עודכן לאחרונה: November 1, 2026

🗺️ מפת דרכים לארבע שנים · שנה 2, אביב

על הקורס

לקורס החינמי הזה יש 9 יחידות ו-4 מעבדות. אלה המספרים האמיתיים, לא תוכנית ארוכה יותר שקוצרה.

בדיקה היא מספר או תוצאת קוד בעמוד קורס שסקריפט מחשב מחדש לפני הפרסום. המספר המודפס והמספר שחושב מחדש חייבים להתאים.

זהו מתווה של קורס חינמי ללימוד עצמי שנכתב על ידי Saving Planets. הוא אינו קורס אוניברסיטאי, אינו מעניק נקודות זכות אקדמיות, ואף מוסד לימודים אינו מעורב בו.

ההיקף תואם קורס שנה ב' במשוואות דיפרנציאליות רגילות, בהשראת הנושאים והעומק של MIT OpenCourseWare 18.03 ושל ספרי הלימוד החינמיים של Jiří Lebl (Notes on Diffy Qs) ו-William Trench, ושל סילבוסים של קורסים כמו Georgia Tech MATH 2552 ו-Stanford Math 53. אנו מקשרים לחומרים החינמיים לאורך כל הקורס. אף אחד מהמחברים או מהארגונים האלה אינו תומך בדף זה.

מה אנחנו מוסיפים: כל יחידה מתחברת לבעיה אמיתית של כדור הארץ עם מקור ציבורי מצוטט (אגמים, מתאן, דיג, פחמן, אקלים, מגפות, טורבינות רוח), כל מספר בדף מחושב מחדש בסקריפט בדיקה לפני פרסומו, וארבע מעבדות מחשב פותרות מודלים אמיתיים באופן נומרי.

עברו עליו לפי הסדר. בכל יחידה יש מטרות, רעיונות מרכזיים, משוואות, דוגמאות צעד אחר צעד, תרגול עם תשובות מלאות, טעויות נפוצות, כרטיסיות ובוחן. ההתקדמות שלכם נשמרת רק בדפדפן הזה.

איך הקורס הזה עוזר להציל את כדור הארץ

כמעט כל מודל של כדור הארץ החי הוא משוואה דיפרנציאלית: כמה מהר אגם שוטף מזהם, איך מלאי דגים מתאושש, איך פחמן נע בין האוויר לים, כמה מהר כדור הארץ מתחמם כשמאזן האנרגיה שלו משתנה, איך מגפה מתפשטת, ואיך מגדל של טורבינת רוח מתנדנד.

כל יחידה מסתיימת בקטע קצר עם מקורות שמראה איך הרעיונות שלה עוזרים גם לאנשים וגם לטבע. פרמטרים של מודלים שאינם ממקור מסומנים כערכי דוגמה.

למורים

אפשר ללמד את הקורס הזה, או לתת לתלמיד לעבור אותו לבד. הוא חינם. Saving Planets לא נותנת ציון ולא נקודות זכות.

- העמוד הזה הוא כל הקורס: 9 יחידות ו-4 מעבדות (MATH 220).

- תכננו 15 שבועות, בערך 6 עד 9 שעות בשבוע, כולל שבועות המעבדה.
- עקבו אחרי לוח 15 השבועות. קראו את היחידה, פתרו על הנייר, ואז פתחו את התשובה. בשבוע מעבדה עשו את המעבדה או את הגרסה הביתית.
- בדיקה היא מספר או תוצאת קוד בעמוד שסקריפט מחשב מחדש לפני הפרסום. המספר שרואים והמספר שחושב מחדש חייבים להתאים.
- השתמשו בהדפסת העמוד, או הורידו את מדריך הלימוד ב-PDF. דף הנוסחאות נמצא לקראת הסוף.
- שאלו: איך היחידה הזו עוזרת לאנשים ולכוכב? בכל יחידה יש תיבה ירוקה עם עובדה ומקור.
- העתיקו את תבנית המדריך למורה וכתבו את שם הכיתה, הזמן שיש לכם, והשאלות שתשאלו. פתיחת תבנית המדריך למורה

לפני שמתחילים

ידע מוקדם

- חשבון אינפיניטסימלי I ו-II: נגזרות, אינטגרלים, שברים חלקיים, טורי טיילור.
- מטריצות, דטרמיננטות וערכים עצמיים של מטריצות 2 × 2 (נלמדים בקצרה ביחידה 6).
- חשבון אינפיניטסימלי III עוזר למשוואת החום אבל אינו חובה.

איך ללמוד

- בדקו כל פתרון על ידי הצבתו בחזרה במשוואה.
- פתרו כל תרגיל על הנייר לפני שאתם פותחים את התשובה.
- שרטטו שדה כיוונים או דיוקן פאזה לפני הפתרון; דעו איך התשובה אמורה להיראות.
- שאלו על כל מודל: מהן היחידות, והאם להתנהגות לטווח ארוך יש היגיון?
- פתרו גם באופן נומרי בעיה אחת מכל יחידה, והשוו לנוסחה.
- עשו שוב את הבחנים כעבור כמה ימים. תרגול מרווח עדיף על מפגש ארוך אחד.

מה צריך

- מחשב או טאבלט עם גיליון אלקטרוני.
- מחשבון גרפי חינמי כמו Desmos.
- רשות: פייתון עם NumPy (בחינם ב-Google Colab).

לוח זמנים מוצע ל־15 שבועות

כ־6 עד 9 שעות בשבוע: קריאה, תרגילים, ובשבועות המעבדה גם המעבדה.

שבוע	יחידה	נושאים	קריאה
1	משוואות מסדר ראשון	שדות כיוונים; משוואות פרידות	Lebl 1.1–1.3
2	משוואות מסדר ראשון	משוואות לינאריות ומדויקות; קיום ויחידות	Lebl 1.2, 1.4, 1.8
3	מידול בעזרת משוואות מסדר ראשון	מידול: ערבוב, דעיכה, גדילה לוגיסטית, קציר	Lebl 1.6

שבוע	יחידה	נושאים	קריאה
4	משוואות לינאריות מסדר שני ותנודות	משוואות לינאריות מסדר שני; המשוואה האופיינית	Lebl 2.1–2.2
5	משוואות לינאריות מסדר שני ותנודות	תנודות מכניות וריסון	Lebl 2.4
6	תנודות מאולצות ותהודה	מקדמים לא ידועים; תנודה מאולצת ותהודה; מעבדה D	Lebl 2.5–2.6
7	התמרות לפלס	התמרות לפלס; פתרון בעיות התחלה	Lebl 6.1–6.2
8	התמרות לפלס	פונקציות מדרגה, הלמים, קונבולוציה; תרגול לבוחן אמצע	Lebl 6.3–6.4
9	מערכות לינאריות, ערכים עצמיים ומישורי פאזה	מערכות; מטריצות וערכים עצמיים	Lebl 3.1–3.4
10	מערכות לינאריות, ערכים עצמיים ומישורי פאזה	דיוקנאות פאזה וסיווג	Lebl 3.5
11	מערכות לא לינאריות ויציבות	מערכות לא לינאריות, לינאריזציה; טורף-נטרף; מעבדה B	Lebl 8.1–8.3
12	מערכות לא לינאריות ויציבות	יציבות; מגפות SIR; מעבדה A	Lebl 8.2–8.3
13	שיטות נומריות	שיטות נומריות; מודל מאזן אנרגיה; מעבדה C	Lebl 1.7, Trench 3
14	פתרונות בטורים, טורי פורייה ומשוואת החום	פתרונות בטורים; טורי פורייה; משוואת החום	Lebl 7.1–7.2, 4.2, 4.6
15	חזרה	חזרה וסדרת תרגול מסכמת	כל היחידות

ההתקדמות שלכם

סמנו יחידות ומעבדות כשאתם מסיימים אותן, ועשו את הבחנים. ההתקדמות והציונים נשמרים רק בדפדפן הזה ולעולם לא נשלחים אלינו.

יחידות

משוואות מסדר ראשון

שדות כיוונים, משוואות פרידות, משוואות לינאריות עם גורם אינטגרציה, משוואות מדויקות, ומתי פתרון קיים ויחיד.

מטרות הלמידה

בסוף היחידה הזו תוכלו:

- קראו שדה כיוונים ושרטטו פתרונות.
- פתרו משוואות פרידות ולינאריות מסדר ראשון.
- זהו ופתרו משוואות מדויקות.
- נסחו את משפט הקיום והיחידות וזהו מתי הוא נכשל.

מושגי מפתח

- משוואה דיפרנציאלית מקשרת פונקציה לא ידועה לנגזרותיה; פתרון הוא פונקציה שמקיימת אותה.
- פרידה: dy/dx = g(x)h(y). חלקו ובצעו אינטגרציה בשני האגפים.
- לינארית: y′ + p(x)y = q(x). הכפילו בגורם האינטגרציה μ = e^(∫p dx) כך שהאגף השמאלי יהפוך ל-′(μy).
- מדויקת: M dx + N dy = 0 עם M_y = N_x היא dF = 0, ולכן F(x, y) = C.
- אם f ו-∂f/∂y רציפות ליד (x₀, y₀), אז ל-y′ = f(x, y), y(x₀) = y₀ יש בדיוק פתרון אחד בסביבה. ובכל זאת פתרונות עלולים להתפוצץ בזמן סופי.

משוואות מפתח

$$\frac{dy}{h(y)} = g(x)\,dx$$

(dy)/(h(y))=g(x) dx

משוואה פרידה

$$\mu = e^{\int p\,dx}, \quad (\mu y)' = \mu q$$

μ=e^ p dx,(μ y)'=μ q

גורם אינטגרציה

$$M_y = N_x \Rightarrow F(x,y) = C$$

M_y=N_x F(x,y)=C

משוואה מדויקת

$$y' = f(x,y),\ y(x_0) = y_0$$

y'=f(x,y),\ y(x_0)=y_0

בעיית התחלה

דוגמאות פתורות שלב אחר שלב

דוגמה 1.1 פתרו $y(0) = 2$,$dy/dx = xy$, ומצאו את $y(1)$.

1. $dy/y = x\,dx$, ולכן $\ln|y| = x^2/2 + C$.
2. $y = 2e^{(x^2/2)}$.
3. $y(1) = 2e^{0.5}$.

תשובה: ≈ 3.297.

דוגמה 1.2 פתרו $y(0) = 0$,$y' + 2y = 4$, ומצאו את $y(1)$.

1. $\mu = e^{(2t)}$, ולכן $(e^{(2t)}y)' = 4e^{(2t)}$.
2. $e^{(2t)}y = 2e^{(2t)} + C$; $y(0) = 0$ נותן $C = -2$.
3. $y = 2(1 - e^{(-2t)})$.

תשובה: $y(1) \approx 1.729$, ומתקרב למצב היציב 2.

דוגמה 1.3 פתרו $2xy\,dx + (x^2 + 2y)\,dy = 0$ עם $y(0) = 1$, ומצאו את y כאשר $x = 1$.

1. מדויקת: $M_y = 2x = N_x$.
2. $F = x^2y + y^2$; $F(0, 1) = 1$.
3. ב-$x = 1$: $y + y^2 = 1$, ולכן $y = (-1 + \sqrt{5})/2$.

תשובה: ≈ 0.618.

תרגילים

פתרו כל אחד קודם על נייר, ואז בדקו.

1. פתרו $y(0) = 1$,$y' = y^2$. היכן הפתרון קיים?

   $y = 1/(1 - t)$; הוא מתפוצץ ב-$t = 1$, אף ש-y^2 חלקה בכל מקום.

2. פתרו $t\,y' + y = t^2$ עבור $t > 0$.

   $(ty)' = t^2$, ולכן $y = t^2/3 + C/t$.

3. פתרו $y' = -y/t$.

$y = y_0 e^{(-t/\tau)}$.

4. האם $(y \cos x)\,dx + (\sin x + 2y)\,dy = 0$ מדויקת? פתרו.

$M_y = \cos x = N_x$; $F = y \sin x + y^2 = C$.

