Ultimo aggiornamento: November 1, 2026

🗺️ Percorso di quattro anni · Anno 2, Primavera

Informazioni sul corso

Questo corso gratuito ha 9 unità e 4 laboratori. Sono i totali reali, non un programma più lungo accorciato.

Un controllo è un numero o un risultato di codice in una pagina del corso che uno script ricalcola prima della pubblicazione. Il numero stampato e quello ricalcolato devono coincidere.

> Questo è lo schema di un corso gratuito di autoapprendimento scritto da Saving Planets. Non è un corso universitario, non dà crediti accademici e nessuna scuola è coinvolta.
>
> Il programma segue un corso del secondo anno di equazioni differenziali ordinarie, sul modello degli argomenti e della profondità di MIT OpenCourseWare 18.03 e dei libri di testo gratuiti di Jiří Lebl (Notes on Diffy Qs) e William Trench, e dei programmi di corsi come Georgia Tech MATH 2552 e Stanford Math 53. Rimandiamo ai materiali gratuiti in tutto il corso. Nessuno di questi autori o organizzazioni approva questa pagina.
>
> Cosa aggiungiamo: ogni unità si collega a un problema reale del pianeta con una fonte pubblica citata (laghi, metano, pesca, carbonio, clima, epidemie, turbine eoliche), ogni numero della pagina viene ricalcolato da uno script di verifica prima della pubblicazione, e quattro laboratori al computer risolvono numericamente modelli reali.
>
> Seguilo in ordine. Ogni unità ha obiettivi, idee chiave, equazioni, esempi passo per passo, esercizi con soluzioni complete, errori comuni, flashcard e un quiz. I tuoi progressi sono salvati solo in questo browser.

Come questo corso aiuta a salvare il pianeta

Quasi ogni modello del pianeta vivente è un’equazione differenziale: quanto velocemente un lago smaltisce un inquinante, come si riprende uno stock ittico, come il carbonio si sposta tra aria e mare, quanto rapidamente la Terra si scalda quando il suo bilancio energetico cambia, come si diffonde un’epidemia e come oscilla la torre di una turbina eolica.

Ogni unità termina con una breve sezione con fonti che mostra come le sue idee aiutano sia le persone sia la natura. I parametri dei modelli che non provengono da una fonte sono indicati come valori di esempio.

Per gli insegnanti

Puoi insegnare questo corso, oppure lasciare che uno studente lo faccia da solo. È gratis. Saving Planets non dà un voto né crediti scolastici.

- Questa pagina è l'intero corso: 9 unità e 4 laboratori (MATH 220).
- Prevedi 15 settimane, circa 6–9 ore a settimana, comprese le settimane di laboratorio.
- Segui il calendario di 15 settimane. Leggi l'unità, fai la pratica su carta, poi apri la risposta. Nella settimana di laboratorio, fai il laboratorio o la versione a casa.
- Un controllo è un numero o un risultato di codice nella pagina che uno script ricalcola prima della pubblicazione. Il numero che vedi e quello ricalcolato devono coincidere.
- Usa Stampa questa pagina, oppure scarica la guida di studio PDF. Il formulario è verso la fine.
- Chiedi: in che modo questa unità aiuta le persone e il pianeta? Ogni unità ha un riquadro verde con un fatto e la sua fonte.
- Copia il modello di guida per insegnanti e scrivi il nome della classe, il tempo che hai e le domande che farai. Apri il modello di guida per insegnanti

Prima di iniziare

Prerequisiti

- Analisi I e II: derivate, integrali, fratti semplici, serie di Taylor.
- Matrici, determinanti e autovalori di matrici 2 × 2 (trattati brevemente nell'unità 6).
- Analisi III aiuta per l'equazione del calore ma non è obbligatoria.

Come studiare

- Verifica ogni soluzione sostituendola di nuovo nell'equazione.
- Svolgi ogni esercizio su carta prima di aprire la risposta.
- Disegna un campo di direzioni o un ritratto di fase prima di risolvere; sappi che aspetto dovrebbe avere la risposta.
- Chiediti per ogni modello: quali sono le unità, e il comportamento a lungo termine ha senso?
- Risolvi anche numericamente un problema di ogni unità e confronta con la formula.
- Rifai i quiz qualche giorno dopo. La pratica distribuita batte una lunga sessione unica.

Che cosa ti serve

- Un computer o un tablet con un foglio di calcolo.
- Una calcolatrice grafica gratuita come Desmos.
- Facoltativo: Python con NumPy (gratis in Google Colab).

Programma suggerito di 15 settimane

Circa 6-9 ore a settimana: lettura, esercizi e, nelle settimane di laboratorio, il laboratorio.

Settimana	Unità	Argomenti	Lettura
1	Equazioni del primo ordine	Campi di direzioni; equazioni a variabili separabili	Lebl 1.1–1.3
2	Equazioni del primo ordine	Equazioni lineari ed esatte; esistenza e unicità	Lebl 1.2, 1.4, 1.8
3	Modellare con equazioni del primo ordine	Modellazione: miscelazione, decadimento, crescita logistica, prelievo	Lebl 1.6
4	Equazioni lineari del secondo ordine e oscillazioni	Equazioni lineari del secondo ordine; equazione caratteristica	Lebl 2.1–2.2
5	Equazioni lineari del secondo ordine e oscillazioni	Vibrazioni meccaniche e smorzamento	Lebl 2.4
6	Vibrazioni forzate e risonanza	Coefficienti indeterminati; oscillazione forzata e risonanza; laboratorio D	Lebl 2.5–2.6
7	Trasformate di Laplace	Trasformate di Laplace; risoluzione di problemi di Cauchy	Lebl 6.1–6.2
8	Trasformate di Laplace	Funzioni a gradino, impulsi, convoluzione; esercitazione per il compito intermedio	Lebl 6.3–6.4
9	Sistemi lineari, autovalori e piani delle fasi	Sistemi; matrici e autovalori	Lebl 3.1–3.4
10	Sistemi lineari, autovalori e piani delle fasi	Ritratti di fase e classificazione	Lebl 3.5
11	Sistemi non lineari e stabilità	Sistemi non lineari, linearizzazione; preda-predatore; laboratorio B	Lebl 8.1–8.3
12	Sistemi non lineari e stabilità	Stabilità; epidemie SIR; laboratorio A	Lebl 8.2–8.3
13	Metodi numerici	Metodi numerici; modello di bilancio energetico; laboratorio C	Lebl 1.7, Trench 3
14	Soluzioni per serie, serie di Fourier ed equazione del calore	Soluzioni per serie; serie di Fourier; equazione del calore	Lebl 7.1–7.2, 4.2, 4.6
15	Ripasso	Ripasso ed esercitazione finale	Tutte le unità

I tuoi progressi

Spunta unità e laboratori man mano che li finisci, e fai i quiz. Progressi e punteggi sono salvati solo in questo browser e non ci vengono mai inviati.

Unità

Equazioni del primo ordine

Campi di direzioni, equazioni a variabili separabili, equazioni lineari con fattore integrante, equazioni esatte, e quando una soluzione esiste ed è unica.

Obiettivi di apprendimento

Alla fine di questa unità saprai:

- Leggere un campo di direzioni e disegnare le soluzioni.
- Risolvere equazioni del primo ordine a variabili separabili e lineari.
- Riconoscere e risolvere equazioni esatte.
- Enunciare il teorema di esistenza e unicità e capire quando non vale.

Concetti chiave

- Un'equazione differenziale lega una funzione incognita alle sue derivate; una soluzione è una funzione che la rende vera.
- Separabile: dy/dx = g(x)h(y). Dividi e integra entrambi i membri.
- Lineare: y' + p(x)y = q(x). Moltiplica per il fattore integrante μ = e^(∫p dx) così che il membro sinistro diventi (μy)'.
- Esatta: M dx + N dy = 0 con M_y = N_x è dF = 0, quindi F(x, y) = C.
- Se f e ∂f/∂y sono continue vicino a (x_0, y_0), allora y' = f(x, y), $y(x_0) = y_0$ ha esattamente una soluzione nelle vicinanze. Le soluzioni possono comunque esplodere in tempo finito.

Equazioni chiave

$$\frac{dy}{h(y)} = g(x)\,dx$$

`(dy)/(h(y))=g(x) dx`

Equazione a variabili separabili

$$\mu = e^{\int p\,dx}, \quad (\mu y)' = \mu q$$

`μ=e^ p dx,(μ y)'=μ q`

Fattore integrante

$$M_y = N_x \Rightarrow F(x,y) = C$$

`M_y=N_x F(x,y)=C`

Equazione esatta

$$y' = f(x, y),\ y(x_0) = y_0$$

`y'=f(x,y),\ y(x_0)=y_0`

Problema ai valori iniziali

Esempi svolti passo passo

Esempio 1.1 Risolvi dy/dx = xy, y(0) = 2, e trova y(1).

1. dy/y = x dx, quindi ln|y| = x²/2 + C.
2. y = 2e^(x²/2).
3. y(1) = 2e^0.5.

Risposta: ≈ 3.297.

Esempio 1.2 Risolvi y' + 2y = 4, y(0) = 0, e trova y(1).

1. μ = e^(2t), quindi (e^(2t)y)' = 4e^(2t).
2. e^(2t)y = 2e^(2t) + C; y(0) = 0 dà C = −2.
3. y = 2(1 − e^(−2t)).

Risposta: y(1) ≈ 1.729, che tende allo stato stazionario 2.

Esempio 1.3 Risolvi 2xy dx + (x² + 2y) dy = 0 con y(0) = 1, e trova y quando x = 1.

1. M_y = 2x = N_x: esatta.
2. F = x²y + y²; F(0, 1) = 1.
3. In x = 1: y + y² = 1, quindi y = (−1 + √5)/2.

Risposta: ≈ 0.618.

Esercizi

Svolgi ciascuno prima su carta, poi controlla.

1. Risolvi y' = y², y(0) = 1. Dove esiste la soluzione?

   y = 1/(1 − t); esplode in t = 1, anche se y² è regolare ovunque.

2. Risolvi t y' + y = t² per t > 0.

(ty)' = t^2, quindi $y = t^2/3 + C/t$.

3. Risolvi $y' = -y/\tau$.

   $y = y_0 e^{(-t/\tau)}$.

4. $(y \cos x)\,dx + (\sin x + 2y)\,dy = 0$ è esatta? Risolvi.

   $M_y = \cos x = N_x$; $F = y \sin x + y^2 = C$.

5. $y' = \sqrt{y}$, $y(0) = 0$ ha un'unica soluzione?

   No: $y = 0$ e $y = t^2/4$ funzionano entrambe; $\partial f/\partial y = 1/(2\sqrt{y})$ non è continua in $y = 0$.

Errori concettuali comuni

Mito: Ogni equazione del primo ordine è a variabili separabili.
In realtà: $y' = x + y$ non lo è; è lineare.

