Ultimo aggiornamento: November 1, 2026

🗺️ Percorso di quattro anni · Anno 1, Autunno

Informazioni sul corso

Questo corso gratuito ha 6 unità e 4 laboratori. Sono i totali reali, non un programma più lungo accorciato.

Un controllo è un numero o un risultato di codice in una pagina del corso che uno script ricalcola prima della pubblicazione. Il numero stampato e quello ricalcolato devono coincidere.

> Questo è lo schema di un corso gratuito di autoapprendimento scritto da Saving Planets. Non è un corso universitario, non dà crediti accademici e nessuna scuola è coinvolta.
>
> Il programma segue il primo semestre di analisi all'università (calcolo differenziale in una variabile e un'introduzione agli integrali), sul modello dei temi e del livello di materiali aperti come OpenStax Calculus Volume 1 e MIT OpenCourseWare 18.01SC Single Variable Calculus, a cui rimandiamo in tutto il corso. Queste organizzazioni non sostengono questa pagina.
>
> Cosa aggiungiamo: ogni unità collega l'analisi a problemi reali di clima, energia e volo spaziale, ogni numero della pagina viene ricalcolato da uno script di verifica prima della pubblicazione, e quattro laboratori al computer ti fanno applicare l'analisi ai dati come fanno scienziati e ingegneri.
>
> Seguilo in ordine. Ogni unità ha obiettivi, idee chiave, equazioni, esempi passo per passo, esercizi con soluzioni complete, errori comuni, flashcard e un quiz. I tuoi progressi sono salvati solo in questo browser.

Come questo corso aiuta a salvare il pianeta

L'analisi è la matematica del cambiamento. I climatologi usano le derivate per trasformare una serie di misure di anidride carbonica o di ghiaccio marino in un tasso di variazione, gli ingegneri usano l'ottimizzazione per ricavare più energia dal vento e più missione da ogni chilogrammo di propellente, e gli integrali sommano la potenza per ottenere energia.

Ogni unità si chiude con una breve sezione con fonti che mostra come le sue idee aiutano persone e natura.

Per gli insegnanti

Puoi insegnare questo corso, oppure lasciare che uno studente lo faccia da solo. È gratis. Saving Planets non dà un voto né crediti scolastici.

- Questa pagina è l'intero corso: 6 unità e 4 laboratori (MATH 110).
- Prevedi 15 settimane, circa 6–9 ore a settimana, comprese le settimane di laboratorio.
- Segui il calendario di 15 settimane. Leggi l'unità, fai la pratica su carta, poi apri la risposta. Nella settimana di laboratorio, fai il laboratorio o la versione a casa.
- Un controllo è un numero o un risultato di codice nella pagina che uno script ricalcola prima della pubblicazione. Il numero che vedi e quello ricalcolato devono coincidere.
- Usa Stampa questa pagina, oppure scarica la guida di studio PDF. Il formulario è verso la fine.
- Chiedi: in che modo questa unità aiuta le persone e il pianeta? Ogni unità ha un riquadro verde con un fatto e la sua fonte.
- Copia il modello di guida per insegnanti e scrivi il nome della classe, il tempo che hai e le domande che farai. Apri il modello di guida per insegnanti

Prima di iniziare

Prerequisiti

- Algebra: scomposizione, espressioni razionali, risoluzione di equazioni e disequazioni.
- Funzioni e grafici: dominio, immagine, composizione, funzioni inverse.
- Trigonometria: radianti, circonferenza goniometrica, seno, coseno, tangente e identità di base.
- Funzioni esponenziali e logaritmiche, inclusi e e ln.

Come studiare

- Leggi l'unità, poi chiudila e prova da solo gli esempi svolti prima di controllare ogni passaggio.
- Svolgi ogni esercizio su carta prima di aprire la risposta.
- Disegna un grafico ogni volta che puoi. La maggior parte degli errori di analisi si vede in un disegno che non ha senso.
- Controlla le derivate stimando numericamente la pendenza, e gli integrali stimando l'area.
- Usa uno strumento grafico come Desmos per mettere alla prova l'intuizione, mai per sostituire il lavoro.
- Rifai i quiz qualche giorno dopo. La pratica distribuita batte una lunga sessione unica.

Che cosa ti serve

- Un computer o un tablet con un foglio di calcolo (Google Sheets, Excel o LibreOffice).
- Una calcolatrice grafica gratuita come Desmos.
- Facoltativo: Python con NumPy, per chi vuole programmare i laboratori.

Programma suggerito di 15 settimane

Circa 6-9 ore a settimana: lettura, esercizi e, nelle settimane di laboratorio, il laboratorio.

Settimana	Unità	Argomenti	Lettura
1	Funzioni e limiti	Ripasso delle funzioni; l'idea di limite; limiti da grafici e tabelle	OpenStax 1.1–1.5, 2.1–2.2
2	Funzioni e limiti	Proprietà dei limiti; tecniche algebriche; limiti trigonometrici notevoli	OpenStax 2.3
3	Funzioni e limiti	Limiti all'infinito; asintoti; la definizione rigorosa	OpenStax 2.5, 4.6
4	Continuità e derivata	Continuità, teorema dei valori intermedi, la derivata; laboratorio A	OpenStax 2.4, 3.1–3.2
5	Regole di derivazione	Regole della potenza, del prodotto e del quoziente; derivate di ordine superiore	OpenStax 3.3–3.4
6	Regole di derivazione	Derivate trigonometriche; la regola della catena	OpenStax 3.5–3.6
7	Regole di derivazione	Derivazione implicita; derivate di esponenziali e logaritmi; esercitazione di metà corso	OpenStax 3.7–3.9
8	Applicazioni I: tassi correlati, approssimazione e metodo di Newton	Tassi correlati; approssimazione lineare e differenziali	OpenStax 4.1–4.2
9	Applicazioni I: tassi correlati, approssimazione e metodo di Newton	Regola di de L'Hôpital; metodo di Newton; laboratorio B	OpenStax 4.8–4.9
10	Applicazioni II: estremi, forma del grafico e ottimizzazione	Estremi, teorema di Lagrange, forma del grafico	OpenStax 4.3–4.5
11	Applicazioni II: estremi, forma del grafico e ottimizzazione	Ottimizzazione applicata; laboratorio C	OpenStax 4.7
12	Integrali e teorema fondamentale del calcolo	Somme di Riemann e integrale definito	OpenStax 5.1–5.2
13	Integrali e teorema fondamentale del calcolo	Il teorema fondamentale; laboratorio D	OpenStax 5.3–5.4
14	Integrali e teorema fondamentale del calcolo	Sostituzione; valore medio; aree tra curve	OpenStax 5.5, 6.1

Settimana	Unità	Argomenti	Lettura
15	Ripasso	Ripasso ed esercitazione finale	Tutte le unità

I tuoi progressi

Spunta unità e laboratori man mano che li finisci, e fai i quiz. Progressi e punteggi sono salvati solo in questo browser e non ci vengono mai inviati.

Unità

Funzioni e limiti

Un limite descrive a cosa si avvicina una funzione. È l'idea alla base di ogni derivata e di ogni integrale.

Obiettivi di apprendimento

Alla fine di questa unità saprai:

- Stimare limiti da grafici e tabelle, compresi i limiti unilaterali.
- Calcolare limiti con le proprietà dei limiti, la scomposizione e la razionalizzazione.
- Trovare limiti all'infinito e riconoscere asintoti orizzontali e verticali.
- Enunciare la definizione rigorosa (ε–δ) di limite.

Concetti chiave

- lim f(x) per x → a = L significa che f(x) può essere resa vicina a L quanto vogliamo prendendo x abbastanza vicino ad a, ma diverso da a.
- Un limite esiste solo se il limite sinistro e quello destro coincidono.
- Per una forma 0/0, semplifica prima: scomponi, semplifica o moltiplica per un coniugato.
- Due limiti notevoli: sin x / x → 1 e (1 − cos x)/x → 0 per x → 0 (x in radianti).
- All'infinito, confronta le potenze di grado massimo di una funzione razionale.

Equazioni chiave

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

```
_x af(x)=L
```

Notazione di limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

```
_x0( x)/(x)=1
```

Un limite trigonometrico fondamentale

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \; 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Definizione rigorosa di limite

Esempi svolti passo passo

Esempio 1.1 Calcola $\lim (x^2 - 4)/(x - 2)$ per $x \to 2$.

