עודכן לאחרונה: November 1, 2026

🗺️ מפת דרכים לארבע שנים · שנה 1, סתיו

על הקורס

לקורס החינמי הזה יש 6 יחידות ו-4 מעבדות. אלה המספרים האמיתיים, לא תוכנית ארוכה יותר שקוצרה.

בדיקה היא מספר או תוצאת קוד בעמוד קורס שסקריפט מחשב מחדש לפני הפרסום. המספר המודפס והמספר שחושב מחדש חייבים להתאים.

זהו מתווה של קורס חינמי ללימוד עצמי שנכתב על ידי Saving Planets. הוא אינו קורס אוניברסיטאי, אינו מעניק נקודות זכות אקדמיות, ואף מוסד לימודים אינו מעורב בו.

היקפו תואם סמסטר ראשון של חשבון אינפיניטסימלי באוניברסיטה (חשבון דיפרנציאלי במשתנה אחד ומבוא לאינטגרלים), לפי הנושאים והעומק של חומרים פתוחים כמו OpenStax Calculus Volume 1 ו-MIT OpenCourseWare 18.01SC Single Variable Calculus, שאליהם אנו מקשרים לאורך הקורס. ארגונים אלה אינם ממליצים על דף זה.

מה שאנחנו מוסיפים: כל יחידה מחברת את החשבון האינפיניטסימלי לבעיות אמיתיות של אקלים, אנרגיה וטיסות חלל, כל מספר בדף מחושב מחדש בסקריפט בדיקה לפני הפרסום, וארבע מעבדות מחשב מאפשרות לכם לעבוד עם נתונים כמו מדענים ומהנדסים.

עברו עליו לפי הסדר. בכל יחידה יש מטרות, רעיונות מרכזיים, משוואות, דוגמאות צעד אחר צעד, תרגול עם תשובות מלאות, טעויות נפוצות, כרטיסיות ובוחן. ההתקדמות שלכם נשמרת רק בדפדפן הזה.

איך הקורס הזה עוזר להציל את כדור הארץ

חשבון אינפיניטסימלי הוא המתמטיקה של השינוי. מדעני אקלים משתמשים בנגזרות כדי להפוך רשומה של פחמן דו-חמצני או קרח ים לקצב שינוי, מהנדסים משתמשים באופטימיזציה כדי להפיק את מרב האנרגיה מהרוח ואת מרב המשימה מכל קילוגרם של דלק טילים, ואינטגרלים מסכמים הספק לאנרגיה.

כל יחידה מסתיימת בקטע קצר עם מקורות שמראה איך הרעיונות שלה עוזרים גם לאנשים וגם לטבע.

למורים

אפשר ללמד את הקורס הזה, או לתת לתלמיד לעבור אותו לבד. הוא חינם. Saving Planets לא נותנת ציון ולא נקודות זכות.

- העמוד הזה הוא כל הקורס: 6 יחידות ו-4 מעבדות (MATH 110).
- תכננו 15 שבועות, בערך 6 עד 9 שעות בשבוע, כולל שבועות המעבדה.

- עקבו אחרי לוח 15 השבועות. קראו את היחידה, פתרו על הנייר, ואז פתחו את התשובה. בשבוע מעבדה עשו את המעבדה או את הגרסה הביתית.
- בדיקה היא מספר או תוצאת קוד בעמוד שסקריפט מחשב מחדש לפני הפרסום. המספר שרואים והמספר שחושב מחדש חייבים להתאים.
- השתמשו בהדפסת העמוד, או הורידו את מדריך הלימוד ב-PDF. דף הנוסחאות נמצא לקראת הסוף.
- שאלו: איך היחידה הזו עוזרת לאנשים ולכוכב? בכל יחידה יש תיבה ירוקה עם עובדה ומקור.
- העתיקו את תבנית המדריך למורה וכתבו את שם הכיתה, הזמן שיש לכם, והשאלות שתשאלו. פתיחת תבנית המדריך למורה

לפני שמתחילים

ידע מוקדם

- אלגברה: פירוק לגורמים, ביטויים רציונליים, פתרון משוואות ואי-שוויונות.
- פונקציות וגרפים: תחום, טווח, הרכבה, פונקציות הפוכות.
- טריגונומטריה: רדיאנים, מעגל היחידה, סינוס, קוסינוס, טנגנס וזהויות בסיסיות.
- פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות, כולל e ו-ln.

איך ללמוד

- קראו את היחידה, סגרו אותה ונסו לפתור לבד את הדוגמאות הפתורות לפני שבודקים כל שלב.
- פתרו כל תרגיל על הנייר לפני שאתם פותחים את התשובה.
- שרטטו גרף בכל פעם שאפשר. רוב הטעויות בחשבון אינפיניטסימלי מתגלות כציור שאין בו היגיון.
- בדקו נגזרות באמצעות הערכה מספרית של השיפוע, ואינטגרלים באמצעות הערכת השטח.
- השתמשו בכלי גרפים כמו Desmos כדי לבדוק את האינטואיציה, אף פעם לא במקום העבודה.
- עשו שוב את הבחנים כעבור כמה ימים. תרגול מרווח עדיף על מפגש ארוך אחד.

מה צריך

- מחשב או טאבלט עם גיליון אלקטרוני (Google Sheets, Excel או LibreOffice).
- מחשבון גרפי חינמי כמו Desmos.
- אופציונלי: Python עם NumPy, למי שרוצה לתכנת את המעבדות.

לוח זמנים מוצע ל־15 שבועות

כ־6 עד 9 שעות בשבוע: קריאה, תרגילים, ובשבועות המעבדה גם המעבדה.

