Última actualización: November 1, 2026

🗺️ Ruta de cuatro años · Año 2, Primavera

Sobre este curso

Este curso gratuito tiene 9 unidades y 4 laboratorios. Son los totales reales, no un programa más largo recortado.

Una comprobación es un número o un resultado de código en una página de curso que un script vuelve a calcular antes de publicar. El número impreso y el recalculado tienen que coincidir.

> Este es el esquema de un curso gratuito de autoestudio escrito por Saving Planets. No es un curso universitario, no otorga créditos académicos y ninguna institución participa.
>
> Su alcance sigue un curso de segundo año de ecuaciones diferenciales ordinarias, basado en los temas y la profundidad de MIT OpenCourseWare 18.03 y de los libros gratuitos de Jiří Lebl (Notes on Diffy Qs) y William Trench, y en los programas de cursos como Georgia Tech MATH 2552 y Stanford Math 53. Enlazamos a los materiales gratuitos a lo largo del curso. Ninguno de esos autores u organizaciones respalda esta página.
>
> Lo que añadimos: cada unidad se conecta con un problema real del planeta con una fuente pública citada (lagos, metano, pesquerías, carbono, clima, epidemias, aerogeneradores), cada número de la página se vuelve a calcular con un script de verificación antes de publicarse, y cuatro prácticas de computadora resuelven modelos reales numéricamente.
>
> Síguelo en orden. Cada unidad tiene objetivos, ideas clave, ecuaciones, ejemplos paso a paso, práctica con respuestas completas, errores comunes, tarjetas de estudio y un cuestionario. Tu progreso se guarda solo en este navegador.

Cómo ayuda este curso a salvar el planeta

Casi todo modelo del planeta vivo es una ecuación diferencial: qué tan rápido un lago expulsa un contaminante, cómo se recupera una población de peces, cómo se mueve el carbono entre el aire y el mar, qué tan rápido se calienta la Tierra cuando cambia su balance energético, cómo se propaga una epidemia y cómo oscila la torre de un aerogenerador.

Cada unidad termina con una breve sección con fuentes que muestra cómo sus ideas ayudan tanto a las personas como a la naturaleza. Los parámetros de modelo que no provienen de una fuente se marcan como valores de ejemplo.

Para docentes

Puedes enseñar este curso o dejar que un estudiante lo haga solo. Es gratis. Saving Planets no pone nota ni da crédito escolar.

- Esta página es el curso completo: 9 unidades y 4 laboratorios (MATH 220).
- Calcula 15 semanas, unas 6 a 9 horas por semana, incluidas las semanas de laboratorio.
- Sigue el calendario de 15 semanas. Lee la unidad, haz la práctica en papel y luego abre la respuesta. En una semana de laboratorio, haz el laboratorio o la versión en casa.
- Una comprobación es un número o un resultado de código en la página que un script vuelve a calcular antes de publicar. El número que ves y el recalculado tienen que coincidir.
- Usa Imprimir esta página, o descarga la guía de estudio en PDF. La hoja de fórmulas está cerca del final.
- Pregunta: ¿cómo ayuda esta unidad a las personas y al planeta? Cada unidad tiene un recuadro verde con un dato y su fuente.
- Copia la plantilla de guía docente y escribe el nombre de tu clase, el tiempo que tienes y las preguntas que harás. Abrir la plantilla de guía docente

Antes de empezar

Requisitos previos

- Cálculo I y II: derivadas, integrales, fracciones parciales, series de Taylor.
- Matrices, determinantes y valores propios de matrices 2 × 2 (se ven brevemente en la unidad 6).
- Cálculo III ayuda con la ecuación del calor, pero no es obligatorio.

Cómo estudiar

- Comprueba cada solución sustituyéndola de nuevo en la ecuación.
- Resuelve cada ejercicio en papel antes de abrir la respuesta.
- Esboza un campo de pendientes o un retrato de fase antes de resolver; ten claro cómo debería ser la respuesta.
- Pregunta en cada modelo: ¿cuáles son las unidades y tiene sentido el comportamiento a largo plazo?
- Resuelve también numéricamente un problema de cada unidad y compáralo con la fórmula.
- Repite los cuestionarios unos días después. La práctica espaciada es mejor que una sesión larga.

Qué necesitas

- Una computadora o tableta con una hoja de cálculo.
- Una calculadora gráfica gratuita como Desmos.
- Opcional: Python con NumPy (gratis en Google Colab).

Calendario sugerido de 15 semanas

Unas 6 a 9 horas por semana: lectura, problemas de práctica y, en las semanas de laboratorio, el laboratorio.

Semana	Unidad	Temas	Lectura
1	Ecuaciones de primer orden	Campos de pendientes; ecuaciones separables	Lebl 1.1–1.3
2	Ecuaciones de primer orden	Ecuaciones lineales y exactas; existencia y unicidad	Lebl 1.2, 1.4, 1.8
3	Modelado con ecuaciones de primer orden	Modelado: mezclas, decaimiento, crecimiento logístico, cosecha	Lebl 1.6
4	Ecuaciones lineales de segundo orden y oscilaciones	Ecuaciones lineales de segundo orden; ecuación característica	Lebl 2.1–2.2
5	Ecuaciones lineales de segundo orden y oscilaciones	Vibraciones mecánicas y amortiguamiento	Lebl 2.4
6	Vibración forzada y resonancia	Coeficientes indeterminados; oscilación forzada y resonancia; práctica D	Lebl 2.5–2.6
7	Transformadas de Laplace	Transformadas de Laplace; resolución de PVI	Lebl 6.1–6.2
8	Transformadas de Laplace	Funciones escalón, impulsos, convolución; repaso para el parcial	Lebl 6.3–6.4
9	Sistemas lineales, valores propios y planos de fase	Sistemas; matrices y valores propios	Lebl 3.1–3.4
10	Sistemas lineales, valores propios y planos de fase	Retratos de fase y clasificación	Lebl 3.5
11	Sistemas no lineales y estabilidad	Sistemas no lineales, linealización; depredador-presa; práctica B	Lebl 8.1–8.3
12	Sistemas no lineales y estabilidad	Estabilidad; epidemias SIR; práctica A	Lebl 8.2–8.3
13	Métodos numéricos	Métodos numéricos; modelo de balance energético; práctica C	Lebl 1.7, Trench 3
14	Soluciones en series, series de Fourier y la ecuación del calor	Soluciones en series; series de Fourier; ecuación del calor	Lebl 7.1–7.2, 4.2, 4.6

Semana	Unidad	Temas	Lectura
15	Repaso	Repaso y serie de práctica final	Todas las unidades

Tu progreso

Marca las unidades y los laboratorios al terminarlos y haz los cuestionarios. El progreso y las puntuaciones se guardan solo en este navegador y nunca se nos envían.

Unidades

Ecuaciones de primer orden

Campos de pendientes, ecuaciones separables, ecuaciones lineales con factor integrante, ecuaciones exactas, y cuándo una solución existe y es única.

Objetivos de aprendizaje

Al terminar esta unidad podrás:

- Leer un campo de pendientes y esbozar soluciones.
- Resolver ecuaciones de primer orden separables y lineales.
- Reconocer y resolver ecuaciones exactas.
- Enunciar el teorema de existencia y unicidad y detectar cuándo falla.

Conceptos clave

- Una ecuación diferencial relaciona una función desconocida con sus derivadas; una solución es una función que la hace verdadera.
- Separable: dy/dx = g(x)h(y). Divide e integra ambos lados.
- Lineal: y' + p(x)y = q(x). Multiplica por el factor integrante μ = e^(∫p dx) para que el lado izquierdo se convierta en (μy)'.
- Exacta: M dx + N dy = 0 con M_y = N_x es dF = 0, así que F(x, y) = C.
- Si f y ∂f/∂y son continuas cerca de (x_0, y_0), entonces y' = f(x, y), $y(x_0) = y_0$ tiene exactamente una solución cerca. Aun así, las soluciones pueden explotar en tiempo finito.

Ecuaciones clave

$$\frac{dy}{h(y)} = g(x)\,dx$$

`(dy)/(h(y))=g(x) dx`

Ecuación separable

$$\mu = e^{\int p\,dx}, \quad (\mu y)' = \mu q$$

`μ=e^ p dx,(μ y)'=μ q`

Factor integrante

$$M_y = N_x \Rightarrow F(x,y) = C$$

`M_y=N_x F(x,y)=C`

Ecuación exacta

$$y' = f(x, y),\ y(x_0) = y_0$$

`y'=f(x,y),\ y(x_0)=y_0`

Problema de valor inicial

Ejemplos resueltos paso a paso

Ejemplo 1.1 Resuelve dy/dx = xy, y(0) = 2, y halla y(1).

1. dy/y = x dx, así que ln|y| = x²/2 + C.
2. y = 2e^(x²/2).
3. y(1) = 2e^0.5.

Respuesta: ≈ 3.297.

Ejemplo 1.2 Resuelve y' + 2y = 4, y(0) = 0, y halla y(1).

1. μ = e^(2t), así que (e^(2t)y)' = 4e^(2t).
2. e^(2t)y = 2e^(2t) + C; y(0) = 0 da C = −2.
3. y = 2(1 − e^(−2t)).

Respuesta: y(1) ≈ 1.729, acercándose al estado estacionario 2.

Ejemplo 1.3 Resuelve 2xy dx + (x² + 2y) dy = 0 con y(0) = 1, y halla y cuando x = 1.

1. M_y = 2x = N_x: exacta.
2. F = x²y + y²; F(0, 1) = 1.
3. En x = 1: y + y² = 1, así que y = (−1 + √5)/2.

Respuesta: ≈ 0.618.

Problemas de práctica

Resuelve cada uno primero en papel y luego comprueba.

1. Resuelve y' = y², y(0) = 1. ¿Dónde existe la solución?

   y = 1/(1 − t); explota en t = 1, aunque y² es suave en todas partes.

2. Resuelve t y' + y = t² para t > 0.

(ty)' = t^2, así que $y = t^2/3 + C/t$.

3. Resuelve $y' = -y/\tau$.

   $y = y_0 e^{(-t/\tau)}$.

4. ¿Es exacta $(y \cos x)\,dx + (\sin x + 2y)\,dy = 0$? Resuélvela.

   $M_y = \cos x = N_x$; $F = y \sin x + y^2 = C$.

5. ¿Tiene $y' = \sqrt{y}$, $y(0) = 0$ solución única?

   No: $y = 0$ e $y = t^2/4$ sirven ambas; $\partial f/\partial y = 1/(2\sqrt{y})$ no es continua en $y = 0$.

Ideas erróneas comunes

Mito: Toda ecuación de primer orden es separable.

En realidad: $y' = x + y$ no lo es; es lineal.