1. La sostituzione diretta dà 0/0, quindi semplifica.
2. $(x^2 - 4)/(x - 2) = (x - 2)(x + 2)/(x - 2) = x + 2$ per $x \neq 2$.
3. Ora sostituisci: $2 + 2 = 4$.

Risposta: 4.

Esempio 1.2 Calcola $\lim (\sqrt{(x + 4)} - 2)/x$ per $x \to 0$.

1. Di nuovo 0/0. Moltiplica numeratore e denominatore per il coniugato $\sqrt{(x + 4)} + 2$.
2. Il numeratore diventa $(x + 4) - 4 = x$, quindi l'espressione è $1/(\sqrt{(x + 4)} + 2)$.
3. Sostituisci $x = 0$: $1/(2 + 2) = 1/4$.

Risposta: 1/4.

Esempio 1.3 Calcola $\lim (3x^2 + 1)/(2x^2 - 5)$ per $x \to \infty$.

1. Dividi numeratore e denominatore per x^2: $(3 + 1/x^2)/(2 - 5/x^2)$.
2. As $x \to \infty$, $1/x^2 \to 0$.

Risposta: 3/2, quindi $y = 3/2$ è un asintoto orizzontale.

Esercizi

Svolgi ciascuno prima su carta, poi controlla.

1. $\lim (x^2 - 9)/(x - 3)$ per $x \to 3$

   Scomponi: $x + 3 \to 6$.

2. $\lim (5x + 2)/(x - 1)$ per $x \to \infty$

   Dividi per x: 5.

3. $\lim (1 - \cos x)/x$ per $x \to 0$

   0 (un limite notevole).

4. $\lim 1/x$ per $x \to 0^+$ e per $x \to 0^-$

   $+\infty$ da destra, $-\infty$ da sinistra, quindi il limite bilaterale non esiste.

5. $\lim \sin(3x)/x$ per $x \to 0$

   Scrivilo come $3 \cdot \sin(3x)/(3x) \to 3 \times 1 = 3$.

Errori concettuali comuni

Mito: Un limite è semplicemente il valore della funzione in quel punto.

In realtà: Il limite ignora f(a). f può non essere definita in a e avere comunque un limite lì, come nell'esempio 1.1.

Mito: 0/0 significa che il limite è 0 (o non esiste).

In realtà: 0/0 è una forma indeterminata: il limite potrebbe essere qualsiasi cosa. Bisogna semplificare.

Mito: Se il grafico si avvicina a una retta, non può mai attraversarla.

In realtà: Un grafico può attraversare un asintoto orizzontale; l'asintoto descrive il comportamento lontano.

Flashcard

Limite

Il valore a cui si avvicina f(x) quando x si avvicina ad a.

Limite unilaterale

Limite da sinistra ($x \to a^-$) o da destra ($x \to a^+$).

Forma indeterminata

0/0 o ∞/∞: semplifica prima di decidere.

Asintoto orizzontale

$y = L$ quando $f(x) \to L$ per $x \to \pm\infty$.

Asintoto verticale

$x = a$ quando $f(x) \to \pm\infty$ per $x \to a$.

Definizione ε–δ

Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ che mantiene f(x) entro ε da L.

Quiz di autoverifica

1. $\lim (x^2 - 1)/(x - 1)$ per $x \to 1$ vale...

0

1

2

non definito

2. Scomponi in x + 1 → 2.

2. Un limite bilaterale esiste quando...

f(a) è definita

i limiti sinistro e destro sono uguali

la funzione è un polinomio

il grafico non ha buchi

i limiti sinistro e destro sono uguali. Entrambi i limiti unilaterali devono esistere e coincidere.

3. lim sin x / x per x → 0 (radianti) vale...

0

1

∞

π/180

1. Un limite fondamentale; è per questo che l'analisi usa i radianti.

4. lim $(4x^3 - x)/(2x^3 + 7)$ per x → ∞ vale...

0

2

4

∞

2. Coefficienti direttivi: 4/2 = 2.

Rifai questo quiz

Come questo aiuta a salvare il pianeta

Ogni serie climatica è un elenco di misure in momenti separati. L'idea di limite, ridurre il passo temporale verso zero, è ciò che permette agli scienziati di parlare del tasso di variazione in un istante e non solo nell'arco di un anno o di un decennio.

La NOAA misura l'anidride carbonica all'osservatorio di Mauna Loa dal 1958. Le sue pagine di dati pubblicano sia la concentrazione sia il tasso di crescita annuale, un uso diretto del tasso di variazione medio che i limiti rendono preciso.

Su Saving Planets: OCO-2: misurare la CO_2 dall'orbita (in inglese)

Fonti: NOAA GML: andamento della CO_2 atmosferica (in inglese) (https://gml.noaa.gov/ccgg/trends/) · NOAA GML: tassi di crescita della CO_2 (in inglese) (https://gml.noaa.gov/ccgg/trends/gr.html)

Risorse di apprendimento gratuite

- OpenStax Calculus 1, 2.2 The Limit of a Function (in inglese) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/2-2-the-limit-of-a-function): Sezione di un manuale gratuito.
- OpenStax Calculus 1, 2.3 The Limit Laws (in inglese) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/2-3-the-limit-laws): Proprietà dei limiti con esempi svolti.
- OpenStax Calculus 1, 2.5 The Precise Definition of a Limit (in inglese) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/2-5-the-precise-definition-of-a-limit): Dimostrazioni ε–δ.
- MIT OpenCourseWare 18.01SC Single Variable Calculus (in inglese) (https://ocw.mit.edu/courses/18-01sc-single-variable-calculus-fall-2010/): Lezioni, appunti ed esercizi gratuiti del MIT.

☐ **Ho finito questa unità**

Continuità e derivata

Continuità significa nessuna interruzione. La derivata è il limite dei tassi di variazione medi: la pendenza della retta tangente.

Obiettivi di apprendimento

Alla fine di questa unità saprai:

- Verificare la continuità di una funzione e usare il teorema dei valori intermedi.
- Calcolare una derivata dalla definizione come limite.
- Interpretare una derivata come pendenza, velocità e tasso di variazione, con le unità.
- Scrivere l'equazione di una retta tangente.

Concetti chiave

- f è continua in a se f(a) è definita, il limite esiste e sono uguali.
- Teorema dei valori intermedi: una funzione continua su [a, b] assume ogni valore compreso tra f(a) e f(b).
- La derivata f'(a) è il limite del rapporto incrementale [f(a + h) − f(a)]/h per h → 0.
- Le unità di f' sono quelle di f per unità di x: metri al secondo, ppm all'anno.
- Una funzione non è derivabile in un punto angoloso, una cuspide, una tangente verticale o una discontinuità.

Equazioni chiave

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

`f'(x)=_h0(f(x+h)-f(x))/(h)`

Definizione della derivata come limite

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

`y-f(a)=f'(a)(x-a)`

Retta tangente in x = a

Esempi svolti passo passo

Esempio 2.1 Usa la definizione per trovare la derivata di f(x) = x².

1. [(x + h)² − x²]/h = (2xh + h²)/h = 2x + h.
2. Per h → 0 questo tende a 2x.

Risposta: $f'(x) = 2x$.

Esempio 2.2 Trova la retta tangente a $y = x^3$ in $x = 1$.

1. $y' = 3x^2$, quindi la pendenza in $x = 1$ è 3.
2. Punto: $(1, 1)$.
3. $y - 1 = 3(x - 1)$, quindi $y = 3x - 2$.

Risposta: $y = 3x - 2$.

Esempio 2.3 Per quale a la funzione $f(x) = x + 1$ $(x < 1)$, ax^2 $(x \geq 1)$ è continua ovunque?

1. Limite sinistro in 1: $1 + 1 = 2$.
2. Valore e limite destro: $a \times 1^2 = a$.
3. La continuità richiede $a = 2$.

Risposta: $a = 2$.

Esercizi

Svolgi ciascuno prima su carta, poi controlla.

1. Usa la definizione per derivare $f(x) = 1/x$.

   $[1/(x + h) - 1/x]/h = -1/(x(x + h)) \to -1/x^2$.

2. Un sasso lasciato cadere percorre $s(t) = 4.9t^2$ metri. Trova la sua velocità media da $t = 1$ a $t = 3$ s e la velocità istantanea a $t = 2$ s.

   Media: $(44.1 - 4.9)/2 = 19.6$ m/s. Istantanea: $s'(t) = 9.8t$, quindi 19.6 m/s a $t = 2$.

