نطاقَي Landsat 9 الأحمر (النطاق 4) والأشعة تحت الحمراء القريبة (النطاق 5)، وبياناته مجانية، فيستطيع أي شخص رسم خرائط الغطاء النباتي بهذه الطريقة. USGS: Landsat 9 (https://www.usgs.gov/landsat-missions/landsat-9)

☐ **أكملت هذا المختبر (عمليًا أو افتراضيًا)**

المختبر B: التثليث الجانبي، من الخيوط إلى نظام خطي

الأسبوع 3

الهدف: أوجد موقعًا من المسافات، أولًا بخيوط على خريطة كما في نشاط GPS.gov، ثم بتحويل معادلات الدوائر إلى نظام خطي وحله بالحذف.

$$2(a_2-a_1)x + 2(b_2-b_1)y = d_1^2 - d_2^2 + a_2^2 - a_1^2 + b_2^2 - b_1^2$$

```
2(a_2-a_1)x+2(b_2-b_1)y=d_1^2-d_2^2+a_2^2-a_1^2+b_2^2-b_1^2
```

الفرق بين معادلتي دائرتين

الإجراء

1. اطبع خريطة التثليث الجانبي من GPS.gov (دون تغيير المقياس) أو حدّد ثلاثة «أقمار صناعية» على ورق رسم بياني عند (0, 0) و(10, 0) و(0, 10) cm.
2. حوّل أزمنة الإشارات إلى مسافات بـ d = ct (c = 299792458 m/s)؛ وللنسخة الورقية استخدم المسافات التوضيحية أدناه.
3. ارسم الدوائر بخيط وقلم رصاص وحدّد موضع تقاطعها.
4. اطرح معادلات الدوائر زوجًا زوجًا لتحصل على معادلتين خطيتين، وحلهما بالحذف في جدول بيانات، وقارن بالرسم.

جدول البيانات

المنارة	الموقع (cm)	المسافة (cm)	d²
1	(0, 0)	5.000	25
2	(0, 10)	8.062	65
3	(10, 0)	6.708	45

مسافات توضيحية لمستقبِل عند (3, 4) cm. يستخدم نشاط GPS.gov أربعة أقمار صناعية على خريطة بمقياس 1:21283839.

مثال حسابي

1. Eq. 1 − Eq. 2: 20x − 100 = −40, x = 3. Eq. 1 − Eq. 3: 20y − 100 = −20, y = 4.
2. زمن GPS.gov A = 0.00505783 s يعطي d = 1516299 m؛ وبمقياس 1:21283839 يساوي ذلك 7.12 cm على الخريطة.

السلامة

- تعامل مع الدبابيس والمقصات بحذر.

بديل منزلي أو افتراضي

- نسخة الخيط والورق هي المختبر المنزلي.

GPS.gov: Trilateration activity (https://www.gps.gov/trilateration) · Interactive Linear Algebra, 1.2 Row reduction (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/row-reduction.html)

الصلة بالكوكب: صمّم GPS.gov هذا النشاط مع NOAA؛ والمستقبِلات الحقيقية تحل النوع نفسه من الأنظمة، مع مجهول للساعة، مرات عديدة في الثانية. GPS.gov: Trilateration (NOAA classroom activity) (https://www.gps.gov/trilateration) · GPS.gov: Space segment (https://www.gps.gov/space-segment)

☐ **أكملت هذا المختبر (عمليًا أو افتراضيًا)**

المختبر C: المصفوفات بوصفها تحويلات للمستوى

الأسبوع 4

الهدف: شاهد المصفوفات تؤثر في الأشكال: مطّ مربع وقصّه وتدويره وعكسه على ورق رسم بياني، وتأكد أن المساحات تُضرب في |det A|.

$$\text{area}(AS) = |\det A| \, \text{area}(S)$$

area(AS)=| A| area(S)

معامل تغيير المساحة

الإجراء

1. ارسم مربع الوحدة ذا الرؤوس (0, 0) و(1, 0) و(1, 1) و(0, 1).
2. اضرب كل رأس في A = [[2, 1], [0, 1]] (قصّ ومطّ)، وفي R = [[0, −1], [1, 0]] (دوران بزاوية 90°)، وفي F = [[1, 0], [0, −1]] (انعكاس).
3. ارسم كل صورة وأوجد مساحتها بعدّ المربعات أو بصيغة رباط الحذاء.
4. قارن كل مساحة بـ |det| ولاحظ أي التحويلات تعكس الاتجاه (det < 0). ثم تحقق من det(AR) = det A det R.