Mito: Dimenticare +C fino alla fine va bene.
In realtà: Aggiungi C quando integri, prima di ricavare y, altrimenti la condizione iniziale viene sbagliata.

Mito: Un secondo membro regolare significa che la soluzione esiste per sempre.
In realtà: $y' = y^2$ esplode in un tempo finito.

Flashcard

A variabili separabili

$dy/dx = g(x)h(y)$.

Lineare del primo ordine

$y' + p\,y = q$.

Fattore integrante

$\mu = e^{(\int p\,dx)}$.

Esatta

$M_y = N_x$; $F = C$.

Problema ai valori iniziali

Una EDO più $y(x_0) = y_0$.

Esistenza e unicità

f, f_y continue ⇒ una soluzione locale.

Quiz di autoverifica

1. Il fattore integrante di $y' + 3y = x$ è...

e^(3x)

e^x

3x

e^(−3x)

e^(3x). e^(∫3 dx).

2. M dx + N dy = 0 è esatta quando...

M = N

M_y = N_x

M_x = N_y

MN = 1

M_y = N_x. Le derivate miste di F coincidono.

3. y' = ky ha soluzione...

y_0 + kt

y_0e^(kt)

kt^2

sin kt

y_0e^(kt). A variabili separabili.

4. L'unicità può venire meno quando...

f è lineare

∂f/∂y è discontinua

y_0 = 1

l'equazione è a variabili separabili

∂f/∂y è discontinua. ad es. y' = √y in 0.

Rifai questo quiz

Come questo aiuta a salvare il pianeta

L'equazione del primo ordine più semplice, y' = −y/τ, descrive come un inquinante viene smaltito da un lago ben mescolato o come un gas lascia l'atmosfera. Il suo unico numero, la scala temporale τ, decide se un errore svanisce in anni o dura secoli (unità 2).

Su Saving Planets: Pagina Fiumi

Fonti: U.S. EPA: Physical features of the Great Lakes (retention times) (https://www.epa.gov/greatlakes/physical-features-great-lakes) · Lebl, 1.4 Linear equations and the integrating factor (https://www.jirka.org/diffyqs/html/intfactor_section.html)

Risorse di apprendimento gratuite

- Lebl, 1.3 Separable equations (https://www.jirka.org/diffyqs/html/separable_section.html): Sezione di un manuale gratuito.
- Lebl, 1.4 Integrating factor (https://www.jirka.org/diffyqs/html/intfactor_section.html): Equazioni lineari.
- Lebl, 1.8 Exact equations (https://www.jirka.org/diffyqs/html/exact_section.html): Equazioni esatte.
- Lebl, 1.2 Slope fields (https://www.jirka.org/diffyqs/html/slopefields_section.html): Esistenza e unicità.

Guarda la lezione

First Order Autonomous Equations (https://ocw.mit.edu/courses/18-03sc-differential-equations-fall-2011/resources/first-order-autonomous-equations/) (in inglese)

MIT 18.03SC Differential Equations (Fall 2011), MIT OpenCourseWare. Licenza: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Condizioni d'uso (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Link fornito solo per lo studio gratuito; Saving Planets non è affiliato a questa università né approvato da essa.

☐ **Ho finito questa unità**

Modellare con equazioni del primo ordine

Trasformare una situazione in un'equazione: miscelazione e inquinamento dei laghi, decadimento e tempi di vita, raffreddamento di Newton, crescita logistica, prelievo, ed equilibri con la loro stabilità.

Obiettivi di apprendimento

Alla fine di questa unità saprai:

- Costruire modelli "tasso in entrata meno tasso in uscita".
- Interpretare costanti di tempo e tempi di vita.
- Trovare gli equilibri di equazioni autonome e classificarne la stabilità.
- Usare il modello logistico con prelievo per trovare il rendimento massimo sostenibile.

Concetti chiave

- Tasso di variazione = tasso in entrata − tasso in uscita. Scrivi le unità di ogni termine.
- Un lago ben mescolato con tempo di ricambio τ perde un inquinante al ritmo C/τ una volta che l'afflusso è pulito.
- Per un'equazione autonoma y' = f(y), gli equilibri risolvono f(y) = 0; un equilibrio è stabile se f'(y) < 0.
- La crescita logistica P' = rP(1 − P/K) si stabilizza a K. Con un prelievo costante H, il massimo prelievo sostenibile è rK/4, in P = K/2.

Equazioni chiave

$$\frac{dx}{dt} = (\text{rate in}) - (\text{rate out})$$

`dx/dt=(rate in)-(rate out)`

Legge di bilancio

$$C(t) = C_0 e^{-t/\tau}$$

`C(t)=C_0e^-t/τ`

Ricambio con tempo di ricambio τ

$$P' = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right) - H$$

`P'=rP(1- PK)-H`

Crescita logistica con prelievo

$$H_{\max} = \frac{rK}{4}$$

H_=rK/4

Rendimento massimo sostenibile

Esempi svolti passo passo

Esempio 2.1 Il tempo di ricambio del lago Erie è 2.6 anni e quello del lago Superiore 191 anni (EPA). Se l'afflusso di un inquinante si ferma, quanto tempo serve perché la concentrazione di ciascun lago scenda al 10 %, considerandoli ben mescolati?

1. $C/C_0 = e^{(-t/\tau)} = 0.1$, quindi $t = \tau \ln 10$.
2. Erie: 2.6 × 2.303 = 5.99 anni.
3. Superiore: 191 × 2.303 = 440 anni.

Risposta: Circa 6 anni per l'Erie ma circa 440 per il Superiore. La prevenzione conta di più dove il ricambio è lento.

Esempio 2.2 L'EPA afferma che il metano dura in media circa un decennio nell'atmosfera. Tratta un impulso di metano come decadente con $\tau = 10$ anni. Che frazione resta dopo 30 anni?

1. Frazione = $e^{(-30/10)} = e^{(-3)}$.

Risposta: Circa il 5 %. Ridurre le perdite di metano dà quindi frutti entro decenni, a differenza della CO_2, che persiste molto più a lungo.

Esempio 2.3 Uno stock ittico segue $P' = 0.4P(1 - P/10000) - H$ (tonnellate, anni; valori di esempio). Trova il rendimento massimo sostenibile.

1. La crescita $rP(1 - P/K)$ è massima in $P = K/2 = 5000$ t.
2. Lì vale $rK/4 = 0.4 \times 10000/4$.

Risposta: 1000 tonnellate all'anno. Prelevare di più porta lo stock al collasso.

Esercizi

Svolgi ciascuno prima su carta, poi controlla.

1. Un caffè a 90 °C si raffredda in una stanza a 20 °C con $T' = -0.1(T - 20)$ (minuti). Trova $T(10)$.

$T = 20 + 70e^{(-1)} \approx 45.8\ ^\circ C$.

2. Un serbatoio di 100 L di acqua dolce riceve salamoia a 0.5 g/L a 2 L/min e si svuota a 2 L/min. Trova il sale dopo 50 minuti.

   $x' = 1 - x/50$, $x = 50(1 - e^{(-t/50)})$; $x(50) = 50(1 - e^{(-1)}) \approx 31.6$ g.

3. Trova e classifica gli equilibri di $y' = y(1 - y)$.

   $y = 0$ ($f' = 1$, instabile) e $y = 1$ ($f' = -1$, stabile).

4. Nell'esempio della pesca, cosa succede se $H = 1200$ t/anno?

   $rP(1 - P/K) - H < 0$ per ogni P, quindi lo stock cala fino a zero.

Errori concettuali comuni

Mito: Il tempo di ricambio è il tempo necessario a eliminare tutto l'inquinante.
In realtà: Dopo un τ ne resta il 37 %; il decadimento esponenziale non arriva mai del tutto a zero.

Mito: Più sforzo di pesca significa sempre più pescato.
In realtà: Oltre il rendimento massimo sostenibile, più prelievo riduce lo stock e il pescato futuro.

Mito: Un equilibrio è sempre il punto in cui il sistema finisce.
In realtà: Solo gli equilibri stabili attraggono le soluzioni vicine.

Flashcard

Legge di bilancio

Entrata − uscita.

Costante di tempo

τ in $e^{(-t/\tau)}$; il 63 % del cambiamento avviene entro τ.

Tempo di ricambio

Volume del lago ÷ portata in uscita.

Equilibrio

$f(y^*) = 0$.

Test di stabilità

$f'(y^*) < 0$ stabile.

Rendimento massimo sostenibile

$rK/4$ in $P = K/2$.

Quiz di autoverifica

1. Con τ = 5 anni, la frazione rimasta dopo 5 anni è...

0

e^(−1) ≈ 0.37

0.5

0.1

e^(−1) ≈ 0.37. e^(−t/τ) a t = τ.

2. Il rendimento massimo sostenibile della crescita logistica è...

rK

rK/4

K/2

r/K

rK/4. Massimo di rP(1 − P/K).

3. y* è un equilibrio stabile di y' = f(y) se...

f'(y*) > 0

f'(y*) < 0

f(y*) > 0

y* > 0

f'(y*) < 0. Le soluzioni vicine vengono respinte indietro.

4. Quale lago si riprende più in fretta dall'inquinamento?

Superiore (191 anni)

Erie (2.6 anni)

Uguale

Nessuno dei due

Erie (2.6 anni). Tempo di ricambio più breve.

Rifai questo quiz

Come questo aiuta a salvare il pianeta

L'EPA riporta tempi di ricambio dei Grandi Laghi da 2.6 anni (Erie) a 191 anni (Superiore), ed è per questo che le sostanze tossiche che entrano nel lago Superiore sono un problema di più generazioni.

Gli scienziati della pesca della NOAA valutano gli stock con modelli di popolazione basati su queste idee; il rendimento massimo sostenibile del modello logistico è il classico punto di partenza.

Su Saving Planets: Sezione Oceani · Pagina Fiumi

Fonti: U.S. EPA: Physical features of the Great Lakes (retention times) (https://www.epa.gov/greatlakes/physical-features-great-lakes) · U.S. EPA: Understanding global warming potentials (https://www.epa.gov/ghgemissions/understanding-global-warming-potentials) · NOAA Fisheries: valutazioni delle popolazioni (https://www.fisheries.noaa.gov/topic/population-assessments)

Risorse di apprendimento gratuite

- Lebl, 1.6 Autonomous equations (https://www.jirka.org/diffyqs/html/auteq_section.html): Equilibri, crescita logistica, prelievo.
- Lebl, 1.4 Integrating factor (https://www.jirka.org/diffyqs/html/intfactor_section.html): Problemi di miscelazione.
- OpenStax Calculus 2, 4.4 The Logistic Equation (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/4-4-the-logistic-equation): Modello logistico.