שבוע	יחידה	נושאים	קריאה
1	פונקציות וגבולות	חזרה על פונקציות; רעיון הגבול; גבולות מגרפים ומטבלאות	OpenStax 1.1–1.5, 2.1–2.2
2	פונקציות וגבולות	חוקי גבולות; טכניקות אלגבריות; גבולות טריגונומטריים מיוחדים	OpenStax 2.3

שבוע	יחידה	נושאים	קריאה
3	פונקציות וגבולות	גבולות באינסוף; אסימפטוטות; ההגדרה המדויקת	OpenStax 2.5, 4.6
4	רציפות ונגזרת	רציפות, משפט ערך הביניים, הנגזרת; מעבדה A	OpenStax 2.4, 3.1–3.2
5	כללי גזירה	כללי החזקה, המכפלה והמנה; נגזרות מסדר גבוה	OpenStax 3.3–3.4
6	כללי גזירה	נגזרות טריגונומטריות; כלל השרשרת	OpenStax 3.5–3.6
7	כללי גזירה	גזירה סתומה; נגזרות מעריכיות ולוגריתמיות; תרגול לבחינת אמצע	OpenStax 3.7–3.9
8	יישומים I: קצבים קשורים, קירוב ושיטת ניוטון	קצבים קשורים; קירוב לינארי ודיפרנציאלים	OpenStax 4.1–4.2
9	יישומים I: קצבים קשורים, קירוב ושיטת ניוטון	כלל לופיטל; שיטת ניוטון; מעבדה B	OpenStax 4.8–4.9
10	יישומים II: קיצון, צורת הגרף ואופטימיזציה	קיצון, משפט הערך הממוצע, צורת הגרף	OpenStax 4.3–4.5
11	יישומים II: קיצון, צורת הגרף ואופטימיזציה	אופטימיזציה שימושית; מעבדה C	OpenStax 4.7
12	אינטגרלים והמשפט היסודי של החשבון האינפיניטסימלי	סכומי רימן והאינטגרל המסוים	OpenStax 5.1–5.2
13	אינטגרלים והמשפט היסודי של החשבון האינפיניטסימלי	המשפט היסודי; מעבדה D	OpenStax 5.3–5.4
14	אינטגרלים והמשפט היסודי של החשבון האינפיניטסימלי	הצבה; ערך ממוצע; שטחים בין עקומות	OpenStax 5.5, 6.1
15	חזרה	חזרה וסדרת תרגול מסכמת	כל היחידות

ההתקדמות שלכם

סמנו יחידות ומעבדות כשאתם מסיימים אותן, ועשו את הבחנים. ההתקדמות והציונים נשמרים רק בדפדפן הזה ולעולם לא נשלחים אלינו.

יחידות

פונקציות וגבולות

גבול מתאר למה פונקציה מתקרבת. זה הרעיון שעומד מתחת לכל נגזרת ולכל אינטגרל.

מטרות הלמידה

בסוף היחידה הזו תוכלו:

- להעריך גבולות מגרפים ומטבלאות, כולל גבולות חד-צדדיים.
- לחשב גבולות בעזרת חוקי הגבולות, פירוק לגורמים והכפלה בצמוד.
- למצוא גבולות באינסוף ולזהות אסימפטוטות אופקיות ואנכיות.
- לנסח את ההגדרה המדויקת (ε–δ) של גבול.

מושגי מפתח

- lim f(x) כאשר x → a = L פירושו שאפשר לקרב את f(x) ל-L ככל שנרצה על ידי בחירת x קרוב מספיק ל-a, אך שונה מ-a.
- גבול קיים רק אם הגבולות משמאל ומימין שווים.
- בצורה 0/0, פשטו קודם: פרקו לגורמים, צמצמו או הכפילו בצמוד.
- שני גבולות מיוחדים: sin x / x → 1 ו-(1 − cos x)/x → 0 כאשר x → 0 (ברדיאנים).
- באינסוף, השוו את החזקות הגבוהות ביותר בפונקציה רציונלית.

משוואות מפתח

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

_x af(x)=L

סימון גבול

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

_x0(x)/(x)=1

גבול טריגונומטרי יסודי

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \; 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

ההגדרה המדויקת של גבול

דוגמאות פתורות שלב אחר שלב

דוגמה 1.1 מצאו את lim (x² − 4)/(x − 2) כאשר x → 2.

1. הצבה ישירה נותנת 0/0, לכן פשטו.
2. $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$ עבור $x \neq 2$, לכן $(x^2-4)/(x-2) = x + 2$.
3. עכשיו הציבו: $2 + 2 = 4$.

תשובה: 4.

דוגמה 1.2 מצאו את $\lim_{x \to 0} (\sqrt{x+4} - 2)/x$.

1. שוב 0/0. הכפילו את המונה והמכנה בצמוד $\sqrt{x+4} + 2$.
2. המונה הופך ל-$(x+4) - 4 = x$, ולכן הביטוי הוא $1/(\sqrt{x+4} + 2)$.
3. הציבו $x = 0$: $1/(2+2) = 1/4$.

תשובה: 1/4.

דוגמה 1.3 מצאו את $\lim_{x \to \infty} (3x^2 + 1)/(2x^2 - 5)$.

1. חלקו את המונה והמכנה ב-x^2: $(3 + 1/x^2)/(2 - 5/x^2)$.
2. As $x \to \infty$, $1/x^2 \to 0$.

תשובה: 3/2, ולכן $y = 3/2$ היא אסימפטוטה אופקית.

תרגילים

פתרו כל אחד קודם על נייר, ואז בדקו.

1. $\lim_{x \to 3} (x^2 - 9)/(x - 3)$

   פרקו לגורמים: $x + 3 \to 6$.

2. $\lim_{x \to \infty} (5x + 2)/(x - 1)$

   חלקו ב-x: 5.

3. $\lim_{x \to 0} (1 - \cos x)/x$

   0 (גבול מוכר).

4. $\lim 1/x$ כאשר $x \to 0^+$ וכאשר $x \to 0^-$

   $+\infty$ מימין, $-\infty$ משמאל, ולכן הגבול הדו-צדדי אינו קיים.