Mito: Olvidar +C hasta el final no pasa nada.

En realidad: Añade C al integrar, antes de despejar y, o la condición inicial saldrá mal.

Mito: Un lado derecho suave significa que la solución existe para siempre.

En realidad: $y' = y^2$ explota en un tiempo finito.

Tarjetas de estudio

Separable

$dy/dx = g(x)h(y)$.

Lineal de primer orden

$y' + p\,y = q$.

Factor integrante

$\mu = e^{(\int p\,dx)}$.

Exacta

$M_y = N_x$; $F = C$.

Problema de valor inicial

Una EDO más $y(x_0) = y_0$.

Existencia y unicidad

f, f_y continuas ⇒ una solución local.

Cuestionario de autoevaluación

1. El factor integrante de y' + 3y = x es...

e^(3x)

e^x

3x

e^(−3x)

e^(3x). e^(∫3 dx).

2. M dx + N dy = 0 es exacta cuando...

M = N

M_y = N_x

M_x = N_y

MN = 1

M_y = N_x. Las derivadas cruzadas de F coinciden.

3. y' = ky tiene solución...

$y_0 + kt$

$y_0 e^{(kt)}$

kt^2

sin kt

$y_0 e^{(kt)}$. Separable.

4. La unicidad puede fallar cuando...

f es lineal

∂f/∂y es discontinua

$y_0 = 1$

la ecuación es separable

∂f/∂y es discontinua. p. ej., y' = √y en 0.

Repetir este cuestionario

Cómo ayuda esto a salvar el planeta

La ecuación de primer orden más simple, y' = −y/τ, describe cómo se elimina un contaminante de un lago bien mezclado o cómo un gas sale de la atmósfera. Su único número, la escala de tiempo τ, decide si un error se desvanece en años o dura siglos (unidad 2).

En Saving Planets: Página de Ríos

Fuentes: U.S. EPA: Physical features of the Great Lakes (retention times) (https://www.epa.gov/greatlakes/physical-features-great-lakes) · Lebl, 1.4 Linear equations and the integrating factor (https://www.jirka.org/diffyqs/html/intfactor_section.html)

Recursos de aprendizaje gratuitos

- Lebl, 1.3 Separable equations (https://www.jirka.org/diffyqs/html/separable_section.html): Sección de libro de texto gratuita.
- Lebl, 1.4 Integrating factor (https://www.jirka.org/diffyqs/html/intfactor_section.html): Ecuaciones lineales.
- Lebl, 1.8 Exact equations (https://www.jirka.org/diffyqs/html/exact_section.html): Ecuaciones exactas.
- Lebl, 1.2 Slope fields (https://www.jirka.org/diffyqs/html/slopefields_section.html): Existencia y unicidad.

Ver la clase

First Order Autonomous Equations (https://ocw.mit.edu/courses/18-03sc-differential-equations-fall-2011/resources/first-order-autonomous-equations/) (en inglés)

MIT 18.03SC Differential Equations (Fall 2011), MIT OpenCourseWare. Licencia: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Condiciones de uso (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Enlace solo para estudio gratuito; Saving Planets no está afiliado a esta universidad ni cuenta con su respaldo.

☐ **Terminé esta unidad**

UNIDAD 2 · SEMANA 3

Modelado con ecuaciones de primer orden

Convertir una situación en una ecuación: mezclas y contaminación de lagos, decaimiento y tiempos de vida, enfriamiento de Newton, crecimiento logístico, cosecha, y equilibrios con su estabilidad.

Objetivos de aprendizaje

Al terminar esta unidad podrás:

- Construir modelos de tasa de entrada menos tasa de salida.
- Interpretar constantes de tiempo y tiempos de vida.
- Hallar los equilibrios de ecuaciones autónomas y clasificar su estabilidad.
- Usar el modelo logístico con cosecha para hallar el rendimiento máximo sostenible.

Conceptos clave

- Tasa de cambio = tasa de entrada − tasa de salida. Escribe las unidades de cada término.
- Un lago bien mezclado con tiempo de residencia τ pierde un contaminante a razón de C/τ una vez que el aporte es limpio.
- Para una ecuación autónoma y' = f(y), los equilibrios resuelven f(y) = 0; un equilibrio es estable si f'(y) < 0.
- El crecimiento logístico P' = rP(1 − P/K) se estabiliza en K. Con una cosecha constante H, la mayor cosecha sostenible es rK/4, en P = K/2.

Ecuaciones clave

$$\frac{dx}{dt} = (\text{rate in}) - (\text{rate out})$$

`dx/dt=(rate in)-(rate out)`

Ley de balance

$$C(t) = C_0 e^{-t/\tau}$$

`C(t)=C_0e^-t/τ`

Renovación con tiempo de residencia τ

$$P' = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right) - H$$

`P'=rP(1- PK)-H`

Crecimiento logístico con cosecha

$$H_{\max} = \frac{rK}{4}$$

H_=rK/4

Rendimiento máximo sostenible

Ejemplos resueltos paso a paso

Ejemplo 2.1 El tiempo de residencia del lago Erie es de 2.6 años y el del lago Superior de 191 años (EPA). Si cesa el aporte de un contaminante, ¿cuánto tarda la concentración de cada lago en bajar al 10 %, suponiendo cada uno bien mezclado?

1. $C/C_0 = e^{(-t/\tau)} = 0.1$, así que $t = \tau \ln 10$.
2. Erie: 2.6 × 2.303 = 5.99 años.
3. Superior: 191 × 2.303 = 440 años.

Respuesta: Unos 6 años para el Erie pero unos 440 para el Superior. La prevención importa más donde la renovación es lenta.

Ejemplo 2.2 La EPA dice que el metano dura en promedio una década en la atmósfera. Trata un pulso de metano como si decayera con $\tau = 10$ años. ¿Qué fracción queda después de 30 años?

1. Fracción = $e^{(-30/10)} = e^{(-3)}$.

Respuesta: Alrededor del 5 %. Por eso reducir las fugas de metano rinde frutos en décadas, a diferencia del CO_2, que permanece mucho más tiempo.

Ejemplo 2.3 Una población de peces sigue $P' = 0.4P(1 - P/10000) - H$ (toneladas, años; valores de ejemplo). Halla el rendimiento máximo sostenible.

1. El crecimiento $rP(1 - P/K)$ es máximo en $P = K/2 = 5000$ t.
2. Allí vale $rK/4 = 0.4 \times 10000/4$.

Respuesta: 1000 toneladas por año. Cosechar más lleva la población al colapso.

Problemas de práctica

Resuelve cada uno primero en papel y luego comprueba.

1. Un café a 90 °C se enfría en una habitación a 20 °C con $T' = -0.1(T - 20)$ (minutos). Halla $T(10)$.

$T = 20 + 70e^{-1} \approx 45.8$ °C.

2. Un tanque de 100 L de agua dulce recibe salmuera de 0.5 g/L a 2 L/min y se vacía a 2 L/min. Halla la sal tras 50 minutos.

   $x' = 1 - x/50$, $x = 50(1 - e^{-t/50})$; $x(50) = 50(1 - e^{-1}) \approx 31.6$ g.

3. Halla y clasifica los equilibrios de $y' = y(1 - y)$.

   $y = 0$ ($f' = 1$, inestable) e $y = 1$ ($f' = -1$, estable).

4. En el ejemplo pesquero, ¿qué pasa si $H = 1200$ t/año?

   $rP(1 - P/K) - H < 0$ para todo P, así que la población cae a cero.

Ideas erróneas comunes

Mito: El tiempo de residencia es lo que tarda en eliminarse todo el contaminante.

En realidad: Tras un τ, queda el 37 %; el decaimiento exponencial nunca llega del todo a cero.

Mito: Más esfuerzo pesquero siempre significa más captura.

En realidad: Pasado el rendimiento máximo sostenible, más cosecha reduce la población y la captura futura.

Mito: Un equilibrio es siempre donde termina el sistema.

En realidad: Solo los equilibrios estables atraen a las soluciones cercanas.

Tarjetas de estudio

Ley de balance

Entrada − salida.

Constante de tiempo

τ en $e^{-t/\tau}$; el 63 % del cambio se completa tras τ.

Tiempo de residencia

Volumen del lago ÷ caudal de salida.

Equilibrio

$f(y^*) = 0$.

Criterio de estabilidad

$f'(y^*) < 0$ estable.

Rendimiento máximo sostenible

$rK/4$ en $P = K/2$.

Cuestionario de autoevaluación

1. Con τ = 5 años, la fracción que queda tras 5 años es…

0

e^(−1) ≈ 0.37

0.5

0.1

e^(−1) ≈ 0.37. e^(−t/τ) en t = τ.

2. El rendimiento máximo sostenible del crecimiento logístico es…

rK

rK/4

K/2

r/K

rK/4. Máximo de rP(1 − P/K).

3. y* es un equilibrio estable de y' = f(y) si…

f'(y*) > 0

f'(y*) < 0

f(y*) > 0

y* > 0

f'(y*) < 0. Las soluciones cercanas son empujadas de vuelta.

4. ¿Qué lago se recupera más rápido de la contaminación?

Superior (191 años)

Erie (2.6 años)

Igual

Ninguno

Erie (2.6 años). Menor tiempo de residencia.

Repetir este cuestionario

Cómo ayuda esto a salvar el planeta

La EPA indica tiempos de residencia de los Grandes Lagos desde 2.6 años (Erie) hasta 191 años (Superior), por eso las toxinas que entran en el lago Superior son un problema de varias generaciones.

Los científicos pesqueros de la NOAA evalúan las poblaciones con modelos basados en estas ideas; el rendimiento máximo sostenible del modelo logístico es el punto de partida clásico.

En Saving Planets: Centro de Océanos · Página de Ríos

Fuentes: U.S. EPA: Physical features of the Great Lakes (retention times) (https://www.epa.gov/greatlakes/physical-features-great-lakes) · U.S. EPA: Understanding global warming potentials (https://www.epa.gov/ghgemissions/understanding-global-warming-potentials) · NOAA Fisheries: evaluaciones de poblaciones (https://www.fisheries.noaa.gov/topic/population-assessments)

Recursos de aprendizaje gratuitos

- Lebl, 1.6 Autonomous equations (https://www.jirka.org/diffyqs/html/auteq_section.html): Equilibrios, crecimiento logístico, cosecha.
- Lebl, 1.4 Integrating factor (https://www.jirka.org/diffyqs/html/intfactor_section.html): Problemas de mezclas.
- OpenStax Calculus 2, 4.4 The Logistic Equation (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/4-4-the-logistic-equation): Modelo logístico.