Guarda la lezione

First Order Autonomous Equations (https://ocw.mit.edu/courses/18-03sc-differential-equations-fall-2011/resources/first-order-autonomous-equations/) (in inglese)

MIT 18.03SC Differential Equations (Fall 2011), MIT OpenCourseWare. Licenza: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Condizioni d'uso (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Link fornito solo per lo studio gratuito; Saving Planets non è affiliato a questa università né approvato da essa.

☐ **Ho finito questa unità**

Equazioni lineari del secondo ordine e oscillazioni

Equazioni lineari a coefficienti costanti, l'equazione caratteristica e le vibrazioni libere: non smorzate, sottosmorzate, con smorzamento critico e sovrasmorzate.

Obiettivi di apprendimento

Alla fine di questa unità saprai:

- Risolvere ay'' + by' + cy = 0 con l'equazione caratteristica.
- Gestire radici reali, ripetute e complesse.
- Modellare sistemi massa-molla-smorzatore.
- Classificare lo smorzamento e calcolare la pulsazione naturale e lo smorzamento critico.

Concetti chiave

- Prova y = e^(rt): ar² + br + c = 0. Due radici reali danno due esponenziali; una radice doppia dà (c_1 + c_2t)e^(rt); radici complesse α ± iβ danno e^(αt)(c_1 cos βt + c_2 sin βt).
- Sovrapposizione: le somme di soluzioni di un'equazione lineare omogenea sono soluzioni.
- mx'' + cx' + kx = 0 ha pulsazione naturale ω_0 = √(k/m).
- Uno smorzamento c < 2√(mk) oscilla e decade (sottosmorzato); c = 2√(mk) ritorna nel modo più rapido senza sovraelongazione (critico).

Equazioni chiave

$$ar^2 + br + c = 0$$

`ar^2+br+c=0`

Equazione caratteristica

$$y = e^{\alpha t}(c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t)$$

`y=e^α t(c_1β t+c_2β t)`

Radici complesse α ± iβ

$$mx'' + cx' + kx = 0,\ \omega_0 = \sqrt{k/m}$$

`mx''+cx'+kx=0,\ ω_0=/m`

Massa-molla-smorzatore

$$c_{\text{crit}} = 2\sqrt{mk}$$

`c_crit=2`

Smorzamento critico

Esempi svolti passo passo

Esempio 3.1 Risolvi $y'' + 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Qual è il periodo?

1. $r^2 + 4 = 0$, $r = \pm 2i$.
2. $y = \cos 2t$.
3. Periodo $2\pi/2$.

Risposta: $y = \cos 2t$, periodo $\pi \approx 3.14$.

Esempio 3.2 Risolvi $y'' + 2y' + 5y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, e trova $y(1)$.

1. $r = -1 \pm 2i$.
2. $y = e^{-t}(\cos 2t + \tfrac{1}{2} \sin 2t)$ soddisfa entrambe le condizioni.
3. $y(1) = e^{-1}(\cos 2 + \tfrac{1}{2} \sin 2)$.

Risposta: ≈ 0.0142: l'oscillazione si è quasi spenta.

Esempio 3.3 Una massa di 2 kg è appesa a una molla con $k = 50$ N/m. Trova ω_0, la frequenza in hertz e lo smorzamento critico.

1. $\omega_0 = \sqrt{(50/2)} = 5$ rad/s.
2. $f = 5/(2\pi) = 0.796$ Hz.
3. $c_{crit} = 2\sqrt{(2 \times 50)} = 20$ N·s/m.

Risposta: 5 rad/s, 0.80 Hz, 20 N·s/m.

Esercizi

Svolgi ciascuno prima su carta, poi controlla.

1. Risolvi $y'' - 3y' + 2y = 0$.

   $r = 1, 2$: $y = c_1 e^t + c_2 e^{2t}$.

2. Risolvi $y'' + 2y' + y = 0$.

   Radice doppia $r = -1$: $y = (c_1 + c_2 t)e^{-t}$.

3. Classifica x'' + 6x' + 5x = 0.

   r = −1, −5: sovrasmorzato (c = 6 > 2√5).

4. Trova il periodo di x'' + 9x = 0.

   ω = 3, periodo 2π/3 ≈ 2.09.

Errori concettuali comuni

Mito: Radici complesse significano soluzioni complesse.

In realtà: Parte reale e immaginaria danno soluzioni reali: e^(αt)cos βt ed e^(αt)sin βt.

Mito: Una radice doppia dà una sola soluzione.

In realtà: La seconda è t e^(rt).

Mito: Più smorzamento significa sempre assestamento più rapido.

In realtà: I sistemi sovrasmorzati ritornano più lentamente di quelli con smorzamento critico.

Flashcard

Equazione caratteristica

$ar^2 + br + c = 0$.

Sovrapposizione

Le somme di soluzioni sono soluzioni (lineare omogenea).

Radice doppia

$(c_1 + c_2t)e^{(rt)}$.

Pulsazione naturale

$\omega_0 = \sqrt{(k/m)}$.

Sottosmorzato

Oscilla mentre decade.

Smorzamento critico

$c = 2\sqrt{(mk)}$.

Quiz di autoverifica

1. Le radici 2 ± 3i danno le soluzioni...

e^(2t), e^(3t)

e^(2t)cos 3t, e^(2t)sin 3t

cos 2t

te^(2t)

e^(2t)cos 3t, e^(2t)sin 3t. α = 2, β = 3.

2. Pulsazione naturale di mx" + kx = 0:

k/m

√(k/m)

m/k

√(mk)

√(k/m). $r^2 = -k/m$.

3. Lo smorzamento critico c è uguale a...

√(mk)

2√(mk)

mk

k/m

2√(mk). Discriminante nullo.

4. y" + 2y' + y = 0 è...

sottosmorzato

con smorzamento critico

sovrasmorzato

non smorzato

con smorzamento critico. Radice doppia.

Rifai questo quiz

Come questo aiuta a salvare il pianeta

Ogni struttura alta, dalla torre di una turbina eolica a un ponte, ha frequenze naturali fissate da rigidezza e massa, esattamente $\omega_0 = \sqrt{(k/m)}$ nel modello più semplice. Lo smorzamento decide quanto velocemente si spegne l'oscillazione causata dalle raffiche, e questo influisce sulla fatica e sulla durata della struttura.

Su Saving Planets: Fisica I, Unità 8: oscillazioni

Fonti: DOE degli Stati Uniti: come funzionano le turbine eoliche? (in inglese) (https://www.energy.gov/eere/wind/how-do-wind-turbines-work) · Lebl, 2.4 Mechanical vibrations (https://www.jirka.org/diffyqs/html/sec_mv.html)

Risorse di apprendimento gratuite

- Lebl, 2.1 Second-order linear ODEs (https://www.jirka.org/diffyqs/html/solinear_section.html): Teoria.
- Lebl, 2.2 Constant coefficient equations (https://www.jirka.org/diffyqs/html/sec_ccsol.html): Equazione caratteristica.
- Lebl, 2.4 Mechanical vibrations (https://www.jirka.org/diffyqs/html/sec_mv.html): Smorzamento.
- PhET: Masses and Springs (https://phet.colorado.edu/en/simulations/masses-and-springs): Simulazione.

Guarda la lezione

Constant Coefficient Second Order Homogeneous DE's (https://ocw.mit.edu/courses/18-03sc-differential-equations-fall-2011/resources/constant-coefficient-second-order-homogeneous-des/) (in inglese)

MIT 18.03SC Differential Equations (Fall 2011), MIT OpenCourseWare. Licenza: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Condizioni d'uso (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Link fornito solo per lo studio gratuito; Saving Planets non è affiliato a questa università né approvato da essa.

☐ **Ho finito questa unità**

Vibrazioni forzate e risonanza

Equazioni non omogenee, coefficienti indeterminati, risposta in ampiezza di un oscillatore forzato, battimenti e risonanza.

Obiettivi di apprendimento

Alla fine di questa unità saprai:

- Trovare soluzioni particolari con i coefficienti indeterminati.
- Scrivere la soluzione generale come omogenea più particolare.
- Calcolare l'ampiezza a regime di un oscillatore smorzato forzato.
- Spiegare la risonanza e come gli ingegneri la evitano.

Concetti chiave

- Soluzione generale = soluzione omogenea + una soluzione particolare.
- Ipotizza la forma dalla forzante: per cos ωt prova A cos ωt + B sin ωt.
- Forzato alla pulsazione ω, un oscillatore smorzato si assesta in un moto stazionario di ampiezza X = $F_0/\sqrt{((k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2)}$.
- Vicino a ω = ω_0 l'ampiezza ha un picco; con il rapporto di smorzamento ζ = c/c_crit, l'amplificazione dinamica massima è circa 1/(2ζ). Senza smorzamento, la risposta cresce senza limite.

Equazioni chiave

$$y = y_h + y_p$$

y=y_h+y_p

Soluzione generale

$$X = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}}$$

X=_0(k-mω^2)^2+(cω)^2

Ampiezza a regime

$$\frac{X}{F_0/k} = \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}},\ r = \frac{\omega}{\omega_0}$$

(X)/(F_0/k)=1(1-r^2)^2+(2 r)^2,\ r=(ω)/(ω_0)

Amplificazione dinamica

$$y'' + \omega^2 y = \cos \omega t \Rightarrow y_p = \frac{t \sin \omega t}{2\omega}$$

y''+ω^2y=ω t y_p=(tω t)/(2ω)

Risonanza pura

Esempi svolti passo passo

Esempio 4.1 Trova una soluzione particolare di y" + y = cos 2t.

1. Prova y_p = A cos 2t: −4A + A = 1.
2. A = −1/3.

Risposta: y_p = −⅓ cos 2t (in opposizione di fase, perché la forzante è sopra la frequenza naturale).

Esempio 4.2 Modella la torre di una turbina eolica come un singolo oscillatore con frequenza naturale 0.30 Hz e rapporto di smorzamento ζ = 0.01 (valori di esempio). Il rotore gira a 12 giri/min = 0.20 Hz, e tre pale passano davanti alla torre a 0.60 Hz. Trova l'amplificazione dinamica in ciascun caso e alla risonanza.

1. At 0.20 Hz, r = 0.667: 1/√((1 − 0.444)² + (0.0133)²) = 1.80.
2. At 0.60 Hz, r = 2: 1/√(9 + 0.0016) = 0.333.
3. At r = 1: 1/(2ζ) = 50.

Risposta: 1.8 e 0.33, ma 50 alla risonanza. Per questo i progettisti tengono la frequenza naturale della torre lontana dalle frequenze del rotore e del passaggio delle pale.

Esempio 4.3 Risolvi y" + y = cos t, y(0) = y'(0) = 0.

1. La forzante coincide con la frequenza naturale, quindi prova y_p = t(A cos t + B sin t).
2. Sostituendo si ottiene A = 0, B = ½.
3. y = ½ t sin t.