جدول البيانات

المصفوفة	det	مساحة الصورة	الاتجاه
A = [[2, 1], [0, 1]]	2	2	محفوظ
R (دوران 90°)	1	1	محفوظ
F (انعكاس)	−1	1	معكوس
AR	2	2	محفوظ

قيم دقيقة لمربع الوحدة.

مثال حسابي

1. det A = 2 × 1 − 1 × 0 = 2؛ والصورة متوازي أضلاع قاعدته 2 وارتفاعه 1.
2. det(AR) = det A × det R = 2 × 1 = 2.

السلامة

- لا شيء يتجاوز العمل المكتبي العادي.

بديل منزلي أو افتراضي

- كل ما تحتاجه ورق رسم بياني وقلم رصاص.

Interactive Linear Algebra, 3.1 Matrix transformations (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/matrix-transformations.html) · Interactive Linear Algebra, 4.3 Determinants and volumes (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/determinants-volumes.html)

الصلة بالكوكب: تستخدم إسقاطات الخرائط ومحاذاة الصور هذه المصفوفات نفسها؛ ويحافظ المحدِّد على صدق قياسات مساحات الغابات والفيضانات. USGS: Landsat 9 (https://www.usgs.gov/landsat-missions/landsat-9)

- [ ] **أكملت هذا المختبر (عمليًا أو افتراضيًا)**

المختبر D: ملاءمة بيانات مستوى سطح البحر بالمربعات الصغرى

الأسبوع 9

الهدف: لائم مستقيمًا، ثم قطعًا مكافئًا، لبيانات مستوى سطح البحر بالمعادلات الطبيعية، وقارن بالملاءمة المدمجة في جدول البيانات.

$$A^{T}A\hat{\mathbf{x}} = A^{T}\mathbf{b}, \quad A = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{t} \end{bmatrix}$$

A^TA=A^T, A=[1\ \ ]

المعادلات الطبيعية لـ y = C + Dt

الإجراء

1. أدخل البيانات التوضيحية أدناه (أو نزّل سجل NASA من صفحة Vital Signs): t بالسنوات منذ 1993 وh بوحدة mm.
2. ابنِ A بعمود من الآحاد وعمود من t. احسب $A^{T}A$ و$A^{T}b$ بـ MMULT وTRANSPOSE، ثم $\hat{x} = (A^{T}A)^{-1}A^{T}b$ =MINVERSE(AᵀA)·Aᵀb.
3. تحقق بمقارنة النتيجة مع LINEST أو خط اتجاه في مخطط. ارسم البواقي $b - Ax$.
4. أضف عمود t^{2} وأعد الملاءمة. معامل t^{2} الموجب يعني أن الارتفاع يتسارع.

جدول البيانات

t (سنوات منذ 1993)	0	8	16	24	32
h (mm)	0	22	48	78	114

قيم توضيحية على شكل سجل NASA (الذي يفيد بارتفاع 114.4 mm منذ 1993)؛ استخدم البيانات الحقيقية للحصول على إجابة حقيقية.

مثال حسابي

1. $\bar{t} = 16, \bar{h} = 640(t - \bar{t}) = 2272, \Sigma (h - \bar{h})(t - \bar{t}) = 52.4; \Sigma (t - \bar{t})^{2}$.
2. $D = 2272/640 = 3.55$ mm/yr; $C = 52.4 - 3.55 \times 16 = -4.4$ mm.
3. البواقي موجبة عند الطرفين وسالبة في الوسط: المنحنى يلائم أفضل، كما يوحي المعدل المتزايد الذي تذكره NASA.