Ver la clase

First Order Autonomous Equations (https://ocw.mit.edu/courses/18-03sc-differential-equations-fall-2011/resources/first-order-autonomous-equations/) (en inglés)

MIT 18.03SC Differential Equations (Fall 2011), MIT OpenCourseWare. Licencia: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Condiciones de uso (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Enlace solo para estudio gratuito; Saving Planets no está afiliado a esta universidad ni cuenta con su respaldo.

☐ **Terminé esta unidad**

Ecuaciones lineales de segundo orden y oscilaciones

Ecuaciones lineales con coeficientes constantes, la ecuación característica y las vibraciones libres: no amortiguadas, subamortiguadas, críticamente amortiguadas y sobreamortiguadas.

Objetivos de aprendizaje

Al terminar esta unidad podrás:

- Resolver ay'' + by' + cy = 0 con la ecuación característica.
- Tratar raíces reales, repetidas y complejas.
- Modelar sistemas masa-resorte-amortiguador.
- Clasificar el amortiguamiento y calcular la frecuencia natural y el amortiguamiento crítico.

Conceptos clave

- Prueba y = e^(rt): ar² + br + c = 0. Dos raíces reales dan dos exponenciales; una raíz repetida da (c_1 + c_2t)e^(rt); raíces complejas α ± iβ dan e^(αt)(c_1 cos βt + c_2 sin βt).
- Superposición: las sumas de soluciones de una ecuación lineal homogénea son soluciones.
- mx'' + cx' + kx = 0 tiene frecuencia natural ω_0 = √(k/m).
- Un amortiguamiento c < 2√(mk) oscila y decae (subamortiguado); c = 2√(mk) vuelve lo más rápido posible sin sobrepasar (crítico).

Ecuaciones clave

$$ar^2 + br + c = 0$$

`ar^2+br+c=0`

Ecuación característica

$$y = e^{\alpha t}(c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t)$$

`y=e^α t(c_1β t+c_2β t)`

Raíces complejas α ± iβ

$$mx'' + cx' + kx = 0,\ \omega_0 = \sqrt{k/m}$$

`mx''+cx'+kx=0,\ ω_0=/m`

Masa-resorte-amortiguador

$$c_{\text{crit}} = 2\sqrt{mk}$$

`c_crit=2`

Amortiguamiento crítico

Ejemplos resueltos paso a paso

Ejemplo 3.1 Resuelve y'' + 4y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0. ¿Cuál es el periodo?

1. $r^2 + 4 = 0$, $r = \pm 2i$.
2. $y = \cos 2t$.
3. Periodo $2\pi/2$.

Respuesta: $y = \cos 2t$, periodo $\pi \approx 3.14$.

Ejemplo 3.2 Resuelve y'' + 2y' + 5y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0, y halla y(1).

1. $r = -1 \pm 2i$.
2. $y = e^{-t}(\cos 2t + \tfrac{1}{2} \sin 2t)$ cumple ambas condiciones.
3. $y(1) = e^{-1}(\cos 2 + \tfrac{1}{2} \sin 2)$.

Respuesta: ≈ 0.0142: la oscilación casi se ha extinguido.

Ejemplo 3.3 Una masa de 2 kg cuelga de un resorte con k = 50 N/m. Halla ω_0, la frecuencia en hercios y el amortiguamiento crítico.

1. $\omega_0 = \sqrt{(50/2)} = 5$ rad/s.
2. $f = 5/(2\pi) = 0.796$ Hz.
3. $c_{crit} = 2\sqrt{(2 \times 50)} = 20$ N·s/m.

Respuesta: 5 rad/s, 0.80 Hz, 20 N·s/m.

Problemas de práctica

Resuelve cada uno primero en papel y luego comprueba.

1. Resuelve y'' − 3y' + 2y = 0.

   r = 1, 2: $y = c_1 e^t + c_2 e^{2t}$.

2. Resuelve y'' + 2y' + y = 0.

   Raíz repetida r = −1: $y = (c_1 + c_2 t)e^{-t}$.

3. Clasifica $x'' + 6x' + 5x = 0$.

   $r = -1, -5$: sobreamortiguado ($c = 6 > 2\sqrt{5}$).

4. Halla el periodo de $x'' + 9x = 0$.

   $\omega = 3$, periodo $2\pi/3 \approx 2.09$.

Ideas erróneas comunes

Mito: Raíces complejas significan soluciones complejas.

En realidad: Las partes real e imaginaria dan soluciones reales: e^(αt)cos βt y e^(αt)sin βt.

Mito: Una raíz repetida da solo una solución.

En realidad: La segunda es t e^(rt).

Mito: Más amortiguamiento siempre significa asentarse más rápido.

En realidad: Los sistemas sobreamortiguados regresan más lentamente que los críticamente amortiguados.

Tarjetas de estudio

Ecuación característica

$ar^2 + br + c = 0$.

Superposición

Las sumas de soluciones son soluciones (lineal homogénea).

Raíz repetida

$(c_1 + c_2t)e^{(rt)}$.

Frecuencia natural

$\omega_0 = \sqrt{(k/m)}$.

Subamortiguado

Oscila mientras decae.

Amortiguamiento crítico

$c = 2\sqrt{(mk)}$.

Cuestionario de autoevaluación

1. Las raíces 2 ± 3i dan las soluciones...

e^(2t), e^(3t)

e^(2t)cos 3t, e^(2t)sin 3t

cos 2t

te^(2t)

e^(2t)cos 3t, e^(2t)sin 3t. α = 2, β = 3.

2. Frecuencia natural de mx" + kx = 0:

k/m

√(k/m)

m/k

√(mk)

√(k/m). $r^2 = -k/m$.

3. El amortiguamiento crítico c es igual a...

√(mk)

2√(mk)

mk

k/m

2√(mk). Discriminante cero.

4. y" + 2y' + y = 0 es...

subamortiguado

críticamente amortiguado

sobreamortiguado

no amortiguado

críticamente amortiguado. Raíz repetida.

Repetir este cuestionario

Cómo ayuda esto a salvar el planeta

Toda estructura alta, desde la torre de un aerogenerador hasta un puente, tiene frecuencias naturales fijadas por su rigidez y su masa, exactamente $\omega_0 = \sqrt{(k/m)}$ en el modelo más simple. El amortiguamiento decide qué tan rápido se extingue el balanceo causado por las ráfagas, lo que afecta a la fatiga y a la vida útil de la estructura.

En Saving Planets: Física I, Unidad 8: oscilaciones

Fuentes: DOE de EE. UU.: ¿cómo funcionan los aerogeneradores? (en inglés) (https://www.energy.gov/eere/wind/how-do-wind-turbines-work) · Lebl, 2.4 Mechanical vibrations (https://www.jirka.org/diffyqs/html/sec_mv.html)

Recursos de aprendizaje gratuitos

- Lebl, 2.1 Second-order linear ODEs (https://www.jirka.org/diffyqs/html/solinear_section.html): Teoría.
- Lebl, 2.2 Constant coefficient equations (https://www.jirka.org/diffyqs/html/sec_ccsol.html): Ecuación característica.
- Lebl, 2.4 Mechanical vibrations (https://www.jirka.org/diffyqs/html/sec_mv.html): Amortiguamiento.
- PhET: Masses and Springs (https://phet.colorado.edu/en/simulations/masses-and-springs): Simulación.

Ver la clase

Constant Coefficient Second Order Homogeneous DE's (https://ocw.mit.edu/courses/18-03sc-differential-equations-fall-2011/resources/constant-coefficient-second-order-homogeneous-des/) (en inglés)

MIT 18.03SC Differential Equations (Fall 2011), MIT OpenCourseWare. Licencia: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Condiciones de uso (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Enlace solo para estudio gratuito; Saving Planets no está afiliado a esta universidad ni cuenta con su respaldo.

☐ **Terminé esta unidad**

Vibración forzada y resonancia

Ecuaciones no homogéneas, coeficientes indeterminados, respuesta en amplitud de un oscilador forzado, pulsaciones y resonancia.

Objetivos de aprendizaje

Al terminar esta unidad podrás:

- Hallar soluciones particulares por coeficientes indeterminados.
- Escribir la solución general como homogénea más particular.
- Calcular la amplitud en estado estacionario de un oscilador amortiguado forzado.
- Explicar la resonancia y cómo la evitan los ingenieros.

Conceptos clave

- Solución general = solución homogénea + una solución particular.
- Propón la forma según el forzamiento: para cos ωt prueba A cos ωt + B sin ωt.
- Forzado a la frecuencia ω, un oscilador amortiguado se asienta en un movimiento estacionario de amplitud X = F_0/√((k − mω²)² + (cω)²).
- Cerca de ω = ω_0 la amplitud alcanza un pico; con la razón de amortiguamiento ζ = c/c_crit, la amplificación dinámica máxima es de aproximadamente 1/(2ζ). Sin amortiguamiento, la respuesta crece sin límite.

Ecuaciones clave

$$y = y_h + y_p$$

y=y_h+y_p

Solución general

$$X = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}}$$

X=_0(k-mω^2)^2+(cω)^2

Amplitud en estado estacionario

$$\frac{X}{F_0/k} = \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}},\ r = \frac{\omega}{\omega_0}$$

(X)/(F_0/k)=1(1-r^2)^2+(2 r)^2,\ r=(ω)/(ω_0)

Amplificación dinámica

$$y'' + \omega^2 y = \cos \omega t \Rightarrow y_p = \frac{t \sin \omega t}{2\omega}$$

```
y''+ω^2y=ω t y_p=(tω t)/(2ω)
```

Resonancia pura

Ejemplos resueltos paso a paso

Ejemplo 4.1 Halla una solución particular de y" + y = cos 2t.

1. Prueba y_p = A cos 2t: −4A + A = 1.
2. A = −1/3.

Respuesta: y_p = −⅓ cos 2t (en contrafase, porque el forzamiento está por encima de la frecuencia natural).

Ejemplo 4.2 Modela la torre de un aerogenerador como un único oscilador con frecuencia natural 0.30 Hz y razón de amortiguamiento ζ = 0.01 (valores de ejemplo). El rotor gira a 12 rpm = 0.20 Hz, y tres palas pasan frente a la torre a 0.60 Hz. Halla la amplificación dinámica en cada caso y en resonancia.

1. At 0.20 Hz, r = 0.667: 1/√((1 − 0.444)² + (0.0133)²) = 1.80.
2. At 0.60 Hz, r = 2: 1/√(9 + 0.0016) = 0.333.
3. At r = 1: 1/(2ζ) = 50.

Respuesta: 1.8 y 0.33, pero 50 en resonancia. Por eso los diseñadores mantienen la frecuencia natural de la torre lejos de las frecuencias del rotor y de paso de las palas.

Ejemplo 4.3 Resuelve y" + y = cos t, y(0) = y'(0) = 0.

1. El forzamiento coincide con la frecuencia natural, así que prueba y_p = t(A cos t + B sin t).
2. Al sustituir se obtiene A = 0, B = ½.
3. y = ½ t sin t.

