Dernière mise à jour: November 1, 2026

🗺️ Parcours sur quatre ans · Année 2, Printemps

# À propos de ce cours

Ce cours gratuit compte 9 unités et 4 travaux pratiques. Ce sont les vrais totaux, pas un programme plus long raccourci.

Un contrôle est un nombre ou un résultat de code sur une page de cours qu'un script recalcule avant publication. Le nombre affiché et le nombre recalculé doivent correspondre.

> Ceci est le plan d'un cours gratuit en autonomie rédigé par Saving Planets. Ce n'est pas un cours universitaire : il ne donne aucun crédit académique et aucun établissement n'y participe.
>
> Son contenu suit un cours de deuxième année d'équations différentielles ordinaires, sur le modèle des thèmes et du niveau de MIT OpenCourseWare 18.03 et des manuels gratuits de Jiří Lebl (Notes on Diffy Qs) et de William Trench, ainsi que des programmes de cours comme Georgia Tech MATH 2552 et Stanford Math 53. Nous renvoyons aux ressources gratuites tout au long du cours. Aucun de ces auteurs ni aucune de ces organisations ne cautionne cette page.
>
> Ce que nous ajoutons : chaque unité est reliée à un vrai problème planétaire avec une source publique citée (lacs, méthane, pêcheries, carbone, climat, épidémies, éoliennes), chaque nombre de la page est recalculé par un script de vérification avant sa mise en ligne, et quatre TP sur ordinateur résolvent numériquement de vrais modèles.
>
> Suivez-le dans l'ordre. Chaque unité comporte des objectifs, des notions clés, des équations, des exemples pas à pas, des exercices corrigés en détail, des erreurs fréquentes, des cartes mémoire et un quiz. Votre progression est enregistrée uniquement dans ce navigateur.

### Comment ce cours aide à sauver la planète

Presque tout modèle de la planète vivante est une équation différentielle : la vitesse à laquelle un lac évacue un polluant, la reconstitution d'un stock de poissons, les échanges de carbone entre l'air et la mer, la rapidité du réchauffement de la Terre quand son bilan énergétique change, la propagation d'une épidémie et l'oscillation d'un mât d'éolienne.

Chaque unité se termine par une courte section sourcée montrant comment ses idées aident à la fois les humains et la nature. Les paramètres de modèle qui ne viennent pas d'une source sont signalés comme valeurs d'exemple.

## Pour les enseignants

Vous pouvez enseigner ce cours, ou laisser un élève le faire seul. Il est gratuit. Saving Planets ne donne ni note ni crédit scolaire.

- Cette page est le cours entier : 9 unités et 4 travaux pratiques (MATH 220).
- Prévoyez 15 semaines, environ 6 à 9 heures par semaine, y compris les semaines de travaux pratiques.
- Suivez le calendrier de 15 semaines. Lisez l'unité, faites les exercices sur papier, puis ouvrez la réponse. La semaine d'un TP, faites le TP ou la version à la maison.
- Un contrôle est un nombre ou un résultat de code sur la page qu'un script recalcule avant publication. Le nombre affiché et le nombre recalculé doivent correspondre.
- Utilisez Imprimer cette page, ou téléchargez le guide d'étude PDF. La feuille de formules est vers la fin.
- Demandez : en quoi cette unité aide-t-elle les gens et la planète ? Chaque unité a un encadré vert avec un fait sourcé.
- Copiez le modèle de guide enseignant et écrivez le nom de votre classe, le temps dont vous disposez et les questions que vous poserez. Ouvrir le modèle de guide enseignant

# Avant de commencer

### Prérequis

- Analyse I et II : dérivées, intégrales, décomposition en éléments simples, séries de Taylor.
- Matrices, déterminants et valeurs propres des matrices 2 × 2 (vus brièvement dans l'unité 6).
- L'analyse III aide pour l'équation de la chaleur mais n'est pas obligatoire.

### Comment étudier

- Vérifiez chaque solution en la réinjectant dans l'équation.
- Faites chaque exercice sur papier avant d'ouvrir la réponse.
- Esquissez un champ de directions ou un portrait de phase avant de résoudre ; sachez à quoi la réponse devrait ressembler.
- Demandez-vous pour chaque modèle : quelles sont les unités, et le comportement à long terme a-t-il un sens ?
- Résolvez aussi numériquement un problème de chaque unité, et comparez avec la formule.
- Refaites les quiz quelques jours plus tard. La pratique espacée vaut mieux qu'une longue séance.

### Ce qu'il vous faut

- Un ordinateur ou une tablette avec un tableur.
- Une calculatrice graphique gratuite comme Desmos.
- Facultatif : Python avec NumPy (gratuit dans Google Colab).

# Programme suggéré sur 15 semaines

Environ 6 à 9 heures par semaine : lecture, exercices et, les semaines de TP, le TP.

| Semaine | Unité | Thèmes | Lecture |
|---|---|---|---|
| 1 | Équations du premier ordre | Champs de directions ; équations à variables séparables | Lebl 1.1–1.3 |
| 2 | Équations du premier ordre | Équations linéaires et exactes ; existence et unicité | Lebl 1.2, 1.4, 1.8 |
| 3 | Modélisation avec des équations du premier ordre | Modélisation : mélange, décroissance, croissance logistique, prélèvement | Lebl 1.6 |
| 4 | Équations linéaires du second ordre et oscillations | Équations linéaires du second ordre ; équation caractéristique | Lebl 2.1–2.2 |
| 5 | Équations linéaires du second ordre et oscillations | Vibrations mécaniques et amortissement | Lebl 2.4 |
| 6 | Vibrations forcées et résonance | Coefficients indéterminés ; oscillation forcée et résonance ; TP D | Lebl 2.5–2.6 |
| 7 | Transformées de Laplace | Transformées de Laplace ; résolution de problèmes de Cauchy | Lebl 6.1–6.2 |
| 8 | Transformées de Laplace | Fonctions échelon, impulsions, convolution ; entraînement au partiel | Lebl 6.3–6.4 |
| 9 | Systèmes linéaires, valeurs propres et plans de phase | Systèmes ; matrices et valeurs propres | Lebl 3.1–3.4 |
| 10 | Systèmes linéaires, valeurs propres et plans de phase | Portraits de phase et classification | Lebl 3.5 |
| 11 | Systèmes non linéaires et stabilité | Systèmes non linéaires, linéarisation ; proies-prédateurs ; TP B | Lebl 8.1–8.3 |
| 12 | Systèmes non linéaires et stabilité | Stabilité ; épidémies SIR ; TP A | Lebl 8.2–8.3 |
| 13 | Méthodes numériques | Méthodes numériques ; modèle de bilan énergétique ; TP C | Lebl 1.7, Trench 3 |
| 14 | Solutions en séries, séries de Fourier et équation de la chaleur | Solutions en séries ; séries de Fourier ; équation de la chaleur | Lebl 7.1–7.2, 4.2, 4.6 |

| Semaine | Unité | Thèmes | Lecture |
|---|---|---|---|
| 15 | Révision | Révision et série d’exercices finale | Toutes les unités |

## Votre progression

Cochez les unités et les TP à mesure que vous les terminez, et faites les quiz. La progression et les scores sont enregistrés uniquement dans ce navigateur et ne nous sont jamais envoyés.

## Unités

# Équations du premier ordre

Champs de directions, équations à variables séparables, équations linéaires avec facteur intégrant, équations exactes, et conditions d'existence et d'unicité d'une solution.

## Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette unité, vous saurez :

- Lire un champ de directions et esquisser des solutions.
- Résoudre des équations du premier ordre à variables séparables et linéaires.
- Reconnaître et résoudre des équations exactes.
- Énoncer le théorème d'existence et d'unicité et repérer quand il ne s'applique pas.

## Notions clés

- Une équation différentielle relie une fonction inconnue à ses dérivées ; une solution est une fonction qui la rend vraie.
- Variables séparables : dy/dx = g(x)h(y). Divisez et intégrez les deux membres.
- Linéaire : y' + p(x)y = q(x). Multipliez par le facteur intégrant μ = e^(∫p dx) pour que le membre de gauche devienne (μy)'.
- Exacte : M dx + N dy = 0 avec M_y = N_x s'écrit dF = 0, donc F(x, y) = C.
- Si f et ∂f/∂y sont continues près de $(x_0, y_0)$, alors y' = f(x, y), $y(x_0) = y_0$ a exactement une solution au voisinage. Les solutions peuvent néanmoins exploser en temps fini.

## Équations clés

$$\frac{dy}{h(y)} = g(x)\,dx$$

`(dy)/(h(y))=g(x) dx`

Équation à variables séparables

$$\mu = e^{\int p\,dx}, \quad (\mu y)' = \mu q$$

`μ=e^ p dx,(μ y)'=μ q`

Facteur intégrant

$$M_y = N_x \Rightarrow F(x,y) = C$$

`M_y=N_x F(x,y)=C`

Équation exacte

$$y' = f(x, y),\ y(x_0) = y_0$$

`y'=f(x,y),\ y(x_0)=y_0`

Problème de Cauchy

## Exemples résolus pas à pas

**Exemple 1.1** Résolvez dy/dx = xy, y(0) = 2, et calculez y(1).

1. dy/y = x dx, donc ln|y| = x²/2 + C.
2. y = 2e^(x²/2).
3. y(1) = 2e^0.5.

**Réponse :** ≈ 3.297.

**Exemple 1.2** Résolvez y' + 2y = 4, y(0) = 0, et calculez y(1).

1. μ = e^(2t), donc (e^(2t)y)' = 4e^(2t).
2. e^(2t)y = 2e^(2t) + C ; y(0) = 0 donne C = −2.
3. y = 2(1 − e^(−2t)).

**Réponse :** y(1) ≈ 1.729, qui tend vers l'état stationnaire 2.

**Exemple 1.3** Résolvez 2xy dx + (x² + 2y) dy = 0 avec y(0) = 1, et calculez y quand x = 1.

1. M_y = 2x = N_x : exacte.
2. F = x²y + y²; F(0, 1) = 1.
3. En x = 1 : y + y² = 1, donc y = (−1 + √5)/2.

**Réponse :** ≈ 0.618.

## Exercices

Faites chacun d'abord sur papier, puis vérifiez.

1. Résolvez y' = y², y(0) = 1. Où la solution existe-t-elle ?

   y = 1/(1 − t) ; elle explose en t = 1, bien que y² soit régulière partout.

2. Résolvez t y' + y = t² pour t > 0.

(ty)' = $t^2$, donc $y = t^2/3 + C/t$.

3. Résolvez $y' = -y/\tau$.

   $y = y_0 e^{(-t/\tau)}$.

4. $(y \cos x)\,dx + (\sin x + 2y)\,dy = 0$ est-elle exacte ? Résolvez.

   $M_y = \cos x = N_x$ ; $F = y \sin x + y^2 = C$.

5. $y' = \sqrt{y}$, $y(0) = 0$ a-t-elle une solution unique ?

   Non : $y = 0$ et $y = t^2/4$ conviennent toutes deux ; $\partial f/\partial y = 1/(2\sqrt{y})$ n'est pas continue en $y = 0$.