5. האם ל-$y(0) = 0$, $y' = \sqrt{y}$ יש פתרון יחיד?

לא: $y = 0$ ו-$y = t^2/4$ שניהם מתאימים; $\partial f/\partial y = 1/(2\sqrt{y})$ אינה רציפה ב-$y = 0$.

תפיסות שגויות נפוצות

מיתוס: כל משוואה מסדר ראשון היא פרידה.

בפועל: $y' = x + y$ אינה; היא לינארית.

מיתוס: אפשר לשכוח את +C עד הסוף.

בפועל: הוסיפו C כשמבצעים אינטגרציה, לפני שמבודדים את y, אחרת תנאי ההתחלה ייצא שגוי.

מיתוס: אגף ימין חלק פירושו שהפתרון חי לנצח.

בפועל: $y' = y^2$ מתפוצצת בזמן סופי.

כרטיסיות

פרידה

$dy/dx = g(x)h(y)$.

לינארית מסדר ראשון

$y' + p\,y = q$.

גורם אינטגרציה

$\mu = e^{(\int p\,dx)}$.

מדויקת

$M_y = N_x$; $F = C$.

בעיית התחלה

מד"ר ועוד $y(x_0) = y_0$.

קיום ויחידות

f, f_y רציפות ⇒ פתרון מקומי אחד.

בוחן לבדיקה עצמית

1. גורם האינטגרציה של $y' + 3y = x$ הוא…

$e^{(3x)}$

e^{x}

3x

e^(−3x)

.e^(3x). e^(∫3 dx)

2. M dx + N dy = 0 מדויקת כאשר…

M = N

M_y = N_x

M_x = N_y

MN = 1

M_y = N_x. הנגזרות המעורבות של F שוות.

3. ל-y′ = ky יש פתרון…

$y_0 + kt$

$y_0e^{(kt)}$

kt^2

sin kt

$y_0e^{(kt)}$. פרידה.

4. היחידות עלולה להיכשל כאשר…

f לינארית

$\partial f/\partial y$ אינה רציפה

$y_0 = 1$

המשוואה פרידה

$\partial f/\partial y$ אינה רציפה. למשל $y' = \sqrt{y}$ ב-0.

לנסות שוב את הבוחן

איך זה עוזר להציל את כדור הארץ

המשוואה הפשוטה ביותר מסדר ראשון, y′ = −y/τ, מתארת איך מזהם מתפנה מאגם מעורבב היטב או איך גז עוזב את האטמוספרה. המספר היחיד שלה, סקאלת הזמן τ, קובע אם טעות תדעך בתוך שנים או תימשך מאות שנים (יחידה 2).

ב־Saving Planets: דף הנהרות

מקורות: · U.S. EPA: Physical features of the Great Lakes (retention times) (https://www.epa.gov/greatlakes/physical-features-great-lakes) Lebl, 1.4 Linear equations and the integrating factor (https://www.jirka.org/diffyqs/html/intfactor_section.html)

מקורות לימוד חינמיים

- Lebl, 1.3 Separable equations (https://www.jirka.org/diffyqs/html/separable_section.html): פרק מספר לימוד חינמי.
- Lebl, 1.4 Integrating factor (https://www.jirka.org/diffyqs/html/intfactor_section.html): משוואות לינאריות.
- Lebl, 1.8 Exact equations (https://www.jirka.org/diffyqs/html/exact_section.html): משוואות מדויקות.
- Lebl, 1.2 Slope fields (https://www.jirka.org/diffyqs/html/slopefields_section.html): קיום ויחידות.

צפו בהרצאה

First Order Autonomous Equations (https://ocw.mit.edu/courses/18-03sc-differential-equations-fall-2011/resources/first-order-autonomous-equations/) (באנגלית)

MIT 18.03SC Differential Equations (Fall 2011), MIT OpenCourseWare. רישיון: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · תנאי שימוש (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). הקישור מיועד ללימוד חינמי בלבד; Saving Planets אינו קשור לאוניברסיטה זו ואינו נתמך על ידה.

סיימתי את היחידה הזו

מידול בעזרת משוואות מסדר ראשון

להפוך מצב למשוואה: ערבוב וזיהום אגמים, דעיכה ואורכי חיים, קירור לפי ניוטון, גדילה לוגיסטית, קציר, ונקודות שיווי משקל ויציבותן.

מטרות הלמידה

בסוף היחידה הזו תוכלו:

- בנו מודלים של קצב כניסה פחות קצב יציאה.
- פרשו קבועי זמן ואורכי חיים.
- מצאו נקודות שיווי משקל של משוואות אוטונומיות וסווגו את יציבותן.
- השתמשו במודל הלוגיסטי עם קציר כדי למצוא את התפוקה המרבית בת הקיימא.

מושגי מפתח

- קצב שינוי = קצב כניסה − קצב יציאה. כתבו את היחידות של כל איבר.
- אגם מעורבב היטב עם זמן שהייה τ מאבד מזהם בקצב C/τ ברגע שהזרימה הנכנסת נקייה.
- במשוואה אוטונומית y′ = f(y), נקודות שיווי המשקל פותרות f(y) = 0; שיווי משקל יציב אם f′(y) < 0.
- גדילה לוגיסטית P′ = rP(1 − P/K) מתייצבת ב-K. עם קציר קבוע H, הקציר בר הקיימא הגדול ביותר הוא rK/4, ב-P = K/2.

משוואות מפתח

$$\frac{dx}{dt} = (\text{rate in}) - (\text{rate out})$$

```
dx/dt=(rate in)-(rate out)
```

חוק מאזן

$$C(t) = C_0 e^{-t/\tau}$$

```
C(t)=C_0e^-t/τ
```

שטיפה עם זמן שהייה τ

$$P' = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right) - H$$

```
P'=rP(1- PK)-H
```

גדילה לוגיסטית עם קציר

$$H_{\max} = \frac{rK}{4}$$

דוגמאות פתורות שלב אחר שלב

דוגמה 2.1 זמן השהייה של אגם אירי הוא 2.6 שנים ושל אגם סופיריור 191 שנים (EPA). אם הזרמת מזהם נפסקת, כמה זמן ייקח עד שהריכוז בכל אגם ירד ל-10%, בהנחה שכל אחד מעורבב היטב?

1. $C/C_0 = e^{(-t/\tau)} = 0.1$, ולכן $t = \tau \ln 10$.
2. אירי: $2.6 \times 2.303 = 5.99$ שנים.
3. סופיריור: $191 \times 2.303 = 440$ שנים.

תשובה: כ-6 שנים לאירי אבל כ-440 לסופיריור. מניעה חשובה יותר מכול היכן שהשטיפה איטית.

דוגמה 2.2 ה-EPA מציינת שמתאן נשאר באטמוספרה בממוצע כעשור. התייחסו לפולס של מתאן כדועך עם $\tau = 10$ שנים. איזה חלק נשאר אחרי 30 שנה?

1. חלק $= e^{(-30/10)} = e^{(-3)} =$.

תשובה: כ-5%. לכן צמצום דליפות מתאן משתלם בתוך עשורים, בניגוד ל-CO_2, שנשאר הרבה יותר זמן.

דוגמה 2.3 מלאי דגים מקיים $P' = 0.4P(1 - P/10000) - H$ (טונות, שנים; ערכי דוגמה). מצאו את התפוקה המרבית בת הקיימא.

1. הגדילה $rP(1 - P/K)$ מרבית ב-$P = K/2 = 5000$ t.
2. שם היא שווה ל-$rK/4 = 0.4 \times 10000/4$.

תשובה: 1000 טונות בשנה. קציר גדול מזה מוביל את המלאי לקריסה.

תרגילים

פתרו כל אחד קודם על נייר, ואז בדקו.

1. קפה ב-90 °C מתקרר בחדר ב-20 °C לפי $T' = -0.1(T - 20)$ (דקות). מצאו את $T(10)$.

   $T = 20 + 70e^{(-1)} \approx 45.8$ °C.

2. מכל של 100 L מים מתוקים מקבל תמלחת של 0.5 g/L בקצב 2 L/min ומתרוקן בקצב 2 L/min. מצאו את כמות המלח אחרי 50 דקות.

   $x' = 1 - x/50$, $x = 50(1 - e^{(-t/50)})$; $x(50) = 50(1 - e^{(-1)}) \approx 31.6$ g.

3. מצאו וסווגו את נקודות שיווי המשקל של $y' = y(1 - y)$.

y = 0 (f′ = 1, לא יציבה) ו-y = 1 (f′ = −1, יציבה).

4. בדוגמת הדיג, מה קורה אם H = 1200 t/yr?

rP(1 − P/K) − H < 0 לכל P, ולכן המלאי יורד לאפס.

תפיסות שגויות נפוצות

מיתוס: זמן שהייה הוא הזמן שלוקח לסלק את כל המזהם.

בפועל: אחרי τ אחד עדיין נשארים 37%; דעיכה מעריכית אף פעם לא מגיעה בדיוק לאפס.

מיתוס: יותר מאמץ דיג תמיד פירושו יותר שלל.

בפועל: מעבר לתפוקה המרבית בת הקיימא, יותר קציר מקטין את המלאי ואת השלל העתידי.

מיתוס: שיווי משקל הוא תמיד המקום שבו המערכת מסתיימת.

בפועל: רק נקודות שיווי משקל יציבות מושכות פתרונות סמוכים.

כרטיסיות

חוק מאזן

כניסה − יציאה.

קבוע זמן

τ ב-63%; e^(−t/τ) מהשינוי מושלם אחרי τ.

זמן שהייה

נפח האגם ÷ הזרימה היוצאת.

שיווי משקל

f(y*) = 0.

מבחן יציבות

f′(y*) < 0 יציבה.

תפוקה מרבית בת קיימא

rK/4 ב-P = K/2.

בוחן לבדיקה עצמית

1. עם τ = 5 שנים, החלק שנשאר אחרי 5 שנים הוא…

0

e^(−1) ≈ 0.37

0.5

0.1

$t = \tau$ ב-$e^{(-1)} \approx 0.37$. $e^{(-t/\tau)}$.

2. התפוקה המרבית בת הקיימא של גדילה לוגיסטית היא…

rK

rK/4

K/2

r/K

rK/4. השיא של $rP(1 - P/K)$.

3. y^* היא נקודת שיווי משקל יציבה של $y' = f(y)$ אם…

$f'(y^*) > 0$

$f'(y^*) < 0$

$f(y^*) > 0$

$y^* > 0$

$f'(y^*) < 0$. פתרונות סמוכים נדחפים בחזרה.

4. איזה אגם מתאושש מהר יותר מזיהום?

סופיריור (191 שנים)

אירי (2.6 שנים)

אותו דבר

אף אחד

אירי (2.6 שנים). זמן שהייה קצר יותר.

לנסות שוב את הבוחן

איך זה עוזר להציל את כדור הארץ

ה-EPA מציינת זמני שהייה של האגמים הגדולים מ-2.6 שנים (אירי) עד 191 שנים (סופיריור), ולכן רעלים שנכנסים לאגם סופיריור הם בעיה של כמה דורות.

מדעני הדיג של NOAA מעריכים מלאים בעזרת מודלים של אוכלוסייה הבנויים על הרעיונות האלה; התפוקה המרבית בת הקיימא של המודל הלוגיסטי היא נקודת המוצא הקלאסית.

ב־Saving Planets: מרכז האוקיינוסים · דף הנהרות

מקורות: · U.S. EPA: Physical features of the Great Lakes (retention times) (https://www.epa.gov/greatlakes/physical-features-great-lakes) · U.S. EPA: Understanding global warming potentials (https://www.epa.gov/ghgemissions/understanding-global-warming-potentials) · NOAA Fisheries: הערכות אוכלוסייה (https://www.fisheries.noaa.gov/topic/population-assessments)

מקורות לימוד חינמיים

- Lebl, 1.6 Autonomous equations (https://www.jirka.org/diffyqs/html/auteq_section.html): שיווי משקל, גדילה לוגיסטית, קציר.
- Lebl, 1.4 Integrating factor (https://www.jirka.org/diffyqs/html/intfactor_section.html): בעיות ערבוב.
- OpenStax Calculus 2, 4.4 The Logistic Equation (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/4-4-the-logistic-equation): מודל לוגיסטי.