3. Mostra che $x^3 + x - 1 = 0$ ha una radice tra 0 e 1.

   $f(0) = -1 < 0$ e $f(1) = 1 > 0$, e f è continua, quindi per il teorema dei valori intermedi passa per 0 nel mezzo.

4. $f(x) = |x|$ è derivabile in 0?

   No. La pendenza è -1 da sinistra e $+1$ da destra, quindi il limite del rapporto incrementale non esiste (punto angoloso).

Errori concettuali comuni

Mito: Continua significa derivabile.

In realtà: |x| è continua in 0 ma lì non ha derivata. Derivabile però implica continua.

Mito: La derivata è la variazione di y.

In realtà: È il tasso di variazione: variazione di y per unità di variazione di x, al limite.

Mito: La retta tangente tocca la curva in un solo punto.

In realtà: Può attraversare la curva altrove, e perfino nel punto di tangenza (come $y = x^3$ in 0).

Flashcard

Continuità in a

lim f(x) per x → a è uguale a f(a).

Teorema dei valori intermedi

Continua su [a, b] ⇒ ogni valore tra f(a) e f(b) viene assunto.

Rapporto incrementale

[f(x + h) − f(x)]/h, un tasso di variazione medio.

Derivata

Limite del rapporto incrementale; tasso di variazione istantaneo.

Retta tangente

y = f(a) + f'(a)(x − a).

Derivabile ⇒ continua

Ma non viceversa.

Quiz di autoverifica

1. Se s(t) è la posizione in metri e t è in secondi, s'(t) si misura in...

m

s

m/s

m/s^2

m/s. Unità di f divise per unità di x.

2. La derivata di x^2 in $x = 3$ vale...

3

6

9

2

6. $f'(x) = 2x$.

3. Quale funzione è continua ma non derivabile in 0?

x^2

$|x|$

sin x

e^x

$|x|$. Ha un punto angoloso in 0.

4. Il teorema dei valori intermedi richiede che la funzione sia...

derivabile

crescente

continua su [a, b]

un polinomio

continua su [a, b]. La continuità sull'intervallo chiuso è l'ipotesi chiave.

Rifai questo quiz

Come questo aiuta a salvare il pianeta

La derivata trasforma una serie di posizioni in una velocità. La navigazione satellitare lo fa di continuo: GRACE-FO, per esempio, misura come cambia la distanza tra i suoi due satelliti, e quelle

variazioni rivelano spostamenti di acqua e ghiaccio sulla Terra.

I tassi con le loro unità sono il modo in cui si riferisce il cambiamento climatico nella pratica: parti per milione di CO_2 all'anno, millimetri di livello del mare all'anno. Leggere una derivata con le sue unità è un'abilità di base della cultura scientifica.

Su Saving Planets: GRACE-FO · Fisica I + Laboratorio

Fonti: NASA JPL: GRACE-FO (https://gracefo.jpl.nasa.gov/) · OpenStax Calculus 1, 3.1 Defining the Derivative (in inglese) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/3-1-defining-the-derivative)

Risorse di apprendimento gratuite

- OpenStax Calculus 1, 2.4 Continuity (in inglese) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/2-4-continuity): La continuità e il teorema dei valori intermedi.
- OpenStax Calculus 1, 3.1 Defining the Derivative (in inglese) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/3-1-defining-the-derivative): La derivata dalla definizione.
- PhET: Calculus Grapher (https://phet.colorado.edu/en/simulations/calculus-grapher): Vedi una funzione e la sua derivata insieme.

Guarda la lezione

Clip 4: Physical Interpretation of Derivatives, Continued (https://ocw.mit.edu/courses/18-01sc-single-variable-calculus-fall-2010/resources/clip-4-physical-interpretation-of-derivatives-continued/) (in inglese)

MIT 18.01SC Single Variable Calculus (Fall 2010), MIT OpenCourseWare. Licenza: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Condizioni d'uso (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Link fornito solo per lo studio gratuito; Saving Planets non è affiliato a questa università né approvato da essa.

☐ **Ho finito questa unità**

Regole di derivazione

Regole della potenza, del prodotto, del quoziente e della catena, più le derivate di funzioni trigonometriche, esponenziali e logaritmiche, e la derivazione implicita.

Obiettivi di apprendimento

Alla fine di questa unità saprai:

- Derivare polinomi, prodotti, quozienti e composizioni in modo rapido e corretto.
- Derivare sin, cos, tan, e^x e ln x.
- Usare la derivazione implicita per trovare dy/dx.
- Trovare derivate di ordine superiore e interpretare la derivata seconda come accelerazione.

Concetti chiave

- Regola della potenza: d/dx x^n = nx^{n-1} per ogni n reale.
- Regola del prodotto: (fg)' = f'g + fg'. Regola del quoziente: (f/g)' = (f'g − fg')/g^2.
- Regola della catena: la derivata di f(g(x)) è f'(g(x)) · g'(x), derivata esterna per derivata interna.
- e^x è la derivata di se stessa; ln x ha derivata 1/x. Per questo e compare in ogni modello di crescita e decadimento.
- Derivazione implicita: deriva entrambi i membri rispetto a x, trattando y come funzione di x.

Equazioni chiave

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

`d/dxx^n=nx^n-1`

Regola della potenza

$$(fg)' = f'g + fg', \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

`(fg)'=f'g+fg', ( fg)'=(f'g-fg')/(g^2)`

Regole del prodotto e del quoziente

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))\,g'(x)$$

`d/dxf(g(x))=f'(g(x)) g'(x)`

Regola della catena

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x, \quad \frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$$

`d/dxe^x=e^x, d/dx x=1x`

Esponenziale e logaritmo

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x, \quad \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$$

`d/dx x= x, d/dx x=- x`

Derivate trigonometriche

Esempi svolti passo passo

Esempio 3.1 Deriva $y = x^2 \sin x$.

1. Regola del prodotto con $f = x^2$, $g = \sin x$.
2. $y' = 2x \sin x + x^2 \cos x$.

Risposta: $y' = 2x \sin x + x^2 \cos x$.

Esempio 3.2 Deriva $y = (3x^2 + 1)^5$.

1. Esterno: $u^5 \to 5u^4$. Interno: $u = 3x^2 + 1 \to 6x$.
2. $y' = 5(3x^2 + 1)^4 \cdot 6x$.

Risposta: $y' = 30x(3x^2 + 1)^4$.

Esempio 3.3 Trova la pendenza della circonferenza $x^2 + y^2 = 25$ in $(3, 4)$.

1. Deriva: $2x + 2y\,y' = 0$.
2. $y' = -x/y = -3/4$.

Risposta: $-3/4$.

Esercizi

Svolgi ciascuno prima su carta, poi controlla.

1. d/dx $(3x^4 - 5x^2 + 7)$

$12x^3 - 10x$.

2. d/dx ln($x^2 + 1$)

   $2x/(x^2 + 1)$ (regola della catena).

3. d/dx $(x/(x + 1))$

   $[(x + 1) - x]/(x + 1)^2 = 1/(x + 1)^2$.

4. Una quantità cresce come Q(t) = 1000e^(0.02t). Quanto velocemente cresce a t = 0, e qual è il suo tasso di crescita relativo?

   Q'(t) = 20e^(0.02t), quindi 20 unità per unità di tempo a t = 0. Q'/Q = 0.02, un 2% costante per unità di tempo.

5. Se $s(t) = t^3 - 6t^2$, trova velocità e accelerazione a t = 1.

   $v = 3t^2 - 12t = -9$; $a = 6t - 12 = -6$.

Errori concettuali comuni

Mito: La derivata di un prodotto è il prodotto delle derivate.

In realtà: Usa la regola del prodotto: (fg)' = f'g + fg'.

Mito: d/dx sin(3x) = cos(3x).

In realtà: Regola della catena: 3 cos(3x).

Mito: d/dx $e^x = x\,e^{x-1}$.

In realtà: La regola della potenza non vale per esponenti variabili. d/dx $e^x = e^x$.

Flashcard

Regola della potenza

d/dx $x^n = nx^{n-1}$.

Regola del prodotto

(fg)' = f'g + fg'.

Regola del quoziente

$(f/g)' = (f'g - fg')/g^2$.

Regola della catena

$[f(g(x))]' = f'(g(x))\,g'(x)$.

d/dx e^x

e^x.

d/dx ln x

1/x.