## Idées reçues fréquentes

**Idée reçue :** Toute équation du premier ordre est à variables séparables.

**En réalité :** $y' = x + y$ ne l'est pas ; elle est linéaire.

**Idée reçue :** Oublier +C jusqu'à la fin ne pose pas de problème.

**En réalité :** Ajoutez C au moment d'intégrer, avant d'isoler y, sinon la condition initiale donne un mauvais résultat.

**Idée reçue :** Un second membre régulier signifie que la solution existe pour toujours.

**En réalité :** $y' = y^2$ explose en temps fini.

## Cartes mémoire

**À variables séparables**

$dy/dx = g(x)h(y)$.

**Linéaire du premier ordre**

$y' + p\,y = q$.

**Facteur intégrant**

$\mu = e^{(\int p\,dx)}$.

**Exacte**

$M_y = N_x$; $F = C$.

**Problème de Cauchy**

Une EDO plus $y(x_0) = y_0$.

**Existence et unicité**

f, $f_y$ continues ⇒ une solution locale.

## Quiz d'autocontrôle

**1. Le facteur intégrant de $y' + 3y = x$ est…**

e^(3x)

e^x

3x

e^(−3x)

e^(3x). e^(∫3 dx).

**2. M dx + N dy = 0 est exacte quand…**

M = N

M_y = N_x

M_x = N_y

MN = 1

M_y = N_x. Les dérivées croisées de F coïncident.

**3. y' = ky a pour solution…**

$y_0$ + kt

$y_0$e^(kt)

$kt^2$

sin kt

$y_0$e^(kt). À variables séparables.

**4. L’unicité peut échouer quand…**

f est linéaire

∂f/∂y est discontinue

$y_0$ = 1

l’équation est à variables séparables

∂f/∂y est discontinue. par ex. y' = √y en 0.

**Refaire ce quiz**

## Comment cela aide à sauver la planète

L'équation du premier ordre la plus simple, y' = −y/τ, décrit comment un polluant s'élimine d'un lac bien mélangé ou comment un gaz quitte l'atmosphère. Son seul paramètre, l'échelle de temps τ, décide si une erreur s'estompe en quelques années ou dure des siècles (unité 2).

Sur Saving Planets : Page Rivières

Sources : U.S. EPA: Physical features of the Great Lakes (retention times) (https://www.epa.gov/greatlakes/physical-features-great-lakes) · Lebl, 1.4 Linear equations and the integrating factor (https://www.jirka.org/diffyqs/html/intfactor_section.html)

## Ressources d'apprentissage gratuites

- Lebl, 1.3 Separable equations (https://www.jirka.org/diffyqs/html/separable_section.html): Section de manuel gratuite.
- Lebl, 1.4 Integrating factor (https://www.jirka.org/diffyqs/html/intfactor_section.html): Équations linéaires.
- Lebl, 1.8 Exact equations (https://www.jirka.org/diffyqs/html/exact_section.html): Équations exactes.
- Lebl, 1.2 Slope fields (https://www.jirka.org/diffyqs/html/slopefields_section.html): Existence et unicité.

## Regarder le cours magistral

First Order Autonomous Equations (https://ocw.mit.edu/courses/18-03sc-differential-equations-fall-2011/resources/first-order-autonomous-equations/) (en anglais)

MIT 18.03SC Differential Equations (Fall 2011), MIT OpenCourseWare. Licence : CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Conditions d'utilisation (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Lien fourni uniquement pour l'étude gratuite ; Saving Planets n'est ni affilié à cette université ni soutenu par elle.

☐ **J'ai terminé cette unité**

# Modélisation avec des équations du premier ordre

Traduire une situation en équation : mélange et pollution des lacs, décroissance et durées de vie, refroidissement de Newton, croissance logistique, prélèvement, et équilibres avec leur stabilité.

## Objectifs d’apprentissage

À la fin de cette unité, vous saurez :

- Construire des modèles « débit entrant moins débit sortant ».
- Interpréter les constantes de temps et les durées de vie.
- Trouver les équilibres d’équations autonomes et classer leur stabilité.
- Utiliser le modèle logistique avec prélèvement pour trouver le rendement maximal durable.

## Notions clés

- Taux de variation = débit entrant − débit sortant. Écrivez les unités de chaque terme.
- Un lac bien mélangé de temps de séjour τ perd un polluant au rythme C/τ dès que l’apport est propre.
- Pour une équation autonome y' = f(y), les équilibres vérifient f(y) = 0 ; un équilibre est stable si f'(y) < 0.
- La croissance logistique P' = rP(1 − P/K) se stabilise à K. Avec un prélèvement constant H, le plus grand prélèvement durable est rK/4, en P = K/2.

## Équations clés

$$\frac{dx}{dt} = (\text{rate in}) - (\text{rate out})$$

```
dx/dt=(rate in)-(rate out)
```

Loi de bilan

$$C(t) = C_0 e^{-t/\tau}$$

```
C(t)=C_0e^-t/τ
```

Renouvellement avec un temps de séjour τ

$$P' = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right) - H$$

```
P'=rP(1- PK)-H
```

Croissance logistique avec prélèvement

$$H_{\max} = \frac{rK}{4}$$

H_=rK/4

Rendement maximal durable

## Exemples résolus pas à pas

**Exemple 2.1** Le temps de séjour du lac Érié est de 2.6 ans et celui du lac Supérieur de 191 ans (EPA). Si l'apport d'un polluant cesse, combien de temps faut-il pour que la concentration de chaque lac tombe à 10 %, en supposant chaque lac bien mélangé ?

1. $C/C_0 = e^{(-t/\tau)} = 0.1$, donc $t = \tau \ln 10$.
2. Érié : 2.6 × 2.303 = 5.99 ans.
3. Supérieur : 191 × 2.303 = 440 ans.

**Réponse :** Environ 6 ans pour l'Érié mais environ 440 pour le Supérieur. La prévention compte le plus là où le renouvellement est lent.

**Exemple 2.2** L'EPA indique que le méthane reste en moyenne une dizaine d'années dans l'atmosphère. Traitez une impulsion de méthane comme décroissant avec $\tau = 10$ ans. Quelle fraction reste-t-il après 30 ans ?

1. Fraction = $e^{(-30/10)} = e^{(-3)}$.

**Réponse :** Environ 5 %. Réduire les fuites de méthane porte donc ses fruits en quelques décennies, contrairement au $CO_2$, qui persiste bien plus longtemps.

**Exemple 2.3** Un stock de poissons suit $P' = 0.4P(1 - P/10000) - H$ (tonnes, années ; valeurs d'exemple). Trouvez le rendement maximal durable.

1. La croissance $rP(1 - P/K)$ est maximale en $P = K/2 = 5000$ t.
2. Elle y vaut $rK/4 = 0.4 \times 10000/4$.

**Réponse :** 1000 tonnes par an. Prélever davantage mène le stock à l'effondrement.

## Exercices

Faites chacun d'abord sur papier, puis vérifiez.

1. Un café à 90 °C refroidit dans une pièce à 20 °C selon T' = −0.1(T − 20) (minutes). Calculez T(10).

   T = 20 + 70e^(−1) ≈ 45.8 °C.

2. Une cuve de 100 L d'eau douce reçoit une saumure à 0.5 g/L à raison de 2 L/min et se vide à 2 L/min. Calculez la quantité de sel au bout de 50 minutes.

   x' = 1 − x/50, x = 50(1 − e^(−t/50)); x(50) = 50(1 − e^(−1)) ≈ 31.6 g.

3. Trouvez et classez les équilibres de y' = y(1 − y).

   y = 0 (f' = 1, instable) et y = 1 (f' = −1, stable).

4. Dans l'exemple de la pêcherie, que se passe-t-il si H = 1200 t/an ?

   rP(1 − P/K) − H < 0 pour tout P, donc le stock décline jusqu'à zéro.

## Idées reçues fréquentes

**Idée reçue :** Le temps de séjour est le temps nécessaire pour éliminer tout le polluant.
**En réalité :** Après un τ, il en reste 37 % ; la décroissance exponentielle n'atteint jamais tout à fait zéro.

**Idée reçue :** Plus d'effort de pêche signifie toujours plus de prises.
**En réalité :** Au-delà du rendement maximal durable, prélever davantage réduit le stock et les prises futures.

**Idée reçue :** Un équilibre est toujours l'état final du système.
**En réalité :** Seuls les équilibres stables attirent les solutions voisines.

## Cartes mémoire

**Loi de bilan**

Entrée − sortie.

**Constante de temps**

τ dans e^(−t/τ) ; 63 % du changement est accompli après τ.

**Temps de séjour**

Volume du lac ÷ débit sortant.

**Équilibre**

f(y*) = 0.

**Test de stabilité**

f'(y*) < 0 stable.

**Rendement maximal durable**

rK/4 en P = K/2.

## Quiz d’autocontrôle

**1. Avec τ = 5 ans, la fraction restante après 5 ans est…**

0

e^(−1) ≈ 0.37

0.5

0.1

e^(−1) ≈ 0.37. e^(−t/τ) en t = τ.

**2. Le rendement maximal durable de la croissance logistique est…**

rK

rK/4

K/2

r/K

rK/4. Maximum de rP(1 − P/K).

**3. y* est un équilibre stable de y' = f(y) si…**

f'(y*) > 0

f'(y*) < 0

f(y*) > 0

y* > 0

f'(y*) < 0. Les solutions voisines sont ramenées.

**4. Quel lac se remet le plus vite d’une pollution ?**

Supérieur (191 ans)

Érié (2.6 ans)

Pareil

Aucun des deux

Érié (2.6 ans). Temps de séjour plus court.

**Refaire ce quiz**

## Comment cela aide à sauver la planète

L'EPA indique des temps de séjour des Grands Lacs allant de 2.6 ans (Érié) à 191 ans (Supérieur), c'est pourquoi les substances toxiques qui entrent dans le lac Supérieur sont un problème sur plusieurs générations.

Les halieutes de la NOAA évaluent les stocks avec des modèles de population fondés sur ces idées ; le rendement maximal durable du modèle logistique est le point de départ classique.

Sur Saving Planets : Pôle Océans · Page Rivières

Sources : U.S. EPA: Physical features of the Great Lakes (retention times) (https://www.epa.gov/greatlakes/physical-features-great-lakes) · U.S. EPA: Understanding global warming potentials (https://www.epa.gov/ghgemissions/understanding-global-warming-potentials) · NOAA Fisheries : évaluations des populations (https://www.fisheries.noaa.gov/topic/population-assessments)

## Ressources d'apprentissage gratuites

- Lebl, 1.6 Autonomous equations (https://www.jirka.org/diffyqs/html/auteq_section.html): Équilibres, croissance logistique, prélèvement.
- Lebl, 1.4 Integrating factor (https://www.jirka.org/diffyqs/html/intfactor_section.html): Problèmes de mélange.
- OpenStax Calculus 2, 4.4 The Logistic Equation (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/4-4-the-logistic-equation): Modèle logistique.