צפו בהרצאה

First Order Autonomous Equations (https://ocw.mit.edu/courses/18-03sc-differential-equations-fall-2011/resources/first-order-autonomous-equations/) (באנגלית)

MIT 18.03SC Differential Equations (Fall 2011), MIT OpenCourseWare. רישיון: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · תנאי שימוש (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). הקישור מיועד ללימוד חינמי בלבד; Saving Planets אינו קשור לאוניברסיטה זו ואינו נתמך על ידה.

☐ **סיימתי את היחידה הזו**

משוואות לינאריות מסדר שני ותנודות

משוואות לינאריות עם מקדמים קבועים, המשוואה האופיינית ותנודות חופשיות: ללא ריסון, בתת-ריסון, בריסון קריטי ובריסון-יתר.

מטרות הלמידה

בסוף היחידה הזו תוכלו:

- פתרו ay″ + by′ + cy = 0 בעזרת המשוואה האופיינית.
- טפלו בשורשים ממשיים, כפולים ומרוכבים.
- מדלו מערכות מסה-קפיץ-מרסן.
- סווגו את הריסון וחשבו את התדירות הטבעית ואת הריסון הקריטי.

מושגי מפתח

- נסו y = e^(rt): ar² + br + c = 0. שני שורשים ממשיים נותנים שתי פונקציות מעריכיות; שורש כפול נותן (c₁ + c₂t)e^(rt); שורשים מרוכבים α ± iβ נותנים e^(αt)(c₁ cos βt + c₂ sin βt).
- סופרפוזיציה: סכומים של פתרונות של משוואה לינארית הומוגנית הם פתרונות.
- למ-mx″ + cx′ + kx = 0 יש תדירות טבעית ω₀ = √(k/m).
- ריסון c < 2√(mk) מתנודד ודועך (תת-ריסון); c = 2√(mk) חוזר הכי מהר בלי לחרוג (קריטי).

משוואות מפתח

$$ar^2 + br + c = 0$$

```
ar^2+br+c=0
```

המשוואה האופיינית

$$y = e^{\alpha t}(c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t)$$

```
y=e^α t(c_1β t+c_2β t)
```

שורשים מרוכבים α ± iβ

$$mx'' + cx' + kx = 0,\ \omega_0 = \sqrt{k/m}$$

```
mx''+cx'+kx=0,\ ω_0=/m
```

מסה-קפיץ-מרסן

$$c_{\text{crit}} = 2\sqrt{mk}$$

```
c_crit=2
```

דוגמאות פתורות שלב אחר שלב

דוגמה 3.1 פתרו $y'' + 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. מהו זמן המחזור?

1. $r^2 + 4 = 0$, $r = \pm 2i$.
2. $y = \cos 2t$.
3. זמן מחזור $2\pi/2$.

תשובה: $y = \cos 2t$, זמן מחזור $\pi \approx 3.14$.

דוגמה 3.2 פתרו $y'' + 2y' + 5y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, ומצאו את $y(1)$.

1. $r = -1 \pm 2i$.
2. $y = e^{-t}(\cos 2t + \tfrac{1}{2}\sin 2t)$ מקיים את שני התנאים.
3. $y(1) = e^{-1}(\cos 2 + \tfrac{1}{2}\sin 2)$.

תשובה: ≈ 0.0142: התנודה כמעט דעכה.

דוגמה 3.3 מסה של $2\ \text{kg}$ תלויה על קפיץ עם $k = 50\ \text{N/m}$. מצאו את ω_0, את התדירות בהרץ ואת הריסון הקריטי.

1. $\omega_0 = \sqrt{(50/2)} = 5\ \text{rad/s}$.
2. $f = 5/(2\pi) = 0.796\ \text{Hz}$.
3. $c_{crit} = 2\sqrt{(2 \times 50)} = 20\ \text{N·s/m}$.

תשובה: $5\ \text{rad/s}$, $0.80\ \text{Hz}$, $20\ \text{N·s/m}$.

תרגילים

פתרו כל אחד קודם על נייר, ואז בדקו.

1. פתרו $y'' - 3y' + 2y = 0$.

   $r = 1, 2$: $y = c_1 e^{t} + c_2 e^{2t}$.

2. פתרו $y'' + 2y' + y = 0$.

   שורש כפול $r = -1$: $y = (c_1 + c_2 t)e^{-t}$.

3. סווגו את $x'' + 6x' + 5x = 0$.

−5 ,−1 = r: ריסון-יתר (c = 6 > 2√5).

4. מצאו את זמן המחזור של x″ + 9x = 0.

ω = 3, זמן מחזור 2.09 ≈ 2π/3.

תפיסות שגויות נפוצות

מיתוס: שורשים מרוכבים פירושם פתרונות מרוכבים.

בפועל: החלק הממשי והחלק המדומה נותנים פתרונות ממשיים: e^(αt)cos βt ו-e^(αt)sin βt.

מיתוס: שורש כפול נותן פתרון אחד בלבד.

בפועל: השני הוא t e^(rt).

מיתוס: יותר ריסון תמיד פירושו התייצבות מהירה יותר.

בפועל: מערכות בריסון-יתר חוזרות לאט יותר ממערכות בריסון קריטי.

כרטיסיות

המשוואה האופיינית

$ar^2 + br + c = 0$.

סופרפוזיציה

סכומי פתרונות הם פתרונות (לינארית הומוגנית).

שורש כפול

$(c_1 + c_2t)e^{rt}$.

תדירות טבעית

$\omega_0 = \sqrt{(k/m)}$.

תת-ריסון

מתנודד תוך כדי דעיכה.

ריסון קריטי

$c = 2\sqrt{(mk)}$.

בוחן לבדיקה עצמית

1. השורשים 2 ± 3i נותנים את הפתרונות…

e^(2t), e^(3t)

e^(2t)cos 3t, e^(2t)sin 3t

cos 2t

te^(2t)

e^(2t)cos 3t, e^(2t)sin 3t. α = 2, β = 3.

2. התדירות הטבעית של mx'' + kx = 0:

k/m

√(k/m)

m/k

√(mk)

√(k/m). r² = −k/m.

3. הריסון הקריטי c שווה ל...

√(mk)

2√(mk)

mk

k/m

2√(mk). דיסקרימיננטה אפס.

4. y'' + 2y' + y = 0 היא...

בתת-ריסון

בריסון קריטי

בריסון-יתר

ללא ריסון

בריסון קריטי. שורש כפול.

לנסות שוב את הבוחן

איך זה עוזר להציל את כדור הארץ

לכל מבנה גבוה, ממגדל טורבינת רוח ועד גשר, יש תדירויות טבעיות שנקבעות לפי הקשיחות והמסה שלו, בדיוק $\omega_0 = \sqrt{(k/m)}$ במודל הפשוט ביותר. הריסון קובע כמה מהר דועכת הנדנדה שנגרמת ממשבי רוח, וזה משפיע על העייפות ועל משך חיי המבנה.

ב־Saving Planets: פיזיקה I, יחידה 8: תנודות

מקורות: משרד האנרגיה האמריקאי: איך פועלות טורבינות רוח? (באנגלית) (https://www.energy.gov/eere/wind/how-do-wind-turbines-work) · Lebl, 2.4 Mechanical vibrations (https://www.jirka.org/diffyqs/html/sec_mv.html)

מקורות לימוד חינמיים

- Lebl, 2.1 Second-order linear ODEs (https://www.jirka.org/diffyqs/html/solinear_section.html): תיאוריה.
- Lebl, 2.2 Constant coefficient equations (https://www.jirka.org/diffyqs/html/sec_ccsol.html): המשוואה האופיינית.
- Lebl, 2.4 Mechanical vibrations (https://www.jirka.org/diffyqs/html/sec_mv.html): ריסון.
- PhET: Masses and Springs (https://phet.colorado.edu/en/simulations/masses-and-springs): סימולציה.

צפו בהרצאה

Constant Coefficient Second Order Homogeneous DE's (https://ocw.mit.edu/courses/18-03sc-differential-equations-fall-2011/resources/constant-coefficient-second-order-homogeneous-des/) (באנגלית)

MIT 18.03SC Differential Equations (Fall 2011), MIT OpenCourseWare. רישיון: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · תנאי שימוש (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). הקישור מיועד ללימוד חינמי בלבד; Saving Planets אינו קשור לאוניברסיטה זו ואינו נתמך על ידה.

☐ **סיימתי את היחידה הזו**

תנודות מאולצות ותהודה

משוואות לא הומוגניות, מקדמים לא ידועים, תגובת המשרעת של מתנד מאולץ, פעימות ותהודה.

מטרות הלמידה

בסוף היחידה הזו תוכלו:

- מצאו פתרונות פרטיים בשיטת המקדמים הלא ידועים.
- כתבו את הפתרון הכללי כפתרון הומוגני ועוד פתרון פרטי.
- חשבו את משרעת המצב היציב של מתנד מרוסן מאולץ.
- הסבירו תהודה ואיך מהנדסים נמנעים ממנה.

מושגי מפתח

- פתרון כללי = פתרון הומוגני + פתרון פרטי אחד.
- נחשו את הצורה לפי הכוח המאלץ: עבור cos ωt נסו A cos ωt + B sin ωt.
- כשהוא מאולץ בתדירות ω, מתנד מרוסן מתייצב בתנועה קבועה עם משרעת X = F₀/√((k − mω²)² + (cω)²).
- ליד ω = ω₀ המשרעת מגיעה לשיא; עם יחס ריסון ζ = c/c_crit, ההגברה הדינמית בשיא היא בערך 1/(2ζ). בלי ריסון, התגובה גדלה ללא גבול.

משוואות מפתח

$$y = y_h + y_p$$

y=y_h+y_p

פתרון כללי

$$X = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}}$$

X=_0(k-mω^2)^2+(cω)^2

משרעת במצב יציב

$$\frac{X}{F_0/k} = \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}},\ r = \frac{\omega}{\omega_0}$$

(X)/(F_0/k)=1(1-r^2)^2+(2 r)^2,\ r=(ω)/(ω_0)

הגברה דינמית

$$y'' + \omega^2 y = \cos \omega t \Rightarrow y_p = \frac{t \sin \omega t}{2\omega}$$

דוגמאות פתורות שלב אחר שלב

דוגמה 4.1 מצאו פתרון פרטי של $y'' + y = \cos 2t$.

1. נסו $y_p = A\cos 2t$: $-4A + A = 1$.
2. $A = -1/3$.

תשובה: $y_p = -\tfrac{1}{3}\cos 2t$ (בהיפוך פאזה, כי האילוץ מעל התדירות הטבעית).

דוגמה 4.2 מדלו מגדל של טורבינת רוח כמתנד יחיד עם תדירות טבעית $0.30\ \text{Hz}$ ויחס ריסון $\zeta = 0.01$ (ערכי דוגמה). הרוטור מסתובב ב-$0.20\ \text{Hz} = 12\ \text{rpm}$, ושלושה להבים חולפים על פני המגדל ב-$0.60\ \text{Hz}$. מצאו את ההגברה הדינמית בכל מקרה, ובתהודה.

1. At 0.20 Hz, $r = 0.667$: $1/\sqrt{(1 - 0.444)^2 + (0.0133)^2)} = 1.80$.
2. At 0.60 Hz, $r = 2$: $1/\sqrt{9 + 0.0016)} = 0.333$.
3. At $r = 1$: $1/(2\zeta) = 50$.

תשובה: 1.8 ו-0.33, אבל 50 בתהודה. לכן מתכננים מרחיקים את התדירות הטבעית של המגדל מתדירות הרוטור ומתדירות מעבר הלהבים.

דוגמה 4.3 פתרו $y'' + y = \cos t$, $y(0) = y'(0) = 0$.

1. האילוץ תואם את התדירות הטבעית, ולכן נסו $y_p = t(A\cos t + B\sin t)$.
2. הצבה נותנת $A = 0, B = \tfrac{1}{2}$.
3. $y = \tfrac{1}{2} t \sin t$.