Risposta: L'ampiezza cresce come t/2 senza limite: risonanza pura.

Esercizi

Svolgi ciascuno prima su carta, poi controlla.

1. Trova y_p per y" + 3y' + 2y = 4.

$y_p = 2$.

2. Trova y_p per $y'' - y = e^t$.

   e^t risolve l'equazione omogenea, quindi $y_p = \frac{1}{2} t e^t$.

3. Una massa di 1 kg, $k = 100$ N/m, $c = 2$ N·s/m è forzata da $10 \cos 10t$ N. Trova l'ampiezza a regime.

   $k - m\omega^2 = 0$, quindi $X = 10/(2 \times 10) = 0.5$ m.

4. Per $\zeta = 0.05$, qual è l'amplificazione massima?

   Circa $1/(2 \times 0.05) = 10$.

Errori concettuali comuni

Mito: La risonanza richiede una forza grande.
In realtà: Una piccola forza periodica alla frequenza naturale genera una risposta grande.

Mito: Lo smorzamento elimina la risonanza.
In realtà: Limita il picco a circa $1/(2\zeta)$, che resta grande per strutture poco smorzate.

Mito: I coefficienti indeterminati funzionano per qualsiasi forzante.
In realtà: Solo per polinomi, esponenziali, seni e coseni e loro prodotti; altrimenti usa la variazione delle costanti o Laplace.

Flashcard

Soluzione particolare

Una qualsiasi soluzione dell'equazione forzata.

Coefficienti indeterminati

Ipotizzare la forma della forzante.

Risposta in ampiezza

$X = F_0/\sqrt{((k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2)}$.

Rapporto di smorzamento

$\zeta = c/(2\sqrt{(mk)})$.

Risonanza

Risposta grande vicino a ω_0; picco $\approx 1/(2\zeta)$.

Battimenti

Due frequenze vicine creano un inviluppo lento.

Quiz di autoverifica

1. Soluzione generale =

solo y_p

y_h + y_p

y_h × y_p

y_h − y_p

y_h + y_p. Linearità.

2. La risonanza si verifica quando la frequenza forzante è vicina a…

zero

la frequenza naturale

il suo doppio

l’infinito

la frequenza naturale. Denominatore minimo.

3. Con $\zeta = 0.01$ l’amplificazione massima è circa…

1

10

50

100

50. $1/(2\zeta)$.

4. Forzare molto sopra ω_0 dà un’amplificazione…

grande

minore di 1

esattamente 1

infinita

minore di 1. $\approx 1/r^2$.

Rifai questo quiz

Come questo aiuta a salvare il pianeta

Le turbine eoliche diventano sempre più grandi e alte per raccogliere più energia, e le loro torri e pale sono poco smorzate. Evitare la risonanza tra la struttura e il rotore in rotazione è una parte essenziale per mantenere sicure e durature queste macchine di energia pulita. Il laboratorio D la esplora con un modello di esempio.

Su Saving Planets: Fisica I, unità 3: energia eolica

Fonti: DOE degli Stati Uniti: come funzionano le turbine eoliche? (in inglese) (https://www.energy.gov/eere/wind/how-do-wind-turbines-work) · Lebl, 2.6 Forced oscillations and resonance (https://www.jirka.org/diffyqs/html/forcedo_section.html)

Risorse di apprendimento gratuite

- Lebl, 2.5 Nonhomogeneous equations (https://www.jirka.org/diffyqs/html/sec_nonhom.html): Coefficienti indeterminati e variazione delle costanti.
- Lebl, 2.6 Forced oscillations and resonance (https://www.jirka.org/diffyqs/html/forcedo_section.html): Risonanza.
- MIT OCW 18.03SC, Unit II (https://ocw.mit.edu/courses/18-03sc-differential-equations-fall-2011/): Equazioni del secondo ordine, lezioni ed esercizi.

☐ **Ho finito questa unità**

Trasformate di Laplace

Trasformare le equazioni differenziali in algebra: la trasformata e la sua tabella, le derivate, le funzioni a gradino per ingressi commutati, gli impulsi e la convoluzione.

Obiettivi di apprendimento

Alla fine di questa unità saprai:

- Calcolare trasformate di Laplace dalla definizione e da una tabella.
- Risolvere problemi ai valori iniziali con trasformate e fratti semplici.
- Modellare ingressi commutati con gradini unitari e traslazioni.
- Modellare impulsi improvvisi con la funzione delta.

Concetti chiave

- L{f}(s) = ∫₀^∞ e^(−st) f(t) dt trasforma le derivate in moltiplicazioni per s, con i valori iniziali già inclusi.
- Ricava Y(s), scomponi in fratti semplici, poi antitrasforma con la tabella.
- Un interruttore azionato all'istante a è u(t − a); la regola di traslazione è L{u(t − a)f(t − a)} = e^(−as)F(s).
- Un colpo istantaneo è δ(t − a), con L{δ(t − a)} = e^(−as).

Equazioni chiave

$$\mathcal{L}\{f\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

L\=_0^∞ e^-stf(t) dt

Definizione

$$\mathcal{L}\{y'\} = sY - y(0),\ \mathcal{L}\{y''\} = s^2Y - sy(0) - y'(0)$$

L'\=sY-y(0),\ L''\=s^2Y-sy(0)-y'(0)

Derivate

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a},\ \mathcal{L}\{\sin \omega t\} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

L^at\=1s-a,\ L\ω t\=(ω)/(s^2+ω^2)

Voci della tabella

$$\mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s)$$

`L(t-a)f(t-a)\=e^-asF(s)`

Regola di traslazione

Esempi svolti passo passo

Esempio 5.1 Risolvi y' − 2y = e^(3t), y(0) = 1.

1. sY − 1 − 2Y = 1/(s − 3).
2. Y = 1/((s − 2)(s − 3)) + 1/(s − 2) = [1/(s − 3) − 1/(s − 2)] + 1/(s − 2).
3. Y = 1/(s − 3).

Risposta: y = e^(3t). Verifica: 3e^(3t) − 2e^(3t) = e^(3t).

Esempio 5.2 Un lago pulito inizia a ricevere un afflusso costante di inquinante a t = 2: y' + y = u(t − 2), y(0) = 0. Trova y(3).

1. (s + 1)Y = e^(−2s)/s.
2. 1/(s(s + 1)) = 1/s − 1/(s + 1), quindi y = (1 − e^(−(t − 2)))u(t − 2).
3. y(3) = 1 − e^(−1).

Risposta: ≈ 0.632 del livello finale, una costante di tempo dopo la commutazione.

Esempio 5.3 Un oscillatore a riposo y'' + 4y = δ(t − 1) riceve un colpo a t = 1. Trova y(1 + π/4).

1. (s² + 4)Y = e^(−s).
2. y = ½ sin(2(t − 1)) u(t − 1).
3. A t = 1 + π/4: ½ sin(π/2).

Risposta: 0.5, il primo picco.

Esercizi

Svolgi ciascuno prima su carta, poi controlla.

1. Trova L{t}.

   1/s².

2. Antitrasforma 3/(s² + 9).

   sin 3t.

3. Risolvi $y' + y = 0$, $y(0) = 4$.

   $Y = 4/(s + 1)$, $y = 4e^{-t}$.

4. Risolvi $y'' + y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

   $Y = 2/(s^2 + 1)$, $y = 2 \sin t$.

5. Trova $\mathcal{L}\{u(t - 3)\}$.

   e^{-3s}/s.

Errori concettuali comuni

Mito: $\mathcal{L}\{fg\} = \mathcal{L}\{f\}\mathcal{L}\{g\}$.
In realtà: Il prodotto delle trasformate corrisponde alla convoluzione, non al prodotto.

Mito: Le condizioni iniziali si applicano alla fine.
In realtà: Entrano subito tramite $\mathcal{L}\{y'\} = sY - y(0)$.

Mito: Le funzioni a gradino richiedono una soluzione a tratti.
In realtà: Laplace gestisce le commutazioni in un solo passaggio.

Flashcard

Trasformata di Laplace

$\int_0^\infty e^{-st} f \, dt$.

$\mathcal{L}\{y'\}$

$sY - y(0)$.

$\mathcal{L}\{e^{at}\}$

$1/(s - a)$.

Gradino unitario

$u(t - a)$: spento e poi acceso.

Delta

$\delta(t - a)$: impulso istantaneo; $\mathcal{L} = e^{-as}$.

Convoluzione

$\mathcal{L}\{f * g\} = FG$.

Quiz di autoverifica

1. $\mathcal{L}\{y'\} =$

sY

sY − y(0)

Y/s

Y − s

sY − y(0). Integrazione per parti.

2. L{e^(−2t)} =

1/(s − 2)

1/(s + 2)

s + 2

−2/s

1/(s + 2). a = −2.

3. Un interruttore acceso a t = 5 si scrive...

δ(t − 5)

u(t − 5)

e^(5t)

t − 5

u(t − 5). Gradino unitario.

4. L{δ(t)} =

0

1

s

1/s

1. e^(−0s).

Rifai questo quiz

Come questo aiuta a salvare il pianeta

Gli ingressi ambientali reali si accendono e si spengono: inizia uno scarico industriale, si ferma un rilascio da una diga, un'eruzione vulcanica immette aerosol in un'unica emissione. Ingressi a gradino e a impulso con le trasformate di Laplace danno la risposta a ciascuno in un solo calcolo, il metodo che gli ingegneri usano per il controllo delle reti elettriche e degli impianti di depurazione.

Su Saving Planets: Pagina Fiumi

Fonti: Lebl, 6.1 The Laplace transform (https://www.jirka.org/diffyqs/html/laplace_section.html) · Lebl, 6.4 Dirac delta and impulse response (https://www.jirka.org/diffyqs/html/diracdelta_section.html)

Risorse di apprendimento gratuite

- Lebl, 6.1 The Laplace transform (https://www.jirka.org/diffyqs/html/laplace_section.html): Definizione e tabella.
- Lebl, 6.2 Transforms of derivatives and ODEs (https://www.jirka.org/diffyqs/html/transformsofders_section.html): Risoluzione di problemi ai valori iniziali.
- Lebl, 6.3 Convolution (https://www.jirka.org/diffyqs/html/convolution_section.html): Convoluzione.
- Lebl, 6.4 Dirac delta (https://www.jirka.org/diffyqs/html/diracdelta_section.html): Impulsi.

Guarda la lezione

Laplace Transform (https://ocw.mit.edu/courses/18-03sc-differential-equations-fall-2011/resources/laplace-transform/) (in inglese)

MIT 18.03SC Differential Equations (Fall 2011), MIT OpenCourseWare. Licenza: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Condizioni d'uso (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Link fornito solo per lo studio gratuito; Saving Planets non è affiliato a questa università né approvato da essa.

