آخر تحديث: November 1, 2026

🗺️ خريطة طريق لأربع سنوات · السنة 2, الربيع

عن هذه الدورة

يتضمن هذا المقرر المجاني 9 وحدات و4 مختبرات. هذه الأعداد الحقيقية وليست منهجًا أطول جرى اختصاره.

التحقق هو رقم أو نتيجة برمجية في صفحة مقرر يعيد سكربت حسابها قبل النشر. يجب أن يطابق الرقم المعروض الرقم المعاد حسابه.

هذا مخطط دورة مجانية للتعلّم الذاتي كتبته Saving Planets. وهو ليس مقررًا جامعيًا، ولا يمنح ساعات معتمدة، ولا تشارك فيه أي مؤسسة تعليمية.

يتبع نطاقه مقررًا في المعادلات التفاضلية العادية للسنة الثانية، على غرار موضوعات وعمق MIT OpenCourseWare 18.03 والكتب المجانية لـ Jiří Lebl (Notes on Diffy Qs) وWilliam Trench، وعلى مناهج مقررات مثل Georgia Tech MATH 2552 وStanford Math 53. نضع روابط للمواد المجانية في كل أجزاء المقرر. ولا يتبنى أي من أولئك المؤلفين أو المؤسسات هذه الصفحة.

ما نضيفه: كل وحدة ترتبط بمسألة حقيقية عن الكوكب مع مصدر عام موثّق (البحيرات، والميثان، ومصايد الأسماك، والكربون، والمناخ، والأوبئة، وتوربينات الرياح)، وكل رقم في الصفحة يُعاد حسابه بنص تحقق برمجي قبل النشر، وأربعة مختبرات حاسوبية تحل نماذج حقيقية عدديًا.

تابعها بالترتيب. في كل وحدة أهداف وأفكار أساسية ومعادلات وأمثلة خطوة بخطوة وتمارين بإجابات كاملة وأخطاء شائعة وبطاقات تعليمية واختبار قصير. يُحفظ تقدّمك في هذا المتصفح فقط.

كيف تساعد هذه الدورة في إنقاذ الكوكب

يكاد كل نموذج للكوكب الحي يكون معادلة تفاضلية: مدى سرعة تخلص بحيرة من ملوث، وكيف يتعافى مخزون سمكي، وكيف ينتقل الكربون بين الهواء والبحر، ومدى سرعة احترار الأرض عندما يتغير توازن طاقتها، وكيف ينتشر وباء، وكيف يتمايل برج توربين رياح.

تنتهي كل وحدة بقسم قصير موثّق يبين كيف تساعد أفكارها الناس والطبيعة معًا. وتُوسم معاملات النماذج التي لا تأتي من مصدر بأنها قيم نموذجية.

للمعلمين

يمكنك تدريس هذا المقرر، أو أن يتابعه الطالب وحده. إنه مجاني. Saving Planets لا تمنح درجة ولا ساعات معتمدة.

- هذه الصفحة هي المقرر كاملًا: 9 وحدات و4 مختبرات (MATH 220).
- خطّط لخمسة عشر أسبوعًا، نحو 6 إلى 9 ساعات في الأسبوع، بما في ذلك أسابيع المختبر.

- اتبع جدول الخمسة عشر أسبوعًا. اقرأ الوحدة، حلّ التمارين على الورق، ثم افتح الإجابة. في أسبوع المختبر، نفّذ المختبر أو نسخته المنزلية.
- التحقق هو رقم أو نتيجة برمجية في الصفحة يعيد سكربت حسابها قبل النشر. يجب أن يطابق الرقم الظاهر الرقم المعاد حسابه.
- استخدم طباعة هذه الصفحة، أو نزّل دليل الدراسة PDF. ورقة القوانين قرب النهاية.
- اسأل: كيف تساعد هذه الوحدة الناس والكوكب؟ في كل وحدة مربع أخضر فيه حقيقة مع مصدرها.
- انسخ نموذج دليل المعلم واكتب اسم صفك والوقت المتاح والأسئلة التي ستطرحها. افتح نموذج دليل المعلم

قبل أن تبدأ

المتطلبات السابقة

- التفاضل والتكامل I وII: المشتقات، والتكاملات، والكسور الجزئية، ومتسلسلات تايلور.
- المصفوفات والمحددات والقيم الذاتية لمصفوفات 2 × 2 (تُدرَّس باختصار في الوحدة 6).
- يساعد التفاضل والتكامل III في معادلة الحرارة لكنه ليس مطلوبًا.

كيف تذاكر

- تحقق من كل حل بالتعويض به مرة أخرى في المعادلة.
- حلّ كل تمرين على الورق قبل فتح الإجابة.
- ارسم حقل ميول أو صورة طور قبل الحل؛ واعرف كيف ينبغي أن تبدو الإجابة.
- اسأل عن كل نموذج: ما الوحدات، وهل للسلوك على المدى البعيد معنى؟
- حل أيضًا مسألة من كل وحدة عدديًا، وقارن بالصيغة.
- أعد الاختبارات القصيرة بعد بضعة أيام. التدرّب المتباعد أفضل من جلسة طويلة واحدة.

ماذا تحتاج

- حاسوب أو جهاز لوحي مع جدول بيانات.
- آلة حاسبة بيانية مجانية مثل Desmos.
- اختياري: بايثون مع NumPy (مجانًا في Google Colab).

جدول مقترح من 15 أسبوعًا

نحو 6 إلى 9 ساعات أسبوعيًا: قراءة وتمارين، وفي أسابيع المختبر، المختبر.

الأسبوع	الوحدة	الموضوعات	القراءة
1	معادلات الرتبة الأولى	حقول الميول؛ المعادلات القابلة للفصل	Lebl 1.1–1.3
2	معادلات الرتبة الأولى	المعادلات الخطية والتامة؛ الوجود والوحدانية	Lebl 1.2, 1.4, 1.8
3	النمذجة بمعادلات الرتبة الأولى	النمذجة: الخلط، والاضمحلال، والنمو اللوجستي، والحصاد	Lebl 1.6
4	المعادلات الخطية من الرتبة الثانية والاهتزازات	المعادلات الخطية من الرتبة الثانية؛ المعادلة المميزة	Lebl 2.1–2.2

الأسبوع	الوحدة	الموضوعات	القراءة
5	المعادلات الخطية من الرتبة الثانية والاهتزازات	الاهتزازات الميكانيكية والتخميد	Lebl 2.4
6	الاهتزاز القسري والرنين	المعاملات غير المحددة؛ الاهتزاز القسري والرنين؛ المختبر D	Lebl 2.5–2.6
7	تحويلات لابلاس	تحويلات لابلاس؛ حل مسائل القيم الابتدائية	Lebl 6.1–6.2
8	تحويلات لابلاس	الدوال الدرجية، والنبضات، والالتفاف؛ تمارين لاختبار منتصف الفصل	Lebl 6.3–6.4
9	الأنظمة الخطية والقيم الذاتية ومستويات الطور	الأنظمة؛ المصفوفات والقيم الذاتية	Lebl 3.1–3.4
10	الأنظمة الخطية والقيم الذاتية ومستويات الطور	صور الطور والتصنيف	Lebl 3.5
11	الأنظمة غير الخطية والاستقرار	الأنظمة غير الخطية، والتخطيط الخطي؛ المفترس والفريسة؛ المختبر B	Lebl 8.1–8.3
12	الأنظمة غير الخطية والاستقرار	الاستقرار؛ أوبئة SIR؛ المختبر A	Lebl 8.2–8.3
13	الطرق العددية	الطرق العددية؛ نموذج توازن الطاقة؛ المختبر C	Lebl 1.7, Trench 3
14	الحلول بالمتسلسلات ومتسلسلات فورييه ومعادلة الحرارة	الحلول بالمتسلسلات؛ متسلسلات فورييه؛ معادلة الحرارة	Lebl 7.1–7.2, 4.2, 4.6
15	المراجعة	مراجعة ومجموعة تمارين نهائية	كل الوحدات

تقدّمك

ضع علامة على الوحدات والمختبرات عند إنهائها، وخض الاختبارات. يُحفظ التقدم ونتائج الاختبارات في هذا المتصفح فقط، ولا تُرسل إلينا أبدًا.

الوحدات

معادلات الرتبة الأولى

حقول الميول، والمعادلات القابلة للفصل، والمعادلات الخطية بعوامل التكامل، والمعادلات التامة، ومتى يوجد الحل ويكون وحيدًا.

أهداف التعلّم

في نهاية هذه الوحدة ستستطيع أن:

- اقرأ حقل ميول وارسم الحلول.
- حل معادلات الرتبة الأولى القابلة للفصل والخطية.
- تعرّف على المعادلات التامة وحلها.
- اذكر مبرهنة الوجود والوحدانية ولاحظ متى تفشل.

المفاهيم الأساسية

- تربط المعادلة التفاضلية دالة مجهولة بمشتقاتها؛ والحل دالة تجعلها صحيحة.
- القابلة للفصل: dy/dx = g(x)h(y). اقسم وكامل الطرفين.
- الخطية: y' + p(x)y = q(x). اضرب في عامل التكامل μ = e^(∫p dx) ليصبح الطرف الأيسر '(μy).
- التامة: M dx + N dy = 0 مع M_y = N_x هي dF = 0، إذن F(x, y) = C.
- إذا كانت f و∂f/∂y متصلتين قرب (x₀, y₀)، فإن y' = f(x, y)، y(x₀) = y₀ لها حل واحد بالضبط في الجوار. ومع ذلك قد تنفجر الحلول في زمن محدود.

المعادلات الأساسية

$$\frac{dy}{h(y)} = g(x)\,dx$$

(dy)/(h(y))=g(x) dx

معادلة قابلة للفصل

$$\mu = e^{\int p\,dx}, \quad (\mu y)' = \mu q$$

μ=e^ p dx,(μ y)'=μ q

عامل التكامل

$$M_y = N_x \Rightarrow F(x,y) = C$$

M_y=N_x F(x,y)=C

المعادلة التامة

$$y' = f(x,y),\ y(x_0) = y_0$$

$y'=f(x,y),\ y(x_0)=y_0$

مسألة القيمة الابتدائية

أمثلة محلولة خطوة بخطوة

مثال 1.1 حل $dy/dx = xy$، $y(0) = 2$، وأوجد $y(1)$.

1. $dy/y = x\,dx$، إذن $\ln|y| = x^2/2 + C$.
2. $y = 2e^{(x^2/2)}$.
3. $y(1) = 2e^{0.5}$.

الإجابة: ≈ 3.297.

مثال 1.2 حل $y' + 2y = 4$، $y(0) = 0$، وأوجد $y(1)$.

1. $\mu = e^{2t}$، إذن $(e^{2t}y)' = 4e^{2t}$.
2. $e^{2t}y = 2e^{2t} + C$؛ و$y(0) = 0$ تعطي $C = -2$.
3. $y = 2(1 - e^{-2t})$.

الإجابة: $y(1) \approx 1.729$، مقتربًا من الحالة المستقرة 2.

مثال 1.3 حل $2xy\,dx + (x^2 + 2y)\,dy = 0$ مع $y(0) = 1$، وأوجد y عندما $x = 1$.

1. $M_y = 2x = N_x$: تامة.
2. $F = x^2y + y^2$; $F(0, 1) = 1$.
3. عند $x = 1$: $y + y^2 = 1$، إذن $y = (-1 + \sqrt{5})/2$.

الإجابة: ≈ 0.618.

تمارين

حلّ كلًّا منها على الورق أولًا، ثم تحقق.

1. حل $y' = y^2$، $y(0) = 1$. أين يوجد الحل؟

   $y = 1/(1 - t)$؛ ينفجر عند $t = 1$، مع أن y^2 ملساء في كل مكان.

2. حل $t\,y' + y = t^2$ عندما $t > 0$.

   $(ty)' = t^2$، إذن $y = t^2/3 + C/t$.

3. حل $y' = -y/t$.

$y = y_0 e^{(-t/\tau)}$.

4. هل $(y \cos x)\,dx + (\sin x + 2y)\,dy = 0$ تامة؟ حلها.