תשובה: המשרעת גדלה כמו $t/2$ ללא גבול: תהודה טהורה.

תרגילים

פתרו כל אחד קודם על נייר, ואז בדקו.

1. מצאו את y_p עבור $y'' + 3y' + 2y = 4$.

   $y_p = 2$.

2. מצאו את y_p עבור $y'' - y = e^{t}$.

e^t פותרת את המשוואה ההומוגנית, ולכן $y_p = \tfrac{1}{2} t e^t$.

3. מסה של 1 kg, $k = 100$ N/m, $c = 2$ N·s/m מאולצת בכוח $10 \cos 10t$ N. מצאו את המשרעת היציבה.

$k - m\omega^2 = 0$, ולכן $X = 10/(2 \times 10) = 0.5$ m.

4. עבור $\zeta = 0.05$, מהי ההגברה בשיא?

בערך $1/(2 \times 0.05) = 10$.

תפיסות שגויות נפוצות

מיתוס: תהודה דורשת כוח גדול.

בפועל: כוח מחזורי קטן בתדירות הטבעית בונה תגובה גדולה.

מיתוס: ריסון מבטל תהודה.

בפועל: הוא מגביל את השיא לכ-$1/(2\zeta)$, שעדיין גדול במבנים בריסון חלש.

מיתוס: שיטת המקדמים הלא ידועים עובדת לכל אילוץ.

בפועל: רק לפולינומים, פונקציות מעריכיות, סינוסים וקוסינוסים ומכפלותיהם; אחרת השתמשו בווריאציית פרמטרים או בלפלס.

כרטיסיות

פתרון פרטי

פתרון כלשהו אחד של המשוואה המאולצת.

מקדמים לא ידועים

ניחוש צורת האילוץ.

תגובת משרעת

$X = F_0/\sqrt{((k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2)}$.

יחס ריסון

$\zeta = c/(2\sqrt{(mk)})$.

תהודה

תגובה גדולה ליד ω_0; שיא $\approx 1/(2\zeta)$.

פעימות

שתי תדירויות קרובות יוצרות מעטפת איטית.

בוחן לבדיקה עצמית

1. פתרון כללי =

רק y_p

y_h + y_p

y_h × y_p

y_h − y_p

y_h + y_p. לינאריות.

2. תהודה מתרחשת כשתדירות האילוץ קרובה ל…

אפס

התדירות הטבעית

פי שניים ממנה

אינסוף

התדירות הטבעית. מכנה מינימלי.

3. עם ζ = 0.01 ההגברה בשיא היא בערך…

1

10

50

100

1/(2ζ) .50.

4. אילוץ הרבה מעל ω_0 נותן הגברה…

גדול

קטנה מ-1

בדיוק 1

אינסופית

קטנה מ-$1/r^2$ ≈ .1.

לנסות שוב את הבוחן

איך זה עוזר להציל את כדור הארץ

טורבינות רוח הולכות וגדלות ומתגבהות כדי לקצור יותר אנרגיה, והמגדלים והלהבים שלהן מרוסנים חלש. הימנעות מתהודה בין המבנה לרוטור המסתובב היא חלק מרכזי בשמירה על מכונות האנרגיה הנקייה האלה בטוחות ועמידות לאורך זמן. מעבדה D חוקרת זאת עם מודל דוגמה.

ב־Saving Planets: פיזיקה I, יחידה 3: אנרגיית רוח

מקורות: משרד האנרגיה האמריקאי: איך פועלות טורבינות רוח? (באנגלית) (https://www.energy.gov/eere/wind/how-do-wind-turbines-work) · Lebl, 2.6 Forced oscillations and resonance (https://www.jirka.org/diffyqs/html/forcedo_section.html)

מקורות לימוד חינמיים

- Lebl, 2.5 Nonhomogeneous equations (https://www.jirka.org/diffyqs/html/sec_nonhom.html): מקדמים לא ידועים ווריאציית פרמטרים.
- Lebl, 2.6 Forced oscillations and resonance (https://www.jirka.org/diffyqs/html/forcedo_section.html): תהודה.
- MIT OCW 18.03SC, Unit II (/https://ocw.mit.edu/courses/18-03sc-differential-equations-fall-2011): משוואות מסדר שני, הרצאות ותרגילים.

סיימתי את היחידה הזו

התמרות לפלס

להפוך משוואות דיפרנציאליות לאלגברה: ההתמרה והטבלה שלה, נגזרות, פונקציות מדרגה לכניסות ממותגות, הלמים וקונבולוציה.

מטרות הלמידה

בסוף היחידה הזו תוכלו:

- חשבו התמרות לפלס מההגדרה ומטבלה.
- פתרו בעיות התחלה בעזרת התמרות ושברים חלקיים.
- מדלו כניסות ממותגות בעזרת פונקציות מדרגת יחידה והזזות.
- מדלו הלמים פתאומיים בעזרת פונקציית דלתא.

מושגי מפתח

- L{f}(s) = ∫₀^∞ e^(−st) f(t) dt הופכת נגזרות לכפל ב-s, עם ערכי ההתחלה בפנים.
- בודדו את Y(s), פרקו לשברים חלקיים, ואז הפכו בעזרת הטבלה.
- מתג שמופעל בזמן a הוא u(t − a); כלל ההזזה הוא L{u(t − a)f(t − a)} = e^(−as)F(s).
- מכה רגעית היא δ(t − a), עם L{δ(t − a)} = e^(−as).

משוואות מפתח

$$\mathcal{L}\{f\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

```
L\=_0^∞ e^-stf(t) dt
```

הגדרה

$$\mathcal{L}\{y'\} = sY - y(0),\ \mathcal{L}\{y''\} = s^2Y - sy(0) - y'(0)$$

```
L'\=sY-y(0),\ L''\=s^2Y-sy(0)-y'(0)
```

נגזרות

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a},\ \mathcal{L}\{\sin \omega t\} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

```
L^at\=1s-a,\ L\ω t\=(ω)/(s^2+ω^2)
```

רשומות בטבלה

$$\mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s)$$

```
L(t-a)f(t-a)\=e^-asF(s)
```

דוגמאות פתורות שלב אחר שלב

דוגמה 5.1 פתרו $y' - 2y = e^{3t}$, $y(0) = 1$.

1. $sY - 1 - 2Y = 1/(s-3)$.
2. $Y = [1/(s-3) - 1/(s-2)]/1 + 1/(s-2) = 1/((s-2)(s-3))$.
3. $Y = 1/(s-3)$.

תשובה: $y = e^{3t}$. בדיקה: $3e^{3t} - 2e^{3t} = e^{3t}$.

דוגמה 5.2 אגם נקי מתחיל לקבל זרימה קבועה של מזהם ב-$y(0) = 0$, $y' + y = u(t-2)$: $t = 2$. מצאו את $y(3)$.

1. $(s+1)Y = e^{-2s}/s$.
2. $1/(s(s+1)) = 1/s - 1/(s+1)$, ולכן $y = (1 - e^{-(t-2)})u(t-2)$.
3. $y(3) = 1 - e^{-1}$.

תשובה: 0.632 ≈ מהרמה הסופית, קבוע זמן אחד אחרי המיתוג.

דוגמה 5.3 מתנד במנוחה $y'' + 4y = \delta(t-1)$ מקבל מכה ב-$t = 1$. מצאו את $y(1 + \pi/4)$.

1. $(s^2+4)Y = e^{-s}$.
2. $y = \tfrac{1}{2}\sin(2(t-1))\,u(t-1)$.
3. ב-$t = 1 + \pi/4$: $\tfrac{1}{2}\sin(\pi/2)$.

תשובה: 0.5, השיא הראשון.

תרגילים

פתרו כל אחד קודם על נייר, ואז בדקו.

1. מצאו את $\mathcal{L}\{t\}$.

   $1/s^2$.

2. הפכו את $3/(s^2+9)$.

   $\sin 3t$.

3. פתרו $y' + y = 0$, $y(0) = 4$.

.Y = 4/(s + 1), y = 4e^(−t)

4. פתרו y″ + y = 0, y(0) = 0, y′(0) = 2.

.Y = 2/(s² + 1), y = 2 sin t

5. מצאו את L{u(t − 3)}.

.e^(−3s)/s

תפיסות שגויות נפוצות

מיתוס: L{fg} = L{f}L{g}.

בפועל: מכפלת התמרות מתאימה לקונבולוציה, לא למכפלה.

מיתוס: תנאי ההתחלה מיושמים בסוף.

בפועל: הם נכנסים מיד דרך L{y′} = sY − y(0).

מיתוס: פונקציות מדרגה דורשות פתרון למקוטעין.

בפועל: לפלס מטפל במיתוגים במעבר אחד.

כרטיסיות

התמרת לפלס

∫₀^∞ e^(−st) f dt.

L{y′}

sY − y(0).

L{e^at}

1/(s − a).

מדרגת יחידה

u(t − a): כבוי ואז דולק.

דלתא

δ(t − a): הלם רגעי; L = e^(−as).

קונבולוציה

L{f * g} = FG.

בוחן לבדיקה עצמית

1. L{y′} =

sY

sY − y(0)

Y/s

Y − s

sY − y(0). אינטגרציה בחלקים.

2. L{e^(−2t)} =

1/(s − 2)

1/(s + 2)

s + 2

−2/s

1/(s + 2). a = −2.

3. מתג שמופעל ב-t = 5 נכתב...

δ(t − 5)

u(t − 5)

e^(5t)

t − 5

u(t − 5). מדרגת יחידה.

4. L{δ(t)} =

0

1

s

1/s

1. e^(−0s).

לנסות שוב את הבוחן

איך זה עוזר להציל את כדור הארץ

כניסות סביבתיות אמיתיות נדלקות ונכבות: הזרמה ממפעל מתחילה, שחרור מסכר נעצר, התפרצות געשית מזריקה אירוסולים בפרץ אחד. כניסות מדרגה והלם עם התמרות לפלס נותנות את התגובה לכל אחת בחישוב אחד, השיטה שמהנדסים משתמשים בה לבקרה ברשתות חשמל ובמתקני טיהור.

ב־Saving Planets: דף הנהרות

מקורות: Lebl, 6.1 The Laplace transform (https://www.jirka.org/diffyqs/html/laplace_section.html) · Lebl, 6.4 Dirac delta and impulse response (https://www.jirka.org/diffyqs/html/diracdelta_section.html)

מקורות לימוד חינמיים

- Lebl, 6.1 The Laplace transform (https://www.jirka.org/diffyqs/html/laplace_section.html): הגדרה וטבלה.
- Lebl, 6.2 Transforms of derivatives and ODEs (https://www.jirka.org/diffyqs/html/transformsofders_section.html): פתרון בעיות התחלה.
- Lebl, 6.3 Convolution (https://www.jirka.org/diffyqs/html/convolution_section.html): קונבולוציה.
- Lebl, 6.4 Dirac delta (https://www.jirka.org/diffyqs/html/diracdelta_section.html): הלמים.

צפו בהרצאה

Laplace Transform (https://ocw.mit.edu/courses/18-03sc-differential-equations-fall-2011/resources/laplace-transform/) (באנגלית)

MIT 18.03SC Differential Equations (Fall 2011), MIT OpenCourseWare. רישיון: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · תנאי שימוש (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). הקישור מיועד ללימוד חינמי בלבד; Saving Planets אינו קשור לאוניברסיטה זו ואינו נתמך על ידה.

סיימתי את היחידה הזו

מערכות לינאריות, ערכים עצמיים ומישורי פאזה

מערכות x′ = Ax, שיטות ערכים עצמיים, מישור הפאזה וסיווג נקודות שיווי משקל לצמתים, אוכפים, ספירלות ומרכזים.

מטרות הלמידה

בסוף היחידה הזו תוכלו:

- כתבו משוואות מצומדות ומשוואות מסדר גבוה כמערכות מסדר ראשון.
- פתרו x′ = Ax בעזרת ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים.
- שרטטו דיוקנאות פאזה.
- סווגו את הראשית בעזרת העקבה והדטרמיננטה.