Quiz di autoverifica

1. d/dx (x^5) =

$5x^4$

x^4

$5x^5$

$4x^5$

$5x^4$. Regola della potenza.

2. d/dx sin(x^2) =

$\cos(x^2)$

$2x \cos(x^2)$

$2 \sin x \cos x$

$-2x \cos(x^2)$

$2x \cos(x^2)$. Regola della catena: $\cos(x^2) \cdot 2x$.

3. d/dx ln(5x) =

$5/x$

$1/(5x)$

$1/x$

$\ln 5$

$1/x$. $5/(5x) = 1/x$.

4. Se la posizione è s(t), l'accelerazione è...

s(t)

s'(t)

s''(t)

∫s dt

s''(t). L’accelerazione è la derivata della velocità.

Rifai questo quiz

Come questo aiuta a salvare il pianeta

I modelli di crescita e decadimento basati su e^x descrivono la crescita delle popolazioni, il decadimento radioattivo usato per datare le carote di ghiaccio e la crescita composta delle emissioni. La regola della catena dà i loro tassi di variazione in un solo passaggio.

Un tasso di crescita relativo (Q'/Q) è il modo in cui gli scienziati confrontano variazioni di quantità di dimensioni molto diverse, per esempio quanto velocemente cambia una superficie forestale o un gas serra, in percentuale all’anno.

Su Saving Planets: Dossier deforestazione · Osservazione della Terra

Fonti: OpenStax Calculus 1, 3.9 Derivatives of Exponential and Logarithmic Functions (in inglese) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/3-9-derivatives-of-exponential-and-logarithmic-functions) · NASA: l’anidride carbonica, segno vitale del pianeta (in inglese) (https://climate.nasa.gov/vital-signs/carbon-dioxide/)

Risorse di apprendimento gratuite

- OpenStax Calculus 1, 3.3 Differentiation Rules (in inglese) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/3-3-differentiation-rules): Regole della potenza, del prodotto e del quoziente.
- OpenStax Calculus 1, 3.5 Derivatives of Trigonometric Functions (in inglese) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/3-5-derivatives-of-trigonometric-functions): Derivate trigonometriche.
- OpenStax Calculus 1, 3.6 The Chain Rule (in inglese) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/3-6-the-chain-rule): La regola della catena con molti esempi.
- OpenStax Calculus 1, 3.8 Implicit Differentiation (in inglese) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/3-8-implicit-differentiation): La derivazione implicita.

Guarda la lezione

Clip 2: Introduction to General Rules for Differentiation (https://ocw.mit.edu/courses/18-01sc-single-variable-calculus-fall-2010/resources/clip-2-introduction-to-general-rules-for-differentiation/) (in inglese)

MIT 18.01SC Single Variable Calculus (Fall 2010), MIT OpenCourseWare. Licenza: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Condizioni d’uso (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Link fornito solo per lo studio gratuito; Saving Planets non è affiliato a questa università né approvato da essa.

- [ ] **Ho finito questa unità**

Applicazioni I: tassi correlati, approssimazione e metodo di Newton

Usare le derivate per collegare grandezze che cambiano, approssimare valori difficili, calcolare limiti complicati e risolvere equazioni numericamente.

Obiettivi di apprendimento

Alla fine di questa unità saprai:

- Risolvere problemi di tassi correlati.
- Usare l'approssimazione lineare e i differenziali per stimare valori ed errori.
- Applicare la regola di de L'Hôpital alle forme 0/0 e ∞/∞.
- Risolvere equazioni con il metodo di Newton.

Concetti chiave

- Tassi correlati: scrivi un'equazione che leghi le grandezze, deriva rispetto al tempo, poi sostituisci i valori.
- Vicino a x = a, f(x) ≈ f(a) + f'(a)(x − a): la retta tangente è la migliore stima lineare.
- Regola di de L'Hôpital: per 0/0 o ∞/∞, lim f/g = lim f'/g' se il membro destro esiste.
- Metodo di Newton: $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$. Di solito converge molto in fretta da un buon valore iniziale.

Equazioni chiave

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

`L(x)=f(a)+f'(a)(x-a)`

Approssimazione lineare

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

`(f(x))/(g(x))=(f'(x))/(g'(x))`

Regola di de L'Hôpital (0/0 o ∞/∞)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

`x_n+1=x_n-(f(x_n))/(f'(x_n))`

Metodo di Newton

Esempi svolti passo passo

Esempio 4.1 Il raggio di un pallone meteorologico sferico cresce di 2 cm/s. Quanto velocemente cresce il suo volume quando r = 10 cm?

1. $V = (4/3)\pi r^3$, quindi $dV/dt = 4\pi r^2\, dr/dt$.
2. $dV/dt = 4\pi \times 10^2 \times 2 = 800\pi \approx 2{,}513$ cm³/s.

Risposta: Circa 2510 cm³/s.

Esempio 4.2 Stima $\sqrt{4.1}$ con un'approssimazione lineare.

1. $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 4$: $f(4) = 2$, $f'(4) = 1/(2\sqrt{4}) = 1/4$.
2. $L(4.1) = 2 + (1/4)(0.1) = 2.025$.

Risposta: 2.025 (il valore vero è 2.02485…).

Esempio 4.3 Usa il metodo di Newton per risolvere $x^2 = 2$ partendo da $x_0 = 1$.

1. $f(x) = x^2 - 2$, $f'(x) = 2x$, quindi $x_{n+1} = x_n - (x_n^2 - 2)/(2x_n)$.
2. $x_1 = 1.5$, $x_2 = 1.416667$, $x_3 = 1.414216$.

Risposta: $x_3 = 1.414216$, già corretto a 6 cifre significative ($\sqrt{2} = 1.4142136\ldots$).

Esercizi

Svolgi ciascuno prima su carta, poi controlla.

1. Una scala di 5 m scivola lungo un muro; il piede si allontana a 0.5 m/s. Quanto velocemente scende la cima quando il piede è a 3 m dal muro?

   $x^2 + y^2 = 25$, quindi $x\,x' + y\,y' = 0$. Con $x = 3$, $y = 4$: $y' = -(3/4)(0.5) = -0.375$ m/s, scende a 0.375 m/s.

2. $\lim (e^x - 1)/x$ per $x \to 0$

   De L'Hôpital: $e^x/1 \to 1$.

3. Metodo di Newton per $x^3 - 2x - 5 = 0$ da $x_0 = 2$. Trova x_1 e x_2.

   $f(2) = -1$, $f'(2) = 10$, quindi $x_1 = 2.1$. $f(2.1) = 0.061$, $f'(2.1) = 11.23$, quindi $x_2 = 2.0946$.

4. Usa i differenziali per stimare la variazione dell'area di un disco di raggio 10 cm se il raggio cresce di 0.1 cm.

   $dA = 2\pi r\, dr = 2\pi \times 10 \times 0.1 = 2\pi \approx 6.28$ cm².

Errori concettuali comuni

Mito: De L'Hôpital significa derivare il quoziente f/g.

In realtà: Deriva numeratore e denominatore separatamente, e solo per forme 0/0 o ∞/∞.

Mito: Nei tassi correlati, prima si sostituiscono i numeri, poi si deriva.

In realtà: Deriva prima; sostituire troppo presto trasforma le variabili in costanti con derivata nulla.

Mito: Il metodo di Newton trova sempre una radice.

In realtà: Un cattivo punto di partenza, o f' vicina a zero, può farlo divergere o entrare in un ciclo.

Flashcard

Tassi correlati

Derivare rispetto a t un'equazione che lega delle grandezze.

Approssimazione lineare

$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$.

Differenziale

$dy = f'(x)\, dx$.

Regola di de L'Hôpital

Per 0/0 o ∞/∞: $\lim f/g = \lim f'/g'$.

Metodo di Newton

$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$.

Convergenza quadratica

Vicino a una radice semplice, il metodo di Newton raddoppia circa le cifre corrette a ogni passo.

Quiz di autoverifica

1. L'approssimazione lineare usa la...

retta secante

retta tangente

retta normale

valore medio

retta tangente. L(x) è la retta tangente in a.

2. La regola di de L'Hôpital si applica a...

qualsiasi limite

forme 0/0 e ∞/∞

solo polinomi

forme 1/0

forme 0/0 e ∞/∞. Solo quozienti indeterminati.

3. Un passo del metodo di Newton su $f(x) = x^2 - 9$ da $x_0 = 4$ dà...

3

3.125

3.5

4.5

3.125. $4 - 7/8 = 3.125$.