$M_y = \cos x = N_x$؛ $F = y \sin x + y^2 = C$.

5. هل لـ $y' = \sqrt{y}$، $y(0) = 0$ حل وحيد؟

لا: $y = 0$ و$y = t^2/4$ كلاهما يصلح؛ و$\partial f/\partial y = 1/(2\sqrt{y})$ غير متصلة عند $y = 0$.

مفاهيم خاطئة شائعة

خرافة: كل معادلة من الرتبة الأولى قابلة للفصل.
في الحقيقة: $y' = x + y$ ليست كذلك؛ إنها خطية.

خرافة: لا بأس بنسيان $+C$ حتى النهاية.
في الحقيقة: أضف C عند التكامل، قبل حل y، وإلا جاء الشرط الابتدائي خاطئًا.

خرافة: الطرف الأيمن الأملس يعني أن الحل يعيش إلى الأبد.
في الحقيقة: $y' = y^2$ تنفجر في زمن محدود.

بطاقات تعليمية

قابلة للفصل

$dy/dx = g(x)h(y)$.

الخطية من الرتبة الأولى

$y' + p\,y = q$.

عامل التكامل

$\mu = e^{(\int p\,dx)}$.

التامة

$M_y = N_x$; $F = C$.

مسألة القيمة الابتدائية

معادلة تفاضلية عادية مع $y(x_0) = y_0$.

الوجود والوحدانية

f وf_y متصلتان ⇒ حل محلي واحد.

اختبار ذاتي

1. عامل التكامل لـ $y' + 3y = x$ هو...

$e^{(3x)}$

e^{x}

3x

e^(−3x)

.e^(3x). e^(∫3 dx)

2. تكون M dx + N dy = 0 تامة عندما...

M = N

M_y = N_x

M_x = N_y

MN = 1

M_y = N_x. تتطابق المشتقات المختلطة لـ F.

3. حل y' = ky هو...

$y_0 + kt$

$y_0e^{(kt)}$

kt^2

sin kt

$y_0e^{(kt)}$. قابلة للفصل.

4. قد تفشل الوحدانية عندما...

تكون f خطية

تكون ∂f/∂y غير متصلة

$y_0 = 1$

تكون المعادلة قابلة للفصل

تكون ∂f/∂y غير متصلة. مثلًا y' = √y عند 0.

أعد هذا الاختبار

كيف يساعد هذا في إنقاذ الكوكب

أبسط معادلة من الرتبة الأولى، y' = −y/τ، تصف كيف يزول ملوث من بحيرة جيدة الخلط أو كيف يغادر غاز الغلاف الجوي. ورقمها الوحيد، المقياس الزمني τ، يحدد هل يتلاشى الخطأ في سنوات أم يدوم قرونًا (الوحدة 2).

على Saving Planets: صفحة الأنهار

المصادر: U.S. EPA: Physical features of the Great Lakes (retention times) (https://www.epa.gov/greatlakes/physical-features-great-lakes) · Lebl, 1.4 Linear equations and the integrating factor (https://www.jirka.org/diffyqs/html/intfactor_section.html)

مصادر تعلّم مجانية

- Lebl, 1.3 Separable equations (https://www.jirka.org/diffyqs/html/separable_section.html): قسم من كتاب مدرسي مجاني.
- Lebl, 1.4 Integrating factor (https://www.jirka.org/diffyqs/html/intfactor_section.html): المعادلات الخطية.
- Lebl, 1.8 Exact equations (https://www.jirka.org/diffyqs/html/exact_section.html): المعادلات التامة.
- Lebl, 1.2 Slope fields (https://www.jirka.org/diffyqs/html/slopefields_section.html): الوجود والوحدانية.

شاهد المحاضرة

First Order Autonomous Equations (https://ocw.mit.edu/courses/18-03sc-differential-equations-fall-2011/resources/first-order-autonomous-equations/) (باللغة الإنجليزية)

MIT 18.03SC Differential Equations (Fall 2011), MIT OpenCourseWare. الترخيص: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · شروط الاستخدام (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). الرابط للدراسة المجانية فقط؛ Saving Planets غير تابع لهذه الجامعة ولا يحظى بتأييدها.

أنهيت هذه الوحدة

النمذجة بمعادلات الرتبة الأولى

تحويل موقف إلى معادلة: الخلط وتلوث البحيرات، والاضمحلال والأعمار، وتبريد نيوتن، والنمو اللوجستي، والحصاد، ونقاط التوازن مع استقرارها.

أهداف التعلّم

في نهاية هذه الوحدة ستستطيع أن:

- ابنِ نماذج معدل الدخول ناقص معدل الخروج.
- فسّر الثوابت الزمنية والأعمار.
- أوجد نقاط توازن المعادلات المستقلة وصنّف استقرارها.
- استخدم النموذج اللوجستي مع الحصاد لإيجاد أقصى غلة مستدامة.

المفاهيم الأساسية

- معدل التغير = معدل الدخول − معدل الخروج. اكتب وحدات كل حد.
- البحيرة جيدة الخلط ذات زمن المكوث τ تفقد الملوث بمعدل C/τ متى صار التدفق الداخل نظيفًا.
- لمعادلة مستقلة y' = f(y)، تحقق نقاط التوازن f(y) = 0؛ ويكون التوازن مستقرًا إذا كانت f'(y) < 0.
- النمو اللوجستي P' = rP(1 − P/K) يستقر عند K. ومع حصاد ثابت H، يكون أكبر حصاد مستدام rK/4، عند P = K/2.

المعادلات الأساسية

$$\frac{dx}{dt} = (\text{rate in}) - (\text{rate out})$$

```
dx/dt=(rate in)-(rate out)
```

قانون التوازن

$$C(t) = C_0 e^{-t/\tau}$$

```
C(t)=C_0e^-t/τ
```

التجدد بزمن مكوث τ

$$P' = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right) - H$$

```
P'=rP(1- PK)-H
```

النمو اللوجستي مع الحصاد

$$H_{\max} = \frac{rK}{4}$$

H_=rK/4

أقصى غلة مستدامة

أمثلة محلولة خطوة بخطوة

مثال 2.1 زمن مكوث بحيرة إيري 2.6 سنة وبحيرة سوبيريور 191 سنة (EPA). إذا توقف تدفق ملوث، فكم يلزم حتى ينخفض تركيزه في كل بحيرة إلى 10%، باعتبار كل منهما جيدة الخلط؟

1. $C/C_0 = e^{(-t/\tau)} = 0.1$، إذن $t = \tau \ln 10$.
2. إيري: $2.303 \times 2.6 = 5.99$ سنة.
3. سوبيريور: $2.303 \times 191 = 440$ سنة.

الإجابة: نحو 6 سنوات لإيري لكن نحو 440 لسوبيريور. الوقاية أهم ما تكون حيث يكون التجدد بطيئًا.

مثال 2.2 تقول EPA إن الميثان يبقى نحو عقد في الغلاف الجوي في المتوسط. اعتبر نبضة ميثان تضمحل مع $\tau = 10$ سنوات. ما النسبة المتبقية بعد 30 سنة؟

1. النسبة $= e^{(-30/10)} = e^{(-3)} \approx$.

الإجابة: نحو 5%. لذا يؤتي خفض تسربات الميثان ثماره خلال عقود، بخلاف CO_2 الذي يبقى مدة أطول بكثير.

مثال 2.3 مخزون سمكي يتبع $P' = 0.4P(1 - P/10000) - H$ (أطنان، سنوات؛ قيم نموذجية). أوجد أقصى غلة مستدامة.

1. النمو $rP(1 - P/K)$ أكبر ما يكون عند $P = K/2 = 5000$ t.
2. وهناك يساوي $0.4 \times 10000/4 = rK/4$.

الإجابة: 1000 طن في السنة. والحصاد الأكثر من ذلك يدفع المخزون إلى الانهيار.

تمارين

حلّ كلًّا منها على الورق أولًا، ثم تحقق.

1. قهوة عند 90 °C تبرد في غرفة عند 20 °C وفق $T' = -0.1(T - 20)$ (بالدقائق). أوجد $T(10)$.

   $T = 20 + 70e^{(-1)} \approx 45.8$ °C.

2. خزان سعته 100 L من الماء العذب يتلقى محلولًا ملحيًا تركيزه 0.5 g/L بمعدل 2 L/min ويُصرف بمعدل 2 L/min. أوجد كمية الملح بعد 50 دقيقة.

   $x' = 1 - x/50$, $x = 50(1 - e^{(-t/50)})$; $x(50) = 50(1 - e^{(-1)}) \approx 31.6$ g.

3. أوجد نقاط توازن $y' = y(1 - y)$ وصنّفها.

$y = 0$ ($f' = 1$، غير مستقرة) و$y = 1$ ($f' = -1$، مستقرة).

4. في مثال المصايد، ماذا يحدث إذا كان $H = 1200$ t/yr؟

$rP(1 - P/K) - H < 0$ لكل P، فيتناقص المخزون إلى الصفر.

مفاهيم خاطئة شائعة

خرافة: زمن المكوث هو المدة اللازمة لإزالة كل الملوث.
في الحقيقة: بعد τ واحدة يبقى 37%؛ فالاضمحلال الأسي لا يصل إلى الصفر تمامًا أبدًا.

خرافة: المزيد من جهد الصيد يعني دائمًا صيدًا أكثر.
في الحقيقة: بعد تجاوز أقصى غلة مستدامة، يقلص الحصاد الإضافي المخزون والصيد المستقبلي.

خرافة: التوازن هو دائمًا المكان الذي ينتهي إليه النظام.
في الحقيقة: نقاط التوازن المستقرة وحدها تجذب الحلول القريبة.

بطاقات تعليمية

قانون التوازن

الداخل − الخارج.

الثابت الزمني

τ في $e^{(-t/\tau)}$؛ يكتمل 63% من التغير بعد τ.

زمن المكوث

حجم البحيرة ÷ التدفق الخارج.

التوازن

$f(y^*) = 0$.

اختبار الاستقرار

$f'(y^*) < 0$ مستقرة.

أقصى غلة مستدامة

$rK/4$ عند $P = K/2$.

اختبار ذاتي

1. مع $\tau = 5$ سنوات، تكون النسبة المتبقية بعد 5 سنوات...

0

$e^{(-1)} \approx 0.37$

0.5

0.1

e^(−t/τ) ≈ 0.37. عند t = τ.

2. أقصى غلة مستدامة للنمو اللوجستي هي…

rK

rK/4

K/2

r/K

rK/4. قمة rP(1 − P/K).

3. y* نقطة توازن مستقرة لـ y' = f(y) إذا…

f'(y*) > 0

f'(y*) < 0

f(y*) > 0

y* > 0

f'(y*) < 0. تُدفع الحلول القريبة إلى الرجوع.

4. أي بحيرة تتعافى من التلوث أسرع؟

سوبيريور (191 سنة)

إيري (2.6 سنة)

متساويتان

لا هذه ولا تلك

إيري (2.6 سنة). زمن مكوث أقصر.

أعد هذا الاختبار

كيف يساعد هذا في إنقاذ الكوكب

تذكر EPA أزمنة مكوث للبحيرات العظمى من 2.6 سنة (إيري) إلى 191 سنة (سوبيريور)، ولهذا فإن السموم التي تدخل بحيرة سوبيريور مشكلة تمتد لأجيال.

يقيّم علماء مصايد الأسماك في NOAA المخزونات بنماذج سكانية مبنية على هذه الأفكار؛ وأقصى غلة مستدامة في النموذج اللوجستي هي نقطة الانطلاق الكلاسيكية.

على Saving Planets: محور المحيطات · صفحة الأنهار

المصادر: U.S. EPA: Physical features of the Great Lakes (retention times) (https://www.epa.gov/greatlakes/physical-features-great-lakes) · U.S. EPA: Understanding global warming potentials (https://www.epa.gov/ghgemissions/understanding-global-warming-potentials) · NOAA Fisheries: تقييمات المجموعات السمكية (https://www.fisheries.noaa.gov/topic/population-assessments)

مصادر تعلّم مجانية

- Lebl, 1.6 Autonomous equations (https://www.jirka.org/diffyqs/html/auteq_section.html): نقاط التوازن، والنمو اللوجستي، والحصاد.
- Lebl, 1.4 Integrating factor (https://www.jirka.org/diffyqs/html/intfactor_section.html): مسائل الخلط.
- OpenStax Calculus 2, 4.4 The Logistic Equation (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/4-4-the-logistic-equation): النموذج اللوجستي.