5. $\lim_{x \to 0} \sin(3x)/x$

   כתבו זאת כ-$3 \times 1 = 3 \cdot \sin(3x)/(3x) \to 3$.

תפיסות שגויות נפוצות

מיתוס: גבול הוא פשוט ערך הפונקציה באותה נקודה.

בפועל: הגבול מתעלם מ-f(a). f יכולה להיות לא מוגדרת ב-a ועדיין להיות לה שם גבול, כמו בדוגמה 1.1.

מיתוס: 0/0 פירושו שהגבול הוא 0 (או שאינו קיים).

בפועל: 0/0 היא צורה לא מוגדרת: הגבול יכול להיות כל דבר. צריך לפשט.

מיתוס: אם הגרף מתקרב לישר, הוא לעולם לא יכול לחצות אותו.

בפועל: גרף יכול לחצות אסימפטוטה אופקית; האסימפטוטה מתארת את ההתנהגות הרחק.

כרטיסיות

גבול

הערך ש-f(x) מתקרבת אליו כאשר x מתקרב ל-a.

גבול חד-צדדי

גבול משמאל ($x \to a^-$) או מימין ($x \to a^+$).

צורה לא מוגדרת

0/0 או ∞/∞: פשטו לפני שמחליטים.

אסימפטוטה אופקית

$y = L$ כאשר $f(x) \to L$ כש-$x \to \pm\infty$.

אסימפטוטה אנכית

$x = a$ כאשר $f(x) \to \pm\infty$ כש-$x \to a$.

הגדרת ε–δ

לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ ששומר את f(x) במרחק פחות מ-ε מ-L.

בוחן לבדיקה עצמית

1. $\lim (x^2 - 1)/(x - 1)$ כאשר $x \to 1$ שווה…

- 0
- 1
- 2
- לא מוגדר

2. פרקו ל-$x \to 2$ + 1.

2. גבול דו-צדדי קיים כאשר…

f(a) מוגדרת

הגבולות משמאל ומימין שווים

הפונקציה היא פולינום

אין בגרף חורים

הגבולות משמאל ומימין שווים. שני הגבולות החד-צדדיים חייבים להתקיים ולהיות שווים.

3. $\lim \sin x / x$ כאשר $x \to 0$ (ברדיאנים) שווה…

0

1

∞

π/180

1. גבול יסודי; זו הסיבה שחשבון אינפיניטסימלי משתמש ברדיאנים.

4. $\lim (4x^3 - x)/(2x^3 + 7)$ כאשר $x \to \infty$ שווה…

0

2

4

∞

2. מקדמים מובילים: 4/2 = 2.

לנסות שוב את הבוחן

איך זה עוזר להציל את כדור הארץ

כל רשומת אקלים היא רשימה של מדידות בזמנים נפרדים. רעיון הגבול, כיווץ צעד הזמן לכיוון אפס, הוא מה שמאפשר למדענים לדבר על קצב השינוי ברגע מסוים ולא רק לאורך שנה או עשור.

NOAA מודדת פחמן דו-חמצני במצפה מאונה לואה מאז 1958. דפי הנתונים שלה מפרסמים גם את הריכוז וגם את קצב הגידול השנתי שלו, שימוש ישיר בקצב השינוי הממוצע שהגבולות הופכים למדויק.

ב־OCO-2 Saving Planets: מדידת CO_2 ממסלול (באנגלית)

מקורות: NOAA GML: מגמות CO_2 באטמוספרה (באנגלית) (https://gml.noaa.gov/ccgg/trends/) · NOAA GML: קצבי הגידול של CO_2 (באנגלית) (https://gml.noaa.gov/ccgg/trends/gr.html)

מקורות לימוד חינמיים

- OpenStax Calculus 1, 2.2 The Limit of a Function (באנגלית) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/2-2-the-limit-of-a-function): פרק מספר לימוד חינמי.
- OpenStax Calculus 1, 2.3 The Limit Laws (באנגלית) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/2-3-the-limit-laws): חוקי גבולות עם דוגמאות פתורות.
- OpenStax Calculus 1, 2.5 The Precise Definition of a Limit (באנגלית) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/2-5-the-precise-definition-of-a-limit): הוכחות ε–δ.
- MIT OpenCourseWare 18.01SC Single Variable Calculus (באנגלית) (https://ocw.mit.edu/courses/18-01sc-single-variable-calculus-fall-2010/): הרצאות, סיכומים ודפי תרגילים חינמיים של MIT.

סיימתי את היחידה הזו

רציפות ונגזרת

רציפות פירושה שאין קטיעות. הנגזרת היא הגבול של קצבי השינוי הממוצעים: השיפוע של המשיק.

מטרות הלמידה

בסוף היחידה הזו תוכלו:

- לבדוק רציפות של פונקציה ולהשתמש במשפט ערך הביניים.
- לחשב נגזרת מתוך הגדרת הגבול.
- לפרש נגזרת כשיפוע, כמהירות וכקצב שינוי, עם יחידות.
- לכתוב משוואה של ישר משיק.

מושגי מפתח

- f רציפה ב-a אם f(a) מוגדרת, הגבול קיים והם שווים.
- משפט ערך הביניים: פונקציה רציפה ב-[a, b] מקבלת כל ערך בין f(a) ל-f(b).
- הנגזרת f′(a) היא הגבול של מנת ההפרשים [f(a + h) − f(a)]/h כאשר h → 0.
- היחידות של f′ הן יחידות f ליחידת x: מטר לשנייה, ppm לשנה.
- פונקציה אינה גזירה בפינה, בחוד, במשיק אנכי או בקטיעה.

משוואות מפתח

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

`f'(x)=_h0(f(x+h)-f(x))/(h)`

הגדרת הנגזרת באמצעות גבול

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

`y-f(a)=f'(a)(x-a)`

משיק ב-x = a

דוגמאות פתורות שלב אחר שלב

דוגמה 2.1 השתמשו בהגדרה כדי למצוא את הנגזרת של f(x) = x².