## Regarder le cours magistral

First Order Autonomous Equations (https://ocw.mit.edu/courses/18-03sc-differential-equations-fall-2011/resources/first-order-autonomous-equations/) (en anglais)

MIT 18.03SC Differential Equations (Fall 2011), MIT OpenCourseWare. Licence : CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Conditions d'utilisation (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Lien fourni uniquement pour l'étude gratuite ; Saving Planets n'est ni affilié à cette université ni soutenu par elle.

☐ **J'ai terminé cette unité**

# Équations linéaires du second ordre et oscillations

Équations linéaires à coefficients constants, équation caractéristique et vibrations libres : non amorties, sous-amorties, à amortissement critique et sur-amorties.

## Objectifs d’apprentissage

À la fin de cette unité, vous saurez :

- Résoudre ay'' + by' + cy = 0 avec l’équation caractéristique.
- Traiter les racines réelles, doubles et complexes.
- Modéliser des systèmes masse-ressort-amortisseur.
- Classer l’amortissement et calculer la pulsation propre et l’amortissement critique.

## Notions clés

- Essayez y = e^(rt) : ar² + br + c = 0. Deux racines réelles donnent deux exponentielles ; une racine double donne ($c_1$ + $c_2$t)e^(rt) ; des racines complexes α ± iβ donnent e^(αt)($c_1$ cos βt + $c_2$ sin βt).
- Superposition : les sommes de solutions d’une équation linéaire homogène sont des solutions.
- mx'' + cx' + kx = 0 a pour pulsation propre $\omega_0$ = √(k/m).
- Un amortissement c < 2√(mk) oscille en décroissant (sous-amorti) ; c = 2√(mk) revient le plus vite sans dépassement (critique).

## Équations clés

$$ar^2 + br + c = 0$$

```
ar^2+br+c=0
```

Équation caractéristique

$$y = e^{\alpha t}(c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t)$$

```
y=e^α t(c_1β t+c_2β t)
```

Racines complexes α ± iβ

$$mx'' + cx' + kx = 0,\ \omega_0 = \sqrt{k/m}$$

```
mx''+cx'+kx=0,\ ω_0=/m
```

Masse-ressort-amortisseur

$$c_{\text{crit}} = 2\sqrt{mk}$$

`c_crit=2`

Amortissement critique

## Exemples résolus pas à pas

**Exemple 3.1** Résolvez y'' + 4y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0. Quelle est la période ?

1. $r^2 + 4 = 0$, $r = \pm 2i$.
2. $y = \cos 2t$.
3. Période $2\pi/2$.

**Réponse :** $y = \cos 2t$, période $\pi \approx 3.14$.

**Exemple 3.2** Résolvez y'' + 2y' + 5y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0, et calculez y(1).

1. $r = -1 \pm 2i$.
2. y = e^(−t)(cos 2t + ½ sin 2t) satisfait les deux conditions.
3. y(1) = e^(−1)(cos 2 + ½ sin 2).

**Réponse :** ≈ 0.0142 : l'oscillation s'est presque éteinte.

**Exemple 3.3** Une masse de 2 kg est suspendue à un ressort de k = 50 N/m. Calculez $\omega_0$, la fréquence en hertz et l'amortissement critique.

1. $\omega_0 = \sqrt{(50/2)} = 5$ rad/s.
2. $f = 5/(2\pi) = 0.796$ Hz.
3. $c_{crit} = 2\sqrt{(2 \times 50)} = 20$ N·s/m.

**Réponse :** 5 rad/s, 0.80 Hz, 20 N·s/m.

## Exercices

Faites chacun d'abord sur papier, puis vérifiez.

1. Résolvez y'' − 3y' + 2y = 0.

   r = 1, 2: $y = c_1 e^t + c_2 e^{\wedge}(2t)$.

2. Résolvez y'' + 2y' + y = 0.

   Racine double r = −1 : $y = (c_1 + c_2 t) e^{\wedge}(-t)$.

3. Classez $x'' + 6x' + 5x = 0$.

   $r = -1, -5$ : sur-amorti ($c = 6 > 2\sqrt{5}$).

4. Calculez la période de $x'' + 9x = 0$.

   $\omega = 3$, période $2\pi/3 \approx 2.09$.

## Idées reçues fréquentes

**Idée reçue :** Des racines complexes signifient des solutions complexes.

**En réalité :** Les parties réelle et imaginaire donnent des solutions réelles : e^(αt)cos βt et e^(αt)sin βt.

**Idée reçue :** Une racine double ne donne qu'une seule solution.

**En réalité :** La seconde est t e^(rt).

**Idée reçue :** Plus d'amortissement signifie toujours un retour à l'équilibre plus rapide.

**En réalité :** Les systèmes sur-amortis reviennent plus lentement que ceux à amortissement critique.

## Cartes mémoire

**Équation caractéristique**

$ar^2 + br + c = 0$.

**Superposition**

Les sommes de solutions sont des solutions (linéaire homogène).

**Racine double**

$(c_1 + c_2 t)e^{rt}$.

**Pulsation propre**

$\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

**Sous-amorti**

Oscille en décroissant.

**Amortissement critique**

$c = 2\sqrt{mk}$.

## Quiz d'autocontrôle

**1. Les racines 2 ± 3i donnent les solutions…**

e^(2t), e^(3t)

e^(2t)cos 3t, e^(2t)sin 3t

cos 2t

te^(2t)

e^(2t)cos 3t, e^(2t)sin 3t. α = 2, β = 3.

**2. Pulsation propre de mx" + kx = 0 :**

k/m

√(k/m)

m/k

√(mk)

√(k/m). $r^2 = -k/m$.

**3. L'amortissement critique c vaut...**

√(mk)

2√(mk)

mk

k/m

2√(mk). Discriminant nul.

**4. y" + 2y' + y = 0 est...**

sous-amorti

à amortissement critique

sur-amorti

non amorti

à amortissement critique. Racine double.

Refaire ce quiz

## Comment cela aide à sauver la planète

Toute structure élevée, d'un mât d'éolienne à un pont, a des fréquences propres fixées par sa raideur et sa masse, exactement $\omega_0 = \sqrt{(k/m)}$ dans le modèle le plus simple. L'amortissement décide de la vitesse à laquelle s'éteignent les oscillations dues aux rafales, ce qui influe sur la fatigue et la durée de vie de la structure.

Sur Saving Planets : Physique I, unité 8 : oscillations

Sources : DOE des États-Unis : comment fonctionnent les éoliennes ? (en anglais) (https://www.energy.gov/eere/wind/how-do-wind-turbines-work) · Lebl, 2.4 Mechanical vibrations (https://www.jirka.org/diffyqs/html/sec_mv.html)

## Ressources d'apprentissage gratuites

- Lebl, 2.1 Second-order linear ODEs (https://www.jirka.org/diffyqs/html/solinear_section.html): Théorie.
- Lebl, 2.2 Constant coefficient equations (https://www.jirka.org/diffyqs/html/sec_ccsol.html): Équation caractéristique.
- Lebl, 2.4 Mechanical vibrations (https://www.jirka.org/diffyqs/html/sec_mv.html): Amortissement.
- PhET : Masses and Springs (https://phet.colorado.edu/en/simulations/masses-and-springs): Simulation.

## Regarder le cours magistral

Constant Coefficient Second Order Homogeneous DE's (https://ocw.mit.edu/courses/18-03sc-differential-equations-fall-2011/resources/constant-coefficient-second-order-homogeneous-des/) (en anglais)

MIT 18.03SC Differential Equations (Fall 2011), MIT OpenCourseWare. Licence : CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Conditions d'utilisation (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Lien fourni uniquement pour l'étude gratuite ; Saving Planets n'est ni affilié à cette université ni soutenu par elle.

☐ J'ai terminé cette unité

# Vibrations forcées et résonance

Équations non homogènes, coefficients indéterminés, réponse en amplitude d'un oscillateur forcé, battements et résonance.

## Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette unité, vous saurez :

- Trouver des solutions particulières par la méthode des coefficients indéterminés.
- Écrire la solution générale comme solution homogène plus solution particulière.
- Calculer l'amplitude en régime permanent d'un oscillateur amorti forcé.
- Expliquer la résonance et comment les ingénieurs l'évitent.

## Notions clés

- Solution générale = solution homogène + une solution particulière.
- Devinez la forme à partir du forçage : pour cos ωt, essayez A cos ωt + B sin ωt.
- Forcé à la pulsation ω, un oscillateur amorti s'installe dans un mouvement permanent d'amplitude $X = F_0/\sqrt{((k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2)}$.
- Près de $\omega = \omega_0$, l'amplitude passe par un pic ; avec le taux d'amortissement $\zeta = c/c_crit$, l'amplification dynamique maximale vaut environ $1/(2\zeta)$. Sans amortissement, la réponse croît sans limite.

## Équations clés

$$y = y_h + y_p$$

y=y_h+y_p

Solution générale

$$X = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}}$$

X=_0(k-mω^2)^2+(cω)^2

Amplitude en régime permanent

$$\frac{X}{F_0/k} = \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}},\ r = \frac{\omega}{\omega_0}$$

(X)/(F_0/k)=1(1-r^2)^2+(2 r)^2,\ r=(ω)/(ω_0)

Amplification dynamique

$$y'' + \omega^2 y = \cos \omega t \Rightarrow y_p = \frac{t \sin \omega t}{2\omega}$$

```
y''+ω^2y=ω t y_p=(tω t)/(2ω)
```

Résonance pure

## Exemples résolus pas à pas

**Exemple 4.1** Trouvez une solution particulière de y" + y = cos 2t.

1. Essayez y_p = A cos 2t : −4A + A = 1.
2. A = −1/3.

**Réponse :** y_p = −⅓ cos 2t (en opposition de phase, car le forçage est au-dessus de la fréquence propre).

**Exemple 4.2** Modélisez un mât d'éolienne comme un oscillateur unique de fréquence propre 0.30 Hz et de taux d'amortissement ζ = 0.01 (valeurs d'exemple). Le rotor tourne à 12 tr/min = 0.20 Hz, et trois pales passent devant le mât à 0.60 Hz. Calculez l'amplification dynamique dans chaque cas, et à la résonance.

1. At 0.20 Hz, r = 0.667: 1/√((1 − 0.444)² + (0.0133)²) = 1.80.
2. At 0.60 Hz, r = 2: 1/√(9 + 0.0016) = 0.333.
3. At r = 1: 1/(2ζ) = 50.

**Réponse :** 1.8 et 0.33, mais 50 à la résonance. C'est pourquoi les concepteurs éloignent la fréquence propre d'un mât des fréquences du rotor et de passage des pales.

**Exemple 4.3** Résolvez y" + y = cos t, y(0) = y'(0) = 0.

1. Le forçage coïncide avec la fréquence propre, donc essayez y_p = t(A cos t + B sin t).
2. En substituant, on obtient A = 0, B = ½.
3. y = ½ t sin t.

**Réponse :** L'amplitude croît comme t/2 sans limite : résonance pure.

## Exercices

Faites chacun d'abord sur papier, puis vérifiez.

1. Trouvez $y_p$ pour $y'' + 3y' + 2y = 4$.

   $y_p = 2$.

2. Trouvez $y_p$ pour $y'' - y = e^t$.

   $e^t$ est solution de l'équation homogène, donc $y_p = \frac{1}{2}\, t\, e^t$.