☐ **Ho finito questa unità**

Sistemi lineari, autovalori e piani delle fasi

Sistemi x' = Ax, metodi degli autovalori, il piano delle fasi e la classificazione degli equilibri in nodi, selle, spirali e centri.

Obiettivi di apprendimento

Alla fine di questa unità saprai:

- Scrivere equazioni accoppiate ed equazioni di ordine superiore come sistemi del primo ordine.
- Risolvere x' = Ax con autovalori e autovettori.
- Disegnare ritratti di fase.
- Classificare l'origine con traccia e determinante.

Concetti chiave

- Se Av = λv, allora x = e^(λt)v risolve x' = Ax; la soluzione generale combina un termine di questo tipo per ogni autovalore.
- Autovalori reali di segno opposto: una sella. Entrambi negativi: un nodo stabile.
- Autovalori complessi α ± iβ: spirali (stabili se α < 0); centri se α = 0.
- Per una matrice 2 × 2, λ² − (tr A)λ + det A = 0.

Equazioni chiave

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$$

`x'=A x`

Sistema lineare

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

`(A- I)=0`

Autovalori

$$\mathbf{x} = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2$$

`x=c_1e^_1t v_1+c_2e^_2t v_2`

Soluzione generale (autovalori reali distinti)

$$\lambda^2 - (\operatorname{tr} A)\lambda + \det A = 0$$

`^2-()+ A=0`

Polinomio caratteristico (2 × 2)

Esempi svolti passo passo

Esempio 6.1 Un modello del carbonio a due compartimenti: atmosfera A e oceano O si scambiano carbonio con A' = −0.2A + 0.1O, O' = 0.2A − 0.1O (all'anno; tassi di esempio). Si parte con 3 unità nell'aria e nessuna nell'oceano.

1. Autovalori: tr = −0.3, det = 0, quindi λ = 0 e −0.3.
2. λ = 0 ha autovettore (1, 2): la ripartizione di equilibrio è 1 : 2. Il carbonio totale (3) si conserva, quindi A → 1, O → 2.
3. A(t) = 1 + 2e^(−0.3t).

Risposta: L'aria trattiene un terzo dell'impulso in questo modello giocattolo, con scala temporale 1/0.3 ≈ 3.33 anni.

Esempio 6.2 Classifica l'origine per A = [[1, 2], [2, 1]].

1. $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$, λ = 3, −1.

Risposta: Segni opposti: una sella (instabile).

Esempio 6.3 Classifica l'origine per A = [[−1, −2], [2, −1]].

1. tr = −2, det = 5: $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$.
2. λ = −1 ± 2i.

Risposta: Una spirale stabile: le soluzioni girano verso l'interno, decadendo come e^(−t).

Esercizi

Svolgi ciascuno prima su carta, poi controlla.

1. Scrivi y'' + 3y' + 2y = 0 come sistema.

   $x_1 = y$, $x_2 = y'$: $x_1' = x_2$, $x_2' = -2x_1 - 3x_2$.

2. Autovalori di [[2, 0], [0, −3]]?

   2 e −3: una sella.

3. Classifica [[0, 1], [−4, 0]].

$\lambda = \pm 2i$: un centro (oscillazione non smorzata).

4. Classifica $[[-3, 1], [0, -2]]$.

   $\lambda = -3, -2$: un nodo stabile.

Errori concettuali comuni

Mito: Gli autovettori sono unici.

In realtà: Va bene qualsiasi multiplo non nullo.

Mito: Un autovalore nullo significa nessun moto.

In realtà: Significa una retta di equilibri o una quantità conservata, come nel modello a compartimenti del carbonio.

Mito: Gli autovalori complessi danno solo soluzioni complesse.

In realtà: Parte reale e immaginaria danno soluzioni reali.

Flashcard

Sistema lineare

$x' = Ax$.

Metodo degli autovalori

$x = e^{\lambda t}v$.

Sella

Autovalori reali di segno opposto.

Nodo

Autovalori reali dello stesso segno.

Spirale

Autovalori complessi, $\alpha \neq 0$.

Traccia–determinante

$\lambda^2 - \operatorname{tr} \lambda + \det = 0$.

Quiz di autoverifica

1. Gli autovalori 2 e −1 danno...

un nodo

una sella

una spirale

un centro

una sella. Segni opposti.

2. Gli autovalori $-1 \pm 3i$ danno...

spirale instabile

spirale stabile

centro

sella

spirale stabile. $\alpha < 0$.

3. Per A di ordine 2 × 2, la somma degli autovalori è...

det A

tr A

0

1

tr A. $\lambda_1 + \lambda_2 = \text{tr } A$.

4. Un centro ha autovalori...

reali, uguali

puramente immaginari

zero

positivo

puramente immaginari. $\alpha = 0$.

Rifai questo quiz

Come questo aiuta a salvare il pianeta

I modelli del ciclo del carbonio sono sistemi lineari di compartimenti (atmosfera, oceano superficiale, oceano profondo, terre emerse) che si scambiano carbonio. I loro autovalori sono le scale temporali su cui un impulso di CO_2 viene assorbito: alcune rapide, altre di secoli o più. La panoramica della NASA sul ciclo del carbonio descrive i cicli rapido e lento che questi compartimenti rappresentano.

Su Saving Planets: Sezione Oceani

Fonti: NASA Earth Observatory: The Carbon Cycle (https://earthobservatory.nasa.gov/features/CarbonCycle) · NOAA Global Monitoring Laboratory: Trends in atmospheric CO_2 (https://gml.noaa.gov/ccgg/trends/)

Risorse di apprendimento gratuite

- Lebl, 3.1 Introduction to systems (https://www.jirka.org/diffyqs/html/sec_introtosys.html): Sistemi.
- Lebl, 3.4 Eigenvalue method (https://www.jirka.org/diffyqs/html/eigenmethod_section.html): Autovalori.
- Lebl, 3.5 Two-dimensional systems and their vector fields (https://www.jirka.org/diffyqs/html/sec_twodimaut.html): Ritratti di fase.

☐ **Ho finito questa unità**

Sistemi non lineari e stabilità

Equilibri dei sistemi non lineari, linearizzazione con la jacobiana, cicli preda-predatore e il modello epidemico SIR.

Obiettivi di apprendimento

Alla fine di questa unità saprai:

- Trovare gli equilibri di sistemi non lineari.
- Linearizzare con la jacobiana e classificare gli equilibri.
- Analizzare il modello preda-predatore di Lotka–Volterra.
- Usare il modello SIR: R_0, soglia di immunità di gregge e dimensione finale.

Concetti chiave

- Vicino a un equilibrio, un sistema non lineare si comporta come la sua linearizzazione x' = J x, dove J è la jacobiana (a meno che la linearizzazione non sia un centro).
- Lotka–Volterra: prede x' = ax − bxy, predatori y' = −cy + dxy. L'equilibrio è (c/d, a/b); le popolazioni ruotano attorno a esso.
- SIR: S' = −βSI, I' = βSI − γI, R' = γI. Il numero di riproduzione di base è $R_0 = \beta/\gamma$; un focolaio cresce solo se $R_0 S > 1$.
- La soglia di immunità di gregge è $1 - 1/R_0$; la quota finale di non infetti s_∞ risolve $\ln s_\infty = R_0(s_\infty - 1)$.

Equazioni chiave

$$J = \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix}$$

`J=_x&f_y\_x&g_y`

Jacobiana

$$x' = ax - bxy,\; y' = -cy + dxy$$

`x'=ax-bxy,\ y'=-cy+dxy`

Lotka–Volterra

$$S' = -\beta SI,\; I' = \beta SI - \gamma I,\; R' = \gamma I$$

`S'=-β SI,\ I'=β SI-γ I,\ R'=γ I`

Modello SIR

$$R_0 = \beta/\gamma,\ \ln s_\infty = R_0(s_\infty - 1)$$

`R_0=β/γ,\ s_∞=R_0(s_∞-1)`

Numero di riproduzione e dimensione finale

Esempi svolti passo passo

Esempio 7.1 Prede e predatori seguono x' = x − 0.02xy, y' = −0.5y + 0.005xy (valori di esempio, anni). Trova l'equilibrio di coesistenza e il periodo dei piccoli cicli.

1. x' = 0 richiede y = 1/0.02 = 50; y' = 0 richiede x = 0.5/0.005 = 100.
2. Lì la jacobiana ha autovalori ±i√(ac) = ±i√0.5.
3. Periodo 2π/√0.5.

Risposta: 100 prede e 50 predatori; i piccoli cicli durano circa 8.9 anni, con i predatori in ritardo rispetto alle prede.

Esempio 7.2 Un'epidemia ha β = 0.3 al giorno e γ = 0.1 al giorno. Trova R_0, la soglia di immunità di gregge e la quota finale di infettati.

1. R_0 = 3.
2. Soglia 1 − 1/3 = 0.667.
3. Itera s = e^(3(s − 1)): s∞ = 0.0595.

Risposta: R_0 = 3; un'immunità del 67 % ferma la crescita; senza interventi circa il 94 % viene infine infettato, più della soglia perché l'epidemia la supera.

Esempio 7.3 Classifica l'equilibrio P = K della crescita logistica P' = rP(1 − P/K).

1. f'(P) = r − 2rP/K; f'(K) = −r < 0.

Risposta: Stabile: le piccole perturbazioni decadono con tasso r.

Esercizi

Svolgi ciascuno prima su carta, poi controlla.

1. Trova gli equilibri di x' = x(3 − x − y), y' = y(2 − x − y).

   (0, 0), (3, 0), (0, 2) (nessuno interno: le rette x + y = 3 e x + y = 2 sono parallele).

2. Linearizza $x' = \sin x$ vicino a $x = 0$ e $x = \pi$.

   $f'(0) = 1$ (instabile), $f'(\pi) = -1$ (stabile).

3. Se $R_0 = 2$, qual è la soglia di immunità di gregge?

   $1 - 1/2 = 50\%$.

4. Nell'esempio preda-predatore, cosa succede alle prede se si eliminano i predatori?

   $x' = x$: crescita esponenziale (finché non intervengono altri limiti).

Errori concettuali comuni

Mito: La linearizzazione prevede sempre il comportamento.
In realtà: Non quando dà un centro; decidono i termini non lineari.

Mito: Immunità di gregge significa che l'epidemia si ferma subito.
In realtà: Le infezioni calano dopo la soglia ma possono ancora superarla.

Mito: I cicli preda-predatore significano che il modello è instabile.
In realtà: Le orbite di Lotka–Volterra sono chiuse: neutralmente stabili, né crescono né si riducono.

Flashcard

Jacobiana

Matrice delle derivate parziali prime.

Linearizzazione

$x' \approx J\,x$ vicino a un equilibrio.

Lotka–Volterra

Cicli preda-predatore attorno a $(c/d, a/b)$.

SIR

Suscettibili, infetti, guariti.