1. [(x + h)² − x²]/h = (2xh + h²)/h = 2x + h.
2. כאשר h → 0 זה שואף ל-2x.

תשובה: f′(x) = 2x.

דוגמה 2.2 מצאו את המשיק ל-$y = x^3$ ב-$x = 1$.

1. $y' = 3x^2$, ולכן השיפוע ב-$x = 1$ הוא 3.
2. נקודה: $(1, 1)$.
3. $y - 1 = 3(x - 1)$, ולכן $y = 3x - 2$.

תשובה: $y = 3x - 2$.

דוגמה 2.3 לאיזה a הפונקציה $f(x) = \begin{cases} x + 1 & (x < 1) \\ ax^2 & (x \geq 1) \end{cases}$ רציפה בכל מקום?

1. גבול משמאל ב-1: $1 + 1 = 2$.
2. ערך וגבול מימין: $a \cdot 1^2 = a$.
3. רציפות מחייבת $a = 2$.

תשובה: $a = 2$.

תרגילים

פתרו כל אחד קודם על נייר, ואז בדקו.

1. השתמשו בהגדרה כדי לגזור את $f(x) = 1/x$.

   $[1/(x+h) - 1/x]/h = -1/(x(x+h)) \to -1/x^2$.

2. אבן שמופלת נופלת $s(t) = 4.9t^2$ מטרים. מצאו את מהירותה הממוצעת מ-$t = 1$ עד $t = 3$ s ואת מהירותה הרגעית ב-$t = 2$ s.

   ממוצעת: $(44.1 - 4.9)/2 = 19.6$ m/s. רגעית: $s'(t) = 9.8t$, ולכן 19.6 m/s ב-$t = 2$.

3. הראו של-$x^3 + x - 1 = 0$ יש שורש בין 0 ל-1.

   $f(0) = -1 < 0$ ו-$f(1) = 1 > 0$, ו-f רציפה, ולכן לפי משפט ערך הביניים היא חוצה את 0 ביניהם.

4. האם $f(x) = |x|$ גזירה ב-0?

   לא. השיפוע הוא -1 משמאל ו-$+1$ מימין, ולכן הגבול של מנת ההפרשים אינו קיים (פינה).

תפיסות שגויות נפוצות

מיתוס: רציפה פירושה גזירה.

בפועל: $|x|$ רציפה ב-0 אך אין לה שם נגזרת. לעומת זאת, גזירה כן גוררת רציפה.

מיתוס: הנגזרת היא השינוי ב-y.

בפועל: זה קצב השינוי: שינוי ב-y ליחידת שינוי ב-x, בגבול.

מיתוס: המשיק נוגע בעקומה בנקודה אחת בלבד.

בפועל: הוא יכול לחצות את העקומה במקום אחר, ואפילו בנקודת ההשקה (כמו $y = x^3$ ב-0).

כרטיסיות

רציפות ב-a

$\lim f(x)$ כאשר $x \to a$ שווה ל-$f(a)$.

משפט ערך הביניים

רציפה ב-$[a, b]$ ⇒ כל ערך בין $f(a)$ ל-$f(b)$ מתקבל.

מנת הפרשים

$[f(x + h) - f(x)]/h$, קצב שינוי ממוצע.

נגזרת

הגבול של מנת ההפרשים; קצב שינוי רגעי.

משיק

$y = f(a) + f'(a)(x - a)$.

גזירה ⇒ רציפה

אבל לא להפך.

בוחן לבדיקה עצמית

1. אם $s(t)$ הוא מיקום במטרים ו-t בשניות, היחידות של $s'(t)$ הן…

- m
- s
- m/s
- m/s^2
- m/s. יחידות f חלקי יחידות x.

2. הנגזרת של x^2 ב-$x = 3$ היא…

- 3
- 6
- 9
- 2

.6. $f'(x) = 2x$

3. איזו פונקציה רציפה אך לא גזירה ב-0?

x^2

$|x|$

$\sin x$

e^x

$|x|$. יש לה פינה ב-0.

4. משפט ערך הביניים דורש שהפונקציה תהיה...

גזירה

עולה

רציפה ב-$[a, b]$

פולינום

רציפה ב-$[a, b]$. רציפות בקטע הסגור היא ההנחה המרכזית.

לנסות שוב את הבוחן

איך זה עוזר להציל את כדור הארץ

הנגזרת הופכת רשומת מיקומים למהירות. ניווט לווייני עושה זאת כל הזמן: GRACE-FO, למשל, מודד כיצד משתנה המרחק בין שני הלוויינים שלו, והשינויים האלה חושפים תזוזות של מים וקרח על כדור הארץ.

קצבים עם יחידות הם הדרך שבה מדווחים על שינויי אקלים בפועל: חלקים למיליון של CO_2 לשנה, מילימטרים של גובה פני הים לשנה. קריאת נגזרת עם היחידות שלה היא מיומנות יסוד באוריינות מדעית.

ב־GRACE-FO :Saving Planets · פיזיקה + 1 מעבדה

מקורות: NASA JPL: GRACE-FO (https://gracefo.jpl.nasa.gov/) · OpenStax Calculus 1, 3.1 Defining the Derivative (באנגלית) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/3-1-defining-the-derivative)

מקורות לימוד חינמיים

- OpenStax Calculus 1, 2.4 Continuity (באנגלית) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/2-4-continuity): רציפות ומשפט ערך הביניים.
- OpenStax Calculus 1, 3.1 Defining the Derivative (באנגלית) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/3-1-defining-the-derivative): הנגזרת מעקרונות יסוד.
- PhET: Calculus Grapher (https://phet.colorado.edu/en/simulations/calculus-grapher): לראות פונקציה ואת הנגזרת שלה יחד.