3. Une masse de 1 kg, $k = 100$ N/m, $c = 2$ N·s/m est forcée par $10 \cos 10t$ N. Calculez l'amplitude permanente.

   $k - m\omega^2 = 0$, donc $X = 10/(2 \times 10) = 0.5$ m.

4. Pour $\zeta = 0.05$, quelle est l'amplification maximale ?

   Environ $1/(2 \times 0.05) = 10$.

## Idées reçues fréquentes

**Idée reçue :** La résonance nécessite une force importante.
**En réalité :** Une petite force périodique à la fréquence propre produit une forte réponse.

**Idée reçue :** L'amortissement supprime la résonance.
**En réalité :** Il plafonne le pic à environ $1/(2\zeta)$, ce qui reste élevé pour les structures peu amorties.

**Idée reçue :** Les coefficients indéterminés fonctionnent pour tout forçage.
**En réalité :** Seulement pour les polynômes, exponentielles, sinus et cosinus et leurs produits ; sinon, utilisez la variation des constantes ou Laplace.

## Cartes mémoire

**Solution particulière**

N'importe quelle solution de l'équation forcée.

**Coefficients indéterminés**

Deviner la forme du forçage.

**Réponse en amplitude**

$X = F_0/\sqrt{((k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2)}$.

**Taux d'amortissement**

$\zeta = c/(2\sqrt{(mk)})$.

**Résonance**

Forte réponse près de $\omega_0$ ; pic $\approx 1/(2\zeta)$.

**Battements**

Deux fréquences proches créent une enveloppe lente.

## Quiz d’autocontrôle

**1. Solution générale =**

y_p seulement

y_h + y_p

y_h × y_p

y_h − y_p

y_h + y_p. Linéarité.

**2. La résonance se produit quand la fréquence de forçage est proche de…**

zéro

la fréquence propre

son double

l’infini

la fréquence propre. Dénominateur minimal.

**3. Avec ζ = 0.01, l’amplification maximale vaut environ…**

1

10

50

100

50. 1/(2ζ).

**4. Un forçage bien au-dessus de $\omega_0$ donne une amplification…**

grand

inférieure à 1

exactement 1

infinie

inférieure à 1. ≈ $1/r^2$.

**Refaire ce quiz**

## Comment cela aide à sauver la planète

Les éoliennes sont de plus en plus grandes et hautes pour capter plus d'énergie, et leurs mâts et pales sont peu amortis. Éviter la résonance entre la structure et le rotor en rotation est essentiel pour que ces machines d'énergie propre restent sûres et durables. Le TP D l'explore avec un modèle d'exemple.

Sur Saving Planets : Physique I, unité 3 : énergie éolienne

Sources : DOE des États-Unis : comment fonctionnent les éoliennes ? (en anglais) (https://www.energy.gov/eere/wind/how-do-wind-turbines-work) · Lebl, 2.6 Forced oscillations and resonance (https://www.jirka.org/diffyqs/html/forcedo_section.html)

## Ressources d'apprentissage gratuites

- Lebl, 2.5 Nonhomogeneous equations (https://www.jirka.org/diffyqs/html/sec_nonhom.html): Coefficients indéterminés et variation des constantes.
- Lebl, 2.6 Forced oscillations and resonance (https://www.jirka.org/diffyqs/html/forcedo_section.html): Résonance.
- MIT OCW 18.03SC, Unit II (https://ocw.mit.edu/courses/18-03sc-differential-equations-fall-2011/): Équations du second ordre, cours et exercices.

☐ **J'ai terminé cette unité**

# Transformées de Laplace

Transformer les équations différentielles en algèbre : la transformée et sa table, les dérivées, les fonctions échelon pour les entrées commutées, les impulsions et la convolution.

## Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette unité, vous saurez :

- Calculer des transformées de Laplace à partir de la définition et d'une table.
- Résoudre des problèmes de Cauchy avec les transformées et les éléments simples.
- Modéliser des entrées commutées avec des fonctions échelon unité et des décalages.
- Modéliser des impulsions soudaines avec la fonction delta.

## Notions clés

- L{f}(s) = ∫₀^∞ e^(−st) f(t) dt transforme les dérivées en multiplications par s, avec les valeurs initiales intégrées.
- Résolvez en Y(s), décomposez en éléments simples, puis inversez avec la table.
- Un interrupteur basculé à l'instant a s'écrit u(t − a) ; la règle de décalage est L{u(t − a)f(t − a)} = e^(−as)F(s).
- Un choc instantané s'écrit δ(t − a), avec L{δ(t − a)} = e^(−as).

## Équations clés

$$\mathcal{L}\{f\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

L\=_0^∞ e^-stf(t) dt

Définition

$$\mathcal{L}\{y'\} = sY - y(0),\ \mathcal{L}\{y''\} = s^2Y - sy(0) - y'(0)$$

L'\=sY-y(0),\ L''\=s^2Y-sy(0)-y'(0)

Dérivées

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a},\ \mathcal{L}\{\sin \omega t\} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

L^at\=1s-a,\ L\ω t\=(ω)/(s^2+ω^2)

Entrées de la table

$$\mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s)$$

L(t-a)f(t-a)\=e^-asF(s)

Règle de décalage

## Exemples résolus pas à pas

**Exemple 5.1** Résolvez y' − 2y = e^(3t), y(0) = 1.

1. sY − 1 − 2Y = 1/(s − 3).
2. Y = 1/((s − 2)(s − 3)) + 1/(s − 2) = [1/(s − 3) − 1/(s − 2)] + 1/(s − 2).
3. Y = 1/(s − 3).

**Réponse :** y = e^(3t). Vérification : 3e^(3t) − 2e^(3t) = e^(3t).

**Exemple 5.2** Un lac propre commence à recevoir un apport constant de polluant à t = 2 : y' + y = u(t − 2), y(0) = 0. Calculez y(3).

1. (s + 1)Y = e^(−2s)/s.
2. 1/(s(s + 1)) = 1/s − 1/(s + 1), donc y = (1 − e^(−(t − 2)))u(t − 2).
3. y(3) = 1 − e^(−1).

**Réponse :** ≈ 0.632 du niveau final, une constante de temps après la commutation.

**Exemple 5.3** Un oscillateur au repos y'' + 4y = δ(t − 1) reçoit un choc à t = 1. Calculez y(1 + π/4).

1. (s² + 4)Y = e^(−s).
2. y = ½ sin(2(t − 1)) u(t − 1).
3. En t = 1 + π/4 : ½ sin(π/2).

**Réponse :** 0.5, le premier pic.

## Exercices

Faites chacun d’abord sur papier, puis vérifiez.

1. Calculez L{t}.

   1/s².

2. Inversez $3/(s^2 + 9)$.

   $\sin 3t$.

3. Résolvez $y' + y = 0$, $y(0) = 4$.

   $Y = 4/(s + 1)$, $y = 4e^{-t}$.

4. Résolvez $y'' + y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

   $Y = 2/(s^2 + 1)$, $y = 2 \sin t$.

5. Calculez $\mathcal{L}\{u(t - 3)\}$.

   $e^{-3s}/s$.

## Idées reçues fréquentes

**Idée reçue :** $\mathcal{L}\{fg\} = \mathcal{L}\{f\}\mathcal{L}\{g\}$.

**En réalité :** Le produit des transformées correspond à la convolution, pas au produit.

**Idée reçue :** Les conditions initiales s'appliquent à la fin.

**En réalité :** Elles interviennent immédiatement via $\mathcal{L}\{y'\} = sY - y(0)$.

**Idée reçue :** Les fonctions échelon exigent une résolution par morceaux.

**En réalité :** Laplace traite les commutations en une seule fois.

## Cartes mémoire

**Transformée de Laplace**

$\int_0^\infty e^{-st} f \, dt$.

**$\mathcal{L}\{y'\}$**

$sY - y(0)$.

**$\mathcal{L}\{e^{at}\}$**

$1/(s - a)$.

**Échelon unité**

$u(t - a)$ : éteint puis allumé.

**Delta**

$\delta(t - a)$ : impulsion instantanée ; $\mathcal{L} = e^{-as}$.

**Convolution**

$\mathcal{L}\{f * g\} = FG$.

## Quiz d'autocontrôle

**1. L{y'} =**

sY

sY − y(0)

Y/s

Y − s

sY − y(0). Intégration par parties.

**2. L{e^(−2t)} =**

1/(s − 2)

1/(s + 2)

s + 2

−2/s

1/(s + 2). a = −2.

**3. Un interrupteur activé à t = 5 s'écrit…**

δ(t − 5)

u(t − 5)

e^(5t)

t − 5

u(t − 5). Échelon unité.

**4. L{δ(t)} =**

0

1

s

1/s

1. e^(−0s).

**Refaire ce quiz**

## Comment cela aide à sauver la planète

Les apports environnementaux réels s'allument et s'éteignent : un rejet d'usine commence, un lâcher de barrage s'arrête, une éruption volcanique injecte des aérosols en une seule bouffée. Les entrées échelon et impulsion avec les transformées de Laplace donnent la réponse à chacune en un seul calcul, la méthode qu'utilisent les ingénieurs pour la régulation des réseaux électriques et des stations d'épuration.

Sur Saving Planets : Page Rivières

Sources : Lebl, 6.1 The Laplace transform (https://www.jirka.org/diffyqs/html/laplace_section.html) · Lebl, 6.4 Dirac delta and impulse response (https://www.jirka.org/diffyqs/html/diracdelta_section.html)

## Ressources d'apprentissage gratuites

- Lebl, 6.1 The Laplace transform (https://www.jirka.org/diffyqs/html/laplace_section.html): Définition et table.
- Lebl, 6.2 Transforms of derivatives and ODEs (https://www.jirka.org/diffyqs/html/transformsofders_section.html): Résolution de problèmes de Cauchy.
- Lebl, 6.3 Convolution (https://www.jirka.org/diffyqs/html/convolution_section.html): Convolution.
- Lebl, 6.4 Dirac delta (https://www.jirka.org/diffyqs/html/diracdelta_section.html): Impulsions.

## Regarder le cours magistral

Laplace Transform (https://ocw.mit.edu/courses/18-03sc-differential-equations-fall-2011/resources/laplace-transform/) (en anglais)

MIT 18.03SC Differential Equations (Fall 2011), MIT OpenCourseWare. Licence : CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Conditions d'utilisation (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Lien fourni uniquement pour l'étude gratuite ; Saving Planets n'est ni affilié à cette université ni soutenu par elle.

☐ **J'ai terminé cette unité**

# Systèmes linéaires, valeurs propres et plans de phase

Systèmes x' = Ax, méthodes des valeurs propres, plan de phase et classification des équilibres en nœuds, cols, foyers et centres.

## Objectifs d’apprentissage

À la fin de cette unité, vous saurez :

- Écrire des équations couplées et des équations d’ordre supérieur sous forme de systèmes du premier ordre.
- Résoudre x' = Ax avec les valeurs propres et les vecteurs propres.
- Esquisser des portraits de phase.
- Classer l’origine avec la trace et le déterminant.