Respuesta: La amplitud crece como t/2 sin límite: resonancia pura.

Problemas de práctica

Resuelve cada uno primero en papel y luego comprueba.

1. Halla y_p para $y'' + 3y' + 2y = 4$.

   $y_p = 2$.

2. Halla y_p para $y'' - y = e^t$.

   e^t resuelve la ecuación homogénea, así que $y_p = \frac{1}{2} t e^t$.

3. Una masa de 1 kg, $k = 100$ N/m, $c = 2$ N·s/m es forzada por $10 \cos 10t$ N. Halla la amplitud estacionaria.

   $k - m\omega^2 = 0$, así que $X = 10/(2 \times 10) = 0.5$ m.

4. Para $\zeta = 0.05$, ¿cuál es la amplificación máxima?

   Aproximadamente $1/(2 \times 0.05) = 10$.

Ideas erróneas comunes

Mito: La resonancia necesita una fuerza grande.

En realidad: Una pequeña fuerza periódica a la frecuencia natural produce una respuesta grande.

Mito: El amortiguamiento elimina la resonancia.

En realidad: Limita el pico a cerca de $1/(2\zeta)$, que sigue siendo grande en estructuras poco amortiguadas.

Mito: Los coeficientes indeterminados funcionan con cualquier forzamiento.

En realidad: Solo con polinomios, exponenciales, senos y cosenos y sus productos; si no, usa variación de parámetros o Laplace.

Tarjetas de estudio

Solución particular

Cualquier solución de la ecuación forzada.

Coeficientes indeterminados

Proponer la forma del forzamiento.

Respuesta en amplitud

$X = F_0/\sqrt{((k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2)}$.

Razón de amortiguamiento

$\zeta = c/(2\sqrt{(mk)})$.

Resonancia

Respuesta grande cerca de ω_0; pico $\approx 1/(2\zeta)$.

Pulsaciones

Dos frecuencias cercanas producen una envolvente lenta.

Cuestionario de autoevaluación

1. Solución general =

solo y_p

y_h + y_p

y_h × y_p

y_h − y_p

y_h + y_p. Linealidad.

2. La resonancia ocurre cuando la frecuencia de forzamiento está cerca de...

cero

la frecuencia natural

el doble de ella

el infinito

la frecuencia natural. Denominador mínimo.

3. Con ζ = 0.01 la amplificación máxima es de aproximadamente...

1

10

50

100

50. 1/(2ζ).

4. Forzar muy por encima de ω_0 da una amplificación...

grande

menor que 1

exactamente 1

infinita

menor que 1. $\approx 1/r^2$.

Repetir este cuestionario

Cómo ayuda esto a salvar el planeta

Los aerogeneradores son cada vez más grandes y altos para captar más energía, y sus torres y palas están poco amortiguadas. Evitar la resonancia entre la estructura y el rotor que gira es parte esencial de mantener seguras y duraderas estas máquinas de energía limpia. La práctica D lo explora con un modelo de ejemplo.

En Saving Planets: Física I, unidad 3: energía eólica

Fuentes: DOE de EE. UU.: ¿cómo funcionan los aerogeneradores? (en inglés) (https://www.energy.gov/eere/wind/how-do-wind-turbines-work) · Lebl, 2.6 Forced oscillations and resonance (https://www.jirka.org/diffyqs/html/forcedo_section.html)

Recursos de aprendizaje gratuitos

- Lebl, 2.5 Nonhomogeneous equations (https://www.jirka.org/diffyqs/html/sec_nonhom.html): Coeficientes indeterminados y variación de parámetros.
- Lebl, 2.6 Forced oscillations and resonance (https://www.jirka.org/diffyqs/html/forcedo_section.html): Resonancia.
- MIT OCW 18.03SC, Unit II (https://ocw.mit.edu/courses/18-03sc-differential-equations-fall-2011/): Ecuaciones de segundo orden, clases y problemas.

Terminé esta unidad

Transformadas de Laplace

Convertir ecuaciones diferenciales en álgebra: la transformada y su tabla, derivadas, funciones escalón para entradas conmutadas, impulsos y convolución.

Objetivos de aprendizaje

Al terminar esta unidad podrás:

- Calcular transformadas de Laplace a partir de la definición y de una tabla.
- Resolver problemas de valor inicial con transformadas y fracciones parciales.
- Modelar entradas conmutadas con funciones escalón unitario y desplazamientos.
- Modelar impulsos repentinos con la función delta.

Conceptos clave

- L{f}(s) = ∫₀^∞ e^(−st) f(t) dt convierte las derivadas en multiplicación por s, con los valores iniciales incorporados.
- Despeja Y(s), separa en fracciones parciales y luego invierte con la tabla.
- Un interruptor accionado en el instante a es u(t − a); la regla de desplazamiento es L{u(t − a)f(t − a)} = e^(−as)F(s).
- Un golpe instantáneo es δ(t − a), con L{δ(t − a)} = e^(−as).

Ecuaciones clave

$$\mathcal{L}\{f\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

L\=_0^∞ e^-stf(t) dt

Definición

$$\mathcal{L}\{y'\} = sY - y(0),\ \mathcal{L}\{y''\} = s^2Y - sy(0) - y'(0)$$

L'\=sY-y(0),\ L''\=s^2Y-sy(0)-y'(0)

Derivadas

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a},\ \mathcal{L}\{\sin \omega t\} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

L^at\=1s-a,\ L\ω t\=(ω)/(s^2+ω^2)

Entradas de la tabla

$$\mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s)$$

L(t-a)f(t-a)\=e^-asF(s)

Regla de desplazamiento

Ejemplos resueltos paso a paso

Ejemplo 5.1 Resuelve y' − 2y = e^(3t), y(0) = 1.

1. sY − 1 − 2Y = 1/(s − 3).
2. Y = 1/((s − 2)(s − 3)) + 1/(s − 2) = [1/(s − 3) − 1/(s − 2)] + 1/(s − 2).
3. Y = 1/(s − 3).

Respuesta: y = e^(3t). Comprobación: 3e^(3t) − 2e^(3t) = e^(3t).

Ejemplo 5.2 Un lago limpio empieza a recibir un aporte constante de contaminante en t = 2: y' + y = u(t − 2), y(0) = 0. Halla y(3).

1. (s + 1)Y = e^(−2s)/s.
2. 1/(s(s + 1)) = 1/s − 1/(s + 1), así que y = (1 − e^(−(t − 2)))u(t − 2).
3. y(3) = 1 − e^(−1).

Respuesta: ≈ 0.632 del nivel final, una constante de tiempo después de la conmutación.

Ejemplo 5.3 Un oscilador en reposo y'' + 4y = δ(t − 1) recibe un golpe en t = 1. Halla y(1 + π/4).

1. (s² + 4)Y = e^(−s).
2. y = ½ sin(2(t − 1)) u(t − 1).
3. En t = 1 + π/4: ½ sin(π/2).

Respuesta: 0.5, el primer pico.

Problemas de práctica

Resuelve cada uno primero en papel y luego comprueba.

1. Halla L{t}.

   1/s².

2. Invierte $3/(s^2 + 9)$.

   sin 3t.

3. Resuelve $y' + y = 0$, $y(0) = 4$.

   $Y = 4/(s + 1)$, $y = 4e^{-t}$.

4. Resuelve $y'' + y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

   $Y = 2/(s^2 + 1)$, $y = 2 \sin t$.

5. Halla $\mathcal{L}\{u(t - 3)\}$.

   e^{-3s}/s.

Ideas erróneas comunes

Mito: $\mathcal{L}\{fg\} = \mathcal{L}\{f\}\mathcal{L}\{g\}$.

En realidad: El producto de transformadas corresponde a la convolución, no al producto.

Mito: Las condiciones iniciales se aplican al final.

En realidad: Entran de inmediato a través de $\mathcal{L}\{y'\} = sY - y(0)$.

Mito: Las funciones escalón requieren resolver por tramos.

En realidad: Laplace maneja las conmutaciones de una sola vez.

Tarjetas de estudio

Transformada de Laplace

$\int_0^\infty e^{-st} f\, dt$.

$\mathcal{L}\{y'\}$

$sY - y(0)$.

$\mathcal{L}\{e^{at}\}$

$1/(s - a)$.

Escalón unitario

$u(t - a)$: apagado y luego encendido.

Delta

$\delta(t - a)$: impulso instantáneo; $\mathcal{L} = e^{-as}$.

Convolución

$\mathcal{L}\{f * g\} = FG$.

Cuestionario de autoevaluación

1. L{y'} =

sY

sY − y(0)

Y/s

Y − s

sY − y(0). Integración por partes.

2. L{e^(−2t)} =

1/(s − 2)

1/(s + 2)

s + 2

−2/s

1/(s + 2). a = −2.

3. Un interruptor encendido en t = 5 se escribe...

δ(t − 5)

u(t − 5)

e^(5t)

t − 5

u(t − 5). Escalón unitario.

4. L{δ(t)} =

0

1

s

1/s

1. e^(−0s).

Repetir este cuestionario

Cómo ayuda esto a salvar el planeta

Las entradas ambientales reales se encienden y se apagan: empieza un vertido industrial, se detiene una descarga de una presa, una erupción volcánica inyecta aerosoles de golpe. Las entradas escalón e impulso con transformadas de Laplace dan la respuesta a cada una en un solo cálculo, el método que usan los ingenieros para el control de redes eléctricas y plantas de tratamiento.

En Saving Planets: Página de Ríos

Fuentes: Lebl, 6.1 The Laplace transform (https://www.jirka.org/diffyqs/html/laplace_section.html) · Lebl, 6.4 Dirac delta and impulse response (https://www.jirka.org/diffyqs/html/diracdelta_section.html)

Recursos de aprendizaje gratuitos

- Lebl, 6.1 The Laplace transform (https://www.jirka.org/diffyqs/html/laplace_section.html): Definición y tabla.
- Lebl, 6.2 Transforms of derivatives and ODEs (https://www.jirka.org/diffyqs/html/transformsofders_section.html): Resolución de PVI.
- Lebl, 6.3 Convolution (https://www.jirka.org/diffyqs/html/convolution_section.html): Convolución.
- Lebl, 6.4 Dirac delta (https://www.jirka.org/diffyqs/html/diracdelta_section.html): Impulsos.

Ver la clase

Laplace Transform (https://ocw.mit.edu/courses/18-03sc-differential-equations-fall-2011/resources/laplace-transform/) (en inglés)

MIT 18.03SC Differential Equations (Fall 2011), MIT OpenCourseWare. Licencia: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Condiciones de uso (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Enlace solo para estudio gratuito; Saving Planets no está afiliado a esta universidad ni cuenta con su respaldo.