4. Se $V = s^3$ e $ds/dt = 1$, allora dV/dt in $s = 2$ vale...

3

6

8

12

12. $3s^2\, ds/dt = 12$.

Rifai questo quiz

Come questo aiuta a salvare il pianeta

Prevedere dove sarà un satellite significa risolvere l'equazione di Keplero, M = E − e sin E, rispetto a E. Non ha soluzione algebrica, quindi di solito si risolve numericamente, spesso con il metodo di Newton, come nel laboratorio B. Una previsione orbitale accurata tiene i satelliti di osservazione della Terra a distanza di sicurezza e colloca correttamente le loro immagini sulla mappa.

I palloni meteorologici, come quello dell'esempio 4.1, portano strumenti che misurano l'atmosfera per le previsioni del tempo; i tassi correlati legano la velocità con cui salgono e si espandono.

Su Saving Planets: Guida alle orbite · Calcolatore del periodo orbitale

Fonti: OpenStax Calculus 1, 4.9 Newton's Method (in inglese) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/4-9-newtons-method) · OpenStax University Physics 1, 13.5 Kepler's Laws (in inglese) (https://openstax.org/books/university-physics-volume-1/pages/13-5-keplers-laws-of-planetary-motion)

Risorse di apprendimento gratuite

- OpenStax Calculus 1, 4.1 Related Rates (in inglese) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/4-1-related-rates): Sezione di un manuale gratuito.
- OpenStax Calculus 1, 4.2 Linear Approximations and Differentials (in inglese) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/4-2-linear-approximations-and-differentials): Stime con la retta tangente ed errore.
- OpenStax Calculus 1, 4.8 L'Hôpital's Rule (in inglese) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/4-8-lhopitals-rule): Forme indeterminate.
- OpenStax Calculus 1, 4.9 Newton's Method (in inglese) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/4-9-newtons-method): Ricerca iterativa delle radici.

Guarda la lezione

Lecture 12: Related Rates (https://ocw.mit.edu/courses/18-01-single-variable-calculus-fall-2006/resources/lecture-12-related-rates/) (in inglese)

MIT 18.01 Single Variable Calculus (Fall 2006), MIT OpenCourseWare. Licenza: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Condizioni d'uso (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Link fornito solo per lo studio gratuito; Saving Planets non è affiliato a questa università né approvato da essa.

☐ **Ho finito questa unità**

Applicazioni II: estremi, forma del grafico e ottimizzazione

Trovare massimi e minimi, leggere la forma di un grafico da f' e f'', e risolvere veri problemi di progettazione con l'ottimizzazione.

Obiettivi di apprendimento

Alla fine di questa unità saprai:

- Trovare punti critici ed estremi assoluti su un intervallo chiuso.
- Enunciare e usare il teorema di Lagrange.
- Usare i criteri della derivata prima e seconda e trovare i punti di flesso.
- Impostare e risolvere problemi di ottimizzazione applicata.

Concetti chiave

- I punti critici sono dove f' = 0 o f' non esiste. Gli estremi di una funzione regolare si trovano lì o agli estremi dell'intervallo.
- Teorema di Lagrange: su un intervallo regolare, il tasso istantaneo è uguale al tasso medio in qualche punto.
- f' > 0 significa crescente; f'' > 0 significa convessa (concavità verso l'alto). Un punto di flesso è dove cambia la concavità.
- Ricetta per l'ottimizzazione: fai un disegno, scrivi la grandezza da ottimizzare come funzione di una sola variabile usando il vincolo, deriva, trova i punti critici, controlla gli estremi.

Equazioni chiave

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

`f'(c)=(f(b)-f(a))/(b-a)`

Teorema di Lagrange (del valor medio)

$$f'(c) = 0,\ f''(c) < 0 \Rightarrow \text{local max}$$

`f'(c)=0,\ f''(c)<0 max`

Criterio della derivata seconda

$$C_p(a) = 4a(1 - a)^2$$

`C_p(a)=4a(1-a)^2`

Coefficiente di potenza di una turbina eolica in funzione dell'induzione assiale a (modello del disco attuatore)

Esempi svolti passo passo

Esempio 5.1 Trova gli estremi locali di $f(x) = x^3 - 3x$.

1. $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$ in $x = \pm 1$.
2. $f''(x) = 6x$: $f''(-1) = -6 < 0$ (max), $f''(1) = 6 > 0$ (min).
3. $f(-1) = 2$, $f(1) = -2$.

Risposta: Massimo locale 2 in $x = -1$; minimo locale -2 in $x = 1$.

Esempio 5.2 Una lattina cilindrica chiusa deve contenere 500 cm^3. Quale raggio usa meno metallo?

1. Vincolo: $\pi r^2 h = 500$, quindi $h = 500/(\pi r^2)$.
2. Area $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r^2 + 1000/r$.
3. $A' = 4\pi r - 1000/r^2 = 0$ dà $r^3 = 500/(2\pi)$, $r = 4.30$ cm.
4. Allora $h = 8.60$ cm $= 2r$, e $A = 349$ cm^2.

Risposta: $r = 4.30$ cm, $h = 8.60$ cm (l'altezza è uguale al diametro).

Esempio 5.3 Nel modello più semplice di turbina eolica, la frazione di potenza del vento catturata è $Cp = 4a(1 - a)^2$, dove a indica quanto il rotore rallenta il vento. Trova il massimo.

1. $Cp' = 4(1 - a)^2 - 8a(1 - a) = 4(1 - a)(1 - 3a)$.
2. Punti critici $a = 1$ e $a = 1/3$; $a = 1$ dà $Cp = 0$.
3. $Cp(1/3) = 4 \times (1/3) \times (2/3)^2 = 16/27 = 0.593$.

Risposta: 59.3%: il limite di Betz, il massimo teorico per qualsiasi turbina eolica.

Esercizi

Svolgi ciascuno prima su carta, poi controlla.

1. Un agricoltore ha 100 m di recinzione per tre lati di un rettangolo lungo un fiume. Qual è l'area massima?

   $A = x(100 - 2x)$; $A' = 100 - 4x = 0$ in $x = 25$. Area $= 25 \times 50 = 1250$ m^2.

2. Trova massimo e minimo assoluti di $f(x) = x^2 - 4x$ su $[0, 5]$.

   Punto critico $x = 2$: $f = -4$. Estremi: $f(0) = 0$, $f(5) = 5$. Max 5, min -4.

3. Verifica il teorema di Lagrange per $f(x) = x^2$ su $[1, 3]$.

Tasso medio $(9 - 1)/2 = 4$; $f'(c) = 2c = 4$ in $c = 2$, dentro $[1, 3]$.

4. Dove $f(x) = x^3 - 6x^2$ è convessa?

   $f'' = 6x - 12 > 0$ per $x > 2$; punto di flesso in $x = 2$.

Errori concettuali comuni

Mito: $f'(c) = 0$ significa sempre un massimo o un minimo.

In realtà: x^3 ha $f'(0) = 0$ ma lì non ha estremi.

Mito: Il massimo assoluto è sempre in un punto critico.

In realtà: Su un intervallo chiuso può trovarsi in un estremo. Controllali sempre.

Mito: Convessa significa crescente.

In realtà: La concavità riguarda f''; una funzione può essere convessa e decrescente, come e^{-x}.

Flashcard

Punto critico

$f' = 0$ o non definita.

Teorema di Weierstrass

Continua su $[a, b]$ ⇒ esistono massimo e minimo assoluti.

Teorema di Lagrange (del valor medio)

$f'(c) = [f(b) - f(a)]/(b - a)$ per qualche c.

Criterio della derivata prima

Un cambio di segno di f' da + a − è un massimo; da − a + un minimo.

Concavità

$f'' > 0$ verso l'alto, $f'' < 0$ verso il basso.

Limite di Betz

Cp max = 16/27 ≈ 59.3%.

Quiz di autoverifica

1. Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) > 0$, allora in c f ha un...

massimo locale

minimo locale

punto di flesso

nessuna conclusione

minimo locale. Convessa in un punto a tangente orizzontale: una valle.

2. Il limite di Betz per le turbine eoliche è circa...

33%

50%

59%

100%

59%. 16/27 ≈ 0.593, massimizzando $4a(1 - a)^2$.

3. Il teorema di Lagrange garantisce un punto in cui...

f = 0

f' = 0 sempre

f' è uguale al tasso di variazione medio

f'' = 0

f' è uguale al tasso di variazione medio. Tasso istantaneo = tasso medio.