شاهد المحاضرة

First Order Autonomous Equations (https://ocw.mit.edu/courses/18-03sc-differential-equations-fall-2011/resources/first-order-autonomous-equations/) (باللغة الإنجليزية)

MIT 18.03SC Differential Equations (Fall 2011), MIT OpenCourseWare. الترخيص: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · شروط الاستخدام (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). الرابط للدراسة المجانية فقط؛ Saving Planets غير تابع لهذه الجامعة ولا يحظى بتأييدها.

☐ **أنهيت هذه الوحدة**

المعادلات الخطية من الرتبة الثانية والاهتزازات

المعادلات الخطية ذات المعاملات الثابتة، والمعادلة المميزة، والاهتزازات الحرة: غير المخمدة، وناقصة التخميد، وحرجة التخميد، وزائدة التخميد.

أهداف التعلّم

في نهاية هذه الوحدة ستستطيع أن:

- حل ay" + by' + cy = 0 بالمعادلة المميزة.
- تعامل مع الجذور الحقيقية والمكررة والمركبة.
- انمذج أنظمة الكتلة والنابض والمخمِّد.
- صنّف التخميد واحسب التردد الطبيعي والتخميد الحرج.

المفاهيم الأساسية

- جرّب y = e^(rt): ar² + br + c = 0. جذران حقيقيان يعطيان دالتين أسيتين؛ والجذر المكرر يعطي (c₁ + c₂t)e^(rt)؛ والجذران المركبان α ± iβ يعطيان e^(αt)(c₁ cos βt + c₂ sin βt).
- التراكب: مجاميع حلول معادلة خطية متجانسة حلول أيضًا.
- للمعادلة mx" + cx' + kx = 0 تردد طبيعي ω₀ = √(k/m).
- التخميد c < 2√(mk) يتذبذب ويضمحل (ناقص التخميد)؛ و c = 2√(mk) يعود بأسرع ما يمكن دون تجاوز (حرج).

المعادلات الأساسية

$$ar^2 + br + c = 0$$

```
ar^2+br+c=0
```

المعادلة المميزة

$$y = e^{\alpha t}(c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t)$$

```
y=e^α t(c_1β t+c_2β t)
```

الجذور المركبة α ± iβ

$$mx'' + cx' + kx = 0,\ \omega_0 = \sqrt{k/m}$$

```
mx''+cx'+kx=0,\ ω_0=/m
```

الكتلة والنابض والمخمِّد

$$c_{\text{crit}} = 2\sqrt{mk}$$

```
c_crit=2
```

أمثلة محلولة خطوة بخطوة

مثال 3.1 حل $y'' + 4y = 0$، $y(0) = 1$، $y'(0) = 0$. ما الدور؟

1. $r^2 + 4 = 0$, $r = \pm 2i$.
2. $y = \cos 2t$.
3. الدور $2\pi/2$.

الإجابة: $y = \cos 2t$، الدور $\pi \approx 3.14$.

مثال 3.2 حل $y'' + 2y' + 5y = 0$، $y(0) = 1$، $y'(0) = 0$، وأوجد $y(1)$.

1. $r = -1 \pm 2i$.
2. $y = e^{-t}(\cos 2t + \tfrac{1}{2}\sin 2t)$ يحقق الشرطين.
3. $y(1) = e^{-1}(\cos 2 + \tfrac{1}{2}\sin 2)$.

الإجابة: ≈ 0.0142: كاد التذبذب أن يتلاشى.

مثال 3.3 كتلة $2\ \text{kg}$ معلقة بنابض ثابته $k = 50\ \text{N/m}$. أوجد ω_0، والتردد بالهرتز، والتخميد الحرج.

1. $\omega_0 = \sqrt{(50/2)} = 5\ \text{rad/s}$.
2. $f = 5/(2\pi) = 0.796\ \text{Hz}$.
3. $c_{crit} = 2\sqrt{(2 \times 50)} = 20\ \text{N·s/m}$.

الإجابة: $5\ \text{rad/s}$، $0.80\ \text{Hz}$، $20\ \text{N·s/m}$.

تمارين

حلّ كلًّا منها على الورق أولًا، ثم تحقق.

1. حل $y'' - 3y' + 2y = 0$.

   $r = 1, 2$: $y = c_1 e^{t} + c_2 e^{2t}$.

2. حل $y'' + 2y' + y = 0$.

   جذر مكرر $r = -1$: $y = (c_1 + c_2 t)e^{-t}$.

3. صنّف $x'' + 6x' + 5x = 0$.

−1 = r، 5−: زائد التخميد (c = 6 > 2√5).

4. أوجد دور x" + 9x = 0.

ω = 3، الدور 2.09 ≈ 2π/3.

مفاهيم خاطئة شائعة

خرافة: الجذور المركبة تعني حلولًا مركبة.
في الحقيقة: الجزءان الحقيقي والتخيلي يعطيان حلولًا حقيقية: e^(αt)cos βt وe^(αt)sin βt.

خرافة: الجذر المكرر يعطي حلًا واحدًا فقط.
في الحقيقة: الحل الثاني هو t e^(rt).

خرافة: المزيد من التخميد يعني دائمًا استقرارًا أسرع.
في الحقيقة: الأنظمة زائدة التخميد تعود أبطأ من الأنظمة حرجة التخميد.

بطاقات تعليمية

المعادلة المميزة

$ar^2 + br + c = 0$.

التراكب

مجاميع الحلول حلول (خطية متجانسة).

الجذر المكرر

$(c_1 + c_2t)e^{rt}$.

التردد الطبيعي

$\omega_0 = \sqrt{(k/m)}$.

ناقص التخميد

يتذبذب وهو يضمحل.

التخميد الحرج

$c = 2\sqrt{(mk)}$.

اختبار ذاتي

1. الجذران 2 ± 3i يعطيان الحلين...

e^(2t), e^(3t)

e^(2t)cos 3t ، e^(2t)sin 3t

cos 2t

te^(2t)

.e^(2t)sin 3t. α = 2, β = 3 ،e^(2t)cos 3t

2. التردد الطبيعي لـ "mx + kx = 0 :

k/m

√(k/m)

m/k

√(mk)

.√(k/m). r² = −k/m

3. التخميد الحرج c يساوي...

√(mk)

2√(mk)

mk

k/m

2√(mk). المميز صفر.

4. "y + 2y' + y = 0 هو...

ناقص التخميد

حرج التخميد

زائد التخميد

غير مخمد

حرج التخميد. جذر مكرر.

أعد هذا الاختبار

كيف يساعد هذا في إنقاذ الكوكب

لكل منشأة عالية، من برج توربين رياح إلى جسر، ترددات طبيعية تحددها صلابتها وكتلتها، وهي بالضبط $\omega_0 = \sqrt{(k/m)}$ في أبسط نموذج. ويحدد التخميد سرعة تلاشي التمايل الناتج عن هبات الرياح، وهذا يؤثر في الكلال وفي عمر المنشأة.

على Saving Planets: الفيزياء ١، الوحدة 8: الاهتزازات

المصادر: وزارة الطاقة الأمريكية: كيف تعمل توربينات الرياح؟ (بالإنجليزية) (https://www.energy.gov/eere/wind/how-do-wind-turbines-work) · Lebl, 2.4 Mechanical vibrations (https://www.jirka.org/diffyqs/html/sec_mv.html)

مصادر تعلّم مجانية

- Lebl, 2.1 Second-order linear ODEs (https://www.jirka.org/diffyqs/html/solinear_section.html): النظرية.
- Lebl, 2.2 Constant coefficient equations (https://www.jirka.org/diffyqs/html/sec_ccsol.html): المعادلة المميزة.
- Lebl, 2.4 Mechanical vibrations (https://www.jirka.org/diffyqs/html/sec_mv.html): التخميد.
- PhET: Masses and Springs (https://phet.colorado.edu/en/simulations/masses-and-springs): المحاكاة.

شاهد المحاضرة

Constant Coefficient Second Order Homogeneous DE's (https://ocw.mit.edu/courses/18-03sc-differential-equations-fall-2011/resources/constant-coefficient-second-order-homogeneous-des/) (باللغة الإنجليزية)

MIT 18.03SC Differential Equations (Fall 2011), MIT OpenCourseWare. الترخيص: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · شروط الاستخدام (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). الرابط للدراسة المجانية فقط؛ Saving Planets غير تابع لهذه الجامعة ولا يحظى بتأييدها.

☐ **أنهيت هذه الوحدة**

الاهتزاز القسري والرنين

المعادلات غير المتجانسة، والمعاملات غير المحددة، واستجابة السعة لمتذبذب مُحرَّك، والضربات والرنين.

أهداف التعلّم

في نهاية هذه الوحدة ستستطيع أن:

- أوجد الحلول الخاصة بطريقة المعاملات غير المحددة.
- اكتب الحل العام على أنه الحل المتجانس زائد حل خاص.
- احسب سعة الحالة المستقرة لمتذبذب مخمد مُحرَّك.
- اشرح الرنين وكيف يتجنبه المهندسون.

المفاهيم الأساسية

- الحل العام = الحل المتجانس + حل خاص واحد.
- خمّن الصيغة من القوة المؤثرة: مع cos ωt جرّب A cos ωt + B sin ωt.
- عند تحريكه بتردد ω، يستقر المتذبذب المخمد في حركة ثابتة سعتها X = F₀/√((k − mω²)² + (cω)²).
- قرب ω = ω₀ تبلغ السعة ذروتها؛ ومع نسبة التخميد ζ = c/c_crit يكون أقصى تضخيم ديناميكي نحو 1/(2ζ). ومن دون تخميد تنمو الاستجابة بلا حد.

المعادلات الأساسية

$$y = y_h + y_p$$

y=y_h+y_p

الحل العام

$$X = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}}$$

X=_0(k-mω^2)^2+(cω)^2

سعة الحالة المستقرة

$$\frac{X}{F_0/k} = \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}},\ r = \frac{\omega}{\omega_0}$$

(X)/(F_0/k)=1(1-r^2)^2+(2 r)^2,\ r=(ω)/(ω_0)

التضخيم الديناميكي

$$y'' + \omega^2 y = \cos \omega t \Rightarrow y_p = \frac{t \sin \omega t}{2\omega}$$

أمثلة محلولة خطوة بخطوة

مثال 4.1 أوجد حلًا خاصًا لـ y'' + y = cos 2t.

1. جرّب y_p = A cos 2t: −4A + A = 1.
2. A = −1/3.

الإجابة: y_p = −⅓ cos 2t (معاكس في الطور، لأن التحريك أعلى من التردد الطبيعي).

مثال 4.2 انمذج برج توربين رياح كمتذبذب واحد تردده الطبيعي 0.30 Hz ونسبة تخميده ζ = 0.01 (قيم نموذجية). يدور الدوّار بسرعة 12 rpm = 0.20 Hz، وتمر ثلاث شفرات أمام البرج بتردد 0.60 Hz. أوجد التضخيم الديناميكي في كل حالة، وعند الرنين.

1. At 0.20 Hz, r = 0.667: 1/√((1 − 0.444)² + (0.0133)²) = 1.80.
2. At 0.60 Hz, r = 2: 1/√(9 + 0.0016) = 0.333.
3. At r = 1: 1/(2ζ) = 50.

الإجابة: 1.8 و0.33، لكن 50 عند الرنين. لهذا يُبقي المصممون التردد الطبيعي للبرج بعيدًا عن ترددي الدوّار ومرور الشفرات.

مثال 4.3 حل y'' + y = cos t، y(0) = y'(0) = 0.

1. القوة المؤثرة تطابق التردد الطبيعي، لذا جرّب y_p = t(A cos t + B sin t).
2. التعويض يعطي A = 0، B = ½.
3. y = ½ t sin t.