السلامة

- خذ استراحة قصيرة من الشاشة كل نصف ساعة.

بديل منزلي أو افتراضي

- المختبر كله يُنفَّذ في جدول بيانات مجاني.

NASA: Global mean sea level (https://sealevel.nasa.gov/vital-signs/global-mean-sea-level/) · Interactive Linear Algebra, 6.5 Least squares (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/least-squares.html)

الصلة بالكوكب: تفيد NASA بأن معدل الارتفاع زاد من 0.20 cm سنويًا في 1993 إلى 0.44 cm سنويًا الآن، وهو تسارع يمكنك رصده بعمود t^{2}. NASA: Global mean sea level (Vital Signs) (https://sealevel.nasa.gov/vital-signs/global-mean-sea-lev

el/)

- [ ] **أكملت هذا المختبر (عمليًا أو افتراضيًا)**

المختبر E: نموذج ماركوف للمواد وإعادة التدوير

الأسبوع 12

الهدف: ابنِ مصفوفة انتقال للمواد قيد الاستخدام والمفقودة في المكبات أو بالحرق، واستخدم قوى المصفوفات لتتبعها عبر الزمن، ولاحظ كيف يُبقي معدلُ إعادة تدوير أعلى المادةَ قيد الاستخدام مدة أطول.

$$\mathbf{x}_{k+1} = P\mathbf{x}_k, \quad P = \begin{bmatrix} 1-f(1-r) & 0 \\ f(1-r) & 1 \end{bmatrix}$$

_k+1=P_k, P=1-f(1-r)&0\(1-r)&1

سلسلة بحالتين: قيد الاستخدام، مفقودة

الإجراء

1. اختر معدل تخلّص توضيحيًا f = 0.2 سنويًا ومعدل استرداد r = 0.321 (حصة إعادة التدوير والتسميد لدى EPA في 2018).
2. ابنِ P في جدول بيانات وابدأ بـ x_0 = (1, 0): كل المادة قيد الاستخدام.
3. استخدم MMULT للتقدم 10 سنوات، وقارن بالصيغة $(1 - f(1 - r))^k$ للحصة التي ما زالت قيد الاستخدام.
4. كرر مع r = 0.5 وقارن متوسط سنوات الاستخدام، 1/(f(1 − r)).

جدول البيانات

معدل الاسترداد r	احتمال البقاء قيد الاستخدام	قيد الاستخدام بعد 10 سنوات	متوسط سنوات الاستخدام
0.321	0.8642	0.232	7.36
0.50	0.9000	0.349	10.0

نموذج توضيحي: معدل التخلص f = 0.2 قيمة توضيحية؛ وr = 0.321 هي حصة EPA لعام 2018.

مثال حسابي

1. احتمال البقاء 1 − 0.2 × 0.679 = 0.8642؛ 0.8642^{10} = 0.232.
2. متوسط سنوات الاستخدام 1/0.1358 = 7.36؛ وعند r = 0.5 يساوي 1/0.1 = 10.0 سنوات.
3. λ = 1 تخص الحالة «مفقودة»، التي تمتص كل شيء على المدى الطويل؛ وλ = 0.8642 تحدد السرعة.

السلامة

- خذ استراحة قصيرة من الشاشة كل نصف ساعة.

بديل منزلي أو افتراضي

- المختبر كله يُنفَّذ في جدول بيانات مجاني.

Interactive Linear Algebra, 5.6 Stochastic matrices (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/stochastic-matrices.ht) · EPA: National overview of materials and waste (https://www.epa.gov/facts-and-figures-about-materials-waste-and-recycling/national-overview-facts-and-figures-materials)

الصلة بالكوكب: تفيد EPA بمعدل إعادة تدوير وتسميد قدره 32.1% في 2018 وبطمر 50%؛ ونماذج كهذه تبيّن قيمة رفع ذلك المعدل. U.S. EPA: National overview, facts and figures on materials, wastes and recycling (https://www.epa.gov/facts-and-figures-about-materials-waste-and-recycling/national-overview-facts-and-figures-materials)