4. Un punto di flesso è dove...

f' = 0

f cambia segno

cambia la concavità

f non è definita

cambia la concavità. f'' cambia segno.

Rifai questo quiz

Come questo aiuta a salvare il pianeta

L'ottimizzazione è ingegneria. Il limite di Betz dell'esempio 5.3 nasce da una sola derivata posta uguale a zero, e dice agli ingegneri eolici il massimo che una turbina potrà mai estrarre dal vento.

Anche i progettisti di missioni ottimizzano: un trasferimento di Hohmann è di solito la rotta a due accensioni più efficiente in termini di propellente tra due orbite circolari, e meno propellente significa lanci più piccoli ed economici per i satelliti climatici e meteorologici.

Usare il minimo materiale per un compito, come la lattina dell'esempio 5.2, riduce l'energia e le risorse necessarie per produrla.

Su Saving Planets: Calcolatore del trasferimento di Hohmann · Fisica I, unità 4: energia eolica

Fonti: DOE degli Stati Uniti: come funzionano le turbine eoliche? (in inglese) (https://www.energy.gov/eere/wind/how-do-wind-turbines-work) · OpenStax Calculus 1, 4.7 Applied Optimization Problems (in inglese) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/4-7-applied-optimization-problems)

Risorse di apprendimento gratuite

- OpenStax Calculus 1, 4.3 Maxima and Minima (in inglese) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/4-3-maxima-and-minima): Estremi e punti critici.
- OpenStax Calculus 1, 4.5 Derivatives and the Shape of a Graph (in inglese) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/4-5-derivatives-and-the-shape-of-a-graph): Criteri della derivata prima e seconda.
- OpenStax Calculus 1, 4.7 Applied Optimization Problems (in inglese) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/4-7-applied-optimization-problems): Molti problemi di progettazione risolti.

☐ **Ho finito questa unità**

Integrali e teorema fondamentale del calcolo

Gli integrali sommano pezzi minuscoli: area, distanza, energia. Il teorema fondamentale li collega alle derivate.

Obiettivi di apprendimento

Alla fine di questa unità saprai:

- Approssimare aree con somme di Riemann e la regola dei trapezi.
- Definire l'integrale definito e usarne le proprietà.
- Usare entrambe le parti del teorema fondamentale del calcolo.
- Trovare primitive, anche per sostituzione, e calcolare variazione netta, valore medio e aree tra curve.

Concetti chiave

- Una somma di Riemann somma $f(x_i)\Delta x$ su piccole strisce; l'integrale definito è il suo limite quando le strisce si restringono.
- TFC parte 1: $d/dx \int_a^x f(t)\,dt = f(x)$. Integrazione e derivazione si annullano a vicenda.
- TFC parte 2: $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ per qualsiasi primitiva F.
- Teorema della variazione netta: integrare un tasso dà la variazione totale. Integrare la potenza dà l'energia; integrare la velocità dà lo spostamento.
- La sostituzione è la regola della catena al contrario.

Equazioni chiave

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

```
_a^bf(x) dx=_n∞_i=1^nf(x_i^*)Δ x
```

Integrale definito

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

```
d/dx_a^xf(t) dt=f(x)
```

TFC parte 1

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

```
_a^bf(x) dx=F(b)-F(a)
```

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C\ (n \neq -1), \quad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

x^n dx=^n+1n+1+C\ (n-1), 1x dx=|x|+C

Primitive fondamentali

$$f_{avg} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

f_avg=1b-a_a^bf(x) dx

Valore medio

Esempi svolti passo passo

Esempio 6.1 Calcola $\int_0^2 x^2\,dx$.

1. Primitiva $x^3/3$.
2. $8/3 - 0 = 8/3$.

Risposta: $8/3 \approx 2.667$.

Esempio 6.2 Calcola $\int_0^1 2x(x^2+1)^3\,dx$.

1. Poni $u = x^2 + 1$, $du = 2x\,dx$; u va da 1 a 2.
2. $\int_1^2 u^3\,du = [u^4/4]_1^2 = (16 - 1)/4$.

Risposta: $15/4 = 3.75$.

Esempio 6.3 In una giornata serena, la produzione di un impianto solare è modellata come $P(t) = 5\sin(\pi t/12)$ kW per $0 \le t \le 12$ ore dopo l'alba. Quanta energia produce?

1. Energia $= \int_0^{12} 5\sin(\pi t/12)\,dt$.
2. Primitiva: $-(60/\pi)\cos(\pi t/12)$.
3. $-(60/\pi)(\cos\pi - \cos 0) = 120/\pi$.

Risposta: $120/\pi \approx 38.2$ kWh (un modello semplificato, non un impianto reale).

Esercizi

Svolgi ciascuno prima su carta, poi controlla.

1. $\int_0^{\pi} \sin x \, dx$

   $[-\cos x]_0^{\pi} = 1 + 1 = 2$.

2. $\frac{d}{dx} \int_0^{x} \cos(t^2) \, dt$

   $\cos(x^2)$, per la parte 1 del TFC.

3. La velocità verso l'alto di un razzo è $v(t) = 9.8t$ m/s per 3 s. Di quanto sale?

   $\int_0^3 9.8t \, dt = 4.9 \times 9 = 44.1$ m.

4. Trova l'area tra $y = x$ e $y = x^2$ su $[0, 1]$.

   $\int_0^1 (x - x^2) \, dx = 1/2 - 1/3 = 1/6$.

5. Trova il valore medio di $f(x) = x^2$ su $[0, 3]$.

   $(1/3) \int_0^3 x^2 \, dx = (1/3)(9) = 3$.

Errori concettuali comuni

Mito: Un integrale è sempre un'area, quindi è sempre positivo.

In realtà: È un'area con segno: le parti sotto l'asse contano come negative. $\int_0^{2\pi} \sin x \, dx = 0$.

Mito: Dimenticare il + C non conta.

In realtà: Negli integrali indefiniti la costante fa parte della risposta; conta ogni volta che è data una condizione iniziale.

Mito: Nella sostituzione, mantieni i vecchi estremi.

In realtà: Trasforma gli estremi in valori di u, oppure torna a x prima di calcolare.

Flashcard

Somma di Riemann

$\Sigma f(x_i^*) \Delta x$; una stima dell'area.

Integrale definito

Limite delle somme di Riemann; area con segno.

TFC parte 1

$\frac{d}{dx} \int_a^x f = f(x)$.

TFC parte 2

$\int_a^b f = F(b) - F(a)$.

Variazione netta

Integrale di un tasso = variazione totale.

Sostituzione

u = g(x), du = g'(x) dx: la regola della catena al contrario.

Quiz di autoverifica

1. $\int_1^3 2x\,dx =$

4

8

9

6

8. $[x^2]_1^3 = 9 - 1 = 8$.

2. Integrare una curva di potenza (kW) nel tempo (h) dà…

kW

kWh di energia

kW/h

potenza media

kWh di energia. Teorema della variazione netta: l’integrale di un tasso è un totale.

3. $\frac{d}{dx}\int_2^x t^3\,dt =$

x^3

$3x^2$

$x^4/4$

$x^3 - 8$

x^3. TFC parte 1.

4. $\int 1/x\,dx =$

$x^0/0$

$\ln|x| + C$

$-1/x^2 + C$

$e^x + C$

$\ln|x| + C$. L'eccezione $n = -1$ della regola della potenza.

Rifai questo quiz

Come questo aiuta a salvare il pianeta

L'energia è l'integrale della potenza nel tempo. I pianificatori della rete sommano così la produzione solare ed eolica ora per ora per sapere quanta energia pulita otterranno e quanto accumulo servirà.

Gli strumenti satellitari misurano tassi, come il flusso di luce solare o d'acqua, e gli integrali trasformano quei tassi in totali: quanta energia assorbe la Terra, o quanta acqua guadagna o perde un bacino fluviale in una stagione.

L'integrazione numerica del laboratorio D è proprio il modo in cui si integrano i dati reali, che arrivano come misure separate.