מושגי מפתח

- אם Av = λv, אז x = e^(λt)v פותר את x′ = Ax; הפתרון הכללי משלב איבר כזה לכל ערך עצמי.
- ערכים עצמיים ממשיים בסימנים מנוגדים: אוכף. שניהם שליליים: צומת יציב.
- ערכים עצמיים מרוכבים α ± iβ: ספירלות (יציבות אם α < 0); מרכזים אם α = 0.
- למטריצה 2 × 2, λ² − (tr A)λ + det A = 0.

משוואות מפתח

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$$

x'=A x

מערכת לינארית

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

(A- I)=0

ערכים עצמיים

$$\mathbf{x} = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2$$

x=c_1e^_1t v_1+c_2e^_2t v_2

פתרון כללי (ערכים עצמיים ממשיים שונים)

$$\lambda^2 - (\operatorname{tr} A)\lambda + \det A = 0$$

^2-()+ A=0

פולינום אופייני (2 × 2)

דוגמאות פתורות שלב אחר שלב

דוגמה 6.1 מודל פחמן של שני תאים: האטמוספרה A והאוקיינוס O מחליפים פחמן לפי $A' = -0.2A + 0.1O$, $O' = 0.2A - 0.1O$ (לשנה; קצבי דוגמה). מתחילים עם 3 יחידות באוויר ואפס באוקיינוס.

1. ערכים עצמיים: $\mathrm{tr} = -0.3$, $\det = 0$, ולכן $\lambda = 0$ ו--0.3.
2. ל-$\lambda = 0$ וקטור עצמי $(1, 2)$: החלוקה בשיווי משקל היא 1 : 2. סך הפחמן (3) נשמר, ולכן $A \to 1$, $O \to 2$.
3. $A(t) = 1 + 2e^{(-0.3t)}$.

תשובה: האוויר שומר שליש מהפולס במודל הצעצוע הזה, עם סקאלת זמן $1/0.3 \approx 3.33$ שנים.

דוגמה 6.2 סווגו את הראשית עבור $A = [[1, 2], [2, 1]]$.

1. $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$, $\lambda = 3, -1$.

תשובה: סימנים מנוגדים: אוכף (לא יציב).

דוגמה 6.3 סווגו את הראשית עבור $A = [[-1, -2], [2, -1]]$.

1. $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$: $\mathrm{tr} = -2$, $\det = 5$.
2. $\lambda = -1 \pm 2i$.

תשובה: ספירלה יציבה: הפתרונות מסתובבים פנימה ודועכים כמו $e^{(-t)}$.

תרגילים

פתרו כל אחד קודם על נייר, ואז בדקו.

1. כתבו את $y'' + 3y' + 2y = 0$ כמערכת.

   $x_1 = y$, $x_2 = y'$: $x_1' = x_2$, $x_2' = -2x_1 - 3x_2$.

2. ערכים עצמיים של $[[2, 0], [0, -3]]$?

   2 ו--3: אוכף.

3. סווגו את $[[0, 1], [-4, 0]]$.

   $\lambda = \pm 2i$: מרכז (תנודה ללא ריסון).

4. סווגו את $[[-3, 1], [0, -2]]$.

   $\lambda = -3, -2$: צומת יציב.

תפיסות שגויות נפוצות

מיתוס: וקטורים עצמיים הם יחידים.

בפועל: כל כפולה שונה מאפס מתאימה.

מיתוס: ערך עצמי אפס פירושו שאין תנועה.

בפועל: פירושו ישר של נקודות שיווי משקל או גודל נשמר, כמו במודל תאי הפחמן.

מיתוס: ערכים עצמיים מרוכבים נותנים רק פתרונות מרוכבים.

בפועל: החלק הממשי והחלק המדומה נותנים פתרונות ממשיים.

כרטיסיות

מערכת לינארית

.x′ = Ax

שיטת הערכים העצמיים

.x = e^(λt)v

אוכף

ערכים עצמיים ממשיים בסימנים מנוגדים.

צומת

ערכים עצמיים ממשיים באותו סימן.

ספירלה

ערכים עצמיים מרוכבים, α ≠ 0.

עקבה–דטרמיננטה

.λ² − tr λ + det = 0

בוחן לבדיקה עצמית

1. ערכים עצמיים 2 ו-1− נותנים…

צומת

אוכף

ספירלה

מרכז

אוכף. סימנים מנוגדים.

2. ערכים עצמיים $-1 \pm 3i$ נותנים…

ספירלה לא יציבה

ספירלה יציבה

מרכז

אוכף

ספירלה יציבה. $\alpha < 0$.

3. עבור A בגודל 2×2, סכום הערכים העצמיים הוא…

$\det A$

$\operatorname{tr} A$

0

1

$\operatorname{tr} A$. $\lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{tr} A$.

4. למרכז יש ערכים עצמיים…

ממשיים ושווים

מדומים טהורים

אפס

חיובי

מדומים טהורים. $\alpha = 0$.

לנסות שוב את הבוחן

איך זה עוזר להציל את כדור הארץ

מודלים של מחזור הפחמן הם מערכות לינאריות של תאים (אטמוספרה, אוקיינוס עילי, אוקיינוס עמוק, יבשה) שמחליפים פחמן. הערכים העצמיים שלהם הם סקאלות הזמן שבהן פולס של CO_2 נספג: חלקן מהירות, וחלקן נמשכות מאות שנים ויותר. הסקירה

של נאס"א על מחזור הפחמן מתארת את המחזורים המהיר והאיטי שהתאים האלה מייצגים.

ב־Saving Planets: מרכז האוקיינוסים

מקורות: NOAA Global · NASA Earth Observatory: The Carbon Cycle (https://earthobservatory.nasa.gov/features/CarbonCycle) Monitoring Laboratory: Trends in atmospheric CO_2 (https://gml.noaa.gov/ccgg/trends/)

מקורות לימוד חינמיים

- Lebl, 3.1 Introduction to systems (https://www.jirka.org/diffyqs/html/sec_introtosys.html): מערכות.
- Lebl, 3.4 Eigenvalue method (https://www.jirka.org/diffyqs/html/eigenmethod_section.html): ערכים עצמיים.
- Lebl, 3.5 Two-dimensional systems and their vector fields (https://www.jirka.org/diffyqs/html/sec_twodimaut.html): דיוקנאות פאזה.

סיימתי את היחידה הזו

מערכות לא לינאריות ויציבות

נקודות שיווי משקל של מערכות לא לינאריות, לינאריזציה עם היעקוביאן, מחזורי טורף-נטרף ומודל המגפה SIR.

מטרות הלמידה

בסוף היחידה הזו תוכלו:

- מצאו נקודות שיווי משקל של מערכות לא לינאריות.
- בצעו לינאריזציה עם היעקוביאן וסווגו נקודות שיווי משקל.
- נתחו את מודל טורף-נטרף של לוטקה–וולטרה.
- השתמשו במודל SIR: R_0, סף חסינות העדר והגודל הסופי.

מושגי מפתח

- ליד נקודת שיווי משקל, מערכת לא לינארית מתנהגת כמו הלינאריזציה שלה $x' = J\,x$, כאשר J הוא היעקוביאן (אלא אם הלינאריזציה היא מרכז).
- לוטקה–וולטרה: נטרפים $x' = ax - bxy$, טורפים $y' = -cy + dxy$. נקודת שיווי המשקל היא $(c/d,\, a/b)$; האוכלוסיות נעות סביבה במחזוריות.
- SIR: $S' = -\beta SI$, $I' = \beta SI - \gamma I$, $R' = \gamma I$. מספר ההדבקה הבסיסי $R_0 = \beta/\gamma$; התפרצות גדלה רק אם $R_0 S > 1$.
- סף חסינות העדר הוא $1 - 1/R_0$; החלק הסופי שלא נדבק s_∞ פותר $\ln s_\infty = R_0(s_\infty - 1)$.

משוואות מפתח

$$J = \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix}$$

```
J=_x&f_y\_x&g_y
```

יעקוביאן

$$x' = ax - bxy,\; y' = -cy + dxy$$

```
x'=ax-bxy,\ y'=-cy+dxy
```

לוטקה–וולטרה

$$S' = -\beta SI,\; I' = \beta SI - \gamma I,\; R' = \gamma I$$

```
S'=-β SI,\ I'=β SI-γ I,\ R'=γ I
```

מודל SIR

$$R_0 = \beta/\gamma,\; \ln s_\infty = R_0(s_\infty - 1)$$

דוגמאות פתורות שלב אחר שלב

דוגמה 7.1 נטרפים וטורפים מקיימים $x' = x - 0.02xy$, $y' = -0.5y + 0.005xy$ (ערכי דוגמה, שנים). מצאו את נקודת שיווי המשקל של דו-קיום ואת זמן המחזור של מחזורים קטנים.

1. $x' = 0$ דורש $y = 1/0.02 = 50$; $y' = 0$ דורש $x = 0.5/0.005 = 100$.
2. ליעקוביאן שם יש ערכים עצמיים $\pm i\sqrt{0.5}$ = $\pm i\sqrt{(ac)}$.
3. זמן מחזור $2\pi/\sqrt{0.5}$.

תשובה: 100 נטרפים ו-50 טורפים; מחזורים קטנים נמשכים כ-8.9 שנים, והטורפים מפגרים אחרי הנטרפים.

דוגמה 7.2 למגפה $\beta = 0.3$ ליום ו-$\gamma = 0.1$ ליום. מצאו את R_0, את סף חסינות העדר ואת החלק הסופי שנדבק אי פעם.

1. $R_0 = 3$.
2. סף $1 - 1/3 = 0.667$.
3. חזרו על $s = e^{3(s - 1)}$: $s_\infty = 0.0595$.

תשובה: $R_0 = 3$; חסינות של 67% עוצרת את הגדילה; בלי התערבות כ-94% נדבקים בסופו של דבר, יותר מהסף כי המגפה חורגת ממנו.

דוגמה 7.3 סווגו את נקודת שיווי המשקל $P = K$ של גדילה לוגיסטית $P' = rP(1 - P/K)$.

1. $f'(P) = r - 2rP/K$; $f'(K) = -r < 0$.

תשובה: יציבה: הפרעות קטנות דועכות בקצב r.

תרגילים

פתרו כל אחד קודם על נייר, ואז בדקו.

1. מצאו את נקודות שיווי המשקל של $x' = x(3 - x - y)$, $y' = y(2 - x - y)$.

   $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(0, 2)$ (אין נקודה פנימית: הישרים $x + y = 3$ ו-$x + y = 2$ מקבילים).

2. בצעו לינאריזציה של $x' = \sin x$ ליד $x = 0$ ו-$x = \pi$.

   $f'(0) = 1$ (לא יציבה), $f'(\pi) = -1$ (יציבה).

3. אם $R_0 = 2$, מהו סף חסינות העדר?

1 − 1/2 = 50%.

4. בדוגמת טורף-נטרף, מה קורה לנטרפים אם מסלקים את הטורפים?

x′ = x: גדילה מעריכית (עד שמגבלות אחרות נכנסות לפעולה).

תפיסות שגויות נפוצות

מיתוס: לינאריזציה תמיד חוזה את ההתנהגות.

בפועל: לא כשהיא נותנת מרכז; האיברים הלא לינאריים מכריעים.

מיתוס: חסינות עדר פירושה שהמגפה נעצרת מיד.

בפועל: ההדבקות יורדות אחרי הסף אבל עדיין יכולות לחרוג ממנו.

מיתוס: מחזורי טורף-נטרף פירושם שהמודל אינו יציב.

בפועל: מסלולי לוטקה–וולטרה סגורים: יציבים באופן ניטרלי, לא גדלים ולא מתכווצים.

כרטיסיות

יעקוביאן

מטריצת הנגזרות החלקיות הראשונות.

לינאריזציה

x′ ≈ J x ליד נקודת שיווי משקל.

לוטקה–וולטרה

מחזורי טורף-נטרף סביב (c/d, a/b).