☐ **أكملت هذا المختبر (عمليًا أو افتراضيًا)**

المختبر F: طريقة القوى وضغط الصور بتحليل القيم المنفردة

الأسبوع 14

الهدف: أوجد قيمة ذاتية مهيمنة بالضرب المتكرر، ثم اضغط صورة رمادية صغيرة بتحليل قيم منفردة مبتور ولاحظ كم هو قليل عدد الأرقام التي تحفظ الصورة.

$$\mathbf{x}_{k+1} = \frac{A\mathbf{x}_k}{\|A\mathbf{x}_k\|}, \quad A_k = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T$$

_k+1=_k\|A_k\|, A_k=_i=1^kσ_i_i_i^T

طريقة القوى وتحليل القيم المنفردة المبتور

الإجراء

1. في جدول بيانات، ابدأ بـ x_0 = (1, 0) واضرب في A = [[2, 1], [1, 2]] عشر مرات مع إعادة التحجيم كل مرة؛ ولاحظ اقتراب نسبة الأطوال من 3.
2. أنشئ شبكة 8 × 8 من مستويات الرمادي (0–255) لصورة بسيطة، أو حمّل صورة فوتوغرافية في Python المجاني باستخدام NumPy.
3. احسب تحليل القيم المنفردة (numpy.linalg.svd) وأعد بناء الصورة بـ k = 1 و2 و4 حدود.
4. سجّل التخزين k(8 + 8 + 1) وحصة Σσ² المحفوظة، واحكم متى تبدو الصورة صحيحة.

جدول البيانات

k	الأعداد المخزنة (صورة 8 × 8)	الحصة من 64
1	17	26.6%
2	34	53.1%
4	68	106.3%

أعداد تخزين دقيقة. لصورة 8 × 8، يخزّن k = 4 أكثر من الأعداد الخام البالغة 64؛ وتظهر الوفورات في الصور الكبيرة (الوحدة 10: الرتبة 50 لصورة 1000 × 1000 تحتفظ بـ 10.0%).

مثال حسابي

1. طريقة القوى: (1, 0) → (2, 1) → (5, 4) → (14, 13)؛ ||(13 ,14)||/||(4 ,5)|| = 2.98 = 19.10/6.403، قريبًا من λ = 3.
2. التخزين عند k = 1: 17 = 1 + 8 + 8 عددًا، 17/64 = 26.6%.

السلامة

- خذ استراحة قصيرة من الشاشة كل نصف ساعة.

بديل منزلي أو افتراضي

- نسختا جدول البيانات وPython المجاني كلتاهما مختبران منزليان.

MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra (Strang, Spring 2010) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-alg-spring-2010/) · Interactive Linear Algebra, 5.1 Eigenvectors (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/eigenvectors.html)

الصلة بالكوكب: يُرسل EMIT التابع لـ JPL في NASA أكثر من 100000 طيف في الثانية؛ وضغط تلك البيانات وفصلها يستخدم هذه الأدوات تحديدًا. NASA JPL: EMIT, Earth Surface Mineral Dust Source Investigation (https://earth.jpl.nasa.gov/emit/)

☐ **أكملت هذا المختبر (عمليًا أو افتراضيًا)**

مجموعات تدريب للامتحان

وقّت نفسك: نحو 10 دقائق لكل مسألة. ثم قارن بالحلول الكاملة.

مجموعة تمارين منتصف الفصل (الوحدات 1–5)

1. أوجد الزاوية بين (1, 0, 1) و(0, 1, 1).

1. الضرب القياسي 1 =؛ وطول كل منهما √2؛ cos θ = 1/2.

الإجابة: 60°.

2. حل x + 2y = 4، 3x − y = 5.

1. 7− = 7−y :R₂ − 3R₁.

الإجابة: x = 2, y = 1.

3. اعكس [[3, 2], [1, 1]].

1. det = 1.

الإجابة: [[1, −2], [−1, 3]].

4. اقتصاد من قطاع واحد يستهلك 0.4 من ناتجه. ما الناتج الذي يلبي طلبًا قدره 120؟

1. x = 120/0.6.