צפו בהרצאה

Clip 4: Physical Interpretation of Derivatives, Continued (https://ocw.mit.edu/courses/18-01sc-single-variable-calculus-fall-2010/resources/clip-4-physical-interpretation-of-derivatives-continued/) (באנגלית)

MIT 18.01SC Single Variable Calculus (Fall 2010), MIT OpenCourseWare. רישיון: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · תנאי שימוש (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use). הקישור מיועד ללימוד חינמי בלבד; Saving Planets אינו קשור לאוניברסיטה זו ואינו נתמך על ידה.

סיימתי את היחידה הזו

כללי גזירה

כללי החזקה, המכפלה, המנה והשרשרת, וגם נגזרות של פונקציות טריגונומטריות, מעריכיות ולוגריתמיות, וגזירה סתומה.

מטרות הלמידה

בסוף היחידה הזו תוכלו:

- לגזור פולינומים, מכפלות, מנות והרכבות במהירות ובדיוק.
- לגזור $\sin$, $\cos$, $\tan$, e^x ו-$\ln x$.
- להשתמש בגזירה סתומה כדי למצוא dy/dx.
- למצוא נגזרות מסדר גבוה ולפרש את הנגזרת השנייה כתאוצה.

מושגי מפתח

- כלל החזקה: $d/dx\ x^n = nx^{n-1}$ לכל n ממשי.
- כלל המכפלה: $(fg)' = f'g + fg'$. כלל המנה: $(f/g)' = (f'g - fg')/g^2$.
- כלל השרשרת: הנגזרת של $f(g(x))$ היא $f'(g(x)) \cdot g'(x)$, נגזרת חיצונית כפול נגזרת פנימית.
- e^x היא הנגזרת של עצמה; הנגזרת של $\ln x$ היא $1/x$. לכן e מופיע בכל מודל של גדילה ודעיכה.
- גזירה סתומה: גזרו את שני האגפים לפי x, כאשר y מטופל כפונקציה של x.

משוואות מפתח

$$\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}$$

```
d/dxx^n=nx^n-1
```

כלל החזקה

$$(fg)' = f'g + fg', \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

```
(fg)'=f'g+fg', ( fg)'=(f'g-fg')/(g^2)
```

כללי המכפלה והמנה

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))\, g'(x)$$

```
d/dxf(g(x))=f'(g(x)) g'(x)
```

כלל השרשרת

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x, \quad \frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$$

d/dxe^x=e^x, d/dx x=1x

מעריכית ולוגריתם

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x, \quad \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$$

d/dx x= x, d/dx x=- x

נגזרות טריגונומטריות

דוגמאות פתורות שלב אחר שלב

דוגמה 3.1 גזרו את $y = x^2 \sin x$.

1. כלל המכפלה עם $f = x^2$, $g = \sin x$.
2. $y' = 2x \sin x + x^2 \cos x$.

תשובה: $y' = 2x \sin x + x^2 \cos x$.

דוגמה 3.2 גזרו את $y = (3x^2 + 1)^5$.

1. חיצוני: $u^5 \to 5u^4$. פנימי: $u = 3x^2 + 1 \to 6x$.
2. $y' = 5(3x^2 + 1)^4 \cdot 6x$.

תשובה: $y' = 30x(3x^2 + 1)^4$.

דוגמה 3.3 מצאו את השיפוע של המעגל $x^2 + y^2 = 25$ בנקודה $(3, 4)$.

1. גזרו: $2x + 2y\,y' = 0$.
2. $y' = -x/y = -3/4$.

תשובה: $-3/4$.

תרגילים

פתרו כל אחד קודם על נייר, ואז בדקו.

1. $\frac{d}{dx}(3x^4 - 5x^2 + 7)$

   $12x^3 - 10x$.

2. $\frac{d}{dx}\ln(x^2 + 1)$

$2x/(x^2 + 1)$ (כלל השרשרת).

3. $d/dx\ (x/(x + 1))$.

$[(x + 1) - x]/(x + 1)^2 = 1/(x + 1)^2$.

4. כמות גדלה לפי $Q(t) = 1000e^{(0.02t)}$. באיזה קצב היא גדלה ב-$t = 0$, ומהו קצב הגידול היחסי שלה?

$Q'(t) = 20e^{(0.02t)}$, ולכן 20 יחידות ליחידת זמן ב-$t = 0$. $Q'/Q = 0.02$, קבוע של 2% ליחידת זמן.

5. אם $s(t) = t^3 - 6t^2$, מצאו את המהירות והתאוצה ב-$t = 1$.

$v = 3t^2 - 12t = -9$; $a = 6t - 12 = -6$.

תפיסות שגויות נפוצות

מיתוס: הנגזרת של מכפלה היא מכפלת הנגזרות.

בפועל: השתמשו בכלל המכפלה: $(fg)' = f'g + fg'$.

מיתוס: $d/dx\ \sin(3x) = \cos(3x)$.

בפועל: כלל השרשרת: $3\cos(3x)$.

מיתוס: $d/dx\ e^x = x\,e^{x-1}$.

בפועל: כלל החזקה אינו חל על מעריכים משתנים. $d/dx\ e^x = e^x$.

כרטיסיות

כלל החזקה

$d/dx\ x^n = nx^{n-1}$.

כלל המכפלה

$(fg)' = f'g + fg'$.

כלל המנה

$(f/g)' = (f'g - fg')/g^2$.

כלל השרשרת

$[f(g(x))]' = f'(g(x))\ g'(x)$.

$d/dx\ e^x$

e^x.

$d/dx\ \ln x$

$1/x$.

בוחן לבדיקה עצמית

1. $d/dx\ (x^5) =$

$5x^4$

x^4

$5x^5$

$4x^5$

$5x^4$. כלל החזקה.

2. d/dx sin(x²) =

$\cos(x^2)$

$2x\cos(x^2)$

$2\sin x\cos x$

$-2x\cos(x^2)$

$2x\cos(x^2)$. כלל השרשרת: $2x \cdot \cos(x^2)$.