☐ **Terminé esta unidad**

UNIDAD 6 · SEMANAS 9–10

Sistemas lineales, valores propios y planos de fase

Sistemas x' = Ax, métodos de valores propios, el plano de fase y la clasificación de los equilibrios en nodos, sillas, espirales y centros.

Objetivos de aprendizaje

Al terminar esta unidad podrás:

- Escribir ecuaciones acopladas y ecuaciones de orden superior como sistemas de primer orden.
- Resolver x' = Ax con valores y vectores propios.
- Esbozar retratos de fase.
- Clasificar el origen con la traza y el determinante.

Conceptos clave

- Si Av = λv, entonces x = e^(λt)v resuelve x' = Ax; la solución general combina un término así por cada valor propio.
- Valores propios reales de signo opuesto: una silla. Ambos negativos: un nodo estable.
- Valores propios complejos α ± iβ: espirales (estables si α < 0); centros si α = 0.
- Para una matriz 2 × 2, λ² − (tr A)λ + det A = 0.

Ecuaciones clave

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$$

`x'=A x`

Sistema lineal

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

`(A- I)=0`

Valores propios

$$\mathbf{x} = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2$$

`x=c_1e^_1t v_1+c_2e^_2t v_2`

Solución general (valores propios reales distintos)

$$\lambda^2 - (\operatorname{tr} A)\lambda + \det A = 0$$

`^2-()+ A=0`

Polinomio característico (2 × 2)

Ejemplos resueltos paso a paso

Ejemplo 6.1 Un modelo de carbono de dos compartimentos: la atmósfera A y el océano O intercambian carbono con A' = −0.2A + 0.1O, O' = 0.2A − 0.1O (por año; tasas de ejemplo). Empieza con 3 unidades en el aire y ninguna en el océano.

1. Valores propios: tr = −0.3, det = 0, así que λ = 0 y −0.3.
2. λ = 0 tiene vector propio (1, 2): el reparto de equilibrio es 1 : 2. El carbono total (3) se conserva, así que A → 1, O → 2.
3. A(t) = 1 + 2e^(−0.3t).

Respuesta: El aire conserva un tercio del pulso en este modelo de juguete, con escala de tiempo 1/0.3 ≈ 3.33 años.

Ejemplo 6.2 Clasifica el origen para A = [[1, 2], [2, 1]].

1. $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$, λ = 3, −1.

Respuesta: Signos opuestos: una silla (inestable).

Ejemplo 6.3 Clasifica el origen para A = [[−1, −2], [2, −1]].

1. tr = −2, det = 5: $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$.
2. λ = −1 ± 2i.

Respuesta: Una espiral estable: las soluciones giran hacia dentro, decayendo como e^(−t).

Problemas de práctica

Resuelve cada uno primero en papel y luego comprueba.

1. Escribe y'' + 3y' + 2y = 0 como un sistema.

   $x_1 = y$, $x_2 = y'$: $x_1' = x_2$, $x_2' = -2x_1 - 3x_2$.

2. ¿Valores propios de [[2, 0], [0, −3]]?

   2 y −3: una silla.

3. Clasifica [[0, 1], [−4, 0]].

λ = ±2i: un centro (oscilación no amortiguada).

4. Clasifica [[−3, 1], [0, −2]].

   λ = −3, −2: un nodo estable.

Ideas erróneas comunes

Mito: Los vectores propios son únicos.

En realidad: Sirve cualquier múltiplo no nulo.

Mito: Un valor propio cero significa que no hay movimiento.

En realidad: Significa una recta de equilibrios o una cantidad conservada, como en el modelo de compartimentos de carbono.

Mito: Los valores propios complejos solo dan soluciones complejas.

En realidad: Las partes real e imaginaria dan soluciones reales.

Tarjetas de estudio

Sistema lineal

x' = Ax.

Método de valores propios

x = e^(λt)v.

Silla

Valores propios reales de signo opuesto.

Nodo

Valores propios reales del mismo signo.

Espiral

Valores propios complejos, α ≠ 0.

Traza–determinante

$\lambda^2 - \operatorname{tr}\lambda + \det = 0$.

Cuestionario de autoevaluación

1. Los valores propios 2 y −1 dan...

un nodo

una silla

una espiral

un centro

una silla. Signos opuestos.

2. Los valores propios −1 ± 3i dan...

espiral inestable

espiral estable

centro

silla

espiral estable. $\alpha < 0$.

3. Para A de 2 × 2, la suma de los valores propios es...

det A

tr A

0

1

tr A. $\lambda_1 + \lambda_2 = \text{tr } A$.

4. Un centro tiene valores propios...

reales, iguales

imaginarios puros

cero

positivo

imaginarios puros. $\alpha = 0$.

Repetir este cuestionario

Cómo ayuda esto a salvar el planeta

Los modelos del ciclo del carbono son sistemas lineales de compartimentos (atmósfera, océano superficial, océano profundo, tierra) que intercambian carbono. Sus valores propios son las escalas de tiempo en las que se absorbe un pulso de CO_2: algunas rápidas, otras de siglos o más. La visión general del ciclo del carbono de la NASA describe los ciclos rápido y lento que representan estos compartimentos.

En Saving Planets: Centro de Océanos

Fuentes: NASA Earth Observatory: The Carbon Cycle (https://earthobservatory.nasa.gov/features/CarbonCycle) · NOAA Global Monitoring Laboratory: Trends in atmospheric CO_2 (https://gml.noaa.gov/ccgg/trends/)

Recursos de aprendizaje gratuitos

- Lebl, 3.1 Introduction to systems (https://www.jirka.org/diffyqs/html/sec_introtosys.html): Sistemas.
- Lebl, 3.4 Eigenvalue method (https://www.jirka.org/diffyqs/html/eigenmethod_section.html): Valores propios.
- Lebl, 3.5 Two-dimensional systems and their vector fields (https://www.jirka.org/diffyqs/html/sec_twodimaut.html): Retratos de fase.

☐ **Terminé esta unidad**

UNIDAD 7 · SEMANAS 11–12

Sistemas no lineales y estabilidad

Equilibrios de sistemas no lineales, linealización con el jacobiano, ciclos depredador-presa y el modelo epidémico SIR.

Objetivos de aprendizaje

Al terminar esta unidad podrás:

- Hallar los equilibrios de sistemas no lineales.
- Linealizar con el jacobiano y clasificar los equilibrios.
- Analizar el modelo depredador-presa de Lotka–Volterra.
- Usar el modelo SIR: R_0, umbral de inmunidad colectiva y tamaño final.

Conceptos clave

- Cerca de un equilibrio, un sistema no lineal se comporta como su linealización x' = J x, donde J es el jacobiano (salvo que la linealización sea un centro).
- Lotka–Volterra: presas x' = ax − bxy, depredadores y' = −cy + dxy. El equilibrio es (c/d, a/b); las poblaciones giran a su alrededor.
- SIR: S' = −βSI, I' = βSI − γI, R' = γI. El número reproductivo básico es $R_0 = \beta/\gamma$; un brote solo crece si $R_0 S > 1$.
- El umbral de inmunidad colectiva es $1 - 1/R_0$; la fracción final no infectada s_∞ cumple $\ln s_\infty = R_0(s_\infty - 1)$.

Ecuaciones clave

$$J = \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix}$$

`J=_x&f_y\_x&g_y`

Jacobiano

$$x' = ax - bxy,\ y' = -cy + dxy$$

`x'=ax-bxy,\ y'=-cy+dxy`

Lotka–Volterra

$$S' = -\beta SI,\ I' = \beta SI - \gamma I,\ R' = \gamma I$$

`S'=-β SI,\ I'=β SI-γ I,\ R'=γ I`

Modelo SIR

$$R_0 = \beta/\gamma,\ \ln s_\infty = R_0(s_\infty - 1)$$

`R_0=β/γ,\ s_∞=R_0(s_∞-1)`

Número reproductivo y tamaño final

Ejemplos resueltos paso a paso

Ejemplo 7.1 Presas y depredadores siguen x' = x − 0.02xy, y' = −0.5y + 0.005xy (valores de ejemplo, años). Halla el equilibrio de coexistencia y el periodo de los ciclos pequeños.

1. x' = 0 requiere y = 1/0.02 = 50; y' = 0 requiere x = 0.5/0.005 = 100.
2. Allí el jacobiano tiene valores propios ±i√(ac) = ±i√0.5.
3. Periodo 2π/√0.5.

Respuesta: 100 presas y 50 depredadores; los ciclos pequeños duran unos 8.9 años, con los depredadores retrasados respecto a las presas.

Ejemplo 7.2 Una epidemia tiene β = 0.3 por día y γ = 0.1 por día. Halla R_0, el umbral de inmunidad colectiva y la fracción final de infectados.

1. R_0 = 3.
2. Umbral 1 − 1/3 = 0.667.
3. Itera s = e^(3(s − 1)): s∞ = 0.0595.

Respuesta: R_0 = 3; una inmunidad del 67 % detiene el crecimiento; sin intervención, alrededor del 94 % acaba infectado, más que el umbral porque la epidemia lo sobrepasa.

Ejemplo 7.3 Clasifica el equilibrio P = K del crecimiento logístico P' = rP(1 − P/K).

1. f'(P) = r − 2rP/K; f'(K) = −r < 0.

Respuesta: Estable: las pequeñas perturbaciones decaen a tasa r.

Problemas de práctica

Resuelve cada uno primero en papel y luego comprueba.

1. Halla los equilibrios de x' = x(3 − x − y), y' = y(2 − x − y).

   (0, 0), (3, 0), (0, 2) (ninguno interior: las rectas x + y = 3 y x + y = 2 son paralelas).

2. Linealiza $x' = \sin x$ cerca de $x = 0$ y $x = \pi$.

   $f'(0) = 1$ (inestable), $f'(\pi) = -1$ (estable).

3. Si $R_0 = 2$, ¿cuál es el umbral de inmunidad colectiva?

   $1 - 1/2 = 50\%$.

4. En el ejemplo depredador-presa, ¿qué les pasa a las presas si se eliminan los depredadores?

   $x' = x$: crecimiento exponencial (hasta que actúen otros límites).

Ideas erróneas comunes

Mito: La linealización siempre predice el comportamiento.

En realidad: No cuando da un centro; deciden los términos no lineales.

Mito: La inmunidad colectiva significa que la epidemia se detiene de inmediato.

En realidad: Las infecciones disminuyen tras el umbral, pero aún pueden sobrepasarlo.

Mito: Los ciclos depredador-presa significan que el modelo es inestable.

En realidad: Las órbitas de Lotka–Volterra son cerradas: neutralmente estables, ni crecen ni se reducen.

Tarjetas de estudio

Jacobiano

Matriz de primeras derivadas parciales.