R_0

β/γ, nuove infezioni per caso.

Soglia di immunità di gregge

$1 - 1/R_0$.

Quiz di autoverifica

1. $R_0 = \beta/\gamma = 4$ dà una soglia di...

25%

50%

75%

100%

75%. 1 − 1/4.

2. Il livello delle prede all’equilibrio di Lotka–Volterra è…

a/b

c/d

b/a

d/c

c/d. $y' = 0$ richiede $x = c/d$.

3. La linearizzazione usa…

l’hessiana

la jacobiana

il laplaciano

la traccia

la jacobiana. Derivate parziali prime.

4. Un’epidemia cresce inizialmente se…

$R_0 S > 1$

$R_0 < 1$

$\gamma > \beta$

$I = 0$

$R_0S > 1$. $I' = (\beta S - \gamma)I$.

Rifai questo quiz

Come questo aiuta a salvare il pianeta

Sull'Isle Royale, nel lago Superiore, il National Park Service registra il numero di lupi e alci dal 1980, una lunga serie preda-predatore. I loro alti e bassi collegati, e la decisione del Park Service di trasferire nuovi lupi sull'isola, sono esattamente il tipo di sistema che i modelli di Lotka–Volterra iniziano a spiegare.

La stessa matematica SIR che guida la risposta sanitaria pubblica si usa per le malattie della fauna che minacciano gli ecosistemi.

Su Saving Planets: Sezione Oceani

Fonti: National Park Service: Wolves of Isle Royale (https://www.nps.gov/isro/learn/nature/wolves.htm) · Wolves and Moose of Isle Royale project (long-term data) (https://www.isleroyalewolf.org/)

Risorse di apprendimento gratuite

- Lebl, 8.1 Linearization, critical points and equilibria (https://www.jirka.org/diffyqs/html/linearization_section.html): Linearizzazione.
- Lebl, 8.2 Stability and classification (https://www.jirka.org/diffyqs/html/nlinstability_section.html): Stabilità.
- Lebl, 8.3 Applications of nonlinear systems (https://www.jirka.org/diffyqs/html/nlinapps_section.html): Preda-predatore e altro.

Guarda la lezione

The Relation Between Nonlinear Systems and First-order ODE's (https://ocw.mit.edu/courses/18-03sc-differential-equations-fall-2011/resources/the-relation-between-nonlinear-systems-and-first-order-odes/) (in inglese)

MIT 18.03SC Differential Equations (Fall 2011), MIT OpenCourseWare. Licenza: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Condizioni d'uso (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Link fornito solo per lo studio gratuito; Saving Planets non è affiliato a questa università né approvato da essa.

☐ **Ho finito questa unità**

Metodi numerici

Metodi di Eulero, Eulero migliorato e Runge–Kutta, passo ed errore, e un modello climatico di bilancio energetico risolto numericamente.

Obiettivi di apprendimento

Alla fine di questa unità saprai:

- Applicare Eulero, Eulero migliorato (Heun) e RK4.
- Spiegare l'ordine di un metodo e come l'errore scala con il passo.
- Risolvere sistemi numericamente.
- Costruire e risolvere un modello climatico di bilancio energetico a zero dimensioni.

Concetti chiave

- Eulero avanza lungo la pendenza: y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n). Il suo errore globale è proporzionale a h.
- Eulero migliorato fa la media di due pendenze (errore ∝ h²); RK4 di quattro (errore ∝ h⁴).
- Dimezzare h riduce l'errore di RK4 di circa 16 volte, ed è per questo che è il metodo di riferimento.
- Bilancio energetico: C dT/dt = luce solare assorbita − εσT⁴. Il suo equilibrio e la sua scala temporale derivano direttamente dall'equazione.

Equazioni chiave

$$y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n)$$

`y_n+1=y_n+hf(t_n,y_n)`

Metodo di Eulero

$$y_{n+1} = y_n + \tfrac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

`y_n+1=y_n+ h6(k_1+2k_2+2k_3+k_4)`

Runge–Kutta 4

$$C\frac{dT}{dt} = S(1-\alpha) - \varepsilon\sigma T^4$$

`CdT/dt=S(1-α)-σ T^4`

Modello di bilancio energetico

$$\lambda = 4\varepsilon\sigma T^3,\ \tau = C/\lambda$$

=4σ T^3,\ τ=C/

Retroazione linearizzata e scala temporale

Esempi svolti passo passo

Esempio 8.1 Approssima y(1) per y' = y, y(0) = 1 con h = 0.1 usando Eulero, Eulero migliorato e RK4.

1. Ogni passo di Eulero moltiplica per 1.1: $1.1^{10} = 2.5937$.
2. Eulero migliorato moltiplica per 1.105: 2.7141.
3. RK4 moltiplica per 1.1051708: 2.7182797.

Risposta: Valore vero e = 2.7182818. Errori: 0.12, 0.0042 e 0.000002.

Esempio 8.2 La Terra assorbe 340 × (1 − 0.29) = 241.4 W/m² di luce solare (NASA). Se irradiasse come un corpo nero (ε = 1), quale temperatura la bilancerebbe? Quale ε effettiva dà la media attuale di circa 288 K?

1. $\sigma T^4 = 241.4$ dà $T = (241.4/5.67 \times 10^{-8})\wedge(1/4) = 255$ K.
2. $\varepsilon = 241.4/(\sigma \times 288^4) = 0.619$.

Risposta: 255 K (−18 °C) senza effetto serra; un'emissività effettiva di 0.62 rappresenta l'effetto serra che rende abitabile la Terra.

Esempio 8.3 Con ε = 0.619 a 288 K e uno strato di rimescolamento oceanico profondo 50 m (C = 1000 × 4186 × 50 J/(m²·K); profondità di esempio), trova λ, la scala temporale e il riscaldamento senza retroazioni per un forzante di 4 W/m² (valore di esempio).

1. $\lambda = 4\varepsilon\sigma T^3 = 3.35$ W/(m²·K).
2. $\tau = C/\lambda = 6.24 \times 10^7$ s ≈ 1.98 anni (circa 2).
3. $\Delta T = 4/3.35$.

Risposta: Circa 1.2 K di riscaldamento, raggiunto su una scala di 2 anni in questo modello semplice. Le retroazioni reali (vapore acqueo, ghiaccio) rendono il riscaldamento maggiore, come valuta l'IPCC.

Esercizi

Svolgi ciascuno prima su carta, poi controlla.

1. Un passo di Eulero per y' = t + y, y(0) = 1, h = 0.1.

$y_1 = 1 + 0.1(0 + 1) = 1.1$.

2. Se l'errore di Eulero è 0.12 con h = 0.1, stimalo con h = 0.05.

   Circa 0.06 (primo ordine).

3. Se l'errore di RK4 è 2×10^{-6} con h = 0.1, stimalo con h = 0.05.

   Circa $2 \times 10^{-6}/16 \approx 1.3 \times 10^{-7}$.

4. Quale temperatura di equilibrio dà il modello di bilancio energetico con $\varepsilon = 1$ e albedo 0.29?

   Circa 255 K.

Errori concettuali comuni

Mito: Passi più piccoli sono sempre meglio.

In realtà: Arrotondamento e costo crescono; un metodo di ordine superiore di solito è meglio di minuscoli passi di Eulero.

Mito: Una risposta numerica è esatta se il codice gira.

In realtà: Controlla sempre la convergenza dimezzando h.

Mito: Il risultato di 255 K significa che il modello è sbagliato.

In realtà: Mostra quanto l'effetto serra riscalda la Terra: circa 33 K.

Flashcard

Metodo di Eulero

$y + h f$.

Eulero migliorato

Media di due pendenze; ordine 2.

RK4

Quattro pendenze; ordine 4.

Passo

h; controlla la convergenza dimezzandolo.

Modello di bilancio energetico

$C T' = S(1 - \alpha) - \varepsilon \sigma T^4$.

Scala temporale climatica

$\tau = C/\lambda$.

Quiz di autoverifica

1. Il metodo di Eulero ha errore globale proporzionale a...

h

h^2

h^4

1/h

h. Primo ordine.

2. RK4 è di ordine...

1

2

4

8

4. Errore $\propto h^4$.

3. Senza effetto serra, la Terra avrebbe una media di circa...

288 K

255 K

273 K

300 K

255 K. $\sigma T^4 = 241\ W/m^2$.

4. Dimezzare h in RK4 riduce l'errore di circa...

2

4

16

32

16. 2^4.

Rifai questo quiz

Come questo aiuta a salvare il pianeta

Ogni modello climatico, da questo bilancio energetico di una riga ai modelli globali valutati dall'IPCC, è un sistema di equazioni differenziali risolto numericamente. Il bilancio energetico della NASA fornisce i dati: in media arrivano 340 W/m² di luce solare e il 29% viene riflesso.

Su Saving Planets: Introduzione alla programmazione, unità di simulazione

Fonti: NASA Earth Observatory: Climate and Earth's Energy Budget (https://earthobservatory.nasa.gov/features/EnergyBalance) · IPCC AR6 Working Group I: The Physical Science Basis (https://www.ipcc.ch/report/ar6/wg1/)

Risorse di apprendimento gratuite

- Lebl, 1.7 Numerical methods: Euler's method (https://www.jirka.org/diffyqs/html/numer_section.html): Eulero ed errore.
- Trench, Ch. 3: Numerical methods (https://digitalcommons.trinity.edu/mono/8/): Eulero migliorato e RK4.

☐ **Ho finito questa unità**

Soluzioni per serie, serie di Fourier ed equazione del calore

Soluzioni in serie di potenze di EDO, serie di Fourier di funzioni periodiche e separazione delle variabili per l'equazione del calore.

Obiettivi di apprendimento

Alla fine di questa unità saprai:

- Trovare soluzioni in serie di potenze da una ricorrenza.
- Calcolare i coefficienti di Fourier di semplici funzioni periodiche.
- Risolvere l'equazione del calore su una barra per separazione delle variabili.
- Stimare quanto in profondità arrivano nel suolo le onde di temperatura stagionali.

Concetti chiave

- Sostituire y = Σ$a_n x^n$, uguagliare le potenze e ottenere una ricorrenza per i coefficienti.
- Una funzione periodica è una somma di seni e coseni; per una funzione dispari su (−π, π), b_n = (2/π)$\int_0^{\pi}$ f sin nx dx.
- L'equazione del calore u_t = α u_xx diffonde il calore; ogni modo seno decade come e^(−α(nπ/L)²t), prima i modi veloci.
- Una temperatura superficiale periodica penetra nel suolo con profondità di smorzamento d = √(2α/ω).