Su Saving Planets: GRACE-FO · Calcolatori

Fonti: OpenStax Calculus 1, 5.3 The Fundamental Theorem of Calculus (in inglese) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/5-3-the-fundamental-theorem-of-calculus) · DOE degli Stati Uniti: come funzionano le turbine eoliche? (in inglese) (https://www.energy.gov/eere/wind/how-do-wind-turbines-work)

Risorse di apprendimento gratuite

- OpenStax Calculus 1, 5.1 Approximating Areas (in inglese) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/5-1-approximating-areas): Somme di Riemann.
- OpenStax Calculus 1, 5.2 The Definite Integral (in inglese) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/5-2-the-definite-integral): Definizione e proprietà.
- OpenStax Calculus 1, 5.3 The Fundamental Theorem of Calculus (in inglese) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/5-3-the-fundamental-theorem-of-calculus): Entrambe le parti con dimostrazioni.

- OpenStax Calculus 1, 5.5 Substitution (in inglese) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/5-5-substitution): Sostituzione con u.
- OpenStax Calculus 1, 6.1 Areas between Curves (in inglese) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/6-1-areas-between-curves): Aree tra curve.

Guarda la lezione

Clip 1: Proof of the Second Fundamental Theorem of Calculus (https://ocw.mit.edu/courses/18-01sc-single-variable-calculus-fall-2010/resources/clip-1-proof-of-the-second-fundamental-theorem-of-calculus/) (in inglese)

MIT 18.01SC Single Variable Calculus (Fall 2010), MIT OpenCourseWare. Licenza: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Condizioni d'uso (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Link fornito solo per lo studio gratuito; Saving Planets non è affiliato a questa università né approvato da essa.

☐ **Ho finito questa unità**

Esercizi

Questi esercizi stanno dentro ogni unità. Falli su carta, poi apri la risposta.

1. Funzioni e limiti
   5 esercizi
2. Continuità e derivata
   4 esercizi
3. Regole di derivazione
   5 esercizi
4. Applicazioni I: tassi correlati, approssimazione e metodo di Newton
   4 esercizi
5. Applicazioni II: estremi, forma del grafico e ottimizzazione
   4 esercizi
6. Integrali e teorema fondamentale del calcolo
   5 esercizi

Laboratori al computer

L'analisi non ha un laboratorio sperimentale, quindi questo corso offre invece quattro brevi laboratori al computer. Ognuno applica un'unità a dati di tipo reale con un foglio di calcolo: differenze finite, metodo di Newton, ottimizzazione e integrazione numerica.

Sono gli stessi metodi numerici che ingegneri e climatologi usano ogni giorno. I dati di esempio di ogni laboratorio servono per esercitarsi; ogni laboratorio rimanda alla fonte dei dati reali.

Riferimento per la sicurezza: Laboratorio di monitoraggio globale NOAA: andamento della CO_2 (in inglese) (https://gml.noaa.gov/ccgg/trends/)

Laboratorio A: tassi di variazione dai dati

SETTIMANA 4

Obiettivo: Stimare un tasso di variazione e la sua accelerazione da una tabella di misure, come fanno i climatologi con una serie di CO_2.

$$f'(t_i) \approx \frac{f(t_{i+1}) - f(t_{i-1})}{t_{i+1} - t_{i-1}}, \quad f''(t_i) \approx \frac{f(t_{i+1}) - 2f(t_i) + f(t_{i-1})}{h^2}$$

Differenze centrate per la derivata prima e seconda

Procedimento

1. Inserisci la tabella di esempio in un foglio di calcolo.
2. Calcola le differenze in avanti (tasso su ogni anno) e le differenze centrate.
3. Calcola la differenza seconda: il tasso stesso sta aumentando?
4. Scarica le vere medie annuali della NOAA e ripeti; confronta con i tassi di crescita pubblicati dalla NOAA.

Tabella dei dati

Anno t	C (ppm)
0	400.0
1	402.4
2	404.9
3	407.5
4	410.2

Valori di esempio per esercitarsi, non misure reali. Usa i dati NOAA per il lavoro vero.

Calcolo di esempio

1. Differenza centrata in t = 2: (407.5 − 402.4)/2 = 2.55 ppm all'anno.
2. Differenza seconda in t = 2: 407.5 − 2(404.9) + 402.4 = 0.1 ppm all'anno².
3. Una differenza seconda positiva significa che il tasso di crescita stesso aumenta (in questo esempio).

> **Sicurezza**
>
> - Conserva una copia intatta dei dati grezzi; fai i calcoli in nuove colonne.

Alternativa a casa o virtuale

- Qui tutto si fa al computer o anche a mano.

NOAA GML: tassi di crescita della CO_2 (in inglese) (https://gml.noaa.gov/ccgg/trends/gr.html)

Legame con il pianeta: I tassi di variazione sono il modo in cui si riferiscono e si confrontano gli andamenti della CO_2. NOAA GML: andamento della CO_2 atmosferica (in inglese) (https://gml.noaa.gov/ccgg/trends/)

☐ **Ho completato questo laboratorio (reale o virtuale)**

Laboratorio B: metodo di Newton ed equazione di Keplero

SETTIMANA 9

Obiettivo: Risolvere l'equazione di Keplero M = E − e sin E per l'anomalia eccentrica E di un satellite, il passo chiave per prevedere dove si trova.

$$E_{n+1} = E_n - \frac{E_n - e\sin E_n - M}{1 - e\cos E_n}$$

```
E_n+1=E_n-(E_n-e E_n-M)/(1-e E_n)
```

Metodo di Newton per l'equazione di Keplero

Procedimento

1. Imposta M = 1.0 rad ed e = 0.1 in un foglio di calcolo; parti da E_0 = M.
2. Trascina in basso la formula di Newton per quattro righe.
3. Osserva quante cifre smettono di cambiare a ogni passo.
4. Prova e = 0.9 ed E_0 = M: quanti passi servono ora?

Tabella dei dati

Passo n	E_n (rad)
0	1.000000
1	1.088953
2	1.088598
3	1.088598

Valori calcolati (M = 1.0 rad, e = 0.1).

Calcolo di esempio

1. f(E) = E − 0.1 sin E − 1; f'(E) = 1 − 0.1 cos E.
2. Da E_0 = 1: E_1 = 1.088953, E_2 = 1.088598, dopo di che le prime 7 cifre smettono di cambiare.
3. Verifica: 1.088598 − 0.1 sin(1.088598) = 1.000000.

> **Sicurezza**
>
> - Nessuna, oltre al normale uso del computer.

Alternativa a casa o virtuale

- Basta un foglio di calcolo o Desmos.

OpenStax Calculus 1, 4.9 Newton's Method (in inglese) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/4-9-newtons-method)

Legame con il pianeta: La previsione orbitale protegge i satelliti di osservazione della Terra e colloca correttamente i loro dati.

- [ ] **Ho completato questo laboratorio (reale o virtuale)**

Laboratorio C: ottimizzare una turbina eolica

SETTIMANA 11

Obiettivo: Confermare il limite di Betz numericamente e con l'analisi.

$$C_p(a) = 4a(1-a)^2, \quad C_p'(a) = 4(1-a)(1-3a)$$

`C_p(a)=4a(1-a)^2, C_p'(a)=4(1-a)(1-3a)`

Coefficiente di potenza e sua derivata

Procedimento

1. Tabula Cp per a da 0 a 0.5 con passo 0.05 e fanne il grafico.
2. Trova il valore più alto della tabella.
3. Risolvi Cp'(a) = 0 a mano e confronta.

Tabella dei dati

a	Cp
0.20	0.512
0.30	0.588
1/3	0.593
0.40	0.576

Valori calcolati dal modello.

Calcolo di esempio

1. Cp(0.3) = 4 × 0.3 × 0.7² = 0.588.
2. Cp(1/3) = 16/27 = 0.593, il massimo.
3. Le turbine reali catturano meno a causa della resistenza, della rotazione della scia e delle perdite all'estremità delle pale.

> **Sicurezza**
>
> - Nessuna, oltre al normale uso del computer.

Alternativa a casa o virtuale

- Basta un foglio di calcolo o Desmos.

DOE degli Stati Uniti: come funzionano le turbine eoliche? (in inglese) (https://www.energy.gov/eere/wind/how-do-wind-turbines-work)

Legame con il pianeta: Conoscere il tetto dice agli ingegneri quanto margine di miglioramento resta.