Linealización

$x' \approx J\,x$ cerca de un equilibrio.

Lotka–Volterra

Ciclos depredador-presa alrededor de $(c/d, a/b)$.

SIR

Susceptibles, infectados, recuperados.

R_0

β/γ, nuevas infecciones por caso.

Umbral de inmunidad colectiva

$1 - 1/R_0$.

Cuestionario de autoevaluación

1. $R_0 = \beta/\gamma = 4$ da un umbral de...

25%

50%

75%

100%

75%. 1 − 1/4.

2. El nivel de presas en el equilibrio de Lotka–Volterra es…

a/b

c/d

b/a

d/c

c/d. y' = 0 requiere x = c/d.

3. La linealización usa…

el hessiano

el jacobiano

el laplaciano

la traza

el jacobiano. Primeras derivadas parciales.

4. Una epidemia crece al principio si…

$R_0 S > 1$

$R_0 < 1$

$\gamma > \beta$

$I = 0$

$R_0S > 1$. $I' = (\beta S - \gamma)I$.

Repetir este cuestionario

Cómo ayuda esto a salvar el planeta

En Isle Royale, en el lago Superior, el National Park Service registra el número de lobos y alces desde 1980, una larga serie depredador-presa. Sus altibajos enlazados, y la decisión del Park Service de trasladar nuevos lobos a la isla, son exactamente el tipo de sistema que los modelos de Lotka–Volterra empiezan a explicar.

Las mismas matemáticas SIR que guían la respuesta de salud pública se usan para enfermedades de la fauna que amenazan los ecosistemas.

En Saving Planets: Centro de Océanos

Fuentes: National Park Service: Wolves of Isle Royale (https://www.nps.gov/isro/learn/nature/wolves.htm) · Wolves and Moose of Isle Royale project (long-term data) (https://www.isleroyalewolf.org/)

Recursos de aprendizaje gratuitos

- Lebl, 8.1 Linearization, critical points and equilibria (https://www.jirka.org/diffyqs/html/linearization_section.html): Linealización.
- Lebl, 8.2 Stability and classification (https://www.jirka.org/diffyqs/html/nlinstability_section.html): Estabilidad.
- Lebl, 8.3 Applications of nonlinear systems (https://www.jirka.org/diffyqs/html/nlinapps_section.html): Depredador-presa y más.

Ver la clase

The Relation Between Nonlinear Systems and First-order ODE's (https://ocw.mit.edu/courses/18-03sc-differential-equations-fall-2011/resources/the-relation-between-nonlinear-systems-and-first-order-odes/) (en inglés)

MIT 18.03SC Differential Equations (Fall 2011), MIT OpenCourseWare. Licencia: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Condiciones de uso (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Enlace solo para estudio gratuito; Saving Planets no está afiliado a esta universidad ni cuenta con su respaldo.

☐ **Terminé esta unidad**

Métodos numéricos

Métodos de Euler, Euler mejorado y Runge–Kutta, tamaño de paso y error, y un modelo climático de balance energético resuelto numéricamente.

Objetivos de aprendizaje

Al terminar esta unidad podrás:

- Aplicar Euler, Euler mejorado (Heun) y RK4.
- Explicar el orden de un método y cómo escala el error con el tamaño de paso.
- Resolver sistemas numéricamente.
- Construir y resolver un modelo climático de balance energético de dimensión cero.

Conceptos clave

- Euler avanza siguiendo la pendiente: y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n). Su error global es proporcional a h.
- Euler mejorado promedia dos pendientes (error ∝ h²); RK4 promedia cuatro (error ∝ h⁴).
- Reducir h a la mitad divide el error de RK4 unas 16 veces, por eso es el método de batalla.
- Balance energético: C dT/dt = luz solar absorbida − εσT⁴. Su equilibrio y su escala de tiempo salen directamente de la ecuación.

Ecuaciones clave

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$$

`y_n+1=y_n+hf(t_n,y_n)`

Método de Euler

$$y_{n+1} = y_n + \tfrac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

`y_n+1=y_n+ h6(k_1+2k_2+2k_3+k_4)`

Runge–Kutta 4

$$C\frac{dT}{dt} = S(1-\alpha) - \varepsilon\sigma T^4$$

`CdT/dt=S(1-α)-σ T^4`

Modelo de balance energético

$$\lambda = 4\varepsilon\sigma T^3,\ \tau = C/\lambda$$

=4σ T^3,\ τ=C/

Retroalimentación linealizada y escala de tiempo

Ejemplos resueltos paso a paso

Ejemplo 8.1 Aproxima y(1) para y' = y, y(0) = 1 con h = 0.1 usando Euler, Euler mejorado y RK4.

1. Cada paso de Euler multiplica por 1.1: $1.1^{10} = 2.5937$.
2. Euler mejorado multiplica por 1.105: 2.7141.
3. RK4 multiplica por 1.1051708: 2.7182797.

Respuesta: Valor real e = 2.7182818. Errores: 0.12, 0.0042 y 0.000002.

Ejemplo 8.2 La Tierra absorbe 340 × (1 − 0.29) = 241.4 W/m² de luz solar (NASA). Si radiara como un cuerpo negro (ε = 1), ¿qué temperatura la equilibraría? ¿Qué ε efectiva da el promedio actual de unos 288 K?

1. $\sigma T^4 = 241.4$ da $T = (241.4/5.67 \times 10^{-8})\wedge(1/4) = 255$ K.
2. $\varepsilon = 241.4/(\sigma \times 288^4) = 0.619$.

Respuesta: 255 K (−18 °C) sin efecto invernadero; una emisividad efectiva de 0.62 representa el efecto invernadero que mantiene habitable la Tierra.

Ejemplo 8.3 Con ε = 0.619 a 288 K y una capa de mezcla oceánica de 50 m (C = 1000 × 4186 × 50 J/(m²·K); profundidad de ejemplo), halla λ, la escala de tiempo y el calentamiento sin retroalimentación para un forzamiento de 4 W/m² (valor de ejemplo).

1. $\lambda = 4\varepsilon\sigma T^3 = 3.35$ W/(m²·K).
2. $\tau = C/\lambda = 6.24 \times 10^7$ s ≈ 1.98 años (unos 2).
3. $\Delta T = 4/3.35$.

Respuesta: Alrededor de 1.2 K de calentamiento, alcanzado en una escala de 2 años en este modelo simple. Las retroalimentaciones reales (vapor de agua, hielo) hacen mayor el calentamiento, según evalúa el IPCC.

Problemas de práctica

Resuelve cada uno primero en papel y luego comprueba.

1. Un paso de Euler para y' = t + y, y(0) = 1, h = 0.1.

$y_1 = 1 + 0.1(0 + 1) = 1.1$.

2. Si el error de Euler es 0.12 con h = 0.1, estímalo con h = 0.05.

   Alrededor de 0.06 (primer orden).

3. Si el error de RK4 es 2×10^{-6} con h = 0.1, estímalo con h = 0.05.

   Alrededor de $2 \times 10^{-6}/16 \approx 1.3 \times 10^{-7}$.

4. ¿Qué temperatura de equilibrio da el modelo de balance energético con $\varepsilon = 1$ y albedo 0.29?

   Alrededor de 255 K.

Ideas erróneas comunes

Mito: Los pasos más pequeños siempre son mejores.

En realidad: El redondeo y el coste crecen; un método de orden superior suele ser mejor que pasos de Euler diminutos.

Mito: Una respuesta numérica es exacta si el código se ejecuta.

En realidad: Comprueba siempre la convergencia reduciendo h a la mitad.

Mito: El resultado de 255 K significa que el modelo está mal.

En realidad: Muestra cuánto calienta el efecto invernadero a la Tierra: unos 33 K.

Tarjetas de estudio

Método de Euler

$y + h f$.

Euler mejorado

Promedio de dos pendientes; orden 2.

RK4

Cuatro pendientes; orden 4.

Tamaño de paso

h; comprueba la convergencia reduciéndolo a la mitad.

Modelo de balance energético

$C T' = S(1 - \alpha) - \varepsilon\sigma T^4$.

Escala de tiempo climática

$\tau = C/\lambda$.

Cuestionario de autoevaluación

1. El método de Euler tiene un error global proporcional a...

h

h^2

h^4

1/h

h. Primer orden.

2. RK4 es de orden...

1

2

4

8

4. Error $\propto h^4$.

3. Sin efecto invernadero, la Tierra tendría un promedio de unos...

288 K

255 K

273 K

300 K

255 K. $\sigma T^4 = 241$ W/m².

4. Reducir h a la mitad en RK4 reduce el error aproximadamente...

2

4

16

32

16. 2^4.

Repetir este cuestionario

Cómo ayuda esto a salvar el planeta

Todo modelo climático, desde este balance energético de una línea hasta los modelos globales que evalúa el IPCC, es un sistema de ecuaciones diferenciales resuelto numéricamente. El balance energético de la NASA da los datos: llegan en promedio 340 W/m² de luz solar y se refleja el 29%.

En Saving Planets: Introducción a la programación, unidad de simulación

Fuentes: NASA Earth Observatory: Climate and Earth's Energy Budget (https://earthobservatory.nasa.gov/features/EnergyBalance) · IPCC AR6 Working Group I: The Physical Science Basis (https://www.ipcc.ch/report/ar6/wg1/)

Recursos de aprendizaje gratuitos

- Lebl, 1.7 Numerical methods: Euler's method (https://www.jirka.org/diffyqs/html/numer_section.html): Euler y el error.
- Trench, Ch. 3: Numerical methods (https://digitalcommons.trinity.edu/mono/8/): Euler mejorado y RK4.

☐ **Terminé esta unidad**

Soluciones en series, series de Fourier y la ecuación del calor

Soluciones en series de potencias de EDO, series de Fourier de funciones periódicas y separación de variables para la ecuación del calor.

Objetivos de aprendizaje

Al terminar esta unidad podrás:

- Hallar soluciones en series de potencias a partir de una recurrencia.
- Calcular coeficientes de Fourier de funciones periódicas sencillas.
- Resolver la ecuación del calor en una varilla por separación de variables.
- Estimar a qué profundidad llegan en el suelo las ondas estacionales de temperatura.

Conceptos clave

- Sustituir y = Σaₙxⁿ, igualar potencias y obtener una recurrencia para los coeficientes.
- Una función periódica es una suma de senos y cosenos; para una función impar en (−π, π), bₙ = (2/π)∫₀^π f sin nx dx.
- La ecuación del calor u_t = α u_xx difunde el calor; cada modo seno decae como e^(−α(nπ/L)²t), primero los modos rápidos.
- Una temperatura superficial periódica penetra en el suelo con profundidad de amortiguamiento d = √(2α/ω).