SIR

רגישים, נדבקים, מחלימים.

R_0

β/γ, הדבקות חדשות לכל מקרה.

סף חסינות העדר

$1 - 1/R_0$.

בוחן לבדיקה עצמית

1. $R_0 = \beta/\gamma = 4$ נותן סף של…

- 25%
- 50%
- 75%

100%

.75%. 1 − 1/4

2. רמת הנטרפים בשיווי המשקל של לוטקה–וולטרה היא…

a/b

c/d

b/a

d/c

.x = c/d דורש c/d. y′ = 0

3. לינאריזציה משתמשת ב…

ההסיאן

היעקוביאן

הלפלסיאן

העקבה

היעקוביאן. נגזרות חלקיות ראשונות.

4. מגפה גדלה בהתחלה אם…

$R_0S > 1$

$R_0 < 1$

γ > β

I = 0

.$R_0S > 1$. I′ = (βS − γ)I

לנסות שוב את הבוחן

איך זה עוזר להציל את כדור הארץ

באי רויאל שבאגם סופיריור, ה-National Park Service עוקב אחר מספרי הזאבים והאיילים מאז 1980, רשומת טורף-נטרף ארוכה. העליות והירידות הקשורות שלהם, והחלטת רשות הפארקים להעביר זאבים חדשים לאי, הן בדיוק סוג המערכת שמודלי לוטקה–וולטרה מתחילים להסביר.

אותה מתמטיקה של SIR שמנחה את תגובת בריאות הציבור משמשת למחלות של חיות בר המאיימות על מערכות אקולוגיות.

ב־Saving Planets: מרכז האוקיינוסים

מקורות: Wolves and Moose of Isle Royale project (long-term data) (https://www.isleroyalewolf.org/) · National Park Service: Wolves of Isle Royale (https://www.nps.gov/isro/learn/nature/wolves.htm)

מקורות לימוד חינמיים

- Lebl, 8.1 Linearization, critical points and equilibria (https://www.jirka.org/diffyqs/html/linearization_section.html): לינאריזציה.
- Lebl, 8.2 Stability and classification (https://www.jirka.org/diffyqs/html/nlinstability_section.html): יציבות.
- Lebl, 8.3 Applications of nonlinear systems (https://www.jirka.org/diffyqs/html/nlinapps_section.html): טורף-נטרף ועוד.

צפו בהרצאה

The Relation Between Nonlinear Systems and First-order ODE's (https://ocw.mit.edu/courses/18-03sc-differential-equations-fall-2011/resources/the-relation-between-nonlinear-systems-and-first-order-odes/) (באנגלית)

MIT 18.03SC Differential Equations (Fall 2011), MIT OpenCourseWare. רישיון: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · תנאי שימוש (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). הקישור מיועד ללימוד חינמי בלבד; Saving Planets אינו קשור לאוניברסיטה זו ואינו נתמך על ידה.

☐ **סיימתי את היחידה הזו**

שיטות נומריות

שיטות אוילר, אוילר משופר ורונגה–קוטה, גודל צעד ושגיאה, ומודל אקלים של מאזן אנרגיה שנפתר נומרית.

מטרות הלמידה

בסוף היחידה הזו תוכלו:

- יישמו את אוילר, אוילר משופר (הוין) ו-RK4.
- הסבירו את הסדר של שיטה ואיך השגיאה משתנה עם גודל הצעד.
- פתרו מערכות באופן נומרי.
- בנו ופתרו מודל אקלים אפס-ממדי של מאזן אנרגיה.

מושגי מפתח

- אוילר מתקדם לאורך השיפוע: y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n). השגיאה הגלובלית שלו פרופורציונלית ל-h.
- אוילר משופר ממצע שני שיפועים (שגיאה ∝ h²); RK4 ממצע ארבעה (שגיאה ∝ h⁴).
- חציית h מקטינה את השגיאה של RK4 פי 16 בערך, ולכן היא סוס העבודה.
- מאזן אנרגיה: C dT/dt = S(1 − α) − εσT⁴. שיווי המשקל וסקאלת הזמן שלו נובעים ישירות מהמשוואה.

משוואות מפתח

$$y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n)$$

```
y_n+1=y_n+hf(t_n,y_n)
```

שיטת אוילר

$$y_{n+1} = y_n + \tfrac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

```
y_n+1=y_n+ h6(k_1+2k_2+2k_3+k_4)
```

רונגה–קוטה 4

$$C\frac{dT}{dt} = S(1-\alpha) - \varepsilon\sigma T^4$$

```
CdT/dt=S(1-α)-σ T^4
```

מודל מאזן אנרגיה

$$\lambda = 4\varepsilon\sigma T^3,\ \tau = C/\lambda$$

```
=4σ T^3,\ τ=C/
```

משוב לינארי וסקאלת זמן

דוגמאות פתורות שלב אחר שלב

דוגמה 8.1 קרבו את $y(1)$ עבור $y' = y,\ y(0) = 1$ עם $h = 0.1$ באוילר, אוילר משופר ו-RK4.

1. כל צעד אוילר מכפיל ב-1.1: $1.1^{10} = 2.5937$.
2. אוילר משופר מכפיל ב-1.105: 2.7141.
3. RK4 מכפיל ב-1.1051708: 2.7182797.

תשובה: הערך האמיתי $e = 2.7182818$. שגיאות: 0.12, 0.0042 ו-0.000002.

דוגמה 8.2 כדור הארץ בולע $241.4\ \text{W/m}^2 = (1 - 0.29) \times 340$ מאור השמש (NASA). אילו הקרין כגוף שחור ($\varepsilon = 1$), איזו טמפרטורה הייתה מאזנת זאת? איזה ε אפקטיבי נותן את הממוצע של היום, כ-$288\ \text{K}$?

1. $\sigma T^4 = 241.4$ נותן $T = (241.4/5.67 \times 10^{-8})^{(1/4)} = 255\ \text{K}$.
2. $\varepsilon = 241.4/(\sigma \times 288^4) = 0.619$.

תשובה: $255\ \text{K}$ ($-18\ ^\circ\text{C}$) בלי אפקט חממה; פליטות אפקטיבית של 0.62 מייצגת את אפקט החממה ששומר על כדור הארץ ראוי למגורים.

דוגמה 8.3 עם $\varepsilon = 0.619$ ב-$288\ \text{K}$ ושכבת ערבוב אוקיינית בעומק $50\ \text{m}$ ($C = 1000 \times 4186 \times 50\ \text{J/(m}^2\text{·K)}$; עומק לדוגמה), מצאו את λ, את סקאלת הזמן ואת ההתחממות ללא משוב עבור אילוץ של $4\ \text{W/m}^2$ (ערך דוגמה).

1. $\lambda = 4\varepsilon\sigma T^3 = 3.35\ \text{W/(m}^2\text{·K)}$.
2. $\tau = C/\lambda = 6.24 \times 10^7\ \text{s} \approx 1.98$ שנים (בערך 2).
3. $\Delta T = 4/3.35$.

תשובה: כ-$1.2\ \text{K}$ של התחממות, שמתקרבים אליה בסקאלת זמן של 2 שנים במודל הפשוט הזה. משובים אמיתיים (אדי מים, קרח) מגדילים את ההתחממות, כפי שמעריך ה-IPCC.

תרגילים

פתרו כל אחד קודם על נייר, ואז בדקו.

1. צעד אוילר אחד עבור $y' = t + y,\ y(0) = 1,\ h = 0.1$.

   $y_1 = 1 + 0.1(0 + 1) = 1.1$.

2. אם שגיאת אוילר היא 0.12 ב-$h = 0.1$, העריכו אותה ב-$h = 0.05$.

   בערך 0.06 (סדר ראשון).

3. אם שגיאת RK4 היא 2×10^{-6} ב-$h = 0.1$, העריכו אותה ב-$h = 0.05$.

בערך $10^{-7} \times 1.3 \approx 10^{-6}/16 \times 2$.

4. איזו טמפרטורת שיווי משקל נותן מודל מאזן האנרגיה עם $\varepsilon = 1$ ואלבדו 0.29?

בערך 255 K.

תפיסות שגויות נפוצות

מיתוס: צעדים קטנים יותר תמיד טובים יותר.

בפועל: שגיאת העיגול והעלות גדלות; שיטה מסדר גבוה יותר בדרך כלל עדיפה על צעדי אוילר זעירים.

מיתוס: תשובה נומרית מדויקת אם הקוד רץ.

בפועל: תמיד בדקו התכנסות על ידי חציית h.

מיתוס: התוצאה 255 K פירושה שהמודל שגוי.

בפועל: היא מראה כמה אפקט החממה מחמם את כדור הארץ: כ-33 K.

כרטיסיות

שיטת אוילר

$y + h\,f$.

אוילר משופר

ממוצע של שני שיפועים; סדר 2.

RK4

ארבעה שיפועים; סדר 4.

גודל צעד

h; בדקו התכנסות על ידי חצייתו.

מודל מאזן אנרגיה

$C\,T' = S(1-\alpha) - \varepsilon\sigma T^4$.

סקאלת זמן אקלימית

$\tau = C/\lambda$.

בוחן לבדיקה עצמית

1. לשיטת אוילר שגיאה גלובלית פרופורציונלית ל…

- h
- h^2
- h^4

1/h

h. סדר ראשון.

2. RK4 היא מסדר…

1

2

4

8

4. שגיאה ∝ h^4.

3. בלי אפקט חממה, הטמפרטורה הממוצעת של כדור הארץ הייתה בערך…

288 K

255 K

273 K

300 K

255 K. $\sigma T^4 = 241\ W/m^2$.

4. חציית h ב-RK4 מקטינה את השגיאה בערך…

2

4

16

32

2^4. 16.

לנסות שוב את הבוחן

איך זה עוזר להציל את כדור הארץ

כל מודל אקלים, ממאזן האנרגיה בן השורה האחת הזה ועד המודלים הגלובליים שמעריך ה-IPCC, הוא מערכת של משוואות דיפרנציאליות שנפתרת נומרית. תקציב האנרגיה של NASA מספק את הקלטים: בממוצע מגיעים 340 W/m² של אור שמש ו-29% מוחזרים.

ב־Saving Planets: מבוא לתכנות, יחידת הסימולציה

מקורות: IPCC · NASA Earth Observatory: Climate and Earth's Energy Budget (https://earthobservatory.nasa.gov/features/EnergyBalance) · AR6 Working Group I: The Physical Science Basis (https://www.ipcc.ch/report/ar6/wg1/)

מקורות לימוד חינמיים

- Lebl, 1.7 Numerical methods: Euler's method (https://www.jirka.org/diffyqs/html/numer_section.html): אוילר ושגיאה.
- Trench, Ch. 3: Numerical methods (https://digitalcommons.trinity.edu/mono/8/): אוילר משופר ו-RK4.

סיימתי את היחידה הזו

פתרונות בטורים, טורי פורייה ומשוואת החום

פתרונות טורי חזקות למד"ר, טורי פורייה של פונקציות מחזוריות, והפרדת משתנים למשוואת החום.

מטרות הלמידה

בסוף היחידה הזו תוכלו:

- מצאו פתרונות טורי חזקות מנוסחת נסיגה.
- חשבו מקדמי פורייה של פונקציות מחזוריות פשוטות.
- פתרו את משוואת החום במוט בהפרדת משתנים.
- העריכו לאיזה עומק מגיעים גלי טמפרטורה עונתיים בקרקע.

מושגי מפתח

- הציבו $y=\Sigma a_n x^n$, השוו חזקות וקבלו נוסחת נסיגה למקדמים.
- פונקציה מחזורית היא סכום של סינוסים וקוסינוסים; לפונקציה אי-זוגית על $(-\pi,\pi)$, $b_n = (2/\pi)\int_0^{\pi} f \sin nx\,dx$.
- משוואת החום $u_t = \alpha\, u_{xx}$ מפזרת חום; כל אופן סינוסי דועך כמו $e^{-\alpha(n\pi/L)^2 t}$, האופנים המהירים קודם.
- טמפרטורת פני שטח מחזורית חודרת לקרקע עם עומק ריסון $d = \sqrt{2\alpha/\omega}$.