الإجابة: تنمو السعة مثل t/2 بلا حد: رنين تام.

تمارين

حلّ كلًّا منها على الورق أولًا، ثم تحقق.

1. أوجد y_p لـ y'' + 3y' + 2y = 4.

   y_p = 2.

2. أوجد y_p لـ y'' − y = e^t.

   e^t تحل المعادلة المتجانسة، إذن y_p = ½ t e^t.

3. كتلة 1 kg، k = 100 N/m، c = 2 N·s/m، تُحرَّك بقوة 10 cos 10t N. أوجد السعة المستقرة.

$k - m\omega^2 = 0$، إذن $X = 10/(2 \times 10) = 0.5$ m.

4. مع $\zeta = 0.05$، ما أقصى تضخيم؟

نحو $1/(2 \times 0.05) = 10$.

مفاهيم خاطئة شائعة

خرافة: الرنين يحتاج إلى قوة كبيرة.

في الحقيقة: قوة دورية صغيرة عند التردد الطبيعي تبني استجابة كبيرة.

خرافة: التخميد يزيل الرنين.

في الحقيقة: إنه يحد الذروة عند نحو $1/(2\zeta)$، وهي تظل كبيرة للمنشآت قليلة التخميد.

خرافة: طريقة المعاملات غير المحددة تصلح لأي قوة مؤثرة.

في الحقيقة: فقط لكثيرات الحدود والدوال الأسية والجيوب وجيوب التمام وحواصل ضربها؛ وإلا فاستخدم تغيير الوسائط أو لابلاس.

بطاقات تعليمية

الحل الخاص

أي حل واحد للمعادلة القسرية.

المعاملات غير المحددة

خمّن صيغة القوة المؤثرة.

استجابة السعة

$X = F_0/\sqrt{((k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2)}$.

نسبة التخميد

$\zeta = c/(2\sqrt{(mk)})$.

الرنين

استجابة كبيرة قرب ω_0؛ الذروة $\approx 1/(2\zeta)$.

الضربات

ترددان متقاربان يصنعان غلافًا بطيئًا.

اختبار ذاتي

1. الحل العام =

- y_p فقط
- $y_h + y_p$
- $y_h \times y_p$

y_h − y_p

y_h + y_p. الخطية.

2. يحدث الرنين عندما يكون تردد التحريك قريبًا من…

صفر

التردد الطبيعي

ضعفه

اللانهاية

التردد الطبيعي. أصغر مقام.

3. مع ζ = 0.01 يكون أقصى تضخيم نحو…

1

10

50

100

1/(2ζ) .50.

4. التحريك أعلى بكثير من ω₀ يعطي تضخيمًا…

كبيرة

أقل من 1

1 تمامًا

لانهائيًا

أقل من 1/r² ≈ .1.

أعد هذا الاختبار

كيف يساعد هذا في إنقاذ الكوكب

تزداد توربينات الرياح حجمًا وارتفاعًا لحصاد مزيد من الطاقة، وأبراجها وشفراتها قليلة التخميد. وتجنب الرنين بين المنشأة والدوّار الدائر جزء أساسي من إبقاء آلات الطاقة النظيفة هذه آمنة وطويلة العمر. ويستكشف المختبر D ذلك بنموذج تجريبي.

على Saving Planets: الفيزياء I، الوحدة 3: طاقة الرياح

المصادر: وزارة الطاقة الأمريكية: كيف تعمل توربينات الرياح؟ (بالإنجليزية) (https://www.energy.gov/eere/wind/how-do-wind-turbines-work) · Lebl, 2.6 Forced oscillations and resonance (https://www.jirka.org/diffyqs/html/forcedo_section.html)

مصادر تعلّم مجانية

- Lebl, 2.5 Nonhomogeneous equations (https://www.jirka.org/diffyqs/html/sec_nonhom.html): المعاملات غير المحددة وتغيير الوسائط.
- Lebl, 2.6 Forced oscillations and resonance (https://www.jirka.org/diffyqs/html/forcedo_section.html): الرنين.
- MIT OCW 18.03SC, Unit II (https://ocw.mit.edu/courses/18-03sc-differential-equations-fall-2011/): معادلات الرتبة الثانية، محاضرات ومسائل.

أنهيت هذه الوحدة

تحويلات لابلاس

تحويل المعادلات التفاضلية إلى جبر: التحويل وجدوله، والمشتقات، والدوال الدرجية للمدخلات المحوّلة، والنبضات، والالتفاف.

أهداف التعلّم

في نهاية هذه الوحدة ستستطيع أن:

- احسب تحويلات لابلاس من التعريف ومن جدول.
- حل مسائل القيم الابتدائية بالتحويلات والكسور الجزئية.
- انمذج المدخلات المحوّلة بدوال الدرجة الأحادية والإزاحات.
- انمذج النبضات المفاجئة بدالة دلتا.

المفاهيم الأساسية

- L{f}(s) = ∫₀^∞ e^(−st) f(t) dt يحول المشتقات إلى ضرب في s، مع تضمين القيم الابتدائية.
- احسب Y(s)، وجزّئه إلى كسور جزئية، ثم اعكسه بالجدول.
- المفتاح الذي يُقلب عند الزمن a هو u(t − a)؛ وقاعدة الإزاحة L{u(t − a)f(t − a)} = e^(−as)F(s).
- الدفعة اللحظية هي δ(t − a)، مع L{δ(t − a)} = e^(−as).

المعادلات الأساسية

$$\mathcal{L}\{f\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

```
L\=_0^∞ e^-stf(t) dt
```

التعريف

$$\mathcal{L}\{y'\} = sY - y(0),\ \mathcal{L}\{y''\} = s^2Y - sy(0) - y'(0)$$

```
L'\=sY-y(0),\ L''\=s^2Y-sy(0)-y'(0)
```

المشتقات

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a},\ \mathcal{L}\{\sin \omega t\} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

```
L^at\=1s-a,\ L\ω t\=(ω)/(s^2+ω^2)
```

مدخلات الجدول

$$\mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s)$$

```
L(t-a)f(t-a)\=e^-asF(s)
```

أمثلة محلولة خطوة بخطوة

مثال 5.1 حل $y' - 2y = e^{3t}$، $y(0) = 1$.

1. $sY - 1 - 2Y = 1/(s - 3)$.
2. $Y = 1/((s-2)(s-3)) + 1/(s-2) = [1/(s-3) - 1/(s-2)] + 1/(s-2)$.
3. $Y = 1/(s-3)$.

الإجابة: $y = e^{3t}$. تحقق: $3e^{3t} - 2e^{3t} = e^{3t}$.

مثال 5.2 بحيرة نظيفة تبدأ في تلقي تدفق ثابت من ملوث عند $t = 2$: $y' + y = u(t-2)$، $y(0) = 0$. أوجد $y(3)$.

1. $(s+1)Y = e^{-2s}/s$.
2. $1/(s(s+1)) = 1/s - 1/(s+1)$، إذن $y = (1 - e^{-(t-2)})u(t-2)$.
3. $y(3) = 1 - e^{-1}$.

الإجابة: 0.632 ≈ من المستوى النهائي، بعد ثابت زمني واحد من التحويل.

مثال 5.3 متذبذب ساكن $y'' + 4y = \delta(t-1)$ يتلقى دفعة عند $t = 1$. أوجد $y(1 + \pi/4)$.

1. $(s^2 + 4)Y = e^{-s}$.
2. $y = \tfrac{1}{2}\sin(2(t-1))\,u(t-1)$.
3. عند $t = 1 + \pi/4$: $\tfrac{1}{2}\sin(\pi/2)$.

الإجابة: 0.5، الذروة الأولى.

تمارين

حلّ كلًّا منها على الورق أولًا، ثم تحقق.

1. أوجد $\mathcal{L}\{t\}$.

   $1/s^2$.

2. اعكس $3/(s^2 + 9)$.

   $\sin 3t$.

3. حل $y' + y = 0$، $y(0) = 4$.

.Y = 4/(s + 1), y = 4e^(−t)

4. حل y'' + y = 0، y(0) = 0، y'(0) = 2.

.Y = 2/(s² + 1)، y = 2 sin t

5. أوجد L{u(t − 3)}.

.e^(−3s)/s

مفاهيم خاطئة شائعة

خرافة: L{fg} = L{f}L{g}.

في الحقيقة: حاصل ضرب التحويلات يقابل الالتفاف، لا حاصل الضرب.

خرافة: تُطبَّق الشروط الابتدائية في النهاية.

في الحقيقة: إنها تدخل فورًا عبر L{y'} = sY − y(0).

خرافة: الدوال الدرجية تحتاج إلى حل مجزأ.

في الحقيقة: لابلاس يتعامل مع التحويلات في خطوة واحدة.

بطاقات تعليمية

تحويل لابلاس

∫₀^∞ e^(−st) f dt.

L{y'}

sY − y(0).

L{e^at}

1/(s − a).

الدرجة الأحادية

u(t − a): مطفأ ثم مشغَّل.

دلتا

δ(t − a): نبضة لحظية؛ L = e^(−as).

الالتفاف

L{f * g} = FG.

اختبار ذاتي

1. L{y'} =

sY

sY − y(0)

Y/s

Y − s

sY − y(0). التكامل بالتجزئة.

2. L{e^(−2t)} =

1/(s − 2)

1/(s + 2)

s + 2

−2/s

1/(s + 2). a = −2.

3. المفتاح الذي يُشغَّل عند t = 5 يُكتب…

δ(t − 5)

u(t − 5)

e^(5t)

t − 5

u(t − 5). الدرجة الأحادية.

4. L{δ(t)} =

0

1

s

1/s

1. e^(−0s).

أعد هذا الاختبار

كيف يساعد هذا في إنقاذ الكوكب

المدخلات البيئية الحقيقية تبدأ وتتوقف: يبدأ تصريف مصنع، ويتوقف إطلاق مياه من سد، ويحقن ثوران بركاني الهباء الجوي دفعة واحدة. والمدخلات الدرجية والنبضية مع تحويلات لابلاس تعطي الاستجابة لكل منها في حساب واحد، وهي الطريقة التي يستخدمها المهندسون لأنظمة التحكم في شبكات الكهرباء ومحطات المعالجة.

على Saving Planets: صفحة الأنهار

المصادر: Lebl, 6.1 The Laplace transform (https://www.jirka.org/diffyqs/html/laplace_section.html) · Lebl, 6.4 Dirac delta and impulse response (https://www.jirka.org/diffyqs/html/diracdelta_section.html)

مصادر تعلّم مجانية

- Lebl, 6.1 The Laplace transform (https://www.jirka.org/diffyqs/html/laplace_section.html): التعريف والجدول.
- Lebl, 6.2 Transforms of derivatives and ODEs (https://www.jirka.org/diffyqs/html/transformsofders_section.html): حل مسائل القيم الابتدائية.
- Lebl, 6.3 Convolution (https://www.jirka.org/diffyqs/html/convolution_section.html): الالتفاف.
- Lebl, 6.4 Dirac delta (https://www.jirka.org/diffyqs/html/diracdelta_section.html): النبضات.

شاهد المحاضرة

Laplace Transform (https://ocw.mit.edu/courses/18-03sc-differential-equations-fall-2011/resources/laplace-transform/) (باللغة الإنجليزية)

MIT 18.03SC Differential Equations (Fall 2011), MIT OpenCourseWare. الترخيص: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · شروط الاستخدام (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use). الرابط للدراسة المجانية فقط؛ Saving Planets غير تابع لهذه الجامعة ولا يحظى بتأييدها.

أنهيت هذه الوحدة

الأنظمة الخطية والقيم الذاتية ومستويات الطور

الأنظمة x' = Ax، وطرق القيم الذاتية، ومستوى الطور، وتصنيف نقاط التوازن إلى عقد وسروج ولوالب ومراكز.

أهداف التعلّم

في نهاية هذه الوحدة ستستطيع أن:

- اكتب المعادلات المقترنة والمعادلات ذات الرتب الأعلى كأنظمة من الرتبة الأولى.
- حل x' = Ax بالقيم الذاتية والمتجهات الذاتية.
- ارسم صور الطور.
- صنّف نقطة الأصل بالأثر والمحدد.