Ecuaciones clave

$$y = \sum a_n x^n$$

`y= a_nx^n`

Solución en serie de potencias

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

`b_n=2π_0^π f(x) nx dx`

Coeficiente de Fourier en senos

$$u_t = \alpha u_{xx}$$

`u_t=α u_xx`

Ecuación del calor

$$d = \sqrt{2\alpha/\omega}$$

Profundidad de amortiguamiento de una onda de temperatura periódica

Ejemplos resueltos paso a paso

Ejemplo 9.1 Resuelve y'' + y = 0 por series de potencias.

1. $\Sigma(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \Sigma a_n x^n = 0$.
2. $a_{n+2} = -a_n/((n+2)(n+1))$.
3. Los términos pares forman cos x, los impares sin x.

Respuesta: $y = a_0 \cos x + a_1 \sin x$, recuperada de la recurrencia.

Ejemplo 9.2 Halla la serie de Fourier de la onda cuadrada f = 1 en (0, π), −1 en (−π, 0).

1. Impar, así que solo senos: $b_n = (2/\pi)\int_0^{\pi} \sin nx\, dx = (2/(n\pi))(1 - \cos n\pi)$.
2. $b_n = 4/(n\pi)$ para n impar, 0 para n par.

Respuesta: $f = (4/\pi)(\sin x + \sin 3x/3 + \sin 5x/5 + \ldots)$; $b_1 \approx 1.273$.

Ejemplo 9.3 Un suelo con difusividad $\alpha = 5 \times 10^{-7}$ m²/s (valor de ejemplo) experimenta un ciclo anual de temperatura en la superficie. Halla la profundidad de amortiguamiento.

1. $\omega = 2\pi/(3.156 \times 10^7 \text{ s}) = 1.99 \times 10^{-7} \text{ s}^{-1}$.
2. $d = \sqrt{(2 \times 5 \times 10^{-7}/1.99 \times 10^{-7})}$.

Respuesta: Unos 2.24 m: la oscilación anual se reduce en un factor e por cada 2.2 m de profundidad, así que el suelo profundo responde al calentamiento lentamente, a lo largo de muchos años.

Problemas de práctica

Resuelve cada uno primero en papel y luego comprueba.

1. Halla la recurrencia para y' = y por series de potencias.

   $a_{n+1} = a_n/(n+1)$, así que $y = a_0 e^x$.

2. ¿f(x) = x² es par o impar? ¿Qué términos de Fourier aparecen?

Par: solo cosenos (más una constante).

3. Un modo de la varilla decae como e^(−α(π/L)²t). ¿Cómo cambia su tiempo de decaimiento al duplicar L?

   Multiplica el tiempo de decaimiento por 4.

4. Halla b_3 para la onda cuadrada.

   $4/(3\pi) \approx 0.424$.

Ideas erróneas comunes

Mito: Las series de Fourier solo funcionan para funciones suaves.

En realidad: También funcionan con saltos, convergiendo al punto medio del salto.

Mito: El calor se difunde a velocidad fija.

En realidad: El tiempo de difusión crece con el cuadrado de la distancia.

Mito: Las soluciones en serie siempre son mejores que las fórmulas.

En realidad: Son más útiles cuando no existe forma cerrada, como en las ecuaciones de Airy o Bessel.

Tarjetas de estudio

Método de series de potencias

Sustituir $\Sigma a_n x^n$; obtener una recurrencia.

Serie de Fourier

Suma de senos y cosenos.

Coeficiente de Fourier

$b_n = (2/\pi)\int_0^\pi f \sin nx\, dx$.

Ecuación del calor

$u_t = \alpha u_{xx}$.

Separación de variables

$u = X(x)T(t)$.

Profundidad de amortiguamiento

$\sqrt{(2\alpha/\omega)}$.

Cuestionario de autoevaluación

1. En la ecuación del calor, los modos superiores decaen...

más lento

más rápido

nada

linealmente

más rápido. Tasa $\propto n^2$.

2. La serie de Fourier de una función impar solo tiene...

cosenos

senos

constantes

exponenciales

senos. Las integrales impar × par se anulan.

3. Duplicar el periodo de un ciclo de temperatura superficial cambia la profundidad de amortiguamiento en...

2

$\sqrt{2}$

1/2

4

$\sqrt{2}$. $d \propto 1/\sqrt{\omega}$.

4. b_1 para la onda cuadrada es...

1

$4/\pi$

$2/\pi$

$\pi/4$

4/π. 4/(1·π).

Repetir este cuestionario

Cómo ayuda esto a salvar el planeta

Según la NASA, el permafrost del hemisferio norte contiene unos 1672 mil millones de toneladas de carbono orgánico. Lo rápido que lo alcanza el calentamiento superficial es un problema de la ecuación del calor, y la profundidad de amortiguamiento muestra por qué las capas profundas responden despacio pero siguen respondiendo mucho después de que se calienta la superficie.

En Saving Planets: Cálculo III

Fuentes: NASA Earth Observatory: The Carbon Cycle (https://earthobservatory.nasa.gov/features/CarbonCycle) · Lebl, 4.6 PDEs, separation of variables, and the heat equation (https://www.jirka.org/diffyqs/html/heateq_section.html)

Recursos de aprendizaje gratuitos

- Lebl, 7.1 Power series (https://www.jirka.org/diffyqs/html/powerseries_section.html): Series de potencias.
- Lebl, 7.2 Series solutions of linear second-order ODEs (https://www.jirka.org/diffyqs/html/seriessols_section.html): Soluciones en serie.
- Lebl, 4.2 Trigonometric series (https://www.jirka.org/diffyqs/html/ts_section.html): Series de Fourier.
- Lebl, 4.6 The heat equation (https://www.jirka.org/diffyqs/html/heateq_section.html): Ecuación del calor.

Ver la clase

Convergence of Fourier Series (https://ocw.mit.edu/courses/18-03sc-differential-equations-fall-2011/resources/convergence-of-fourier-series/) (en inglés)

MIT 18.03SC Differential Equations (Fall 2011), MIT OpenCourseWare. Licencia: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Condiciones de uso (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Enlace solo para estudio gratuito; Saving Planets no está afiliado a esta universidad ni cuenta con su respaldo.

☐ **Terminé esta unidad**

Problemas

Estos problemas están dentro de cada unidad. Hazlos en papel y luego abre la respuesta.

1. Ecuaciones de primer orden
   5 problemas
2. Modelado con ecuaciones de primer orden
   4 problemas
3. Ecuaciones lineales de segundo orden y oscilaciones

4 problemas

4. Vibración forzada y resonancia
   4 problemas
5. Transformadas de Laplace
   5 problemas
6. Sistemas lineales, valores propios y planos de fase
   4 problemas
7. Sistemas no lineales y estabilidad
   4 problemas
8. Métodos numéricos
   4 problemas
9. Soluciones en series, series de Fourier y la ecuación del calor
   4 problemas

Laboratorios de computadora

Cuatro prácticas de computadora: una epidemia SIR resuelta con Euler y RK4, un plano de fases depredador-presa, un modelo climático de balance energético y un barrido de frecuencias de un modelo de torre de aerogenerador.

Los parámetros de ejemplo están marcados como tales; cada práctica enlaza a una fuente pública sobre el sistema real.

Referencia de seguridad: Lebl: Notes on Diffy Qs (free textbook) (https://www.jirka.org/diffyqs/)

Práctica A: una epidemia SIR con Euler y RK4

SEMANA 12

Objetivo: Resuelve el modelo SIR numéricamente, halla el pico y compara Euler y RK4 con el tamaño final exacto.

$$S' = -0.3SI,\ I' = 0.3SI - 0.1I,\ R' = 0.1I$$

`S'=-0.3SI,\ I'=0.3SI-0.1I,\ R'=0.1I`

SIR con $R_0 = 3$ (tasas de ejemplo por día)

Procedimiento

1. Empieza con S = 0.999, I = 0.001, R = 0 (fracciones de la población).
2. Ejecuta Euler con h = 1 día y h = 0.1 día hasta el día 160, y luego RK4 con h = 1 día.
3. Registra el R final, el pico de I y cuándo ocurre; compara con la teoría.

Tabla de datos

Método	R final (día 160)
Euler, h = 1	0.9467
Euler, h = 0.1	0.9411
RK4, h = 1	0.9405
Tamaño final exacto (teoría)	0.9405

Valores calculados para tasas de ejemplo; no es un brote real.

Cálculo de ejemplo

1. El pico es de 30.1% de infectados a la vez, cerca del día 38.4; la teoría da I_max = 1 − (1 + ln R_0)/R_0 = 0.300.
2. Euler con h = 1 sobrestima el tamaño final en 0.006; RK4 con el mismo paso coincide con la teoría en 4 cifras.

> **Seguridad**
>
> - Ninguna más allá del uso normal de una computadora.

Alternativa en casa o virtual

- Sirve una hoja de cálculo; Python es más fácil para RK4.

Lebl, 8.3 Applications of nonlinear systems (https://www.jirka.org/diffyqs/html/nlinapps_section.html)

Vínculo con el planeta: La misma estructura de modelo se usa para brotes en personas y en fauna.

- [ ] **Completé este laboratorio (real o virtual)**

Práctica B: el plano de fases depredador-presa

SEMANA 11

Objetivo: Integra el modelo de Lotka–Volterra con RK4 y dibuja la órbita cerrada en el plano de fases.

$$x' = x - 0.02xy, \quad y' = -0.5y + 0.005xy$$

```
x'=x-0.02xy, y'=-0.5y+0.005xy
```

Lotka–Volterra (valores de ejemplo)

Procedimiento

1. Empieza con 150 presas y 50 depredadores.
2. Usa RK4 con un paso pequeño (0.001 años en Python, o 0.01 en una hoja de cálculo) durante 40 años.
3. Dibuja y frente a x y registra el rango de presas y el periodo.

Tabla de datos

Magnitud	Valor
Equilibrio	(100, 50)
Rango de presas	62.6 a 150
Período	8.99 años
Periodo de ciclos pequeños (teoría lineal)	8.89 años

Valores calculados; parámetros de ejemplo.

Cálculo de ejemplo

1. La órbita se cierra: las poblaciones se repiten cada 8.99 años, algo más que los 8.89 años que predice la teoría lineal para ciclos pequeños, porque este ciclo es grande.
2. Los depredadores alcanzan su máximo después de las presas, un desfase que se ve en muchos registros reales.

> **Seguridad**
>
> - Ninguna más allá del uso normal de una computadora.

Alternativa en casa o virtual

- Desmos puede dibujar el campo de pendientes del plano de fases.