## Notions clés

- Si Av = λv, alors x = e^(λt)v est solution de x' = Ax ; la solution générale combine un tel terme par valeur propre.
- Valeurs propres réelles de signes opposés : un col. Toutes deux négatives : un nœud stable.
- Valeurs propres complexes α ± iβ : des foyers (stables si α < 0) ; des centres si α = 0.
- Pour une matrice 2 × 2, λ² − (tr A)λ + det A = 0.

## Équations clés

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$$

`x'=A x`

Système linéaire

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

`(A- I)=0`

Valeurs propres

$$\mathbf{x} = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2$$

`x=c_1e^_1t v_1+c_2e^_2t v_2`

Solution générale (valeurs propres réelles distinctes)

$$\lambda^2 - (\operatorname{tr} A)\lambda + \det A = 0$$

^2-()+ A=0

Polynôme caractéristique (2 × 2)

## Exemples résolus pas à pas

**Exemple 6.1** Un modèle du carbone à deux compartiments : l'atmosphère A et l'océan O échangent du carbone selon A' = −0.2A + 0.1O, O' = 0.2A − 0.1O (par an ; taux d'exemple). On part de 3 unités dans l'air et aucune dans l'océan.

1. Valeurs propres : tr = −0.3, det = 0, donc λ = 0 et −0.3.
2. λ = 0 a pour vecteur propre (1, 2) : la répartition à l'équilibre est 1 : 2. Le carbone total (3) est conservé, donc A → 1, O → 2.
3. A(t) = 1 + 2e^(−0.3t).

**Réponse :** L'air garde un tiers de l'impulsion dans ce modèle jouet, avec une échelle de temps de 1/0.3 ≈ 3.33 ans.

**Exemple 6.2** Classez l'origine pour A = [[1, 2], [2, 1]].

1. λ² − 2λ − 3 = 0, λ = 3, −1.

**Réponse :** Signes opposés : un col (instable).

**Exemple 6.3** Classez l'origine pour A = [[−1, −2], [2, −1]].

1. tr = −2, det = 5 : λ² + 2λ + 5 = 0.
2. λ = −1 ± 2i.

**Réponse :** Un foyer stable : les solutions s'enroulent vers l'intérieur en décroissant comme e^(−t).

## Exercices

Faites chacun d'abord sur papier, puis vérifiez.

1. Écrivez y'' + 3y' + 2y = 0 sous forme de système.

   $x_1 = y$, $x_2 = y'$ : $x_1' = x_2$, $x_2' = -2x_1 - 3x_2$.

2. Valeurs propres de [[2, 0], [0, −3]] ?

   2 et −3 : un col.

3. Classez [[0, 1], [−4, 0]].

   λ = ±2i : un centre (oscillation non amortie).

4. Classez [[−3, 1], [0, −2]].

   λ = −3, −2 : un nœud stable.

## Idées reçues fréquentes

**Idée reçue :** Les vecteurs propres sont uniques.

**En réalité :** Tout multiple non nul convient.

**Idée reçue :** Une valeur propre nulle signifie aucun mouvement.

**En réalité :** Elle signifie une droite d'équilibres ou une quantité conservée, comme dans le modèle du carbone à compartiments.

**Idée reçue :** Des valeurs propres complexes ne donnent que des solutions complexes.

**En réalité :** Les parties réelle et imaginaire donnent des solutions réelles.

## Cartes mémoire

**Système linéaire**

x' = Ax.

**Méthode des valeurs propres**

x = e^(λt)v.

**Col**

Valeurs propres réelles de signes opposés.

**Nœud**

Valeurs propres réelles de même signe.

**Foyer**

Valeurs propres complexes, α ≠ 0.

**Trace–déterminant**

$\lambda^2 - \operatorname{tr}\lambda + \det = 0$.

## Quiz d'autocontrôle

**1. Les valeurs propres 2 et −1 donnent…**

un nœud

un col

un foyer

un centre

un col. Signes opposés.

**2. Les valeurs propres $-1 \pm 3i$ donnent…**

un foyer instable

un foyer stable

un centre

un col

un foyer stable. $\alpha < 0$.

**3. Pour A de taille 2 × 2, la somme des valeurs propres est…**

det A

tr A

0

1

tr A. $\lambda_1 + \lambda_2 = \text{tr } A$.

**4. Un centre a des valeurs propres…**

réelles, égales

imaginaires purs

zéro

positif

imaginaires purs. $\alpha = 0$.

Refaire ce quiz

## Comment cela aide à sauver la planète

Les modèles du cycle du carbone sont des systèmes linéaires de compartiments (atmosphère, océan de surface, océan profond, terres) qui échangent du carbone. Leurs valeurs propres sont les échelles de temps sur lesquelles une impulsion de $CO_2$ est absorbée : certaines rapides, d'autres prenant des siècles ou plus. La présentation du cycle du carbone par la NASA décrit les cycles rapide et lent que représentent ces compartiments.

Sur Saving Planets : Pôle Océans

Sources : NASA Earth Observatory: The Carbon Cycle (https://earthobservatory.nasa.gov/features/CarbonCycle) · NOAA Global Monitoring Laboratory: Trends in atmospheric $CO_2$ (https://gml.noaa.gov/ccgg/trends/)

## Ressources d'apprentissage gratuites

- Lebl, 3.1 Introduction to systems (https://www.jirka.org/diffyqs/html/sec_introtosys.html): Systèmes.
- Lebl, 3.4 Eigenvalue method (https://www.jirka.org/diffyqs/html/eigenmethod_section.html): Valeurs propres.
- Lebl, 3.5 Two-dimensional systems and their vector fields (https://www.jirka.org/diffyqs/html/sec_twodimaut.html): Portraits de phase.

☐ **J'ai terminé cette unité**

# Systèmes non linéaires et stabilité

Équilibres des systèmes non linéaires, linéarisation par la jacobienne, cycles proies-prédateurs et modèle épidémique SIR.

## Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette unité, vous saurez :

- Trouver les équilibres de systèmes non linéaires.
- Linéariser avec la jacobienne et classer les équilibres.
- Analyser le modèle proies-prédateurs de Lotka–Volterra.
- Utiliser le modèle SIR : $R_0$, seuil d'immunité collective et taille finale.

## Notions clés

- Près d'un équilibre, un système non linéaire se comporte comme sa linéarisation x' = J x, où J est la jacobienne (sauf si la linéarisation est un centre).
- Lotka–Volterra : proies x' = ax − bxy, prédateurs y' = −cy + dxy. L'équilibre est (c/d, a/b) ; les populations tournent autour de lui.
- SIR : S' = −βSI, I' = βSI − γI, R' = γI. Le nombre de reproduction de base est $R_0$ = β/γ ; une épidémie ne croît que si $R_0 S > 1$.
- Le seuil d'immunité collective est $1 - 1/R_0$ ; la part finale non infectée $s_\infty$ vérifie $\ln s_\infty = R_0(s_\infty - 1)$.

## Équations clés

$$J = \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix}$$

J=_x&f_y_x&g_y

Jacobienne

$$x' = ax - bxy,\ y' = -cy + dxy$$

x'=ax-bxy,\ y'=-cy+dxy

Lotka–Volterra

$$S' = -\beta SI,\ I' = \beta SI - \gamma I,\ R' = \gamma I$$

S'=-β SI,\ I'=β SI-γ I,\ R'=γ I

Modèle SIR

$$R_0 = \beta/\gamma,\ \ln s_\infty = R_0(s_\infty - 1)$$

`R_0=β/γ,\ s_∞=R_0(s_∞-1)`

Nombre de reproduction et taille finale

## Exemples résolus pas à pas

**Exemple 7.1** Proies et prédateurs suivent x' = x − 0.02xy, y' = −0.5y + 0.005xy (valeurs d'exemple, années). Trouvez l'équilibre de coexistence et la période des petits cycles.

1. x' = 0 exige y = 1/0.02 = 50 ; y' = 0 exige x = 0.5/0.005 = 100.
2. La jacobienne y a pour valeurs propres ±i√(ac) = ±i√0.5.
3. Période 2π/√0.5.

**Réponse :** 100 proies et 50 prédateurs ; les petits cycles durent environ 8.9 ans, les prédateurs étant en retard sur les proies.

**Exemple 7.2** Une épidémie a β = 0.3 par jour et γ = 0.1 par jour. Calculez $R_0$, le seuil d'immunité collective et la part finale de personnes infectées.

1. $R_0$ = 3.
2. Seuil 1 − 1/3 = 0.667.
3. Itérez s = e^(3(s − 1)) : s∞ = 0.0595.

**Réponse :** $R_0$ = 3 ; une immunité de 67 % stoppe la croissance ; sans intervention, environ 94 % finissent infectés, plus que le seuil car l'épidémie le dépasse.

**Exemple 7.3** Classez l'équilibre P = K de la croissance logistique P' = rP(1 − P/K).

1. f'(P) = r − 2rP/K; f'(K) = −r < 0.

**Réponse :** Stable : les petites perturbations décroissent au taux r.

## Exercices

Faites chacun d'abord sur papier, puis vérifiez.

1. Trouvez les équilibres de x' = x(3 − x − y), y' = y(2 − x − y).

   (0, 0), (3, 0), (0, 2) (aucun intérieur : les droites x + y = 3 et x + y = 2 sont parallèles).

2. Linéarisez $x' = \sin x$ près de $x = 0$ et $x = \pi$.

   $f'(0) = 1$ (instable), $f'(\pi) = -1$ (stable).

3. Si $R_0 = 2$, quel est le seuil d'immunité collective ?

   $1 - 1/2 = 50\%$.

4. Dans l'exemple proies-prédateurs, qu'arrive-t-il aux proies si l'on retire les prédateurs ?

   $x' = x$ : croissance exponentielle (jusqu'à ce que d'autres limites interviennent).

## Idées reçues fréquentes

**Idée reçue :** La linéarisation prédit toujours le comportement.

**En réalité :** Pas quand elle donne un centre ; ce sont alors les termes non linéaires qui décident.

**Idée reçue :** L'immunité collective signifie que l'épidémie s'arrête aussitôt.

**En réalité :** Les infections diminuent après le seuil mais peuvent encore le dépasser.

**Idée reçue :** Les cycles proies-prédateurs signifient que le modèle est instable.

**En réalité :** Les orbites de Lotka–Volterra sont fermées : neutralement stables, ni croissantes ni décroissantes.

## Cartes mémoire

**Jacobienne**

Matrice des dérivées partielles premières.

**Linéarisation**

$x' \approx J\,x$ près d'un équilibre.

**Lotka–Volterra**

Cycles proies-prédateurs autour de $(c/d, a/b)$.

**SIR**

Susceptibles, infectés, rétablis.

**$R_0$**

$\beta/\gamma$, nouvelles infections par cas.

**Seuil d'immunité collective**

$1 - 1/R_0$.

## Quiz d'autocontrôle

**1. $R_0 = \beta/\gamma = 4$ donne un seuil de…**

25%

50%

75%

100%

75%. 1 − 1/4.

**2. Le niveau des proies à l'équilibre de Lotka–Volterra est…**

a/b

c/d

b/a

d/c

c/d. y' = 0 exige x = c/d.

**3. La linéarisation utilise…**

la hessienne

la jacobienne

le laplacien

la trace

la jacobienne. Dérivées partielles premières.