Equazioni chiave

$$y = \sum a_n x^n$$

`y= a_nx^n`

Soluzione in serie di potenze

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

`b_n=2π_0^π f(x) nx dx`

Coefficiente di Fourier in seni

$$u_t = \alpha u_{xx}$$

`u_t=α u_xx`

Equazione del calore

$$d = \sqrt{2\alpha/\omega}$$

Profondità di smorzamento di un’onda di temperatura periodica

Esempi svolti passo passo

Esempio 9.1 Risolvi y'' + y = 0 con le serie di potenze.

1. $\Sigma(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \Sigma a_n x^n = 0$.
2. $a_{n+2} = -a_n/((n+2)(n+1))$.
3. I termini pari formano cos x, i dispari sin x.

Risposta: $y = a_0 \cos x + a_1 \sin x$, ricavata dalla ricorrenza.

Esempio 9.2 Trova la serie di Fourier dell’onda quadra f = 1 su (0, π), −1 su (−π, 0).

1. Dispari, quindi solo seni: $b_n = (2/\pi)\int_0^\pi \sin nx\,dx = (2/(n\pi))(1 - \cos n\pi)$.
2. $b_n = 4/(n\pi)$ per n dispari, 0 per n pari.

Risposta: $f = (4/\pi)(\sin x + \sin 3x/3 + \sin 5x/5 + \ldots)$; $b_1 \approx 1.273$.

Esempio 9.3 Un suolo con diffusività $\alpha = 5 \times 10^{-7}$ m²/s (valore di esempio) subisce un ciclo annuale di temperatura in superficie. Trova la profondità di smorzamento.

1. $\omega = 2\pi/(3.156 \times 10^7\ \text{s}) = 1.99 \times 10^{-7}\ \text{s}^{-1}$.
2. $d = \sqrt{(2 \times 5 \times 10^{-7}/1.99 \times 10^{-7})}$.

Risposta: Circa 2.24 m: l’escursione annuale si riduce di un fattore e ogni 2.2 m di profondità, quindi il suolo profondo risponde al riscaldamento lentamente, nell’arco di molti anni.

Esercizi

Svolgi ciascuno prima su carta, poi controlla.

1. Trova la ricorrenza per y' = y con le serie di potenze.

   $a_{n+1} = a_n/(n+1)$, quindi $y = a_0 e^x$.

2. $f(x) = x^2$ è pari o dispari? Quali termini di Fourier compaiono?

   Pari: solo coseni (più una costante).

3. Un modo della barra decade come e^(−α(π/L)²t). Come cambia il tempo di decadimento raddoppiando L?

   Il tempo di decadimento si moltiplica per 4.

4. Trova b_3 per l'onda quadra.

   $4/(3\pi) \approx 0.424$.

Errori concettuali comuni

Mito: Le serie di Fourier funzionano solo per funzioni lisce.

In realtà: Funzionano anche con salti, convergendo al punto medio del salto.

Mito: Il calore si diffonde a velocità fissa.

In realtà: Il tempo di diffusione cresce con il quadrato della distanza.

Mito: Le soluzioni in serie sono sempre migliori delle formule.

In realtà: Sono più utili quando non esiste una forma chiusa, come per le equazioni di Airy o di Bessel.

Flashcard

Metodo delle serie di potenze

Sostituire $\Sigma a_n x^n$; ottenere una ricorrenza.

Serie di Fourier

Somma di seni e coseni.

Coefficiente di Fourier

$b_n = (2/\pi)\int_0^\pi f \sin nx\, dx$.

Equazione del calore

u_t = α u_xx.

Separazione delle variabili

u = X(x)T(t).

Profondità di smorzamento

$\sqrt{(2\alpha/\omega)}$.

Quiz di autoverifica

1. Nell'equazione del calore, i modi superiori decadono...

più lento

più veloce

per niente

linearmente

più veloce. Tasso $\propto n^2$.

2. La serie di Fourier di una funzione dispari contiene solo...

coseni

seni

costanti

esponenziali

seni. Gli integrali dispari × pari si annullano.

3. Raddoppiare il periodo di un ciclo di temperatura superficiale cambia la profondità di smorzamento di...

2

$\sqrt{2}$

1/2

4

$\sqrt{2}$. $d \propto 1/\sqrt{\omega}$.

4. b_1 per l'onda quadra è...

1

$4/\pi$

$2/\pi$

$\pi/4$

$4/\pi$. $4/(1 \cdot \pi)$.

Rifai questo quiz

Come questo aiuta a salvare il pianeta

Secondo la NASA, il permafrost dell'emisfero settentrionale contiene circa 1672 miliardi di tonnellate di carbonio organico. Quanto velocemente il riscaldamento superficiale lo raggiunge è un problema dell'equazione del calore, e la profondità di smorzamento mostra perché gli strati profondi rispondono lentamente ma continuano a rispondere a lungo dopo che la superficie si è riscaldata.

Su Saving Planets: Analisi III

Fonti: NASA Earth Observatory: The Carbon Cycle (https://earthobservatory.nasa.gov/features/CarbonCycle) · Lebl, 4.6 PDEs, separation of variables, and the heat equation (https://www.jirka.org/diffyqs/html/heateq_section.html)

Risorse di apprendimento gratuite

- Lebl, 7.1 Power series (https://www.jirka.org/diffyqs/html/powerseries_section.html): Serie di potenze.
- Lebl, 7.2 Series solutions of linear second-order ODEs (https://www.jirka.org/diffyqs/html/seriessols_section.html): Soluzioni in serie.
- Lebl, 4.2 Trigonometric series (https://www.jirka.org/diffyqs/html/ts_section.html): Serie di Fourier.
- Lebl, 4.6 The heat equation (https://www.jirka.org/diffyqs/html/heateq_section.html): Equazione del calore.

Guarda la lezione

Convergence of Fourier Series (https://ocw.mit.edu/courses/18-03sc-differential-equations-fall-2011/resources/convergence-of-fourier-series/) (in inglese)

MIT 18.03SC Differential Equations (Fall 2011), MIT OpenCourseWare. Licenza: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Condizioni d'uso (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Link fornito solo per lo studio gratuito; Saving Planets non è affiliato a questa università né approvato da essa.

☐ **Ho finito questa unità**

Esercizi

Questi esercizi stanno dentro ogni unità. Falli su carta, poi apri la risposta.

1. Equazioni del primo ordine
   5 esercizi
2. Modellare con equazioni del primo ordine
   4 esercizi
3. Equazioni lineari del secondo ordine e oscillazioni
   4 esercizi

4. Vibrazioni forzate e risonanza
   4 esercizi
5. Trasformate di Laplace
   5 esercizi
6. Sistemi lineari, autovalori e piani delle fasi
   4 esercizi
7. Sistemi non lineari e stabilità
   4 esercizi
8. Metodi numerici
   4 esercizi
9. Soluzioni per serie, serie di Fourier ed equazione del calore
   4 esercizi

Laboratori al computer

Quattro laboratori al computer: un'epidemia SIR risolta con Eulero e RK4, un piano delle fasi preda-predatore, un modello climatico di bilancio energetico e una scansione in frequenza di un modello di torre eolica.

I parametri di esempio sono indicati come tali; ogni laboratorio rimanda a una fonte pubblica sul sistema reale.

Riferimento per la sicurezza: Lebl: Notes on Diffy Qs (free textbook) (https://www.jirka.org/diffyqs/)

Laboratorio A: un’epidemia SIR con Eulero e RK4

SETTIMANA 12

Obiettivo: Risolvi numericamente il modello SIR, trova il picco e confronta Eulero e RK4 con la dimensione finale esatta.

$$S' = -0.3SI,\ I' = 0.3SI - 0.1I,\ R' = 0.1I$$

`S'=-0.3SI,\ I'=0.3SI-0.1I,\ R'=0.1I`

SIR con $R_0 = 3$ (tassi di esempio al giorno)

Procedimento

1. Parti da S = 0.999, I = 0.001, R = 0 (frazioni della popolazione).
2. Esegui Eulero con h = 1 giorno e h = 0.1 giorno fino al giorno 160, poi RK4 con h = 1 giorno.
3. Registra la R finale, il picco di I e quando si verifica; confronta con la teoria.

Tabella dei dati

Metodo	R finale (giorno 160)
Eulero, h = 1	0.9467
Eulero, h = 0.1	0.9411
RK4, h = 1	0.9405
Dimensione finale esatta (teoria)	0.9405

Valori calcolati per tassi di esempio; non è un’epidemia reale.

Calcolo di esempio

1. Il picco è il 30.1% di infetti contemporaneamente, vicino al giorno 38.4; la teoria dà I_max = 1 − (1 + ln R_0)/R_0 = 0.300.
2. Eulero con h = 1 sovrastima la dimensione finale di 0.006; RK4 con lo stesso passo coincide con la teoria fino a 4 cifre.

> **Sicurezza**
>
> - Nessuna, oltre al normale uso del computer.

Alternativa a casa o virtuale

- Va bene un foglio di calcolo; Python è più comodo per RK4.

Lebl, 8.3 Applications of nonlinear systems (https://www.jirka.org/diffyqs/html/nlinapps_section.html)

Legame con il pianeta: La stessa struttura di modello si usa per le epidemie nelle persone e nella fauna.

- [ ] **Ho completato questo laboratorio (reale o virtuale)**

Laboratorio B: il piano delle fasi preda-predatore

SETTIMANA 11

Obiettivo: Integra il modello di Lotka–Volterra con RK4 e traccia l'orbita chiusa nel piano delle fasi.

$$x' = x - 0.02xy, \quad y' = -0.5y + 0.005xy$$

```
x'=x-0.02xy, y'=-0.5y+0.005xy
```

Lotka–Volterra (valori di esempio)

Procedimento

1. Parti da 150 prede e 50 predatori.
2. Usa RK4 con un passo piccolo (0.001 anni in Python, o 0.01 in un foglio di calcolo) per 40 anni.
3. Traccia y in funzione di x e registra l'intervallo delle prede e il periodo.

Tabella dei dati

Grandezza	Valore
Equilibrio	(100, 50)
Intervallo delle prede	da 62.6 a 150
Periodo	8.99 anni
Periodo dei piccoli cicli (teoria lineare)	8.89 anni

Valori calcolati; parametri di esempio.

Calcolo di esempio

1. L'orbita si chiude: le popolazioni si ripetono ogni 8.99 anni, poco più degli 8.89 anni previsti dalla teoria lineare per piccoli cicli, perché questo ciclo è grande.
2. I predatori raggiungono il picco dopo le prede, un ritardo visto in molti dati reali preda-predatore.

> **Sicurezza**
>
> - Nessuna, oltre al normale uso del computer.

Alternativa a casa o virtuale

- Desmos può disegnare il campo di pendenze del piano delle fasi.