משוואות מפתח

$$y = \sum a_n x^n$$

```
y= a_nx^n
```

פתרון בטור חזקות

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

```
b_n=2π_0^π f(x) nx dx
```

מקדם פורייה סינוסי

$$u_t = \alpha u_{xx}$$

```
u_t=α u_xx
```

משוואת החום

$$d = \sqrt{2\alpha/\omega}$$

עומק הריסון של גל טמפרטורה מחזורי

דוגמאות פתורות שלב אחר שלב

דוגמה 9.1 פתרו את $y'' + y = 0$ בטור חזקות.

1. $\Sigma (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \Sigma a_n x^n = 0$.
2. $a_{n+2} = -a_n/((n+2)(n+1))$.
3. האיברים הזוגיים בונים את $\cos x$, והאי-זוגיים את $\sin x$.

תשובה: $y = a_0 \cos x + a_1 \sin x$, משוחזר מנוסחת הנסיגה.

דוגמה 9.2 מצאו את טור פורייה של הגל הריבועי $f = 1$ על $(0, \pi)$, ו--1 על $(-\pi, 0)$.

1. אי-זוגית, לכן רק סינוסים: $b_n = (2/\pi)\int_0^\pi \sin nx\,dx = (2/(n\pi))(1 - \cos n\pi)$.
2. $b_n = 4/(n\pi)$ עבור n אי-זוגי, 0 עבור n זוגי.

תשובה: $f = (4/\pi)(\sin x + \sin 3x/3 + \sin 5x/5 + \dots)$; $b_1 \approx 1.273$.

דוגמה 9.3 קרקע עם דיפוזיביות $\alpha = 5 \times 10^{-7}\ \text{m}^2/\text{s}$ (ערך דוגמה) חווה מחזור טמפרטורה שנתי על פני השטח. מצאו את עומק הריסון.

1. $\omega = 2\pi/(3.156 \times 10^7\ \text{s}) = 1.99 \times 10^{-7}\ \text{s}^{-1}$.
2. $d = \sqrt{(2 \times 5 \times 10^{-7}/1.99 \times 10^{-7})}$.

תשובה: כ-$2.24\ \text{m}$: התנודה השנתית קטנה פי e בכל $2.2\ \text{m}$ של עומק, כך שהקרקע העמוקה מגיבה להתחממות לאט, לאורך שנים רבות.

תרגילים

פתרו כל אחד קודם על נייר, ואז בדקו.

1. מצאו את נוסחת הנסיגה עבור $y' = y$ בטור חזקות.

   $a_{n+1} = a_n/(n+1)$, ולכן $y = a_0 e^x$.

2. האם $f(x) = x^2$ זוגית או אי-זוגית? אילו איברי פורייה מופיעים?

   זוגית: רק קוסינוסים (ועוד קבוע).

3. אופן של מוט דועך כמו $e^{-\alpha(\pi/L)^2 t}$. איך הכפלת L משנה את זמן הדעיכה?

   זמן הדעיכה מוכפל פי 4.

4. מצאו את b_3 עבור הגל הריבועי.

$4/(3\pi) \approx 0.424$.

תפיסות שגויות נפוצות

מיתוס: טורי פורייה עובדים רק לפונקציות חלקות.

בפועל: הם עובדים גם עם קפיצות, ומתכנסים לנקודת האמצע של הקפיצה.

מיתוס: חום מתפזר במהירות קבועה.

בפועל: זמן הדיפוזיה גדל עם ריבוע המרחק.

מיתוס: פתרונות בטורים תמיד עדיפים על נוסחאות.

בפועל: הם שימושיים במיוחד כשאין צורה סגורה, כמו במשוואות איירי ובסל.

כרטיסיות

שיטת טורי החזקות

הציבו $\Sigma a_n x^n$; קבלו נוסחת נסיגה.

טור פורייה

סכום של סינוסים וקוסינוסים.

מקדם פורייה

$b_n = (2/\pi)\int_0^\pi f \sin nx\, dx$.

משוואת החום

$u_t = \alpha\, u_{xx}$.

הפרדת משתנים

$u = X(x)T(t)$.

עומק ריסון

$\sqrt{(2\alpha/\omega)}$.

בוחן לבדיקה עצמית

1. במשוואת החום, אופנים גבוהים דועכים...

מאחר

ממהר

בכלל לא

באופן לינארי

ממהר. הקצב $\propto n^2$.

2. טור פורייה של פונקציה אי-זוגית מכיל רק...

קוסינוסים

סינוסים

קבועים

מעריכיות

סינוסים. אינטגרלים של אי-זוגי × זוגי מתאפסים.

3. הכפלת המחזור של מחזור טמפרטורת פני השטח משנה את עומק הריסון ב...

2

$2\sqrt{}$

1/2

4

$1/\sqrt{\omega} \propto \sqrt{2}$. d.

4. b_1 עבור הגל הריבועי הוא...

1

$4/\pi$

$2/\pi$

$\pi/4$

$4/\pi$. $4/(1\cdot\pi)$.

לנסות שוב את הבוחן

איך זה עוזר להציל את כדור הארץ

לפי NASA, הפרמפרוסט בחצי הכדור הצפוני מכיל כ-1672 מיליארד טונות של פחמן אורגני. מהירות ההגעה של התחממות פני השטח אליו היא בעיה של משוואת החום, ועומק הריסון מראה מדוע שכבות עמוקות מגיבות לאט אך ממשיכות להגיב זמן רב אחרי שפני השטח מתחממים.

ב־Saving Planets: חשבון אינפיניטסימלי 3

מקורות: NASA Earth Observatory: The Carbon Cycle (https://earthobservatory.nasa.gov/features/CarbonCycle) · Lebl, 4.6 PDEs, separation of variables, and the heat equation (https://www.jirka.org/diffyqs/html/heateq_section.html)

מקורות לימוד חינמיים

- Lebl, 7.1 Power series (https://www.jirka.org/diffyqs/html/powerseries_section.html): טורי חזקות.
- Lebl, 7.2 Series solutions of linear second-order ODEs (https://www.jirka.org/diffyqs/html/seriessols_section.html): פתרונות בטורים.
- Lebl, 4.2 Trigonometric series (https://www.jirka.org/diffyqs/html/ts_section.html): טורי פורייה.
- Lebl, 4.6 The heat equation (https://www.jirka.org/diffyqs/html/heateq_section.html): משוואת החום.

צפו בהרצאה

Convergence of Fourier Series (https://ocw.mit.edu/courses/18-03sc-differential-equations-fall-2011/resources/convergence-of-fourier-series/) (באנגלית)

MIT 18.03SC Differential Equations (Fall 2011), MIT OpenCourseWare. רישיון: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · תנאי שימוש (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). הקישור מיועד ללימוד חינמי בלבד; Saving Planets אינו קשור לאוניברסיטה זו ואינו נתמך על ידה.

סיימתי את היחידה הזו

תרגילים

התרגילים האלה נמצאים בתוך כל יחידה. פתרו על הנייר, ואז פתחו את התשובה.

1. משוואות מסדר ראשון
   5 תרגילים
2. מידול בעזרת משוואות מסדר ראשון
   4 תרגילים
3. משוואות לינאריות מסדר שני ותנודות
   4 תרגילים
4. תנודות מאולצות ותהודה
   4 תרגילים
5. התמרות לפלס
   5 תרגילים
6. מערכות לינאריות, ערכים עצמיים ומישורי פאזה
   4 תרגילים
7. מערכות לא לינאריות ויציבות
   4 תרגילים
8. שיטות נומריות

4 תרגילים

9. פתרונות בטורים, טורי פורייה ומשוואת החום

4 תרגילים

מעבדות מחשב

ארבע מעבדות מחשב: מגפת SIR שנפתרת באוילר וב-RK4, מישור פאזה של טורף-נטרף, מודל אקלים של מאזן אנרגיה, וסריקת תדרים של מודל מגדל טורבינת רוח.

פרמטרים לדוגמה מסומנים ככאלה; כל מעבדה מקשרת למקור ציבורי על המערכת האמיתית.

מקור בטיחות: Lebl: Notes on Diffy Qs (free textbook) (https://www.jirka.org/diffyqs/)

מעבדה A: מגפת SIR עם אוילר ו-RK4

שבוע 12

מטרה: פתרו את מודל SIR נומרית, מצאו את השיא והשוו את אוילר ו-RK4 לגודל הסופי המדויק.

$$S' = -0.3SI,\ I' = 0.3SI - 0.1I,\ R' = 0.1I$$

```
S'=-0.3SI,\ I'=0.3SI-0.1I,\ R'=0.1I
```

SIR עם $R_0 = 3$ (קצבים לדוגמה ליום)

מהלך הניסוי

1. התחילו עם S = 0.999, I = 0.001, R = 0 (שברים מהאוכלוסייה).
2. הריצו אוילר עם h = 1 יום ו-h = 0.1 יום עד יום 160, ואז RK4 עם h = 1 יום.
3. רשמו את R הסופי, את שיא I ומתי הוא מתרחש; השוו לתיאוריה.

טבלת נתונים

שיטה	R סופי (יום 160)
אוילר, h = 1	0.9467
אוילר, h = 0.1	0.9411
RK4, h = 1	0.9405
גודל סופי מדויק (תיאוריה)	0.9405

ערכים מחושבים לקצבים לדוגמה; לא התפרצות אמיתית.

חישוב לדוגמה

1. השיא הוא 30.1% נדבקים בו-זמנית, סביב יום 38.4; התיאוריה נותנת $I_{max} = 1 - (1 + \ln R_0)/R_0 = 0.300$.
2. אוילר עם h = 1 מגזים בגודל הסופי ב-0.006; RK4 עם אותו צעד תואם את התיאוריה עד 4 ספרות.

> **בטיחות**
>
> - אין, מעבר לשימוש רגיל במחשב.

חלופה ביתית או וירטואלית

- גיליון אלקטרוני מספיק; Python קל יותר עבור RK4.

Lebl, 8.3 Applications of nonlinear systems (https://www.jirka.org/diffyqs/html/nlinapps_section.html)

הקשר לכדור הארץ: אותו מבנה מודל משמש להתפרצויות מחלות באנשים ובחיות בר.

- [ ] השלמתי את המעבדה הזו (רטובה או וירטואלית)

מעבדה B: מישור הפאזה של טורף-נטרף

שבוע 11

מטרה: בצעו אינטגרציה של מודל לוטקה–וולטרה ב-RK4 ושרטטו את המסלול הסגור במישור הפאזה.

$$x' = x - 0.02xy, \quad y' = -0.5y + 0.005xy$$

```
x'=x-0.02xy, y'=-0.5y+0.005xy
```

לוטקה–וולטרה (ערכים לדוגמה)

מהלך הניסוי

1. התחילו עם 150 נטרפים ו-50 טורפים.
2. השתמשו ב-RK4 עם צעד קטן (0.001 שנים ב-Python, או 0.01 בגיליון אלקטרוני) למשך 40 שנים.
3. שרטטו את y מול x ורשמו את טווח הנטרפים ואת המחזור.

טבלת נתונים

גודל	ערך
שיווי משקל	(100, 50)
טווח הנטרפים	62.6 עד 150
זמן מחזור	8.99 שנים
מחזור של מעגלים קטנים (תיאוריה לינארית)	8.89 שנים

ערכים מחושבים; פרמטרים לדוגמה.

חישוב לדוגמה

1. המסלול נסגר: האוכלוסיות חוזרות כל 8.99 שנים, מעט יותר מ-8.89 השנים שהתיאוריה הלינארית חוזה למעגלים קטנים, כי המעגל הזה גדול.
2. הטורפים מגיעים לשיא אחרי הנטרפים, פיגור שנראה ברשומות אמיתיות רבות.

בטיחות

- אין, מעבר לשימוש רגיל במחשב.

חלופה ביתית או וירטואלית

- Desmos יכול לשרטט את שדה השיפועים של מישור הפאזה.