**4. Une épidémie croît au début si…**

$R_0 S > 1$

$R_0 < 1$

$\gamma > \beta$

$I = 0$

$R_0S > 1$. $I' = (\beta S - \gamma)I$.

**Refaire ce quiz**

## Comment cela aide à sauver la planète

Sur l'île Royale, dans le lac Supérieur, le National Park Service suit les effectifs de loups et d'élans depuis 1980, une longue série proies-prédateurs. Leurs hauts et bas liés, et la décision du Park Service d'introduire de nouveaux loups sur l'île, sont exactement le type de système que les modèles de Lotka–Volterra commencent à expliquer.

Les mêmes mathématiques SIR qui guident la réponse de santé publique servent pour les maladies de la faune qui menacent les écosystèmes.

Sur Saving Planets : Pôle Océans

Sources : National Park Service: Wolves of Isle Royale (https://www.nps.gov/isro/learn/nature/wolves.htm) · Wolves and Moose of Isle Royale project (long-term data) (https://www.isleroyalewolf.org/)

## Ressources d'apprentissage gratuites

- Lebl, 8.1 Linearization, critical points and equilibria (https://www.jirka.org/diffyqs/html/linearization_section.html): Linéarisation.
- Lebl, 8.2 Stability and classification (https://www.jirka.org/diffyqs/html/nlinstability_section.html): Stabilité.
- Lebl, 8.3 Applications of nonlinear systems (https://www.jirka.org/diffyqs/html/nlinapps_section.html): Proies-prédateurs et plus.

## Regarder le cours magistral

The Relation Between Nonlinear Systems and First-order ODE's (https://ocw.mit.edu/courses/18-03sc-differential-equations-fall-2011/resources/the-relation-between-nonlinear-systems-and-first-order-odes/) (en anglais)

MIT 18.03SC Differential Equations (Fall 2011), MIT OpenCourseWare. Licence : CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Conditions d'utilisation (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Lien fourni uniquement pour l'étude gratuite ; Saving Planets n'est ni affilié à cette université ni soutenu par elle.

☐ **J'ai terminé cette unité**

# Méthodes numériques

Méthodes d’Euler, d’Euler amélioré et de Runge–Kutta, pas et erreur, et un modèle climatique de bilan énergétique résolu numériquement.

## Objectifs d’apprentissage

À la fin de cette unité, vous saurez :

- Appliquer Euler, Euler amélioré (Heun) et RK4.
- Expliquer l’ordre d’une méthode et comment l’erreur varie avec le pas.
- Résoudre numériquement des systèmes.
- Construire et résoudre un modèle climatique de bilan énergétique à zéro dimension.

## Notions clés

- Euler avance selon la pente : y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n). Son erreur globale est proportionnelle à h.
- Euler amélioré fait la moyenne de deux pentes (erreur ∝ h²) ; RK4 de quatre (erreur ∝ h⁴).
- Diviser h par deux réduit l’erreur de RK4 d’environ 16 fois, c’est pourquoi c’est la méthode de référence.
- Bilan énergétique : C dT/dt = lumière solaire absorbée − εσT⁴. Son équilibre et son échelle de temps découlent directement de l’équation.

## Équations clés

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$$

`y_n+1=y_n+hf(t_n,y_n)`

Méthode d’Euler

$$y_{n+1} = y_n + \tfrac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

`y_n+1=y_n+ h6(k_1+2k_2+2k_3+k_4)`

Runge–Kutta 4

$$C\frac{dT}{dt} = S(1-\alpha) - \varepsilon\sigma T^4$$

`CdT/dt=S(1-α)-σ T^4`

Modèle de bilan énergétique

$$\lambda = 4\varepsilon\sigma T^3,\ \tau = C/\lambda$$

=4σ T^3,\ τ=C/

Rétroaction linéarisée et échelle de temps

## Exemples résolus pas à pas

**Exemple 8.1** Approchez y(1) pour y' = y, y(0) = 1 avec h = 0.1 par Euler, Euler amélioré et RK4.

1. Chaque pas d'Euler multiplie par 1.1 : $1.1^{10} = 2.5937$.
2. Euler amélioré multiplie par 1.105 : 2.7141.
3. RK4 multiplie par 1.1051708 : 2.7182797.

**Réponse :** Vraie valeur e = 2.7182818. Erreurs : 0.12, 0.0042 et 0.000002.

**Exemple 8.2** La Terre absorbe 340 × (1 − 0.29) = 241.4 W/m² de lumière solaire (NASA). Si elle rayonnait comme un corps noir (ε = 1), quelle température l'équilibrerait ? Quel ε effectif donne la moyenne actuelle d'environ 288 K ?

1. $\sigma T^4 = 241.4$ donne $T = (241.4/5.67 \times 10^{-8})\wedge(1/4) = 255$ K.
2. $\varepsilon = 241.4/(\sigma \times 288^4) = 0.619$.

**Réponse :** 255 K (−18 °C) sans effet de serre ; une émissivité effective de 0.62 représente l'effet de serre qui rend la Terre habitable.

**Exemple 8.3** Avec ε = 0.619 à 288 K et une couche de mélange océanique de 50 m (C = 1000 × 4186 × 50 J/(m²·K) ; profondeur d'exemple), calculez λ, l'échelle de temps et le réchauffement sans rétroaction pour un forçage de 4 W/m² (valeur d'exemple).

1. $\lambda = 4\varepsilon\sigma T^3 = 3.35$ W/(m²·K).
2. $\tau = C/\lambda = 6.24 \times 10^7$ s ≈ 1.98 an (environ 2).
3. $\Delta T = 4/3.35$.

**Réponse :** Environ 1.2 K de réchauffement, atteint sur une échelle de temps de 2 ans dans ce modèle simple. Les rétroactions réelles (vapeur d'eau, glace) augmentent le réchauffement, comme l'évalue le GIEC.

## Exercices

Faites chacun d'abord sur papier, puis vérifiez.

1. Un pas d'Euler pour y' = t + y, y(0) = 1, h = 0.1.

$y_1 = 1 + 0.1(0 + 1) = 1.1$.

2. Si l'erreur d'Euler vaut 0.12 pour h = 0.1, estimez-la pour h = 0.05.

   Environ 0.06 (premier ordre).

3. Si l'erreur de RK4 vaut $2 \times 10^{-6}$ pour h = 0.1, estimez-la pour h = 0.05.

   Environ $2 \times 10^{-6}/16 \approx 1.3 \times 10^{-7}$.

4. Quelle température d'équilibre le modèle de bilan énergétique donne-t-il avec $\varepsilon = 1$ et un albédo de 0.29 ?

   Environ 255 K.

## Idées reçues fréquentes

**Idée reçue :** Des pas plus petits sont toujours meilleurs.

**En réalité :** Les erreurs d'arrondi et le coût augmentent ; une méthode d'ordre supérieur vaut généralement mieux que de minuscules pas d'Euler.

**Idée reçue :** Une réponse numérique est exacte si le code s'exécute.

**En réalité :** Vérifiez toujours la convergence en divisant h par deux.

**Idée reçue :** Le résultat de 255 K signifie que le modèle est faux.

**En réalité :** Il montre de combien l'effet de serre réchauffe la Terre : environ 33 K.

## Cartes mémoire

**Méthode d'Euler**

y + h f.

**Euler amélioré**

Moyenne de deux pentes ; ordre 2.

**RK4**

Quatre pentes ; ordre 4.

**Pas**

h ; vérifiez la convergence en le divisant par deux.

**Modèle de bilan énergétique**

$C\,T' = S(1 - \alpha) - \varepsilon\sigma T^4$.

**Échelle de temps climatique**

$\tau = C/\lambda$.

## Quiz d’autocontrôle

**1. L’erreur globale de la méthode d’Euler est proportionnelle à…**

- $h$
- $h^2$
- $h^4$
- $1/h$

h. Premier ordre.

**2. RK4 est d’ordre…**

- 1
- 2
- 4
- 8

4. Erreur $\propto h^4$.

**3. Sans effet de serre, la Terre aurait une moyenne d’environ…**

- 288 K
- 255 K
- 273 K
- 300 K

255 K. $\sigma T^4 = 241$ W/m².

**4. Diviser h par deux dans RK4 réduit l’erreur d’environ…**

- 2
- 4

16

32

16. $2^4$.

**Refaire ce quiz**

## Comment cela aide à sauver la planète

Tout modèle climatique, de ce bilan énergétique d'une ligne aux modèles globaux évalués par le GIEC, est un système d'équations différentielles résolu numériquement. Le bilan énergétique de la NASA fournit les données : 340 W/m² de lumière solaire arrivent en moyenne et 29 % sont réfléchis.

Sur Saving Planets : Introduction à la programmation, unité simulation

Sources : NASA Earth Observatory: Climate and Earth's Energy Budget (https://earthobservatory.nasa.gov/features/EnergyBalance) · IPCC AR6 Working Group I: The Physical Science Basis (https://www.ipcc.ch/report/ar6/wg1/)

## Ressources d'apprentissage gratuites

- Lebl, 1.7 Numerical methods: Euler's method (https://www.jirka.org/diffyqs/html/numer_section.html): Euler et l'erreur.
- Trench, Ch. 3: Numerical methods (https://digitalcommons.trinity.edu/mono/8/): Euler amélioré et RK4.

☐ **J'ai terminé cette unité**

# Solutions en séries, séries de Fourier et équation de la chaleur

Solutions en séries entières des EDO, séries de Fourier des fonctions périodiques et séparation des variables pour l'équation de la chaleur.

## Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette unité, vous saurez :

- Trouver des solutions en séries entières à partir d'une récurrence.
- Calculer les coefficients de Fourier de fonctions périodiques simples.
- Résoudre l'équation de la chaleur sur une tige par séparation des variables.
- Estimer jusqu'à quelle profondeur les ondes de température saisonnières pénètrent dans le sol.

## Notions clés

- Substituer y = Σ$a_n x^n$, identifier les puissances et obtenir une récurrence pour les coefficients.
- Une fonction périodique est une somme de sinus et de cosinus ; pour une fonction impaire sur (−π, π), $b_n$ = (2/π)$\int_0^\pi$ f sin nx dx.
- L'équation de la chaleur u_t = α u_xx diffuse la chaleur ; chaque mode sinusoïdal décroît comme e^(−α(nπ/L)²t), les modes rapides d'abord.
- Une température de surface périodique pénètre dans le sol avec une profondeur d'amortissement d = √(2α/ω).

## Équations clés

$$y = \sum a_n x^n$$

`y= a_nx^n`

Solution en série entière

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

`b_n=2π_0^π f(x) nx dx`

Coefficient de Fourier en sinus

$$u_t = \alpha u_{xx}$$

`u_t=α u_xx`

Équation de la chaleur

$$d = \sqrt{2\alpha/\omega}$$

Profondeur d’amortissement d’une onde de température périodique

## Exemples résolus pas à pas

**Exemple 9.1** Résoudre y'' + y = 0 par série entière.

1. $\Sigma(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \Sigma a_n x^n = 0$.
2. $a_{n+2} = -a_n/((n+2)(n+1))$.
3. Les termes pairs forment cos x, les impairs sin x.