Wolves and Moose of Isle Royale project (long-term data) (https://www.isleroyalewolf.org/)

Legame con il pianeta: Serie lunghe come quelle dei lupi e delle alci dell'Isle Royale mettono alla prova questi modelli. National Park Service: Wolves of Isle Royale (https://www.nps.gov/isro/learn/nature/wolves.htm)

- [ ] **Ho completato questo laboratorio (reale o virtuale)**

Laboratorio C: un modello climatico di bilancio energetico

SETTIMANA 13

Obiettivo: Fai avanzare nel tempo un modello climatico a una scatola dopo un forzante improvviso e trova la sua scala temporale.

$$C\frac{d\Delta T}{dt} = F - \lambda\,\Delta T$$

```
C(dΔ T)/(dt)=F- Δ T
```

Modello di bilancio energetico linearizzato

Procedimento

1. Usa C = 2.09 × 10⁸ J/(m²·K) (50 m di oceano), λ = 3.35 W/(m²·K) dall'unità 8 e un forzante improvviso F = 4 W/m² (valore di esempio).
2. Avanza con Eulero a passi mensili per 10 anni.
3. Confronta con la soluzione esatta ΔT = (F/λ)(1 − e^(−t/τ)).

Tabella dei dati

Anno	ΔT (K)
1	0.48
2	0.77
5	1.10
10	1.19

Valori calcolati dal modello; nessuna retroazione oltre alla radiazione.

Calcolo di esempio

1. Equilibrio ΔT = F/λ = 1.19 K; τ = C/λ ≈ 2.0 anni, quindi il riscaldamento è compiuto per circa il 63% dopo 2 anni in questo modello.
2. Il clima reale risponde più lentamente e si riscalda di più, perché il calore si mescola nell'oceano profondo e le retroazioni lo amplificano.

> **Sicurezza**
>
> - Nessuna, oltre al normale uso del computer.

Alternativa a casa o virtuale

- Basta un foglio di calcolo.

NASA Earth Observatory: Climate and Earth's Energy Budget (https://earthobservatory.nasa.gov/features/EnergyBalance)

Legame con il pianeta: I modelli di bilancio energetico sono il primo passo verso le proiezioni climatiche valutate dall'IPCC. IPCC AR6 Working Group I: The Physical Science Basis (https://www.ipcc.ch/report/ar6/wg1/)

- [ ] **Ho completato questo laboratorio (reale o virtuale)**

Laboratorio D: scansione di risonanza di un modello di torre eolica

SETTIMANA 6

Obiettivo: Calcola l'amplificazione dinamica di un modello di torre a un solo oscillatore al variare della frequenza forzante.

$$A(f) = \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}},\ r = f / f_0$$

A(f)=1(1-r^2)^2+(2 r)^2,\ r=f/f_0

Amplificazione dinamica

Procedimento

1. Usa f_0 = 0.30 Hz e ζ = 0.01 (valori di esempio).
2. Tabula A per frequenze forzanti da 0.1 a 0.6 Hz.
3. Segna la frequenza del rotore (0.20 Hz a 12 giri/min) e la frequenza di passaggio delle pale (0.60 Hz) e valuta il progetto.

Tabella dei dati

Frequenza forzante (Hz)	Amplificazione
0.10	1.12
0.20	1.80
0.25	3.27
0.30	50.0
0.35	2.76
0.60	0.333

Valori calcolati per un modello di esempio, non per una turbina specifica.

Calcolo di esempio

1. Entrambe le frequenze di esercizio sono ben lontane dal picco a 0.30 Hz, dove la risposta sarebbe 50 volte la deflessione statica.
2. Se il rotore accelerasse a 18 giri/min (0.30 Hz), forzerebbe la torre in risonanza; per questo i progettisti confrontano la frequenza propria con l'intero intervallo di velocità.

> **Sicurezza**

- Nessuna, oltre al normale uso del computer.

Alternativa a casa o virtuale

- Basta un foglio di calcolo.

PhET: Masses and Springs (https://phet.colorado.edu/en/simulations/masses-and-springs)

Legame con il pianeta: Evitare la risonanza permette alle turbine eoliche di produrre energia pulita in sicurezza per decenni. DOE degli Stati Uniti: come funzionano le turbine eoliche? (in inglese) (https://www.energy.gov/eere/wind/how-do-wind-turbines-work)

☐ **Ho completato questo laboratorio (reale o virtuale)**

Serie di esercizi per gli esami

Cronometrati: circa 10 minuti per problema. Poi confronta con le soluzioni complete.

Esercizi di preparazione all'esame intermedio (unità 1–5)

1. Risolvi $y' = -2ty$, $y(0) = 3$, e trova $y(1)$.

    1. $dy/y = -2t\,dt$; $y = 3e^{(-t^2)}$.

    Risposta: $3e^{(-1)} \approx 1.104$.

2. Un lago con tempo di ricambio di 4 anni: quanto tempo serve perché un inquinante si dimezzi dopo l'arresto dell'afflusso?

    1. $t = 4 \ln 2$.

    Risposta: ≈ 2.77 anni.

3. Risolvi $y'' + 6y' + 9y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, e trova $y(1)$.

    1. $y = (1 + 3t)e^{(-3t)}$.

    Risposta: $4e^{(-3)} \approx 0.199$.

4. Risolvi $y' + y = 1$, $y(0) = 0$ con Laplace e trova $y(2)$.

    1. $Y = 1/(s(s + 1)) = 1/s - 1/(s + 1)$.

    Risposta: $1 - e^{(-2)} \approx 0.865$.

Serie di esercizi finale (tutte le unità)

1. Classifica l’origine di x' = [[0, 1], [−2, −2]]x.

    1. λ² + 2λ + 2 = 0, λ = −1 ± i.

    Risposta: Fuoco stabile.

2. Un’epidemia SIR ha β = 0.5, γ = 0.25 al giorno. Trova R_0 e la soglia di immunità di gregge.

    1. R_0 = 2.

    Risposta: R_0 = 2, soglia 50%.

3. Due passi di Eulero con h = 0.5 per y' = −y, y(0) = 1.

    1. Ogni passo moltiplica per 0.5.

    Risposta: y(1) ≈ 0.25 (valore vero e^(−1) ≈ 0.368).

4. Un sistema massa-molla con m = 1 kg, k = 16 N/m, c = 0.4 N·s/m. Trova ω_0 e ζ.

    1. ω_0 = 4 rad/s; c_crit = 8.

    Risposta: ω_0 = 4 rad/s, ζ = 0.05 (amplificazione di picco circa 10).

Formulario

$$\mu = e^{\int p\,dx}$$

$$M_y = N_x \Rightarrow F = C$$

$$C = C_0 e^{-t/\tau}$$

$$H_{\max} = rK/4$$

$$ar^2 + br + c = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{k/m},\ c_{\text{crit}} = 2\sqrt{mk}$$

$$X = F_0 / \sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}$$

$$\mathcal{L}\{y'\} = sY - y(0)$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = 1/(s - a)$$

$$\mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s)$$

$$\lambda^2 - (\operatorname{tr} A)\lambda + \det A = 0$$

$$R_0 = \beta/\gamma,\ 1 - 1/R_0$$

$$y_{n+1} = y_n + hf$$

$$C\,T' = S(1-\alpha) - \varepsilon\sigma T^4$$

$$u_t = \alpha u_{xx}$$

$$b_n = \tfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f \sin nx\,dx$$

Costanti

Costante	Valore
Costante di Stefan–Boltzmann σ	5.67×10^{-8} W/(m²·K⁴)
Luce solare media alla sommità dell'atmosfera	340 W/m²
Frazione di luce solare riflessa	29%
Tempo di ricambio del lago Superiore	191 anni
Tempo di ricambio del lago Erie	2.6 anni
Vita media del metano	circa un decennio

Fonte: NASA Earth Observatory: Climate and Earth's Energy Budget (https://earthobservatory.nasa.gov/features/EnergyBalance)

Testi e strumenti gratuiti

Usa questi libri e strumenti gratuiti insieme al corso.

- Lebl: Notes on Diffy Qs (https://www.jirka.org/diffyqs/): Libro di testo gratuito e completo per questo corso.
- Trench: Elementary Differential Equations (free text) (https://digitalcommons.trinity.edu/mono/8/): Libro gratuito con molti esercizi.
- MIT OpenCourseWare 18.03SC Differential Equations (https://ocw.mit.edu/courses/18-03sc-differential-equations-fall-2011/): Lezioni, esercitazioni e problemi del MIT, gratuiti.
- Calcolatrice grafica Desmos (https://www.desmos.com/calculator): Traccia soluzioni e campi di pendenze.
- PhET: Masses and Springs (https://phet.colorado.edu/en/simulations/masses-and-springs): Intuizione su smorzamento e oscillazioni.

Glossario

Equazione autonoma
y' = f(y), senza t esplicito.

Equazione caratteristica
$ar^2 + br + c = 0$ per EDO a coefficienti costanti.

Smorzamento critico
Ritorno più rapido senza sovraelongazione.

Autovalore
λ con $Av = \lambda v$.

Modello di bilancio energetico

Modello climatico che bilancia luce solare assorbita e calore emesso.

Equilibrio
Soluzione costante.

Metodo di Eulero
Avanzamento numerico del primo ordine.

Equazione esatta
M dx + N dy = 0 con M_y = N_x.

Serie di Fourier
Sviluppo in seni e coseni.

Equazione del calore
u_t = α u_xx.

Fattore integrante
Moltiplicatore che rende esatta un'EDO lineare.

Jacobiana
Matrice delle derivate parziali prime usata per linearizzare.

Trasformata di Laplace
$\int_0^{\infty} e^{(-st)} f \, dt$.

Lotka–Volterra
Modello preda-predatore.

Ritratto di fase
Traiettorie nel piano degli stati.

Risonanza
Grande risposta quando la forzante coincide con una frequenza propria.

Runge–Kutta (RK4)
Metodo numerico del quarto ordine.

R_0
Numero di riproduzione di base.

Modello SIR
Modello epidemico suscettibili–infetti–guariti.

Equazione a variabili separabili
dy/dx = g(x)h(y).

Griglia di autovalutazione

Non si assegnano voti né crediti. Usala per valutare onestamente a che punto sei in ogni unità.

Livello	Come si presenta
4 · Padronanza	Costruisce modelli da una descrizione, li risolve con formule e numericamente, controlla unità e comportamento a lungo termine.
3 · Competente	Risolve gli esercizi con qualche errore occasionale.
2 · In sviluppo	Segue gli esempi svolti ma fatica a impostare modelli o a scegliere un metodo.
1 · Principiante	Applica formule senza verificare le soluzioni; deve rivedere l'unità.

Pesi suggeriti se vuoi un punteggio

Parte	Peso
Esercizi	30%
Laboratori al computer	15%
Serie di esercizi di metà corso	25%
Serie di esercizi finale	30%

Punta al livello 3 o superiore in ogni unità prima di passare al corso successivo.

Corsi correlati

- Analisi III MATH 210
- Fisica II PHYS 210 + PHYS 210L
- Statica ENGR 211
- Tutti i corsi