المفاهيم الأساسية

- إذا كان Av = λv، فإن x = e^(λt)v يحل x' = Ax؛ والحل العام يجمع حدًا كهذا لكل قيمة ذاتية.
- قيم ذاتية حقيقية متعاكسة الإشارة: سرج. وكلتاهما سالبتان: عقدة مستقرة.
- قيم ذاتية مركبة α ± iβ: لوالب (مستقرة إذا كان α < 0)؛ ومراكز إذا كان α = 0.
- لمصفوفة 2 × 2، λ² − (tr A)λ + det A = 0.

المعادلات الأساسية

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$$

x'=A x

النظام الخطي

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

(A- I)=0

القيم الذاتية

$$\mathbf{x} = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2$$

x=c_1e^_1t v_1+c_2e^_2t v_2

الحل العام (قيم ذاتية حقيقية مختلفة)

$$\lambda^2 - (\operatorname{tr} A)\lambda + \det A = 0$$

^2-()+ A=0

كثيرة الحدود المميزة (2 × 2)

أمثلة محلولة خطوة بخطوة

مثال 6.1 نموذج كربون من صندوقين: يتبادل الغلاف الجوي A والمحيط O الكربون وفق A' = −0.2A + 0.1O، O' = 0.2A − 0.1O (لكل سنة؛ معدلات نموذجية). ابدأ بـ 3 وحدات في الهواء ولا شيء في المحيط.

1. القيم الذاتية: tr = −0.3، det = 0، إذن λ = 0 و−0.3.
2. للقيمة λ = 0 المتجه الذاتي (1, 2): التوزيع عند التوازن 1 : 2. والكربون الكلي (3) محفوظ، إذن A → 1، O → 2.
3. A(t) = 1 + 2e^(−0.3t).

الإجابة: يحتفظ الهواء بثلث النبضة في هذا النموذج المبسط، بمقياس زمني 1/0.3 ≈ 3.33 سنة.

مثال 6.2 صنّف نقطة الأصل لـ A = [[1, 2], [2, 1]].

1. λ² − 2λ − 3 = 0, λ = 3, −1.

الإجابة: إشارتان متعاكستان: سرج (غير مستقر).

مثال 6.3 صنّف نقطة الأصل لـ A = [[−1, −2], [2, −1]].

1. tr = −2، λ² + 2λ + 5 = 0: det = 5.
2. λ = −1 ± 2i.

الإجابة: لولب مستقر: تدور الحلول نحو الداخل، مضمحلة مثل e^(−t).

تمارين

حلّ كلًّا منها على الورق أولًا، ثم تحقق.

1. اكتب y'' + 3y' + 2y = 0 كنظام.

   x₁ = y, x₂ = y': x₁' = x₂, x₂' = −2x₁ − 3x₂.

2. القيم الذاتية لـ A = [[2, 0], [0, −3]]؟

   2 و−3: سرج.

3. صنّف A = [[0, 1], [−4, 0]].

   λ = ±2i: مركز (تذبذب غير مخمد).

4. صنّف A = [[−3, 1], [0, −2]].

   λ = −3، −2: عقدة مستقرة.

مفاهيم خاطئة شائعة

خرافة: المتجهات الذاتية وحيدة.
في الحقيقة: أي مضاعف غير صفري يصلح.

خرافة: القيمة الذاتية الصفرية تعني عدم وجود حركة.
في الحقيقة: إنها تعني مستقيمًا من نقاط التوازن أو كمية محفوظة، كما في نموذج صناديق الكربون.

خرافة: القيم الذاتية المركبة تعطي حلولًا مركبة فقط.
في الحقيقة: الجزءان الحقيقي والتخيلي يعطيان حلولًا حقيقية.

بطاقات تعليمية

النظام الخطي

x' = Ax.

طريقة القيم الذاتية

x = e^(λt)v.

السرج

قيم ذاتية حقيقية متعاكسة الإشارة.

العقدة

قيم ذاتية حقيقية من الإشارة نفسها.

اللولب

قيم ذاتية مركبة، α ≠ 0.

الأثر–المحدد

λ² − tr λ + det = 0.

اختبار ذاتي

1. القيمتان الذاتيتان 2 و1− تعطيان...

عقدة

سرجًا

لولبًا

مركزًا

سرجًا. إشارتان متعاكستان.

2. القيم الذاتية $-1 \pm 3i$ تعطي...

لولبًا غير مستقر

لولبًا مستقرًا

مركزًا

سرجًا

لولبًا مستقرًا. $\alpha < 0$.

3. لمصفوفة A من الحجم 2×2، مجموع القيم الذاتية هو...

$\det A$

$\operatorname{tr} A$

0

1

$\operatorname{tr} A$. $\lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{tr} A$.

4. للمركز قيم ذاتية...

حقيقية ومتساوية

تخيلية بحتة

صفر

موجبة

تخيلية بحتة. $\alpha = 0$.

أعد هذا الاختبار

كيف يساعد هذا في إنقاذ الكوكب

نماذج دورة الكربون أنظمة خطية من صناديق (الغلاف الجوي، والمحيط السطحي، والمحيط العميق، واليابسة) تتبادل الكربون. وقيمها الذاتية هي المقاييس الزمنية التي تُمتص عليها نبضة CO_2: بعضها سريع، وبعضها يستغرق قرونًا أو أكثر. ويصف عرض ناسا

لدورة الكربون الدورتين السريعة والبطيئة اللتين تمثلهما هذه الصناديق.

على Saving Planets: محور المحيطات

المصادر: NOAA · NASA Earth Observatory: The Carbon Cycle (https://earthobservatory.nasa.gov/features/CarbonCycle)
Global Monitoring Laboratory: Trends in atmospheric CO_2 (https://gml.noaa.gov/ccgg/trends/)

مصادر تعلّم مجانية

- Lebl, 3.1 Introduction to systems (https://www.jirka.org/diffyqs/html/sec_introtosys.html): الأنظمة.
- Lebl, 3.4 Eigenvalue method (https://www.jirka.org/diffyqs/html/eigenmethod_section.html): القيم الذاتية.
- Lebl, 3.5 Two-dimensional systems and their vector fields (https://www.jirka.org/diffyqs/html/sec_twodimaut.html): صور الطور.

أنهيت هذه الوحدة

الأنظمة غير الخطية والاستقرار

نقاط توازن الأنظمة غير الخطية، والتخطيط الخطي بمصفوفة جاكوبي، ودورات المفترس والفريسة، ونموذج SIR للأوبئة.

أهداف التعلّم

في نهاية هذه الوحدة ستستطيع أن:

- أوجد نقاط توازن الأنظمة غير الخطية.
- خطّط خطيًا بمصفوفة جاكوبي وصنّف نقاط التوازن.
- حلّل نموذج لوتكا–فولتيرا للمفترس والفريسة.
- استخدم نموذج SIR: R_0، وعتبة مناعة القطيع، والحجم النهائي.

المفاهيم الأساسية

- قرب نقطة توازن، يتصرف النظام غير الخطي مثل تخطيطه الخطي x' = J x، حيث J مصفوفة جاكوبي (ما لم يكن التخطيط الخطي مركزًا).
- لوتكا–فولتيرا: الفرائس x' = ax − bxy، والمفترسات y' = −cy + dxy. نقطة التوازن (c/d, a/b)؛ وتدور الأعداد حولها.
- SIR: S' = −βSI، I' = βSI − γI، R' = γI. عدد التكاثر الأساسي $R_0 = \beta/\gamma$؛ ولا يتنامى التفشي إلا إذا كان $R_0 S > 1$.
- عتبة مناعة القطيع هي $1 - 1/R_0$؛ والنسبة النهائية غير المصابة s_∞ تحقق $\ln s_\infty = R_0(s_\infty - 1)$.

المعادلات الأساسية

$$J = \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix}$$

```
J=_x&f_y\_x&g_y
```

مصفوفة جاكوبي

$$x' = ax - bxy,\; y' = -cy + dxy$$

```
x'=ax-bxy,\ y'=-cy+dxy
```

لوتكا–فولتيرا

$$S' = -\beta SI,\; I' = \beta SI - \gamma I,\; R' = \gamma I$$

```
S'=-β SI,\ I'=β SI-γ I,\ R'=γ I
```

نموذج SIR

$$R_0 = \beta/\gamma,\; \ln s_\infty = R_0(s_\infty - 1)$$

```
R_0=β/γ,\ s_∞=R_0(s_∞-1)
```

أمثلة محلولة خطوة بخطوة

مثال 7.1 تتبع الفرائس والمفترسات $x' = x - 0.02xy$، $y' = -0.5y + 0.005xy$ (قيم نموذجية، بالسنوات). أوجد نقطة توازن التعايش ودور الدورات الصغيرة.

1. $x' = 0$ يتطلب $y = 1/0.02 = 50$؛ و$y' = 0$ يتطلب $x = 0.5/0.005 = 100$.
2. لمصفوفة جاكوبي هناك القيم الذاتية $\pm i\sqrt{(ac)} = \pm i\sqrt{0.5}$.
3. الدور $2\pi/\sqrt{0.5}$.

الإجابة: 100 فريسة و50 مفترسًا؛ وتدوم الدورات الصغيرة نحو 8.9 سنة، مع تأخر المفترسات عن الفرائس.

مثال 7.2 وباء فيه $\beta = 0.3$ في اليوم و$\gamma = 0.1$ في اليوم. أوجد R_0، وعتبة مناعة القطيع، والنسبة النهائية لمن أصيبوا.

1. $R_0 = 3$.
2. العتبة $1 - 1/3 = 0.667$.
3. كرّر $s = e^{3(s-1)}$: $s_\infty = 0.0595$.

الإجابة: $R_0 = 3$؛ المناعة لدى 67% توقف النمو؛ ودون تدخل يُصاب في النهاية نحو 94%، أكثر من العتبة لأن الوباء يتجاوزها.

مثال 7.3 صنّف نقطة التوازن $P = K$ للنمو اللوجستي $P' = rP(1 - P/K)$.

1. $f'(P) = r - 2rP/K$; $f'(K) = -r < 0$.

الإجابة: مستقرة: الاضطرابات الصغيرة تضمحل بمعدل r.

تمارين

حلّ كلًّا منها على الورق أولًا، ثم تحقق.

1. أوجد نقاط توازن $x' = x(3 - x - y)$، $y' = y(2 - x - y)$.

   $(0, 0)$، $(3, 0)$، $(0, 2)$ (لا توجد نقطة داخلية: المستقيمان $x + y = 3$ و$x + y = 2$ متوازيان).

2. خطّط $x' = \sin x$ خطيًا قرب $x = 0$ و$x = \pi$.

   $f'(0) = 1$ (غير مستقرة)، $f'(\pi) = -1$ (مستقرة).

3. إذا كان $R_0 = 2$، فما عتبة مناعة القطيع؟

   $1 - 1/2 = 50\%$.

4. في مثال المفترس والفريسة، ماذا يحدث للفرائس إذا أزيلت المفترسات؟

x = x': نمو أسي (حتى تتدخل قيود أخرى).

مفاهيم خاطئة شائعة

خرافة: التخطيط الخطي يتنبأ دائمًا بالسلوك.
في الحقيقة: ليس عندما يعطي مركزًا؛ فالحدود غير الخطية هي التي تحسم.

خرافة: مناعة القطيع تعني أن الوباء يتوقف فورًا.
في الحقيقة: تتراجع الإصابات بعد العتبة لكنها قد تتجاوزها مع ذلك.

خرافة: دورات المفترس والفريسة تعني أن النموذج غير مستقر.
في الحقيقة: مدارات لوتكا–فولتيرا مغلقة: مستقرة استقرارًا محايدًا، لا تنمو ولا تنكمش.

بطاقات تعليمية

مصفوفة جاكوبي

مصفوفة المشتقات الجزئية الأولى.

التخطيط الخطي

x' ≈ J x قرب نقطة توازن.