- [ ] **Ho completato questo laboratorio (reale o virtuale)**

Laboratorio D: integrazione numerica dell’energia solare

SETTIMANA 13

Obiettivo: Integrare una curva di potenza con le regole del punto medio e dei trapezi e confrontare con la risposta esatta.

$$T_n = \frac{\Delta t}{2}\left[f_0 + 2f_1 + \cdots + 2f_{n-1} + f_n\right]$$

```
T_n=Δ t2[f_0+2f_1++2f_n-1+f_n]
```

Regola dei trapezi

Procedimento

1. Modello P(t) = 5 sin(πt/12) kW su 0 ≤ t ≤ 12 h.
2. Con n = 6 strisce (Δt = 2 h), calcola le somme del punto medio e dei trapezi.
3. Confronta con il valore esatto 120/π kWh. Raddoppia n e guarda gli errori ridursi.

Tabella dei dati

Metodo (n = 6)	Energia (kWh)
Punto medio	38.64
Trapezi	37.32
Esatta (TFC)	38.20

Valori del modello, non dati di un impianto reale.

Calcolo di esempio

1. Trapezi: 2 × [0 + 2(2.5 + 4.330 + 5 + 4.330 + 2.5)]/2 = 37.32 kWh.
2. Punto medio: 2 × Σ P in t = 1, 3, ..., 11 = 38.64 kWh.
3. Errori: punto medio +0.44, trapezi −0.88. L’errore del punto medio è circa la metà di quello dei trapezi, con segno opposto, come prevede la teoria.

> **Sicurezza**
>
> - Nessuna, oltre al normale uso del computer.

Alternativa a casa o virtuale

- Basta un foglio di calcolo o Desmos.

OpenStax Calculus 1, 5.1 Approximating Areas (in inglese) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/5-1-approximating-areas)

Legame con il pianeta: È così che si sommano i dati reali di energia ora per ora per pianificare l'energia pulita e l'accumulo.

- [ ] **Ho completato questo laboratorio (reale o virtuale)**

Serie di esercizi per gli esami

Cronometrati: circa 10 minuti per problema. Poi confronta con le soluzioni complete.

Serie di esercizi di metà corso (unità 1–3)

1. Calcola $\lim (x - 4)/(\sqrt{x} - 2)$ per $x \to 4$.
    1. Moltiplica per $\sqrt{x} + 2$: $(x - 4)(\sqrt{x} + 2)/(x - 4) = \sqrt{x} + 2$.
    2. Sostituisci $x = 4$: $2 + 2$.

    Risposta: 4.

2. Deriva $y = x^3 e^x$ e calcola in $x = 1$.
    1. Regola del prodotto: $y' = 3x^2 e^x + x^3 e^x = (3x^2 + x^3)e^x$.
    2. At $x = 1$: $4e$.

    Risposta: $4e \approx 10.87$.

3. Trova la retta tangente a $y = \ln x$ in $x = 1$.
    1. $y(1) = 0$, $y' = 1/x = 1$.
    2. $y - 0 = 1(x - 1)$.

    Risposta: $y = x - 1$.

4. Deriva $y = \sin(3x^2)$.
    1. Regola della catena: $\cos(3x^2) \cdot 6x$.

    Risposta: $y' = 6x \cos(3x^2)$.

Serie di esercizi finale (tutte le unità)

1. L'acqua entra in un serbatoio cilindrico di raggio 2 m a 0.5 m^3/min. Quanto velocemente sale il livello?
    1. $V = \pi r^2 h = 4\pi h$, quindi $dV/dt = 4\pi\, dh/dt$.

2. dh/dt = 0.5/(4π).

Risposta: Circa 0.0398 m/min (4.0 cm al minuto).

2. Calcola $\int_1^e (1/x)\,dx$.

1. $[\ln x]_1^e = 1 - 0$.

Risposta: 1.

3. Calcola $\int_0^4 \sqrt{x}\,dx$.

1. Primitiva (2/3)x^(3/2).
2. (2/3)(8) = 16/3.

Risposta: 16/3 ≈ 5.33.

4. Un rettangolo ha perimetro 40 m. Quali dimensioni ne massimizzano l'area?

1. A = x(20 − x); A' = 20 − 2x = 0 in x = 10.

Risposta: Un quadrato di 10 m × 10 m, area 100 m².

5. Usa de L'Hôpital per trovare lim x^2/e^x per $x \to \infty$.

1. ∞/∞: → $2x/e^x$, ancora ∞/∞.
2. → $2/e^x$ → 0.

Risposta: 0: gli esponenziali crescono più di qualsiasi potenza.

Formulario

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} [f(x+h) - f(x)]/h \qquad (x^n)' = nx^{n-1}$$

$$(fg)' = f'g + fg' \qquad (f/g)' = (f'g - fg')/g^2$$

$$[f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x) \qquad (e^x)' = e^x,\ (\ln x)' = 1/x$$

$$(\sin x)' = \cos x,\ (\cos x)' = -\sin x,\ (\tan x)' = \sec^2 \qquad L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n) \qquad f'(c) = [f(b) - f(a)]/(b-a)$$

$$\int x^n\,dx = x^{n+1}/(n+1) + C \qquad \int e^x\,dx = e^x + C,\ \int dx/x = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C,\ \int \cos x\,dx = \sin x + C \qquad \int_a^b f\,dx = F(b) - F(a)$$

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x) \qquad f_{avg} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f\,dx$$

Costanti

Costante	Valore
e	2.718281828...
π	3.141592654...
ln 2	0.693147...
1 radiante	57.2958°

Fonte: NIST: costanti fisiche fondamentali (in inglese) (https://physics.nist.gov/cuu/Constants/)

Strumenti per grafici e dati

Usa questi strumenti e fonti di dati gratuiti insieme al corso.

- Calcolatrice grafica Desmos (https://www.desmos.com/calculator): Traccia funzioni, cursori e rette tangenti nel browser.
- PhET: Calculus Grapher (https://phet.colorado.edu/en/simulations/calculus-grapher): Disegna una funzione e vedi la sua derivata e il suo integrale.
- NOAA: andamento della CO_2 atmosferica (in inglese) (https://gml.noaa.gov/ccgg/trends/): Dati reali di CO_2 da Mauna Loa e globali per esercitarsi con i tassi di variazione.

Glossario

Primitiva
Una funzione F con F' = f.

Asintoto
Una retta a cui un grafico si avvicina lontano o vicino a dove esplode.

Regola della catena
Derivata di una composizione: derivata esterna × derivata interna.

Concavità

Verso in cui si curva un grafico; segno di f''.

Continuità
Nessuna interruzione: il limite è uguale al valore della funzione.

Punto critico
Dove f' è zero o non definita.

Integrale definito
Area con segno sotto una curva tra due estremi.

Derivata
Tasso di variazione istantaneo; pendenza della retta tangente.

Differenziale
dy = f'(x) dx.

Teorema fondamentale del calcolo
Collega derivate e integrali; $\int_a^b f = F(b) - F(a)$.

Forma indeterminata
0/0 o ∞/∞; richiede altro lavoro.

Punto di flesso
Dove cambia la concavità.

Limite
Il valore a cui si avvicina una funzione.

Approssimazione lineare
Stima con la retta tangente.

Teorema di Lagrange (del valor medio)
Il tasso istantaneo è uguale al tasso medio in qualche punto.

Metodo di Newton
Ricerca iterativa di radici con rette tangenti.

Ottimizzazione
Trovare il valore migliore di una grandezza sotto vincoli.

Somma di Riemann
Somma di aree di rettangoli che approssima un integrale.

Sostituzione
Tecnica di integrazione che inverte la regola della catena.

Regola dei trapezi
Integrazione numerica con trapezi.

Griglia di autovalutazione

Non si assegnano voti né crediti. Usala per valutare onestamente a che punto sei in ogni unità.

Livello	Come si presenta
4 · Padronanza	Risolve problemi nuovi, giustifica ogni passo con una regola o un teorema e controlla le risposte con un grafico o una stima.
3 · Competente	Risolve correttamente gli esercizi con qualche occasionale errore di algebra.
2 · In sviluppo	Segue gli esempi svolti ma fatica a scegliere un metodo, o applica male la regola della catena.
1 · Principiante	Memorizza formule senza sapere quando si applicano; deve rivedere l'unità.

Pesi suggeriti se vuoi un punteggio

Parte	Peso
Esercizi	30%
Laboratori al computer	15%
Serie di esercizi di metà corso	25%
Serie di esercizi finale	30%

Punta al livello 3 o superiore in ogni unità prima di passare al corso successivo.

Corsi correlati

- Fisica I + Laboratorio PHYS 110 + PHYS 110L
- Analisi II MATH 111
- Chimica generale I + Laboratorio CHEM 110 + CHEM 110L
- Tutti i corsi