**Réponse :** $y = a_0 \cos x + a_1 \sin x$, retrouvé à partir de la récurrence.

**Exemple 9.2** Trouver la série de Fourier du signal carré f = 1 sur (0, π), −1 sur (−π, 0).

1. Impaire, donc seulement des sinus : $b_n = (2/\pi)\int_0^{\pi} \sin nx\, dx = (2/(n\pi))(1 - \cos n\pi)$.
2. $b_n = 4/(n\pi)$ pour n impair, 0 pour n pair.

**Réponse :** $f = (4/\pi)(\sin x + \sin 3x/3 + \sin 5x/5 + \ldots)$ ; $b_1 \approx 1.273$.

**Exemple 9.3** Un sol de diffusivité $\alpha = 5 \times 10^{-7}$ m²/s (valeur d’exemple) subit un cycle annuel de température en surface. Trouvez la profondeur d’amortissement.

1. $\omega = 2\pi/(3.156 \times 10^7 \text{ s}) = 1.99 \times 10^{-7} \text{ s}^{-1}$.
2. $d = \sqrt{(2 \times 5 \times 10^{-7}/1.99 \times 10^{-7})}$.

**Réponse :** Environ 2.24 m : l’amplitude annuelle diminue d’un facteur e tous les 2.2 m de profondeur, si bien que le sol profond réagit lentement au réchauffement, sur de nombreuses années.

## Exercices

Faites chacun d’abord sur papier, puis vérifiez.

1. Trouver la récurrence pour y' = y par série entière.

   $a_{n+1} = a_n/(n+1)$, donc $y = a_0 e^x$.

2. $f(x) = x^2$ est-elle paire ou impaire ? Quels termes de Fourier apparaissent ?

   Paire : seulement des cosinus (plus une constante).

3. Un mode de tige décroît comme $e^{-\alpha(\pi/L)^2 t}$. Comment doubler L change-t-il son temps de décroissance ?

   Le temps de décroissance est multiplié par 4.

4. Trouver $b_3$ pour le signal carré.

   $4/(3\pi) \approx 0.424$.

## Idées reçues fréquentes

**Idée reçue :** Les séries de Fourier ne marchent que pour les fonctions lisses.

**En réalité :** Elles marchent aussi avec des sauts, en convergeant vers le point milieu du saut.

**Idée reçue :** La chaleur diffuse à vitesse fixe.

**En réalité :** Le temps de diffusion croît comme le carré de la distance.

**Idée reçue :** Les solutions en séries valent toujours mieux que les formules.

**En réalité :** Elles sont surtout utiles quand il n'existe pas de forme close, comme pour les équations d'Airy ou de Bessel.

## Cartes mémoire

**Méthode des séries entières**

Substituer $\Sigma a_n x^n$ ; obtenir une récurrence.

**Série de Fourier**

Somme de sinus et de cosinus.

**Coefficient de Fourier**

$b_n = (2/\pi)\int_0^\pi f \sin nx \, dx$.

**Équation de la chaleur**

$u_t = \alpha u_{xx}$.

**Séparation des variables**

$u = X(x)T(t)$.

**Profondeur d'amortissement**

$\sqrt{(2\alpha/\omega)}$.

## Quiz d'autocontrôle

**1. Dans l'équation de la chaleur, les modes supérieurs décroissent…**

plus lentement

plus vite

pas du tout

linéairement

plus vite. Taux ∝ $n^2$.

**2. La série de Fourier d'une fonction impaire ne contient que des…**

cosinus

sinus

constantes

exponentielles

sinus. Les intégrales impair × pair s'annulent.

**3. Doubler la période d'un cycle de température en surface modifie la profondeur d'amortissement de…**

2

√2

1/2

4

√2. $d \propto 1/\sqrt{\omega}$.

**4. $b_1$ pour le signal carré vaut…**

1

4/π

2/π

π/4

4/π. 4/(1·π).

**Refaire ce quiz**

### Comment cela aide à sauver la planète

Selon la NASA, le pergélisol de l'hémisphère Nord contient environ 1672 milliards de tonnes de carbone organique. La vitesse à laquelle le réchauffement de surface l'atteint est un problème d'équation de la chaleur, et la profondeur d'amortissement montre pourquoi les couches profondes réagissent lentement mais continuent de réagir longtemps après le réchauffement de la surface.

Sur Saving Planets : Analyse III

Sources : NASA Earth Observatory: The Carbon Cycle (https://earthobservatory.nasa.gov/features/CarbonCycle) · Lebl, 4.6 PDEs, separation of variables, and the heat equation (https://www.jirka.org/diffyqs/html/heateq_section.html)

### Ressources d'apprentissage gratuites

- Lebl, 7.1 Power series (https://www.jirka.org/diffyqs/html/powerseries_section.html): Séries entières.
- Lebl, 7.2 Series solutions of linear second-order ODEs (https://www.jirka.org/diffyqs/html/seriessols_section.html): Solutions en séries.
- Lebl, 4.2 Trigonometric series (https://www.jirka.org/diffyqs/html/ts_section.html): Séries de Fourier.
- Lebl, 4.6 The heat equation (https://www.jirka.org/diffyqs/html/heateq_section.html): Équation de la chaleur.

### Regarder le cours magistral

Convergence of Fourier Series (https://ocw.mit.edu/courses/18-03sc-differential-equations-fall-2011/resources/convergence-of-fourier-series/) (en anglais)

MIT 18.03SC Differential Equations (Fall 2011), MIT OpenCourseWare. Licence : CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Conditions d'utilisation (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Lien fourni uniquement pour l'étude gratuite ; Saving Planets n'est ni affilié à cette université ni soutenu par elle.

☐ **J'ai terminé cette unité**

## Exercices

Ces exercices sont dans chaque unité. Faites-les sur papier, puis ouvrez la réponse.

1. Équations du premier ordre
   5 exercices
2. Modélisation avec des équations du premier ordre

4 exercices

3. Équations linéaires du second ordre et oscillations
   4 exercices
4. Vibrations forcées et résonance
   4 exercices
5. Transformées de Laplace
   5 exercices
6. Systèmes linéaires, valeurs propres et plans de phase
   4 exercices
7. Systèmes non linéaires et stabilité
   4 exercices
8. Méthodes numériques
   4 exercices
9. Solutions en séries, séries de Fourier et équation de la chaleur
   4 exercices

## Travaux pratiques sur ordinateur

Quatre travaux pratiques sur ordinateur : une épidémie SIR résolue par Euler et RK4, un plan de phase proies-prédateurs, un modèle climatique de bilan énergétique et un balayage en fréquence d'un modèle de mât d'éolienne.

Les paramètres d'exemple sont signalés comme tels ; chaque TP renvoie à une source publique sur le système réel.

Référence de sécurité : Lebl: Notes on Diffy Qs (free textbook) (https://www.jirka.org/diffyqs/)

## TP A : une épidémie SIR avec Euler et RK4

SEMAINE 12

**Objectif :** Résoudre le modèle SIR numériquement, trouver le pic et comparer Euler et RK4 à la taille finale exacte.

$$S' = -0.3SI,\ I' = 0.3SI - 0.1I,\ R' = 0.1I$$

`S'=-0.3SI,\ I'=0.3SI-0.1I,\ R'=0.1I`

SIR avec $R_0 = 3$ (taux d'exemple par jour)

**Mode opératoire**

1. Partir de S = 0.999, I = 0.001, R = 0 (fractions de la population).
2. Lancer Euler avec h = 1 jour et h = 0.1 jour jusqu'au jour 160, puis RK4 avec h = 1 jour.
3. Noter le R final, le pic de I et sa date ; comparer avec la théorie.

**Tableau de données**

| Méthode | R final (jour 160) |
|---|---|
| Euler, h = 1 | 0.9467 |
| Euler, h = 0.1 | 0.9411 |
| RK4, h = 1 | 0.9405 |
| Taille finale exacte (théorie) | 0.9405 |

*Valeurs calculées pour des taux d'exemple ; pas une épidémie réelle.*

**Exemple de calcul**

1. Le pic est de 30.1 % d'infectés simultanément, vers le jour 38.4 ; la théorie donne I_max = 1 − (1 + ln $R_0$)/$R_0$ = 0.300.
2. Euler avec h = 1 surestime la taille finale de 0.006 ; RK4 avec le même pas rejoint la théorie à 4 chiffres près.

> **Sécurité**
>
> - Aucune, au-delà d'un usage normal de l'ordinateur.

**Alternative à la maison ou virtuelle**

- Un tableur convient ; Python est plus simple pour RK4.

Lebl, 8.3 Applications of nonlinear systems (https://www.jirka.org/diffyqs/html/nlinapps_section.html)

**Lien avec la planète :** La même structure de modèle sert pour les épidémies chez l'humain et chez la faune.

- [ ] **J'ai terminé ce TP (réel ou virtuel)**

## TP B : le plan de phase proies-prédateurs

SEMAINE 11

**Objectif :** Intégrer le modèle de Lotka–Volterra avec RK4 et tracer l'orbite fermée dans le plan de phase.

$$x' = x - 0.02xy, \quad y' = -0.5y + 0.005xy$$

```
x'=x-0.02xy, y'=-0.5y+0.005xy
```

Lotka–Volterra (valeurs d'exemple)

**Mode opératoire**

1. Partir de 150 proies et 50 prédateurs.
2. Utiliser RK4 avec un petit pas (0.001 an en Python, ou 0.01 dans un tableur) pendant 40 ans.
3. Tracer y en fonction de x et noter l'intervalle des proies et la période.

**Tableau de données**

| Grandeur | Valeur |
|---|---|
| Équilibre | (100, 50) |
| Intervalle des proies | 62.6 à 150 |
| Période | 8.99 ans |
| Période des petits cycles (théorie linéaire) | 8.89 ans |

*Valeurs calculées ; paramètres d'exemple.*

**Exemple de calcul**

1. L'orbite se referme : les populations se répètent tous les 8.99 ans, un peu plus que les 8.89 ans prévus par la théorie linéaire pour les petits cycles, car ce cycle est grand.
2. Les prédateurs culminent après les proies, un décalage observé dans de nombreux relevés réels proies-prédateurs.

> **Sécurité**
>
> - Aucune, au-delà d'un usage normal de l'ordinateur.

**Alternative à la maison ou virtuelle**

- Desmos peut tracer le champ de pentes du plan de phase.

Wolves and Moose of Isle Royale project (long-term data) (https://www.isleroyalewolf.org/)

**Lien avec la planète :** Les séries longues comme celles des loups et des élans de l'île Royale mettent ces modèles à l'épreuve. National Park Service: Wolves of Isle Royale (https://www.nps.gov/isro/learn/nature/wolves.htm)

- [ ] **J'ai terminé ce TP (réel ou virtuel)**

## TP C : un modèle climatique de bilan énergétique

SEMAINE 13

**Objectif :** Faire avancer dans le temps un modèle climatique à une boîte après un forçage soudain et trouver son échelle de temps.

$$C\frac{d\Delta T}{dt} = F - \lambda\,\Delta T$$

```
C(dΔ T)/(dt)=F- Δ T
```

Modèle de bilan énergétique linéarisé

### Mode opératoire

1. Utiliser C = 2.09 × 10⁸ J/(m²·K) (50 m d'océan), λ = 3.35 W/(m²·K) de l'unité 8 et un forçage soudain F = 4 W/m² (valeur d'exemple).
2. Avancer par Euler avec des pas mensuels pendant 10 ans.
3. Comparer avec la solution exacte ΔT = (F/λ)(1 − e^(−t/τ)).