لوتكا–فولتيرا

دورات المفترس والفريسة حول (c/d, a/b).

SIR

القابلون للإصابة، والمصابون، والمتعافون.

R_0

β/γ، الإصابات الجديدة لكل حالة.

عتبة مناعة القطيع

$1 - 1/R_0$.

اختبار ذاتي

1. $R_0 = \beta/\gamma = 4$ يعطي عتبة قدرها...

25%

50%

75%

100%

.75%. 1 − 1/4

2. مستوى الفرائس عند توازن لوتكا–فولتيرا هو...

a/b

c/d

b/a

d/c

.x = c/d يتطلب c/d. y' = 0

3. يستخدم التخطيط الخطي...

مصفوفة هيسه

مصفوفة جاكوبي

مؤثر لابلاس

الأثر

مصفوفة جاكوبي. المشتقات الجزئية الأولى.

4. ينمو الوباء في البداية إذا...

$R_0S > 1$

$R_0 < 1$

$\gamma > \beta$

$I = 0$

.$R_0S > 1$. $I' = (\beta S - \gamma)I$

أعد هذا الاختبار

كيف يساعد هذا في إنقاذ الكوكب

في جزيرة رويال في بحيرة سوبيريور، يرصد National Park Service أعداد الذئاب والموظ منذ 1980، وهو سجل طويل للمفترس والفريسة. وصعودها وهبوطها المترابطان، وقرار هيئة المتنزهات نقل ذئاب جديدة إلى الجزيرة، هما بالضبط نوع النظام الذي تبدأ نماذج لوتكا–فولتيرا في تفسيره.

الرياضيات نفسها لنموذج SIR التي توجه استجابة الصحة العامة تُستخدم لأمراض الحياة البرية التي تهدد النظم البيئية.

على Saving Planets: محور المحيطات

المصادر: Wolves and Moose of Isle Royale project (long-term data) (https://www.isleroyalewolf.org/) · National Park Service: Wolves of Isle Royale (https://www.nps.gov/isro/learn/nature/wolves.htm)

مصادر تعلّم مجانية

- Lebl, 8.1 Linearization, critical points and equilibria (https://www.jirka.org/diffyqs/html/linearization_section.html): التخطيط الخطي.
- Lebl, 8.2 Stability and classification (https://www.jirka.org/diffyqs/html/nlinstability_section.html): الاستقرار.
- Lebl, 8.3 Applications of nonlinear systems (https://www.jirka.org/diffyqs/html/nlinapps_section.html): المفترس والفريسة وغير ذلك.

شاهد المحاضرة

The Relation Between Nonlinear Systems and First-order ODE's (https://ocw.mit.edu/courses/18-03sc-differential-equations-fall-2011/resources/the-relation-between-nonlinear-systems-and-first-order-odes/) (باللغة الإنجليزية)

MIT 18.03SC Differential Equations (Fall 2011), MIT OpenCourseWare. الترخيص: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · شروط الاستخدام (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). الرابط للدراسة المجانية فقط؛ Saving Planets غير تابع لهذه الجامعة ولا يحظى بتأييدها.

أنهيت هذه الوحدة

الطرق العددية

طرق أويلر وأويلر المحسّنة ورونغ–كوتا، وحجم الخطوة والخطأ، ونموذج مناخي لتوازن الطاقة يُحل عدديًا.

أهداف التعلّم

في نهاية هذه الوحدة ستستطيع أن:

- طبّق أويلر، وأويلر المحسّنة (هيون)، وRK4.
- اشرح رتبة الطريقة وكيف يتغير الخطأ مع حجم الخطوة.
- حل الأنظمة عدديًا.
- ابنِ نموذجًا مناخيًا صفري الأبعاد لتوازن الطاقة وحلّه.

المفاهيم الأساسية

- تتقدم طريقة أويلر على امتداد الميل: y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n). وخطؤها الكلي يتناسب مع h.
- أويلر المحسّنة تأخذ متوسط ميلين (الخطأ ∝ h²)؛ وRK4 متوسط أربعة (الخطأ ∝ h⁴).
- تنصيف h يقلل خطأ RK4 نحو 16 مرة، ولهذا هي الطريقة الأكثر استخدامًا.
- توازن الطاقة: C dT/dt = ضوء الشمس الممتص − εσT⁴. ويأتي توازنه ومقياسه الزمني من المعادلة مباشرة.

المعادلات الأساسية

$$y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n)$$

y_n+1=y_n+hf(t_n,y_n)

طريقة أويلر

$$y_{n+1} = y_n + \tfrac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

y_n+1=y_n+ h6(k_1+2k_2+2k_3+k_4)

رونغ–كوتا 4

$$C\frac{dT}{dt} = S(1-\alpha) - \varepsilon\sigma T^4$$

CdT/dt=S(1-α)-σ T^4

نموذج توازن الطاقة

$$\lambda = 4\varepsilon\sigma T^3,\ \tau = C/\lambda$$

=4σ T^3,\ τ=C/

التغذية الراجعة الخطية والمقياس الزمني

أمثلة محلولة خطوة بخطوة

مثال 8.1 قرّب $y(1)$ لـ $y' = y$، $y(0) = 1$ مع $h = 0.1$ بأويلر وأويلر المحسّنة وRK4.

1. كل خطوة أويلر تضرب في 1.1: $1.1^{10} = 2.5937$.
2. أويلر المحسّنة تضرب في 1.105: 2.7141.
3. RK4 تضرب في 1.1051708: 2.7182797.

الإجابة: القيمة الحقيقية $e = 2.7182818$. الأخطاء: 0.12 و0.0042 و0.000002.

مثال 8.2 تمتص الأرض $340 \times (1 - 0.29) = 241.4\ \text{W/m}^2$ من ضوء الشمس (NASA). لو أشعّت كجسم أسود ($\varepsilon = 1$)، فما درجة الحرارة التي توازن ذلك؟ وأي ε فعّالة تعطي المتوسط الحالي البالغ نحو $288\ \text{K}$؟

1. $\sigma T^4 = 241.4$ تعطي $T = (241.4/5.67 \times 10^{-8})^{(1/4)} = 255\ \text{K}$.
2. $\varepsilon = 241.4/(\sigma \times 288^4) = 0.619$.

الإجابة: $255\ \text{K}$ ($-18\ ^\circ\text{C}$) دون أثر الدفيئة؛ والانبعاثية الفعالة 0.62 تمثل أثر الدفيئة الذي يجعل الأرض صالحة للعيش.

مثال 8.3 مع $\varepsilon = 0.619$ عند $288\ \text{K}$ وطبقة خلط محيطية عمقها $50\ \text{m}$ ($C = 1000 \times 4186 \times 50\ \text{J/(m}^2\text{·K)}$؛ عمق نموذجي)، أوجد λ والمقياس الزمني والاحترار دون تغذية راجعة لقسر قدره $4\ \text{W/m}^2$ (قيمة نموذجية).

1. $\lambda = 4\varepsilon\sigma T^3 = 3.35\ \text{W/(m}^2\text{·K)}$.
2. $\tau = C/\lambda = 6.24 \times 10^7\ \text{s} \approx 1.98$ سنة (نحو 2).
3. $\Delta T = 4/3.35$.

الإجابة: نحو $1.2\ \text{K}$ من الاحترار، يُقترب منه على مقياس زمني قدره 2 سنة في هذا النموذج البسيط. والتغذيات الراجعة الحقيقية (بخار الماء، والجليد) تجعل الاحترار أكبر، كما تقيّم IPCC.

تمارين

حلّ كلًّا منها على الورق أولًا، ثم تحقق.

1. خطوة أويلر واحدة لـ $y' = t + y$، $y(0) = 1$، $h = 0.1$.

   $y_1 = 1 + 0.1(0 + 1) = 1.1$.

2. إذا كان خطأ أويلر 0.12 عند $h = 0.1$، فقدّره عند $h = 0.05$.

   نحو 0.06 (الرتبة الأولى).

3. إذا كان خطأ RK4 يساوي 2×10^{-6} عند $h = 0.1$، فقدّره عند $h = 0.05$.

نحو $2 \times 10^{-6}/16 \approx 1.3 \times 10^{-7}$.

4. ما درجة حرارة التوازن التي يعطيها نموذج توازن الطاقة مع $\varepsilon = 1$ والبياض 0.29؟

نحو 255 K.

مفاهيم خاطئة شائعة

خرافة: الخطوات الأصغر أفضل دائمًا.
في الحقيقة: يزداد خطأ التقريب والكلفة؛ والطريقة ذات الرتبة الأعلى عادة أفضل من خطوات أويلر الضئيلة.

خرافة: الإجابة العددية دقيقة إذا عملت الشيفرة.
في الحقيقة: تحقق دائمًا من التقارب بتنصيف h.

خرافة: نتيجة 255 K تعني أن النموذج خاطئ.
في الحقيقة: إنها تبين مقدار ما يدفئ به أثر الدفيئة الأرض: نحو 33 K.

بطاقات تعليمية

طريقة أويلر

$y + h\,f$.

أويلر المحسّنة

متوسط ميلين؛ الرتبة 2.

RK4

أربعة ميول؛ الرتبة 4.

حجم الخطوة

h؛ تحقق من التقارب بتنصيفه.

نموذج توازن الطاقة

$C\,T' = S(1-\alpha) - \varepsilon\sigma T^4$.

المقياس الزمني للمناخ

$\tau = C/\lambda$.

اختبار ذاتي

1. لطريقة أويلر خطأ كلي يتناسب مع...

h

h^2

h^4

1/h

h. الرتبة الأولى.

2. RK4 من الرتبة...

1

2

4

8

4. الخطأ $\propto h^4$.

3. لولا أثر الدفيئة لكان متوسط حرارة الأرض نحو...

288 K

255 K

273 K

300 K

255 K. $\sigma T^4 = 241\ W/m^2$.

4. تنصيف h في RK4 يقلل الخطأ بنحو...

2

4

16

32

2^4. 16.

أعد هذا الاختبار

كيف يساعد هذا في إنقاذ الكوكب

كل نموذج مناخي، من توازن الطاقة هذا المكتوب في سطر واحد إلى النماذج العالمية التي تقيّمها IPCC، هو نظام من المعادلات التفاضلية يُحل عدديًا. وتوفر ميزانية الطاقة من NASA المدخلات: يصل في المتوسط 340 W/m² من ضوء الشمس ويُعكس 29%.

على Saving Planets: مقدمة في البرمجة، وحدة المحاكاة

المصادر: NASA Earth Observatory: Climate and Earth’s Energy Budget (https://earthobservatory.nasa.gov/features/EnergyBalance) · IPCC AR6 Working Group I: The Physical Science Basis (https://www.ipcc.ch/report/ar6/wg1/)

مصادر تعلّم مجانية

- Lebl, 1.7 Numerical methods: Euler’s method (https://www.jirka.org/diffyqs/html/numer_section.html): أويلر والخطأ.
- Trench, Ch. 3: Numerical methods (https://digitalcommons.trinity.edu/mono/8/): أويلر المحسّنة وRK4.

أنهيت هذه الوحدة

الحلول بالمتسلسلات ومتسلسلات فوريه ومعادلة الحرارة

حلول المعادلات التفاضلية العادية بمتسلسلات القوى، ومتسلسلات فورييه للدوال الدورية، وفصل المتغيرات لمعادلة الحرارة.

أهداف التعلّم

في نهاية هذه الوحدة ستستطيع أن:

- أوجد حلول متسلسلات القوى من علاقة تكرارية.
- احسب معاملات فورييه لدوال دورية بسيطة.
- حل معادلة الحرارة على قضيب بفصل المتغيرات.
- قدّر إلى أي عمق تصل موجات الحرارة الموسمية في التربة.

المفاهيم الأساسية

- عوّض y = Σaₙxⁿ، وطابق القوى، واحصل على علاقة تكرارية للمعاملات.
- الدالة الدورية مجموع جيوب وجيوب تمام؛ ولدالة فردية على (−π, π)، bₙ = (2/π)∫₀^π f sin nx dx.
- معادلة الحرارة u_t = α u_xx تنشر الحرارة؛ وكل نمط جيبي يضمحل مثل e^(−α(nπ/L)²t)، والأنماط السريعة أولًا.
- تخترق حرارة السطح الدورية التربة بعمق تخميد d = √(2α/ω).