Wolves and Moose of Isle Royale project (long-term data) (https://www.isleroyalewolf.org/)

הקשר לכדור הארץ: רשומות ארוכות כמו הזאבים והאיילים של האי רויאל בוחנות את המודלים האלה. National Park Service: Wolves of Isle Royale (https://www.nps.gov/isro/learn/nature/wolves.htm)

- [ ] **השלמתי את המעבדה הזו (רטובה או וירטואלית)**

מעבדה C: מודל אקלים של מאזן אנרגיה

שבוע 13

מטרה: קדמו מודל אקלים בן קופסה אחת בזמן אחרי אילוץ פתאומי ומצאו את סקאלת הזמן שלו.

$$C\frac{d\Delta T}{dt} = F - \lambda\,\Delta T$$

C(dΔ T)/(dt)=F- Δ T

מודל מאזן אנרגיה לינארי

מהלך הניסוי

1. השתמשו ב-$C = 2.09 \times 10^8$ J/(m²·K) (50 m של אוקיינוס), $\lambda = 3.35$ W/(m²·K) מיחידה 8, ואילוץ פתאומי $F = 4$ W/m² (ערך דוגמה).
2. קדמו באוילר בצעדים חודשיים למשך 10 שנים.
3. השוו לפתרון המדויק $\Delta T = (F/\lambda)(1 - e^{(-t/\tau)})$.

טבלת נתונים

שנה	ΔT (K)
1	0.48
2	0.77
5	1.10
10	1.19

ערכי מודל מחושבים; אין משובים מלבד קרינה.

חישוב לדוגמה

1. שיווי משקל $\Delta T = F/\lambda = 1.19$ K; $\tau = C/\lambda \approx 2.0$ שנים, כך שההתחממות הושלמה בכ-63% אחרי 2 שנים במודל הזה.
2. האקלים האמיתי מגיב לאט יותר ומתחמם יותר, כי החום מתערבב לתוך האוקיינוס העמוק והמשובים מגבירים אותו.

בטיחות

- אין, מעבר לשימוש רגיל במחשב.

חלופה ביתית או וירטואלית

- גיליון אלקטרוני מספיק.

NASA Earth Observatory: Climate and Earth's Energy Budget (https://earthobservatory.nasa.gov/features/EnergyBalance)

הקשר לכדור הארץ: מודלי מאזן אנרגיה הם הצעד הראשון לקראת תחזיות האקלים שמעריך ה-IPCC. IPCC AR6 Working Group I: The Physical Science Basis (https://www.ipcc.ch/report/ar6/wg1/)

- [ ] **השלמתי את המעבדה הזו (רטובה או וירטואלית)**

מעבדה D: סריקת תהודה של מודל מגדל טורבינת רוח

שבוע 6

מטרה: חשבו את ההגברה הדינמית של מודל מגדל בעל מתנד יחיד על פני תדרי עירור.

$$A(f) = \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}},\ r = f / f_0$$

```
A(f)=1(1-r^2)^2+(2 r)^2,\ r=f/f_0
```

הגברה דינמית

מהלך הניסוי

1. השתמשו ב-f_0 = 0.30 Hz ו-ζ = 0.01 (ערכים לדוגמה).
2. ערכו טבלה של A לתדרי עירור מ-0.1 עד 0.6 Hz.
3. סמנו את תדר הרוטור (0.20 Hz ב-12 סל"ד) ואת תדר מעבר הלהבים (0.60 Hz) והעריכו את התכן.

טבלת נתונים

תדר עירור (Hz)	הגברה
0.10	1.12
0.20	1.80
0.25	3.27
0.30	50.0
0.35	2.76
0.60	0.333

ערכים מחושבים למודל לדוגמה, לא לטורבינה מסוימת.

חישוב לדוגמה

1. שני תדרי הפעולה רחוקים היטב מהשיא ב-0.30 Hz, שם התגובה הייתה פי 50 מההסטה הסטטית.
2. אילו האיץ הרוטור ל-18 סל"ד (0.30 Hz), הוא היה מעורר את המגדל בתהודה; לכן מתכננים בודקים את התדר הטבעי מול כל טווח המהירויות.

בטיחות

- אין, מעבר לשימוש רגיל במחשב.

חלופה ביתית או וירטואלית

- גיליון אלקטרוני מספיק.

PhET: Masses and Springs (https://phet.colorado.edu/en/simulations/masses-and-springs)

הקשר לכדור הארץ: הימנעות מתהודה מאפשרת לטורבינות רוח לייצר אנרגיה נקייה בבטחה במשך עשורים. משרד האנרגיה האמריקאי: איך פועלות טורבינות רוח? (באנגלית) (https://www.energy.gov/eere/wind/how-do-wind-turbines-work)

☐ **השלמתי את המעבדה הזו (רטובה או וירטואלית)**

מערכי תרגול למבחן

מדדו זמן: כ־10 דקות לבעיה. אחר כך השוו לפתרונות המלאים.

סט תרגול לבחינת אמצע (יחידות 5–1)

1. פתרו $y' = -2ty$, $y(0) = 3$, ומצאו את $y(1)$.

   1. $dy/y = -2t\,dt$; $y = 3e^{(-t^2)}$.

   תשובה: $3e^{(-1)} \approx 1.104$.

2. אגם עם זמן שהייה של 4 שנים: כמה זמן עד שמזהם יורד לחצי אחרי שהזרימה הנכנסת נעצרת?

   1. $t = 4 \ln 2$.

   תשובה: ≈ 2.77 שנים.

3. פתרו $y'' + 6y' + 9y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, ומצאו את $y(1)$.

   1. $y = (1 + 3t)e^{(-3t)}$.

   תשובה: $4e^{(-3)} \approx 0.199$.

4. פתרו $y' + y = 1$, $y(0) = 0$ בלפלס ומצאו את $y(2)$.

   1. $Y = 1/(s(s+1)) = 1/s - 1/(s+1)$.

   תשובה: $1 - e^{(-2)} \approx 0.865$.

מערך תרגול מסכם (כל היחידות)

1. סווגו את הראשית של $x' = [[0, 1], [-2, -2]]x$.

   1. $\lambda = -1 \pm i$, $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$.

   תשובה: ספירלה יציבה.

2. למגפת SIR יש $\beta = 0.5$, $\gamma = 0.25$ ליום. מצאו את R_0 ואת סף חסינות העדר.

.$R_0 = 2$ .1

תשובה: $R_0 = 2$, סף 50%.

3. שני צעדי אוילר עם $h = 0.5$ עבור $y' = -y$, $y(0) = 1$.

1. כל צעד מכפיל ב-0.5.

תשובה: $y(1) \approx 0.25$ (הערך האמיתי $e^{-1} \approx 0.368$).

4. מערכת מסה-קפיץ עם $m = 1$ kg, $k = 16$ N/m, $c = 0.4$ N·s/m. מצאו את ω_0 ואת ζ.

.$\omega_0 = 4$ rad/s; $c_{crit} = 8$ .1

תשובה: $\omega_0 = 4$ rad/s, $\zeta = 0.05$ (הגברת שיא של כ-10).

דף נוסחאות

$$\mu = e^{\int p\,dx}$$

$$M_y = N_x \Rightarrow F = C$$

$$C = C_0 e^{-t/\tau}$$

$$H_{\max} = rK/4$$

$$ar^2 + br + c = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{k/m},\ c_{\text{crit}} = 2\sqrt{mk}$$

$$X = F_0 / \sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}$$

$$\mathcal{L}\{y'\} = sY - y(0)$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = 1/(s-a)$$

$$\mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s)$$

$$\lambda^2 - (\operatorname{tr} A)\lambda + \det A = 0$$

$$R_0 = \beta/\gamma,\ 1 - 1/R_0$$

$$y_{n+1} = y_n + hf$$

$$C\,T' = S(1-\alpha) - \varepsilon\sigma T^4$$

$$u_t = \alpha u_{xx}$$

$$b_n = \tfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f \sin nx\,dx$$

קבועים

קבוע	ערך
קבוע סטפן–בולצמן σ	5.67×10^{-8} W/(m²·K⁴)

קבוע	ערך
אור שמש ממוצע בראש האטמוספרה	340 W/m²
חלק אור השמש המוחזר	29%
זמן השהייה של אגם סופיריור	191 שנים
זמן השהייה של אגם אירי	2.6 שנים
אורך החיים הממוצע של מתאן	כעשור

מקור: NASA Earth Observatory: Climate and Earth's Energy Budget (https://earthobservatory.nasa.gov/features/EnergyBalance)

טקסטים וכלים חינמיים

השתמשו בספרים ובכלים החינמיים האלה לצד הקורס.

- Lebl: Notes on Diffy Qs (https://www.jirka.org/diffyqs/): ספר לימוד חינמי ומלא לקורס הזה.
- Trench: Elementary Differential Equations (free text) (https://digitalcommons.trinity.edu/mono/8/): ספר חינמי עם תרגילים רבים.
- MIT OpenCourseWare 18.03SC Differential Equations (https://ocw.mit.edu/courses/18-03sc-differential-equations-fall-2011/): הרצאות, תרגולים ומטלות של MIT בחינם.
- המחשבון הגרפי Desmos (https://www.desmos.com/calculator): שרטטו פתרונות ושדות שיפועים.
- PhET: Masses and Springs (https://phet.colorado.edu/en/simulations/masses-and-springs): אינטואיציה לריסון ולתנודות.

מילון מונחים

משוואה אוטונומית

$y' = f(y)$, ללא t מפורש.

המשוואה האופיינית

$ar^2 + br + c = 0$ למד"ר עם מקדמים קבועים.

ריסון קריטי

החזרה המהירה ביותר ללא חריגה.

ערך עצמי

λ עם $Av = \lambda v$.

מודל מאזן אנרגיה

מודל אקלים המאזן בין אור שמש נבלע לחום נפלט.

שיווי משקל

פתרון קבוע.

שיטת אוילר

התקדמות נומרית מסדר ראשון.

משוואה מדויקת

$M\,dx + N\,dy = 0$ עם $M_y = N_x$.

טור פורייה

פיתוח בסינוסים וקוסינוסים.

משוואת החום

$u_t = \alpha\, u_{xx}$.

גורם אינטגרציה

מכפיל ההופך מד"ר לינארית למדויקת.

יעקוביאן

מטריצת הנגזרות החלקיות הראשונות המשמשת ללינאריזציה.

התמרת לפלס

$\int_0^\infty e^{(-st)}\, f\, dt$.

לוטקה–וולטרה

מודל טורף-נטרף.

דיוקן פאזה

מסלולים במישור המצב.

תהודה

תגובה גדולה כשהעירור תואם תדר טבעי.

רונגה–קוטה (RK4)

שיטה נומרית מסדר רביעי.

R_0

מספר ההדבקה הבסיסי.

מודל SIR

מודל מגפה: רגישים–נדבקים–מחלימים.

משוואה פרידה

$dy/dx = g(x)h(y)$.

מחוון להערכה עצמית

לא ניתנים ציון או נקודות זכות. השתמשו בזה כדי להעריך בכנות איפה אתם עומדים בכל יחידה.

רמה	איך זה נראה
4 · שליטה מלאה	בונה מודלים מתיאור, פותר אותם בנוסחה ונומרית, ובודק יחידות והתנהגות לטווח ארוך.
3 · מיומן	פותר את תרגילי האימון עם טעויות מזדמנות.
2 · מתפתח	עוקב אחר דוגמאות פתורות אך מתקשה לבנות מודלים או לבחור שיטה.
1 · מתחיל	מיישם נוסחאות בלי לבדוק פתרונות; צריך לחזור על היחידה.

שקלול מוצע אם רוצים ציון

חלק	משקל
תרגילים	30%
מעבדות מחשב	15%
מערך תרגול לאמצע הקורס	25%
מערך תרגול מסכם	30%

שאפו לרמה 3 ומעלה בכל יחידה לפני שעוברים לקורס הבא.

קורסים קשורים

- חשבון אינפיניטסימלי 3 MATH 210
- פיזיקה 2 PHYS 210 + PHYS 210L
- סטטיקה ENGR 211
- כל הקורסים