3. d/dx ln(5x) =

$5/x$

$1/(5x)$

$1/x$

$\ln 5$

$1/x = 5/(5x)$. $1/x$.

4. אם המיקום הוא s(t), התאוצה היא…

$s(t)$

$s'(t)$

$s''(t)$

$\int s\,dt$

s″(t). התאוצה היא הנגזרת של המהירות.

לנסות שוב את הבוחן

איך זה עוזר להציל את כדור הארץ

מודלים של גדילה ודעיכה המבוססים על e^x מתארים גידול אוכלוסיות, דעיכה רדיואקטיבית המשמשת לתיארוך ליבות קרח וגידול מצטבר של פליטות. כלל השרשרת נותן את קצבי השינוי שלהם בצעד אחד.

קצב גידול יחסי (Q′/Q) הוא הדרך שבה מדענים משווים שינויים בכמויות בגדלים שונים מאוד, למשל כמה מהר משתנה שטח של יער או גז חממה, באחוזים לשנה.

ב־Saving Planets: מרכז בנושא כריתת יערות · תצפית על כדור הארץ

מקורות: OpenStax Calculus 1, 3.9 Derivatives of Exponential and Logarithmic Functions (באנגלית) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/3-9-derivatives-of-exponential-and-logarithmic-functions) · נאס״א: פחמן דו-חמצני כסימן חיוני (באנגלית) (https://climate.nasa.gov/vital-signs/carbon-dioxide/)

מקורות לימוד חינמיים

- OpenStax Calculus 1, 3.3 Differentiation Rules (באנגלית) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/3-3-differentiation-rules): כללי החזקה, המכפלה והמנה.
- OpenStax Calculus 1, 3.5 Derivatives of Trigonometric Functions (באנגלית) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/3-5-derivatives-of-trigonometric-functions): נגזרות טריגונומטריות.
- OpenStax Calculus 1, 3.6 The Chain Rule (באנגלית) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/3-6-the-chain-rule): כלל השרשרת עם דוגמאות רבות.
- OpenStax Calculus 1, 3.8 Implicit Differentiation (באנגלית) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/3-8-implicit-differentiation): גזירה סתומה.

צפו בהרצאה

Clip 2: Introduction to General Rules for Differentiation (https://ocw.mit.edu/courses/18-01sc-single-variable-calculus-fall-2010/resources/clip-2-introduction-to-general-rules-for-differentiation/) (באנגלית)

MIT 18.01SC Single Variable Calculus (Fall 2010), MIT OpenCourseWare. רישיון: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · תנאי שימוש (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). הקישור מיועד ללימוד חינמי בלבד; Saving Planets אינו קשור לאוניברסיטה זו ואינו נתמך על ידה.

סיימתי את היחידה הזו

יישומים I: קצבים קשורים, קירוב ושיטת ניוטון

להשתמש בנגזרות כדי לקשר בין גדלים משתנים, לקרב ערכים קשים, לחשב גבולות מסובכים ולפתור משוואות באופן מספרי.

מטרות הלמידה

בסוף היחידה הזו תוכלו:

- לפתור בעיות של קצבים קשורים.
- להשתמש בקירוב לינארי ובדיפרנציאלים כדי להעריך ערכים ושגיאות.
- להחיל את כלל לופיטל על צורות 0/0 ו-∞/∞.
- לפתור משוואות בשיטת ניוטון.

מושגי מפתח

- קצבים קשורים: כתבו משוואה שמקשרת בין הגדלים, גזרו לפי הזמן, ואז הציבו ערכים.
- ליד x = a, f(x) ≈ f(a) + f′(a)(x − a): המשיק הוא ההערכה הטובה ביותר בקו ישר.
- כלל לופיטל: עבור 0/0 או ∞/∞, lim f/g = lim f′/g′ אם האגף הימני קיים.
- שיטת ניוטון: $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$. בדרך כלל היא מתכנסת מהר מאוד מניחוש התחלתי טוב.

משוואות מפתח

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

```
L(x)=f(a)+f'(a)(x-a)
```

קירוב לינארי

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

```
(f(x))/(g(x))=(f'(x))/(g'(x))
```

כלל לופיטל (0/0 או ∞/∞)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

```
x_n+1=x_n-(f(x_n))/(f'(x_n))
```

שיטת ניוטון

דוגמאות פתורות שלב אחר שלב

דוגמה 4.1 הרדיוס של בלון מזג אוויר כדורי גדל ב-2 cm/s. באיזה קצב גדל נפחו כאשר $r = 10$ cm?

1. $V = (4/3)\pi r^3$, ולכן $dV/dt = 4\pi r^2 \, dr/dt$.
2. $dV/dt = 4\pi \times 10^2 \times 2 = 800\pi \approx 2{,}513$ cm³/s.

תשובה: בערך 2,510 cm³/s.

דוגמה 4.2 העריכו את $\sqrt{4.1}$ בקירוב לינארי.

1. $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 4$: $f(4) = 2$, $f'(4) = 1/(2\sqrt{4}) = 1/4$.
2. $L(4.1) = 2 + (1/4)(0.1) = 2.025$.

תשובה: 2.025 (הערך האמיתי הוא 2.02485…).

דוגמה 4.3 השתמשו בשיטת ניוטון כדי לפתור $x^2 = 2$ החל מ-$x_0 = 1$.

1. $f(x) = x^2 - 2$, $f'(x) = 2x$, ולכן $x_{n+1} = x_n - (x_n^2 - 2)/(2x_n)$.
2. $x_1 = 1.5$, $x_2 = 1.416667$, $x_3 = 1.414216$.

תשובה: $x_3 = 1.414216$, כבר נכון עד 6 ספרות משמעותיות ($\sqrt{2} = 1.4142136$…).

תרגילים

פתרו כל אחד קודם על נייר, ואז בדקו.