المعادلات الأساسية

$$y = \sum a_n x^n$$

```
y= a_nx^n
```

حل بمتسلسلة القوى

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

```
b_n=2π_0^π f(x) nx dx
```

معامل فورييه الجيبي

$$u_t = \alpha u_{xx}$$

```
u_t=α u_xx
```

معادلة الحرارة

$$d = \sqrt{2\alpha/\omega}$$

عمق التخميد لموجة حرارة دورية

أمثلة محلولة خطوة بخطوة

مثال 9.1 حل $y'' + y = 0$ بمتسلسلات القوى.

1. $\sum (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum a_n x^n = 0$.
2. $a_{n+2} = -a_n/((n+2)(n+1))$.
3. الحدود الزوجية تبني $\cos x$، والفردية $\sin x$.

الإجابة: $y = a_0\cos x + a_1 \sin x$، مستخلصة من العلاقة التكرارية.

مثال 9.2 أوجد متسلسلة فورييه للموجة المربعة $f = 1$ على $(0, \pi)$، و-1 على $(-\pi, 0)$.

1. فردية، إذن جيوب فقط: $b_n = (2/\pi)\int_0^\pi \sin nx\,dx = (2/(n\pi))(1 - \cos n\pi)$.
2. $b_n = 4/(n\pi)$ لـ n فردي، و0 لـ n زوجي.

الإجابة: $f = (4/\pi)(\sin x + \sin 3x/3 + \sin 5x/5 + \dots)$؛ $b_1 \approx 1.273$.

مثال 9.3 تربة انتشاريتها $\alpha = 5 \times 10^{-7}\ \text{m}^2/\text{s}$ (قيمة نموذجية) تتعرض لدورة حرارة سنوية على السطح. أوجد عمق التخميد.

1. $\omega = 2\pi/(3.156 \times 10^7\ \text{s}) = 1.99 \times 10^{-7}\ \text{s}^{-1}$.
2. $d = \sqrt{(2 \times 5 \times 10^{-7}/1.99 \times 10^{-7})}$.

الإجابة: نحو $2.24\ \text{m}$: يتقلص التأرجح السنوي بعامل e لكل $2.2\ \text{m}$ من العمق، لذا تستجيب التربة العميقة للاحترار ببطء، على مدى سنوات كثيرة.

تمارين

حلّ كلًّا منها على الورق أولًا، ثم تحقق.

1. أوجد العلاقة التكرارية لـ $y' = y$ بمتسلسلات القوى.

   $a_{n+1} = a_n/(n+1)$، إذن $y = a_0 e^x$.

2. هل $f(x) = x^2$ فردية أم زوجية؟ أي حدود فورييه تظهر؟

   زوجية: جيوب تمام فقط (مع ثابت).

3. نمط القضيب يضمحل مثل $e^{-\alpha(\pi/L)^2 t}$. كيف يغيّر مضاعفة L زمن اضمحلاله؟

   يضرب زمن الاضمحلال في 4.

4. أوجد b_3 للموجة المربعة.

.4/(3π) ≈ 0.424

مفاهيم خاطئة شائعة

خرافة: متسلسلات فورييه تصلح للدوال الملساء فقط.

في الحقيقة: تصلح للقفزات أيضًا، وتتقارب إلى منتصف القفزة.

خرافة: تنتشر الحرارة بسرعة ثابتة.

في الحقيقة: يزداد زمن الانتشار مع مربع المسافة.

خرافة: حلول المتسلسلات أفضل دائمًا من الصيغ.

في الحقيقة: تكون أنفع حين لا توجد صيغة مغلقة، كما في معادلتي إيري وبيسل.

بطاقات تعليمية

طريقة متسلسلات القوى

عوّض $\Sigma a_n x^n$؛ واحصل على علاقة تكرارية.

متسلسلة فورييه

مجموع جيوب وجيوب تمام.

معامل فورييه

.$b_n = (2/\pi)\int_0^{\pi} f \sin nx\, dx$

معادلة الحرارة

.$u_t = \alpha\, u_{xx}$

فصل المتغيرات

.$u = X(x)T(t)$

عمق التخميد

.$\sqrt{(2\alpha/\omega)}$

اختبار ذاتي

1. في معادلة الحرارة، الأنماط الأعلى تضمحل...

تتأخر

تتقدم

لا يزداد إطلاقًا

خطيًا

تتقدم. المعدل $\propto n^2$.

2. متسلسلة فوريه لدالة فردية لا تحوي إلا...

جيوب التمام

الجيوب

الثوابت

الدوال الأسية

الجيوب. تكاملات الفردي × الزوجي تنعدم.

3. مضاعفة دورة حرارة السطح تغيّر عمق التخميد بمقدار...

2

2√

1/2

4

.1/√ω ∝ √2. d

4. b_1 للموجة المربعة يساوي...

1

4/π

2/π

π/4

.4/π. 4/(1·π)

أعد هذا الاختبار

كيف يساعد هذا في إنقاذ الكوكب

وفقًا لـ NASA، تحتوي التربة الصقيعية في نصف الكرة الشمالي على نحو 1672 مليار طن من الكربون العضوي. وسرعة وصول احترار السطح إليها مسألة في معادلة الحرارة، ويبين عمق التخميد لماذا تستجيب الطبقات العميقة ببطء لكنها تظل تستجيب طويلًا

بعد احترار السطح.

على Saving Planets: التفاضل والتكامل 3

المصادر: Lebl, 4.6 · NASA Earth Observatory: The Carbon Cycle (https://earthobservatory.nasa.gov/features/CarbonCycle) PDEs, separation of variables, and the heat equation (https://www.jirka.org/diffyqs/html/heateq_section.html)

مصادر تعلّم مجانية

- Lebl, 7.1 Power series (https://www.jirka.org/diffyqs/html/powerseries_section.html): متسلسلات القوى.
- Lebl, 7.2 Series solutions of linear second-order ODEs (https://www.jirka.org/diffyqs/html/seriessols_section.html): الحلول بالمتسلسلات.
- Lebl, 4.2 Trigonometric series (https://www.jirka.org/diffyqs/html/ts_section.html): متسلسلات فوريه.
- Lebl, 4.6 The heat equation (https://www.jirka.org/diffyqs/html/heateq_section.html): معادلة الحرارة.

شاهد المحاضرة

Convergence of Fourier Series (https://ocw.mit.edu/courses/18-03sc-differential-equations-fall-2011/resources/convergence-of-fourier-series/) (باللغة الإنجليزية)

MIT 18.03SC Differential Equations (Fall 2011), MIT OpenCourseWare. الترخيص: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · شروط الاستخدام (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). الرابط للدراسة المجانية فقط؛ Saving Planets غير تابع لهذه الجامعة ولا يحظى بتأييدها.

أنهيت هذه الوحدة

مجموعات المسائل

هذه التمارين داخل كل وحدة. حلّها على الورق أولًا، ثم افتح الإجابة.

1. معادلات الرتبة الأولى
   5 مسائل
2. النمذجة بمعادلات الرتبة الأولى
   4 مسائل
3. المعادلات الخطية من الرتبة الثانية والاهتزازات
   4 مسائل
4. الاهتزاز القسري والرنين
   4 مسائل
5. تحويلات لابلاس
   5 مسائل
6. الأنظمة الخطية والقيم الذاتية ومستويات الطور
   4 مسائل
7. الأنظمة غير الخطية والاستقرار
   4 مسائل
8. الطرق العددية
   4 مسائل
9. الحلول بالمتسلسلات ومتسلسلات فوريه ومعادلة الحرارة

المختبرات الحاسوبية

أربعة مختبرات حاسوبية: وباء SIR يُحل بأويلر وRK4، ومستوى طور للمفترس والفريسة، ونموذج مناخي لتوازن الطاقة، ومسح ترددي لنموذج برج توربين رياح.

المعاملات النموذجية موسومة بذلك؛ وكل مختبر يحيل إلى مصدر عام عن النظام الحقيقي.

مرجع السلامة: Lebl: Notes on Diffy Qs (free textbook) (https://www.jirka.org/diffyqs/)

المختبر A: وباء SIR بأويلر وRK4

الأسبوع 12

الهدف: حل نموذج SIR عدديًا، وأوجد الذروة، وقارن أويلر وRK4 بالحجم النهائي الدقيق.

$$S' = -0.3SI,\ I' = 0.3SI - 0.1I,\ R' = 0.1I$$

```
S'=-0.3SI,\ I'=0.3SI-0.1I,\ R'=0.1I
```

SIR مع $R_0 = 3$ (معدلات نموذجية يوميًا)

الإجراء

1. ابدأ بـ S = 0.999، I = 0.001، R = 0 (نسب من السكان).
2. شغّل أويلر مع h = 1 يوم وh = 0.1 يوم حتى اليوم 160، ثم RK4 مع h = 1 يوم.
3. سجّل R النهائية وذروة I ووقت حدوثها؛ وقارن بالنظرية.

جدول البيانات

الطريقة	R النهائية (اليوم 160)
أويلر، h = 1	0.9467
أويلر، h = 0.1	0.9411
RK4, h = 1	0.9405
الحجم النهائي الدقيق (نظريًا)	0.9405

قيم محسوبة لمعدلات نموذجية؛ ليست تفشيًا حقيقيًا.

مثال حسابي

1. الذروة 30.1% مصابون في وقت واحد، قرب اليوم 38.4؛ وتعطي النظرية $I_{max} = 1 - (1 + \ln R_0)/R_0 = 0.300$.
2. أويلر مع h = 1 يبالغ في الحجم النهائي بمقدار 0.006؛ وRK4 بالخطوة نفسها يطابق النظرية حتى 4 أرقام.

السلامة

- لا شيء يتجاوز الاستخدام العادي للحاسوب.

بديل منزلي أو افتراضي

- جدول البيانات يكفي؛ وPython أسهل لـ RK4.

Lebl, 8.3 Applications of nonlinear systems (https://www.jirka.org/diffyqs/html/nlinapps_section.html)

الصلة بالكوكب: بنية النموذج نفسها تُستخدم لتفشي الأمراض لدى البشر والحياة البرية.

- [ ] أكملت هذا المختبر (عمليًا أو افتراضيًا)

المختبر B: مستوى الطور للمفترس والفريسة

الأسبوع 11

الهدف: كامِل نموذج لوتكا–فولتيرا بـ RK4 وارسم المدار المغلق في مستوى الطور.

$$x' = x - 0.02xy, \quad y' = -0.5y + 0.005xy$$

```
x'=x-0.02xy, y'=-0.5y+0.005xy
```

لوتكا–فولتيرا (قيم نموذجية)

الإجراء

1. ابدأ بـ 150 فريسة و50 مفترسًا.
2. استخدم RK4 بخطوة صغيرة (0.001 سنة في Python، أو 0.01 في جدول بيانات) لمدة 40 سنة.
3. ارسم y مقابل x وسجّل مدى الفرائس والدورة.

جدول البيانات

الكمية	القيمة
التوازن	(100, 50)
مدى الفرائس	من 62.6 إلى 150
الدورة	8.99 سنة
دورة الحلقات الصغيرة (النظرية الخطية)	8.89 سنة

قيم محسوبة؛ معاملات نموذجية.

مثال حسابي

1. المدار ينغلق: تتكرر الأعداد كل 8.99 سنة، أطول قليلًا من 8.89 سنة التي تتنبأ بها النظرية الخطية للحلقات الصغيرة، لأن هذه الحلقة كبيرة.
2. يبلغ المفترسون ذروتهم بعد الفرائس، وهو تأخر يُرى في كثير من السجلات الحقيقية.

السلامة

- لا شيء يتجاوز الاستخدام العادي للحاسوب.

بديل منزلي أو افتراضي

- يمكن لـ Desmos رسم حقل الميول لمستوى الطور.