Wolves and Moose of Isle Royale project (long-term data) (https://www.isleroyalewolf.org/)

Vínculo con el planeta: Registros largos como los de lobos y alces de Isle Royale ponen a prueba estos modelos. National Park Service: Wolves of Isle Royale (https://www.nps.gov/isro/learn/nature/wolves.htm)

- [ ] **Completé este laboratorio (real o virtual)**

Práctica C: un modelo climático de balance energético

SEMANA 13

Objetivo: Avanza en el tiempo un modelo climático de una caja tras un forzamiento repentino y halla su escala de tiempo.

$$C\frac{d\Delta T}{dt} = F - \lambda\,\Delta T$$

```
C(dΔ T)/(dt)=F- Δ T
```

Modelo de balance energético linealizado

Procedimiento

1. Usa C = 2.09 × 10⁸ J/(m²·K) (50 m de océano), λ = 3.35 W/(m²·K) de la unidad 8 y un forzamiento repentino F = 4 W/m² (valor de ejemplo).
2. Avanza con Euler en pasos mensuales durante 10 años.
3. Compara con la solución exacta ΔT = (F/λ)(1 − e^(−t/τ)).

Tabla de datos

Año	ΔT (K)
1	0.48
2	0.77
5	1.10
10	1.19

Valores calculados del modelo; sin retroalimentaciones aparte de la radiación.

Cálculo de ejemplo

1. Equilibrio ΔT = F/λ = 1.19 K; τ = C/λ ≈ 2.0 años, así que el calentamiento está completo en un 63% tras 2 años en este modelo.
2. El clima real responde más despacio y se calienta más, porque el calor se mezcla en el océano profundo y las retroalimentaciones lo amplifican.

> **Seguridad**
>
> - Ninguna más allá del uso normal de una computadora.

Alternativa en casa o virtual

- Basta con una hoja de cálculo.

NASA Earth Observatory: Climate and Earth's Energy Budget (https://earthobservatory.nasa.gov/features/EnergyBalance)

Vínculo con el planeta: Los modelos de balance energético son el primer paso hacia las proyecciones climáticas que evalúa el IPCC. IPCC AR6 Working Group I: The Physical Science Basis (https://www.ipcc.ch/report/ar6/wg1/)

☐ **Completé este laboratorio (real o virtual)**

Práctica D: barrido de resonancia de un modelo de torre de aerogenerador

SEMANA 6

Objetivo: Calcula la amplificación dinámica de un modelo de torre de un solo oscilador para distintas frecuencias de excitación.

$$A(f) = \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}},\ r = f / f_0$$

A(f)=1(1-r^2)^2+(2 r)^2,\ r=f/f_0

Amplificación dinámica

Procedimiento

1. Usa f_0 = 0.30 Hz y ζ = 0.01 (valores de ejemplo).
2. Tabula A para frecuencias de excitación de 0.1 a 0.6 Hz.
3. Marca la frecuencia del rotor (0.20 Hz a 12 rpm) y la frecuencia de paso de las palas (0.60 Hz) y evalúa el diseño.

Tabla de datos

Frecuencia de excitación (Hz)	Amplificación
0.10	1.12
0.20	1.80
0.25	3.27
0.30	50.0
0.35	2.76
0.60	0.333

Valores calculados para un modelo de ejemplo, no para una turbina concreta.

Cálculo de ejemplo

1. Ambas frecuencias de operación quedan lejos del pico de 0.30 Hz, donde la respuesta sería 50 veces la deflexión estática.
2. Si el rotor acelerara a 18 rpm (0.30 Hz), excitaría la torre en resonancia; por eso los diseñadores comparan la frecuencia natural con todo el rango de velocidades.

> **Seguridad**

- Ninguna más allá del uso normal de una computadora.

Alternativa en casa o virtual

- Basta con una hoja de cálculo.

PhET: Masses and Springs (https://phet.colorado.edu/en/simulations/masses-and-springs)

Vínculo con el planeta: Evitar la resonancia permite que los aerogeneradores produzcan energía limpia con seguridad durante décadas. DOE de EE. UU.: ¿cómo funcionan los aerogeneradores? (en inglés) (https://www.energy.gov/eere/wind/how-do-wind-turbines-work)

☐ **Completé este laboratorio (real o virtual)**

Series de práctica para exámenes

Cronométrate: unos 10 minutos por problema. Luego compara con las soluciones completas.

Ejercicios de práctica para el parcial (unidades 1–5)

1. Resuelve $y' = -2ty$, $y(0) = 3$, y halla $y(1)$.
    1. $dy/y = -2t\,dt$; $y = 3e^{(-t^2)}$.

    Respuesta: $3e^{(-1)} \approx 1.104$.

2. Un lago con tiempo de retención de 4 años: ¿cuánto tarda un contaminante en bajar a la mitad tras cortar la entrada?
    1. $t = 4 \ln 2$.

    Respuesta: ≈ 2.77 años.

3. Resuelve $y'' + 6y' + 9y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, y halla $y(1)$.
    1. $y = (1 + 3t)e^{(-3t)}$.

    Respuesta: $4e^{(-3)} \approx 0.199$.

4. Resuelve $y' + y = 1$, $y(0) = 0$ por Laplace y halla $y(2)$.
    1. $Y = 1/(s(s + 1)) = 1/s - 1/(s + 1)$.

    Respuesta: $1 - e^{(-2)} \approx 0.865$.

Serie de práctica final (todas las unidades)

1. Clasifica el origen de x' = [[0, 1], [−2, −2]]x.

    1. λ² + 2λ + 2 = 0, λ = −1 ± i.

    Respuesta: Espiral estable.

2. Una epidemia SIR tiene β = 0.5, γ = 0.25 por día. Halla R_0 y el umbral de inmunidad colectiva.

    1. R_0 = 2.

    Respuesta: R_0 = 2, umbral del 50%.

3. Dos pasos de Euler con h = 0.5 para y' = −y, y(0) = 1.

    1. Cada paso multiplica por 0.5.

    Respuesta: y(1) ≈ 0.25 (valor real e^(−1) ≈ 0.368).

4. Un sistema masa-resorte con m = 1 kg, k = 16 N/m, c = 0.4 N·s/m. Halla ω_0 y ζ.

    1. ω_0 = 4 rad/s; c_crit = 8.

    Respuesta: ω_0 = 4 rad/s, ζ = 0.05 (amplificación máxima de unos 10).

Hoja de fórmulas

$$\mu = e^{\int p\,dx}$$

$$M_y = N_x \Rightarrow F = C$$

$$C = C_0 e^{-t/\tau}$$

$$H_{\max} = rK/4$$

$$ar^2 + br + c = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{k/m},\ c_{\text{crit}} = 2\sqrt{mk}$$

$$X = F_0 / \sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}$$

$$\mathcal{L}\{y'\} = sY - y(0)$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = 1/(s - a)$$

$$\mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s)$$

$$\lambda^2 - (\operatorname{tr} A)\lambda + \det A = 0$$

$$R_0 = \beta/\gamma,\ 1 - 1/R_0$$

$$y_{n+1} = y_n + hf$$

$$C\,T' = S(1-\alpha) - \varepsilon\sigma T^4$$

$$u_t = \alpha u_{xx}$$

$$b_n = \tfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f \sin nx\,dx$$

Constantes

Constante	Valor
Constante de Stefan–Boltzmann σ	5.67×10^{-8} W/(m²·K⁴)
Luz solar media en la cima de la atmósfera	340 W/m²
Fracción de luz solar reflejada	29%
Tiempo de retención del lago Superior	191 años
Tiempo de retención del lago Erie	2.6 años
Vida media del metano	alrededor de una década

Fuente: NASA Earth Observatory: Climate and Earth's Energy Budget (https://earthobservatory.nasa.gov/features/EnergyBalance)

Textos y herramientas gratuitos

Usa estos libros y herramientas gratuitos junto con el curso.

- Lebl: Notes on Diffy Qs (https://www.jirka.org/diffyqs/): Libro de texto gratuito y completo para este curso.
- Trench: Elementary Differential Equations (free text) (https://digitalcommons.trinity.edu/mono/8/): Libro gratuito con muchos ejercicios.
- MIT OpenCourseWare 18.03SC Differential Equations (https://ocw.mit.edu/courses/18-03sc-differential-equations-fall-2011/): Clases, sesiones de ejercicios y problemas del MIT, gratis.
- Calculadora gráfica Desmos (https://www.desmos.com/calculator): Grafica soluciones y campos de pendientes.
- PhET: Masses and Springs (https://phet.colorado.edu/en/simulations/masses-and-springs): Intuición sobre amortiguamiento y oscilación.

Glosario

Ecuación autónoma
y' = f(y), sin t explícito.

Ecuación característica
$ar^2 + br + c = 0$ para EDO de coeficientes constantes.

Amortiguamiento crítico
Retorno más rápido sin sobrepaso.

Valor propio
λ con $Av = \lambda v$.

Modelo de balance energético

Modelo climático que equilibra la luz solar absorbida y el calor emitido.

Equilibrio
Solución constante.

Método de Euler
Avance numérico de primer orden.

Ecuación exacta
M dx + N dy = 0 con M_y = N_x.

Serie de Fourier
Desarrollo en senos y cosenos.

Ecuación del calor
u_t = α u_xx.

Factor integrante
Multiplicador que hace exacta una EDO lineal.

Jacobiano
Matriz de primeras derivadas parciales usada para linealizar.

Transformada de Laplace
$\int_0^{\infty} e^{(-st)} f\, dt$.

Lotka–Volterra
Modelo depredador-presa.

Retrato de fase
Trayectorias en el plano de estados.

Resonancia
Gran respuesta cuando la excitación coincide con una frecuencia natural.

Runge–Kutta (RK4)
Método numérico de cuarto orden.

R_0
Número reproductivo básico.

Modelo SIR
Modelo epidémico susceptibles–infectados–recuperados.

Ecuación separable
dy/dx = g(x)h(y).

Rúbrica de autoevaluación

No se otorga nota ni crédito. Úsala para valorar con honestidad dónde estás en cada unidad.

Nivel	Cómo se ve
4 · Dominio	Construye modelos a partir de una descripción, los resuelve por fórmula y numéricamente, y comprueba unidades y comportamiento a largo plazo.
3 · Competente	Resuelve los problemas de práctica con algún error ocasional.
2 · En desarrollo	Sigue los ejemplos resueltos pero le cuesta plantear modelos o elegir un método.
1 · Inicial	Aplica fórmulas sin comprobar soluciones; debe repasar la unidad.

Ponderación sugerida si quieres una nota

Parte	Peso
Problemas de práctica	30%
Laboratorios de computadora	15%
Serie de práctica de mitad de curso	25%
Serie de práctica final	30%

Apunta al nivel 3 o superior en cada unidad antes de pasar al siguiente curso.

Cursos relacionados

- Cálculo III MATH 210
- Física II PHYS 210 + PHYS 210L
- Estática ENGR 211
- Todos los cursos