1. סולם באורך 5 m מחליק לאורך קיר; הבסיס שלו מתרחק ב-0.5 m/s. באיזו מהירות יורד הקצה העליון כאשר הבסיס נמצא 3 m מהקיר?

   $x^2 + y^2 = 25$, ולכן $x\,x' + y\,y' = 0$. עם $x = 3, y = 4$: $y' = -(3/4)(0.5) = -0.375$ m/s, כלומר יורד ב-0.375 m/s.

2. $\lim (e^x - 1)/x$ כאשר $x \to 0$

   לופיטל: $e^x/1 \to 1$.

3. שיטת ניוטון עבור $x^3 - 2x - 5 = 0$ החל מ-$x_0 = 2$. מצאו את x_1 ו-x_2.

   $f(2) = -1$, $f'(2) = 10$, ולכן $x_1 = 2.1$. $f(2.1) = 0.061$, $f'(2.1) = 11.23$, ולכן $x_2 = 2.0946$.

4. השתמשו בדיפרנציאלים כדי להעריך את השינוי בשטח של דיסקה ברדיוס 10 cm אם הרדיוס גדל ב-0.1 cm.

   $dA = 2\pi r \, dr = 2\pi \times 10 \times 0.1 = 2\pi \approx 6.28$ cm².

תפיסות שגויות נפוצות

מיתוס: לופיטל פירושו לגזור את המנה f/g.

בפועל: גזרו את המונה והמכנה בנפרד, ורק בצורות 0/0 או ∞/∞.

מיתוס: בקצבים קשורים, מציבים קודם מספרים ואז גוזרים.

בפועל: גזרו קודם; הצבה מוקדמת מדי הופכת משתנים לקבועים שנגזרתם אפס.

מיתוס: שיטת ניוטון תמיד מוצאת שורש.

בפועל: נקודת התחלה גרועה, או f′ קרובה לאפס, יכולות להרחיק אותה או לגרום לה להיכנס למחזור.

כרטיסיות

קצבים קשורים

לגזור לפי t משוואה שמקשרת בין גדלים.

קירוב לינארי

$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$.

דיפרנציאל

$dy = f'(x)\,dx$.

כלל לופיטל

עבור 0/0 או ∞/∞: $\lim f/g = \lim f'/g'$.

שיטת ניוטון

$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$.

התכנסות ריבועית

ליד שורש פשוט, שיטת ניוטון מכפילה בערך את מספר הספרות הנכונות בכל צעד.

בוחן לבדיקה עצמית

1. קירוב לינארי משתמש ב…

ישר חותך

ישר משיק

ישר נורמל

ערך ממוצע

ישר משיק. L(x) הוא המשיק ב-a.

2. כלל לופיטל חל על…

כל גבול

צורות 0/0 ו-∞/∞

פולינומים בלבד

צורות 1/0

צורות 0/0 ו-∞/∞. רק מנות לא מוגדרות.

3. צעד אחד של שיטת ניוטון על $f(x) = x^2 - 9$ מ-$x_0 = 4$ נותן...

3

3.125

3.5

4.5

.3.125. $4 - 7/8 = 3.125$

4. אם $V = s^3$ ו-$ds/dt = 1$, אז dV/dt ב-$s = 2$ שווה...

3

6

8

12

.12. $3s^2\ ds/dt = 12$

לנסות שוב את הבוחן

איך זה עוזר להציל את כדור הארץ

חיזוי מיקומו של לוויין פירושו פתרון משוואת קפלר, $M = E - e \sin E$, עבור E. אין לה פתרון אלגברי, ולכן פותרים אותה בדרך כלל באופן מספרי, לרוב בשיטת ניוטון, כמו במעבדה B. חיזוי מסלול מדויק שומר על לווייני תצפית כדור הארץ במרחק בטוח זה מזה וממקם נכון את התמונות שלהם על המפה.

בלוני מזג אוויר, כמו זה שבדוגמה 4.1, נושאים מכשירים שמודדים את האטמוספרה לתחזיות מזג האוויר; קצבים קשורים מקשרים בין מהירות העלייה שלהם לקצב ההתרחבות.

ב־Saving Planets: מדריך מסלולים · מחשבון זמן מחזור מסלולי

מקורות: OpenStax Calculus 1, 4.9 Newton’s Method (באנגלית) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/4-9-newtons-method) · OpenStax University Physics 1, 13.5 Kepler’s Laws (באנגלית) (https://openstax.org/books/university-physics-volume-1/pages/13-5-keplers-laws-of-planetary-motion)

מקורות לימוד חינמיים

- OpenStax Calculus 1, 4.1 Related Rates (באנגלית) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/4-1-related-rates): פרק מספר לימוד חינמי.
- OpenStax Calculus 1, 4.2 Linear Approximations and Differentials (באנגלית) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/4-2-linear-approximations-and-differentials): הערכות באמצעות המשיק ושגיאה.
- OpenStax Calculus 1, 4.8 L’Hôpital’s Rule (באנגלית) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/4-8-lhopitals-rule): צורות לא מוגדרות.
- OpenStax Calculus 1, 4.9 Newton’s Method (באנגלית) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/4-9-newtons-method): מציאת שורשים באיטרציות.

צפו בהרצאה

Lecture 12: Related Rates (https://ocw.mit.edu/courses/18-01-single-variable-calculus-fall-2006/resources/lecture-12-related-rates/) (באנגלית)

MIT 18.01 Single Variable Calculus (Fall 2006), MIT OpenCourseWare. רישיון: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · תנאי שימוש (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). הקישור מיועד ללימוד חינמי בלבד; Saving Planets אינו קשור לאוניברסיטה זו ואינו נתמך על ידה.

☐ **סיימתי את היחידה הזו**

יישומים II: קיצון, צורת הגרף ואופטימיזציה

למצוא מקסימום ומינימום, לקרוא את צורת הגרף מתוך f′ ו-f″, ולפתור בעיות תכנון אמיתיות באופטימיזציה.