الإجابة: 200.

5. مصفوفة 9 × 6 رتبتها 4. أوجد dim N(A) وdim N(Aᵀ).

1. n − r وm − r.

الإجابة: 5 و2.

مجموعة التدريب النهائية (كل الوحدات)

1. لائم $y = C + Dt$ للنقاط $(0, 0)$ و$(1, 2)$ و$(2, 2)$ بالمربعات الصغرى.

   1. $A^TA = [[3, 3], [3, 5]]$، $A^Tb = (4, 6)$؛ det 6.

   الإجابة: $C = 0.333, D = 1$.

2. أوجد $\det [[2, 1, 0], [1, 2, 1], [0, 1, 2]]$.

   1. $2(4 - 1) - 1(2 - 0) + 0$.

   الإجابة: 4.

3. أوجد القيم الذاتية لـ $[[6, 2], [2, 3]]$.

   1. الأثر 9، det 14: $\lambda^2 - 9\lambda + 14 = 0$.

   الإجابة: 7 و2.

4. أوجد الحالة المستقرة لمصفوفة ماركوف $[[0.9, 0.2], [0.1, 0.8]]$.

   1. $0.1q_1 = 0.2q_2$.

   الإجابة: $(0.667, 0.333)$.

5. أوجد القيم المنفردة لـ $[[3, 0], [0, -2]]$.

   1. $A^TA = \text{diag}(4, 9)$.

   الإجابة: 3 و2.

6. كم عددًا يخزّن تحليل قيم منفردة من الرتبة 20 لصورة 800×500، وما حصة ذلك من الصورة الكاملة؟

   1. $20(500 + 800 + 1)$.

   الإجابة: 26020، أي نحو 6.5%.

ورقة الصيغ

$$\|v\| = \sqrt{v \cdot v},\ \cos\theta = \frac{v \cdot w}{\|v\|\|w\|}$$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \ A = LU$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1},\ (AB)^T = B^TA^T$$

$$\mathbf{x} = (I - A)^{-1}\mathbf{d}$$

$$r + \dim N(A) = n$$

$$\mathbf{p} = \frac{a \cdot b}{a \cdot a} a, \;\; A^T A \hat{x} = A^T b$$

$$A = QR, \; Q^T Q = I$$

$$\det(AB) = \det A \det B, \; x_i = \det B_i / \det A$$

$$\det(A - \lambda I) = 0, \; \sum \lambda = \operatorname{tr} A, \; \prod \lambda = \det A$$

$$A = PDP^{-1}, \; A^k = PD^k P^{-1}, \; A = Q \Lambda Q^T$$

$$A = U \Sigma V^T, \; \sigma_i = \sqrt{\lambda_i (A^T A)}, \; \kappa = \sigma_1 / \sigma_n$$

الثوابت

الثابت	القيمة
سرعة الضوء (تُستخدم لمسافات GPS)	299,792,458 m/s
1 ميل	1.609344 km
1 قدم	0.3048 m
1 بوصة	25.4 mm
عدد العمليات لحل نظام n × n بالحذف	نحو $n^3/3$ عملية ضرب–جمع (سترانغ)
مصفوفة الوحدة I	آحاد على القطر وأصفار في غيره: AI = IA = A

المصدر: NIST Guide to the SI, Appendix B.9: conversion factors (https://www.nist.gov/pml/special-publication-811/nist-guide-si-appendix-b9-conversion-factors/nist-guide-si-appendix-b9)

نصوص ومحاضرات مجانية

استخدم هذه الكتب والمحاضرات والأدوات المجانية إلى جانب المقرر.

- MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra (Strang, Spring 2010) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/): محاضرات سترانغ المصورة الكاملة ومجموعات المسائل والامتحانات.
- MIT OpenCourseWare 18.06SC Linear Algebra (self-paced, Fall 2011) (https://ocw.mit.edu/courses/18-06sc-linear-algebra-fall-2011/): نسخة ذاتية الوتيرة مع مقاطع حصص التمارين ومسائل محلولة.
- Interactive Linear Algebra (Margalit and Rabinoff, Georgia Tech) (https://textbooks.math.gatech.edu/ila/): كتاب تفاعلي مجاني يُستخدم في Georgia Tech.
- Jim Hefferon, Linear Algebra (free text) (https://hefferon.net/linearalgebra/): كتاب كامل مجاني مع الإجابات.
- Gilbert Strang, Introduction to Linear Algebra (book site) (https://math.mit.edu/~gs/linearalgebra/): موقع كتاب سترانغ مع الملاحظات والأشكال.
- PhET: Vector Addition (https://phet.colorado.edu/en/simulations/vector-addition): متجهات ومركبات تفاعلية.

مسرد المصطلحات

أساس

مجموعة مستقلة خطيًا تولّد فضاءً.

فضاء الأعمدة
جميع التركيبات Ax لأعمدة A.

عدد الشرط
σ_1/σ_n، أي مقدار نمو الأخطاء عند حل $Ax = b$.

المحدِّد
معامل تغيير الحجم ذو الإشارة لـ A؛ ويساوي صفرًا تمامًا حين تكون A منفردة.

القطرنة
$A = PDP^{-1}$ مع المتجهات الذاتية في P.

البُعد
عدد المتجهات في أي أساس.

قيمة ذاتية
λ التي تحقق $Av = \lambda v$ لمتجه v غير صفري ما.

تحليل LU
$A = LU$ من الحذف.

المربعات الصغرى
$\hat{x}$ الذي يجعل $\|b - Ax\|$ أصغر ما يمكن.

معكوس ليونتيف
$(I - A)^{-1}$، الناتج الكلي اللازم لكل وحدة من الطلب النهائي.

الاستقلال الخطي
التركيب الصفري وحده يعطي المتجه الصفري.

مصفوفة ماركوف
مدخلات غير سالبة، ومجموع كل عمود 1.

الفضاء الصفري
جميع x التي تحقق $Ax = 0$.

متعامد معياري
متجهات وحدة متعامدة مثنى مثنى.

المحور
أول مدخل غير صفري في صف من الصيغة الدرجية.

موجبة التحديد
متناظرة مع $x^TAx > 0$ لكل $x \neq 0$.

الإسقاط
أقرب نقطة إلى b في فضاء جزئي.

الرتبة
عدد المحاور؛ بُعد فضاء الأعمدة.

قيمة منفردة
$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(A^TA)}$.

المدى الخطي
كل التركيبات الخطية لمجموعة من المتجهات.

فضاء جزئي
مجموعة تحوي 0 ومغلقة تحت الجمع والضرب في عدد.

معايير التقييم الذاتي

لا تُمنح درجة ولا ساعات معتمدة. استخدم هذا لتقيّم بصدق أين أنت في كل وحدة.

المستوى	كيف يبدو
4 · إتقان	يختار الأداة المناسبة (الحذف أو الإسقاط أو القيم الذاتية أو تحليل القيم المنفردة)، ويحسب الحالات الصغيرة يدويًا، ويتحقق من الإجابات (Ax = b، والأثر والمحدِّد)، ويشرح المعنى بالرسوم وفي السياق.
3 · متمكن	يحل مسائل التدريب مع هفوات حسابية عرضية.
2 · قيد التطور	يتبع الأمثلة المحلولة لكنه يخلط بين الصفوف والأعمدة أو بين الفضاءات الجزئية الأربعة.
1 · مبتدئ	يتعامل مع الرموز دون التحقق من الأبعاد أو الإجابات؛ ويحتاج إلى مراجعة الوحدة.

الأوزان المقترحة إذا أردت درجة

الجزء	الوزن
تمارين	25%
المختبرات	20%
مجموعة تدريب منتصف الفصل	25%
مجموعة التدريب النهائية	30%

استهدف المستوى 3 أو أعلى في كل وحدة قبل الانتقال إلى الدورة التالية.

دورات ذات صلة

- ميكانيكا المواد ENGR 213
- الدوائر الكهربائية ENGR 214 + ENGR 214L
- التفاضل والتكامل 3 MATH 210
- كل الدورات