### Tableau de données

| Année | ΔT (K) |
|---|---|
| 1 | 0.48 |
| 2 | 0.77 |
| 5 | 1.10 |
| 10 | 1.19 |

*Valeurs calculées par le modèle ; aucune rétroaction autre que le rayonnement.*

### Exemple de calcul

1. Équilibre ΔT = F/λ = 1.19 K ; τ = C/λ ≈ 2.0 ans, donc le réchauffement est réalisé à environ 63 % après 2 ans dans ce modèle.
2. Le climat réel réagit plus lentement et se réchauffe davantage, car la chaleur se mélange dans l'océan profond et les rétroactions l'amplifient.

> **Sécurité**
>
> - Aucune, au-delà d'un usage normal de l'ordinateur.

### Alternative à la maison ou virtuelle

- Un tableur suffit.

NASA Earth Observatory: Climate and Earth's Energy Budget (https://earthobservatory.nasa.gov/features/EnergyBalance)

**Lien avec la planète :** Les modèles de bilan énergétique sont le premier pas vers les projections climatiques évaluées par le GIEC. IPCC AR6 Working Group I: The Physical Science Basis (https://www.ipcc.ch/report/ar6/wg1/)

☐ **J'ai terminé ce TP (réel ou virtuel)**

## TP D : balayage de résonance d’un modèle de mât d’éolienne

SEMAINE 6

**Objectif :** Calculer l’amplification dynamique d’un modèle de mât à un oscillateur sur une gamme de fréquences d’excitation.

$$A(f) = \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}},\ r = f / f_0$$

```
A(f)=1(1-r^2)^2+(2 r)^2,\ r=f/f_0
```

Amplification dynamique

**Mode opératoire**

1. Utiliser $f_0$ = 0.30 Hz et $\zeta$ = 0.01 (valeurs d’exemple).
2. Tabuler A pour des fréquences d’excitation de 0.1 à 0.6 Hz.
3. Marquer la fréquence du rotor (0.20 Hz à 12 tr/min) et la fréquence de passage des pales (0.60 Hz), puis juger la conception.

**Tableau de données**

| Fréquence d’excitation (Hz) | Amplification |
|---|---|
| 0.10 | 1.12 |
| 0.20 | 1.80 |
| 0.25 | 3.27 |
| 0.30 | 50.0 |
| 0.35 | 2.76 |
| 0.60 | 0.333 |

*Valeurs calculées pour un modèle d’exemple, pas pour une éolienne précise.*

**Exemple de calcul**

1. Les deux fréquences de fonctionnement sont bien éloignées du pic à 0.30 Hz, où la réponse serait 50 fois la déflexion statique.
2. Si le rotor accélérait jusqu’à 18 tr/min (0.30 Hz), il exciterait le mât à la résonance ; c’est pourquoi les concepteurs comparent la fréquence propre à toute la plage de vitesses.

> **Sécurité**

- Aucune, au-delà d’un usage normal de l’ordinateur.

**Alternative à la maison ou virtuelle**

- Un tableur suffit.

PhET : Masses and Springs (https://phet.colorado.edu/en/simulations/masses-and-springs)

**Lien avec la planète :** Éviter la résonance permet aux éoliennes de produire une énergie propre en toute sécurité pendant des décennies. DOE des États-Unis : comment fonctionnent les éoliennes ? (en anglais) (https://www.energy.gov/eere/wind/how-do-wind-turbines-work)

☐ **J’ai terminé ce TP (réel ou virtuel)**

## Séries d’entraînement aux examens

Chronométrez-vous : environ 10 minutes par problème. Comparez ensuite avec les solutions complètes.

### Série d’exercices de mi-parcours (unités 1–5)

1. Résoudre $y' = -2ty$, $y(0) = 3$, et trouver $y(1)$.

    1. $dy/y = -2t\,dt$; $y = 3e^{(-t^2)}$.

    **Réponse :** $3e^{(-1)} \approx 1.104$.

2. Un lac avec un temps de rétention de 4 ans : combien de temps avant qu’un polluant baisse de moitié une fois l’apport arrêté ?

    1. $t = 4 \ln 2$.

    **Réponse :** ≈ 2.77 ans.

3. Résoudre $y'' + 6y' + 9y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, et trouver $y(1)$.

    1. $y = (1 + 3t)e^{(-3t)}$.

    **Réponse :** $4e^{(-3)} \approx 0.199$.

4. Résoudre $y' + y = 1$, $y(0) = 0$ par Laplace et trouver $y(2)$.

    1. $Y = 1/(s(s + 1)) = 1/s - 1/(s + 1)$.

    **Réponse :** $1 - e^{(-2)} \approx 0.865$.

### Série d’entraînement finale (toutes les unités)

1. Classer l’origine de x' = [[0, 1], [−2, −2]]x.

    1. λ² + 2λ + 2 = 0, λ = −1 ± i.

    **Réponse :** Foyer stable.

2. Une épidémie SIR a β = 0.5, γ = 0.25 par jour. Trouver $R_0$ et le seuil d’immunité collective.

    1. $R_0$ = 2.

    **Réponse :** $R_0$ = 2, seuil 50 %.

3. Deux pas d’Euler avec h = 0.5 pour y' = −y, y(0) = 1.

    1. Chaque pas multiplie par 0.5.

    **Réponse :** y(1) ≈ 0.25 (valeur vraie e^(−1) ≈ 0.368).

4. Un système masse-ressort avec m = 1 kg, k = 16 N/m, c = 0.4 N·s/m. Trouver $\omega_0$ et ζ.

    1. $\omega_0$ = 4 rad/s ; c_crit = 8.

    **Réponse :** $\omega_0$ = 4 rad/s, ζ = 0.05 (amplification au pic d’environ 10).

# Fiche de formules

$$\mu = e^{\int p\,dx}$$

$$M_y = N_x \Rightarrow F = C$$

$$C = C_0 e^{-t/\tau}$$

$$H_{\max} = rK/4$$

$$ar^2 + br + c = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{k/m},\ c_{\text{crit}} = 2\sqrt{mk}$$

$$X = F_0 / \sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}$$

$$\mathcal{L}\{y'\} = sY - y(0)$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = 1/(s - a)$$

$$\mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s)$$

$$\lambda^2 - (\operatorname{tr} A)\lambda + \det A = 0$$

$$R_0 = \beta/\gamma,\ 1 - 1/R_0$$

$$y_{n+1} = y_n + hf$$

$$C\,T' = S(1-\alpha) - \varepsilon\sigma T^4$$

$$u_t = \alpha u_{xx}$$

$$b_n = \tfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f \sin nx\,dx$$

### Constantes

| Constante | Valeur |
|---|---|
| Constante de Stefan–Boltzmann σ | $5.67 \times 10^{-8}$ W/(m²·K⁴) |
| Ensoleillement moyen au sommet de l'atmosphère | 340 W/m² |
| Fraction de la lumière solaire réfléchie | 29% |
| Temps de rétention du lac Supérieur | 191 ans |
| Temps de rétention du lac Érié | 2.6 ans |
| Durée de vie moyenne du méthane | environ une décennie |

Source : NASA Earth Observatory: Climate and Earth's Energy Budget (https://earthobservatory.nasa.gov/features/EnergyBalance)

## Textes et outils gratuits

Utilisez ces manuels et outils gratuits en parallèle du cours.

- Lebl: Notes on Diffy Qs (https://www.jirka.org/diffyqs/): Manuel gratuit et complet pour ce cours.
- Trench: Elementary Differential Equations (free text) (https://digitalcommons.trinity.edu/mono/8/): Manuel gratuit avec de nombreux exercices.
- MIT OpenCourseWare 18.03SC Differential Equations (https://ocw.mit.edu/courses/18-03sc-differential-equations-fall-2011/): Cours, séances d'exercices et problèmes du MIT, gratuits.
- Calculatrice graphique Desmos (en anglais) (https://www.desmos.com/calculator): Tracer des solutions et des champs de pentes.
- PhET : Masses and Springs (https://phet.colorado.edu/en/simulations/masses-and-springs): Intuition de l'amortissement et des oscillations.

## Glossaire

**Équation autonome**
y' = f(y), sans t explicite.

**Équation caractéristique**
$ar^2 + br + c = 0$ pour les EDO à coefficients constants.

**Amortissement critique**
Retour le plus rapide sans dépassement.

**Valeur propre**
λ avec Av = λv.

**Modèle de bilan énergétique**

Modèle climatique équilibrant la lumière solaire absorbée et la chaleur émise.

**Équilibre**
Solution constante.

**Méthode d’Euler**
Avancée numérique d’ordre un.

**Équation exacte**
M dx + N dy = 0 avec M_y = N_x.

**Série de Fourier**
Développement en sinus et cosinus.

**Équation de la chaleur**
u_t = α u_xx.

**Facteur intégrant**
Multiplicateur qui rend exacte une EDO linéaire.

**Jacobienne**
Matrice des dérivées partielles premières servant à linéariser.

**Transformée de Laplace**
$\int_0^{\infty} e^{(-st)} f \, dt$.

**Lotka–Volterra**
Modèle proies-prédateurs.

**Portrait de phase**
Trajectoires dans le plan d’état.

**Résonance**
Forte réponse quand l’excitation coïncide avec une fréquence propre.

**Runge–Kutta (RK4)**
Méthode numérique d’ordre quatre.

**$R_0$**
Nombre de reproduction de base.

**Modèle SIR**
Modèle épidémique susceptibles–infectés–rétablis.

**Équation à variables séparables**
dy/dx = g(x)h(y).

# Grille d’autoévaluation

Aucune note ni aucun crédit ne sont attribués. Utilisez cette grille pour juger honnêtement où vous en êtes dans chaque unité.

| Niveau | À quoi cela ressemble |
|---|---|
| 4 · Maîtrise | Construit des modèles à partir d’une description, les résout par formule et numériquement, vérifie les unités et le comportement à long terme. |
| 3 · Compétent | Résout les exercices d’entraînement avec quelques erreurs occasionnelles. |
| 2 · En progression | Suit les exemples résolus mais peine à poser des modèles ou à choisir une méthode. |
| 1 · Débutant | Applique des formules sans vérifier les solutions ; doit revoir l’unité. |

### Pondération suggérée si vous voulez une note

| Partie | Poids |
|---|---|
| Exercices | 30% |
| Travaux pratiques sur ordinateur | 15% |
| Série d’entraînement de mi-parcours | 25% |
| Série d’entraînement finale | 30% |

Visez le niveau 3 ou mieux dans chaque unité avant de passer au cours suivant.

## Cours associés

- Analyse III MATH 210
- Physique II PHYS 210 + PHYS 210L
- Statique ENGR 211
- Tous les cours