Wolves and Moose of Isle Royale project (long-term data) (https://www.isleroyalewolf.org/)

الصلة بالكوكب: السجلات الطويلة مثل سجل ذئاب وموظ جزيرة رويال تختبر هذه النماذج. National Park Service: Wolves of Isle Royale (https://www.nps.gov/isro/learn/nature/wolves.htm)

☐ **أكملت هذا المختبر (عمليًا أو افتراضيًا)**

المختبر C: نموذج مناخي لتوازن الطاقة

الأسبوع 13

الهدف: قدّم نموذجًا مناخيًا ذا صندوق واحد عبر الزمن بعد قسر مفاجئ وأوجد مقياسه الزمني.

$$C\frac{d\Delta T}{dt} = F - \lambda\,\Delta T$$

C(dΔ T)/(dt)=F- Δ T

نموذج توازن الطاقة الخطي

الإجراء

1. استخدم $C = 2.09 \times 10^8$ J/(m²·K) (50 m من المحيط)، و$\lambda = 3.35$ W/(m²·K) من الوحدة 8، وقسرًا مفاجئًا $F = 4$ W/m² (قيمة نموذجية).
2. تقدّم بأويلر بخطوات شهرية لمدة 10 سنوات.
3. قارن بالحل الدقيق $\Delta T = (F/\lambda)(1 - e^{-t/\tau})$.

جدول البيانات

السنة	ΔT (K)
1	0.48
2	0.77
5	1.10
10	1.19

قيم محسوبة من النموذج؛ لا تغذيات راجعة سوى الإشعاع.

مثال حسابي

1. التوازن $\Delta T = F/\lambda = 1.19$ K؛ $\tau = C/\lambda \approx 2.0$ سنة، لذا يكتمل الاحترار بنحو 63% بعد 2 سنة في هذا النموذج.
2. يستجيب المناخ الحقيقي أبطأ ويحترّ أكثر، لأن الحرارة تختلط في أعماق المحيط والتغذيات الراجعة تضخمها.

السلامة

- لا شيء يتجاوز الاستخدام العادي للحاسوب.

بديل منزلي أو افتراضي

- يكفي جدول بيانات.

NASA Earth Observatory: Climate and Earth’s Energy Budget (https://earthobservatory.nasa.gov/features/EnergyBalance)

الصلة بالكوكب: نماذج توازن الطاقة هي الخطوة الأولى نحو الإسقاطات المناخية التي تقيّمها IPCC. IPCC AR6 Working Group I: The Physical Science Basis (https://www.ipcc.ch/report/ar6/wg1/)

☐ **أكملت هذا المختبر (عمليًا أو افتراضيًا)**

المختبر D: مسح الرنين لنموذج برج توربين رياح

الأسبوع 6

الهدف: احسب التضخيم الديناميكي لنموذج برج بمذبذب واحد عبر ترددات الإثارة.

$$A(f) = \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}},\ r = f / f_0$$

```
A(f)=1(1-r^2)^2+(2 r)^2,\ r=f/f_0
```

التضخيم الديناميكي

الإجراء

1. استخدم f_0 = 0.30 Hz وζ = 0.01 (قيم نموذجية).
2. جدوِل A لترددات الإثارة من 0.1 إلى 0.6 Hz.
3. حدد تردد الدوار (0.20 Hz عند 12 دورة/دقيقة) وتردد مرور الشفرات (0.60 Hz) وقيّم التصميم.

جدول البيانات

تردد الإثارة (Hz)	التضخيم
0.10	1.12
0.20	1.80
0.25	3.27
0.30	50.0
0.35	2.76
0.60	0.333

قيم محسوبة لنموذج نموذجي، لا لتوربين بعينه.

مثال حسابي

1. كلا ترددي التشغيل بعيدان عن ذروة 0.30 Hz، حيث تكون الاستجابة 50 ضعف الانحراف الساكن.
2. لو تسارع الدوار إلى 18 دورة/دقيقة (0.30 Hz) لأثار البرج عند الرنين؛ ولهذا يقارن المصممون التردد الطبيعي بنطاق السرعات كله.

السلامة

- لا شيء يتجاوز الاستخدام العادي للحاسوب.

بديل منزلي أو افتراضي

- يكفي جدول بيانات.

PhET: Masses and Springs (https://phet.colorado.edu/en/simulations/masses-and-springs)

الصلة بالكوكب: تجنب الرنين يُبقي توربينات الرياح تولد طاقة نظيفة بأمان لعقود. وزارة الطاقة الأمريكية: كيف تعمل توربينات الرياح؟ (بالإنجليزية) (https://www.energy.gov/eere/wind/how-do-wind-turbines-work)

☐ **أكملت هذا المختبر (عمليًا أو افتراضيًا)**

مجموعات تدريب للامتحان

وقّت نفسك: نحو 10 دقائق لكل مسألة. ثم قارن بالحلول الكاملة.

مجموعة تمارين منتصف الفصل (الوحدات 1–5)

1. حل $y' = -2ty$، $y(0) = 3$، وأوجد $y(1)$.

   1. $dy/y = -2t\,dt$; $y = 3e^{(-t^2)}$.

   الإجابة: $3e^{(-1)} \approx 1.104$.

2. بحيرة زمن احتباسها 4 سنوات: كم يلزم حتى ينخفض ملوث إلى النصف بعد توقف التدفق الداخل؟

   1. $t = 4 \ln 2$.

   الإجابة: 2.77 ≈ سنة.

3. حل $y'' + 6y' + 9y = 0$، $y(0) = 1$، $y'(0) = 0$، وأوجد $y(1)$.

   1. $y = (1 + 3t)e^{(-3t)}$.

   الإجابة: $4e^{(-3)} \approx 0.199$.

4. حل $y' + y = 1$، $y(0) = 0$ بلابلاس وأوجد $y(2)$.

   1. $Y = 1/(s(s + 1)) = 1/s - 1/(s + 1)$.

   الإجابة: $1 - e^{(-2)} \approx 0.865$.

مجموعة التدريب النهائية (كل الوحدات)

1. صنّف الأصل لـ $x' = [[0, 1], [-2, -2]]x$.

   1. $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$, $\lambda = -1 \pm i$.

   الإجابة: حلزون مستقر.

2. وباء SIR فيه $\beta = 0.5$، $\gamma = 0.25$ يوميًا. أوجد R_0 وعتبة مناعة القطيع.

.$R_0 = 2$ .1

الإجابة: $R_0 = 2$، والعتبة 50%.

3. خطوتا أويلر مع $h = 0.5$ لـ $y' = -y$، $y(0) = 1$.

1. كل خطوة تضرب في 0.5.

الإجابة: $y(1) \approx 0.25$ (القيمة الحقيقية $e^{-1} \approx 0.368$).

4. نظام كتلة-نابض مع $m = 1$ kg، $k = 16$ N/m، $c = 0.4$ N·s/m. أوجد ω_0 وζ.

.$c_{crit} = 8$ ؛$\omega_0 = 4$ rad/s .1

الإجابة: $\omega_0 = 4$ rad/s، $\zeta = 0.05$ (تضخيم الذروة نحو 10).

ورقة الصيغ

$$\mu = e^{\int p\,dx}$$

$$M_y = N_x \Rightarrow F = C$$

$$C = C_0 e^{-t/\tau}$$

$$H_{\max} = rK/4$$

$$ar^2 + br + c = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{k/m},\ c_{\text{crit}} = 2\sqrt{mk}$$

$$X = F_0 / \sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}$$

$$\mathcal{L}\{y'\} = sY - y(0)$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = 1/(s-a)$$

$$\mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s)$$

$$\lambda^2 - (\operatorname{tr} A)\lambda + \det A = 0$$

$$R_0 = \beta/\gamma,\ 1 - 1/R_0$$

$$y_{n+1} = y_n + hf$$

$$C\,T' = S(1-\alpha) - \varepsilon\sigma T^4$$

$$u_t = \alpha u_{xx}$$

$$b_n = \tfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f \sin nx\,dx$$

الثوابت

الثابت	القيمة
ثابت ستيفان–بولتزمان σ	5.67×10^{-8} W/(m²·K⁴)

الثابت	القيمة
متوسط ضوء الشمس عند قمة الغلاف الجوي	340 W/m²
نسبة ضوء الشمس المنعكس	29%
زمن احتباس بحيرة سوبيريور	191 سنة
زمن احتباس بحيرة إيري	2.6 سنة
متوسط عمر الميثان	نحو عقد

المصدر: NASA Earth Observatory: Climate and Earth’s Energy Budget (https://earthobservatory.nasa.gov/features/EnergyBalance)

نصوص وأدوات مجانية

استخدم هذه الكتب والأدوات المجانية إلى جانب المقرر.

- Lebl: Notes on Diffy Qs (https://www.jirka.org/diffyqs/): كتاب مجاني كامل لهذا المقرر.
- Trench: Elementary Differential Equations (free text) (https://digitalcommons.trinity.edu/mono/8/): كتاب مجاني فيه تمارين كثيرة.
- MIT OpenCourseWare 18.03SC Differential Equations (https://ocw.mit.edu/courses/18-03sc-differential-equations-fall-2011/): محاضرات MIT وحصص التمارين ومجموعات المسائل، مجانًا.
- آلة Desmos الحاسبة البيانية (https://www.desmos.com/calculator): ارسم الحلول وحقول الميول.
- PhET: Masses and Springs (https://phet.colorado.edu/en/simulations/masses-and-springs): حدس عن التخميد والتذبذب.

مسرد المصطلحات

معادلة مستقلة
y' = f(y)، دون t صريح.

المعادلة المميزة
ar² + br + c = 0 للمعادلات ذات المعاملات الثابتة.

التخميد الحرج
أسرع عودة دون تجاوز.

قيمة ذاتية
λ مع Av = λv.

نموذج توازن الطاقة
نموذج مناخي يوازن ضوء الشمس الممتص والحرارة المنبعثة.

التوازن
حل ثابت.

طريقة أويلر
تقدّم عددي من الرتبة الأولى.

المعادلة التامة
M dx + N dy = 0 مع M_y = N_x.

متسلسلة فوريه
نشر بالجيوب وجيوب التمام.

معادلة الحرارة
u_t = α u_xx.

عامل التكامل
مُضاعِف يجعل المعادلة الخطية تامة.

مصفوفة جاكوبي
مصفوفة المشتقات الجزئية الأولى المستخدمة في التخطيط الخطي.

تحويل لابلاس
∫₀^∞ e^(−st) f dt.

لوتكا–فولتيرا
نموذج المفترس والفريسة.

صورة الطور
المسارات في مستوى الحالة.

الرنين
استجابة كبيرة حين تطابق الإثارة ترددًا طبيعيًا.

رونغ–كوتا (RK4)
طريقة عددية من الرتبة الرابعة.

R_0
عدد التكاثر الأساسي.

نموذج SIR
نموذج وبائي: قابلون للعدوى–مصابون–متعافون.

معادلة قابلة للفصل
dy/dx = g(x)h(y).

معايير التقييم الذاتي

لا تُمنح درجة ولا ساعات معتمدة. استخدم هذا لتقيّم بصدق أين أنت في كل وحدة.

المستوى	كيف يبدو
4 · إتقان	يبني النماذج من الوصف، ويحلها بالصيغ وعدديًا، ويتحقق من الوحدات والسلوك على المدى الطويل.
3 · متمكن	يحل مسائل التدريب مع أخطاء عرضية.
2 · قيد التطور	يتبع الأمثلة المحلولة لكنه يجد صعوبة في بناء النماذج أو اختيار الطريقة.
1 · مبتدئ	يطبّق الصيغ دون التحقق من الحلول؛ ويحتاج إلى مراجعة الوحدة.

الأوزان المقترحة إذا أردت درجة

الجزء	الوزن
تمارين	30%
المختبرات الحاسوبية	15%
مجموعة تدريب منتصف الفصل	25%
مجموعة التدريب النهائية	30%

استهدف المستوى 3 أو أعلى في كل وحدة قبل الانتقال إلى الدورة التالية.

دورات ذات صلة

- التفاضل والتكامل 3 MATH 210
- الفيزياء 2 PHYS 210 + PHYS 210L
- الاستاتيكا ENGR 211
- كل الدورات