מטרות הלמידה

בסוף היחידה הזו תוכלו:

- למצוא נקודות קריטיות וקיצון מוחלט בקטע סגור.
- לנסח את משפט הערך הממוצע ולהשתמש בו.
- להשתמש במבחני הנגזרת הראשונה והשנייה ולמצוא נקודות פיתול.
- לנסח ולפתור בעיות אופטימיזציה שימושיות.

מושגי מפתח

- נקודות קריטיות הן היכן ש-f′ = 0 או ש-f′ אינה קיימת. הקיצון של פונקציה חלקה מתקבל שם או בקצוות.
- משפט הערך הממוצע: בקטע חלק, הקצב הרגעי שווה לקצב הממוצע בנקודה כלשהי.
- f″ > 0 פירושו עולה; f″ < 0 פירושו קעורה כלפי מעלה. נקודת פיתול היא היכן שהקעירות מתחלפת.
- מתכון לאופטימיזציה: שרטטו, כתבו את הגודל שרוצים לייעל כפונקציה של משתנה אחד בעזרת האילוץ, גזרו, מצאו נקודות קריטיות ובדקו את הקצוות.

משוואות מפתח

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

```
f'(c)=(f(b)-f(a))/(b-a)
```

משפט הערך הממוצע

$$f'(c) = 0,\ f''(c) < 0 \Rightarrow \text{local max}$$

```
f'(c)=0,\ f''(c)<0 max
```

מבחן הנגזרת השנייה

$$C_p(a) = 4a(1-a)^2$$

```
C_p(a)=4a(1-a)^2
```

מקדם ההספק של טורבינת רוח כפונקציה של ההשראה הצירית a (מודל דיסקת המפעיל)

דוגמאות פתורות שלב אחר שלב

דוגמה 5.1 מצאו את נקודות הקיצון המקומיות של f(x) = x³ − 3x.

1. $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$ עבור $x = \pm 1$.
2. $f''(x) = 6x$: $f''(-1) = -6 < 0$ (מקסימום), $f''(1) = 6 > 0$ (מינימום).
3. $f(-1) = 2$, $f(1) = -2$.

תשובה: מקסימום מקומי ב-$x = -1$ 2; מינימום מקומי ב-$x = 1$ 2−.

דוגמה 5.2 פחית גלילית סגורה צריכה להכיל $500\ \text{cm}^3$. איזה רדיוס דורש הכי מעט מתכת?

1. אילוץ: $\pi r^2 h = 500$, ולכן $h = 500/(\pi r^2)$.
2. שטח $A = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + 1000/r$.
3. $A' = 4\pi r - 1000/r^2 = 0$ נותן $r^3 = 500/(2\pi)$, $r = 4.30\ \text{cm}$.
4. אז $h = 8.60\ \text{cm} = 2r$, ו-$A = 349\ \text{cm}^2$.

תשובה: $r = 4.30\ \text{cm}$, $h = 8.60\ \text{cm}$ (הגובה שווה לקוטר).

דוגמה 5.3 במודל הפשוט ביותר של טורבינת רוח, החלק של הספק הרוח שנלכד הוא $Cp = 4a(1-a)^2$, כאשר a הוא מידת ההאטה של הרוח על ידי הרוטור. מצאו את המקסימום.

1. $Cp' = 4(1-a)^2 - 8a(1-a) = 4(1-a)(1-3a)$.
2. נקודות קריטיות $a = 1$ ו-$a = 1/3$; $a = 1$ נותן $Cp = 0$.
3. $Cp(1/3) = 4 \times (1/3) \times (2/3)^2 = 16/27 = 0.593$.

תשובה: 59.3%: גבול בץ, המקסימום התאורטי לכל טורבינת רוח.

תרגילים

פתרו כל אחד קודם על נייר, ואז בדקו.

1. לחקלאי יש 100 m גדר לשלוש צלעות של מלבן לאורך נהר. מהו השטח הגדול ביותר?

   $A = x(100 - 2x)$; $A' = 100 - 4x = 0$ ב-$x = 25$. שטח $= 50 \times 25 = 1{,}250\ \text{m}^2$.

2. מצאו את המקסימום והמינימום המוחלטים של $f(x) = x^2 - 4x$ בקטע $[0, 5]$.

   נקודה קריטית $x = 2$: $f = -4$. קצוות: $f(0) = 0$, $f(5) = 5$. מקסימום 5, מינימום 4−.

3. אמתו את משפט הערך הממוצע עבור $f(x) = x^2$ בקטע $[1, 3]$.

   קצב ממוצע $= (9 - 1)/2 = 4$; $f'(c) = 2c = 4$ ב-$c = 2$, בתוך $[1, 3]$.

4. היכן $f(x) = x^3 - 6x^2$ קעורה כלפי מעלה?

   $f'' = 6x - 12 > 0$ כאשר $x > 2$; נקודת פיתול ב-$x = 2$.

תפיסות שגויות נפוצות

מיתוס: $f'(c) = 0$ תמיד פירושו מקסימום או מינימום.

בפועל: ל-x^3 יש $f'(0) = 0$ אבל אין שם קיצון.

מיתוס: המקסימום המוחלט תמיד נמצא בנקודה קריטית.

בפועל: בקטע סגור הוא יכול להיות בקצה. תמיד בדקו אותם.

מיתוס: קעורה כלפי מעלה פירושה עולה.

בפועל: הקעירות קשורה ל-f''; פונקציה יכולה להיות קעורה כלפי מעלה ויורדת, כמו e^{-x}.

כרטיסיות

נקודה קריטית

$f' = 0$ או לא מוגדרת.

משפט ערכי הקיצון

רציפה ב-$[a, b]$ ⇒ קיימים מקסימום ומינימום מוחלטים.

משפט הערך הממוצע

$f'(c) = [f(b) - f(a)]/(b - a)$ עבור c כלשהו.

מבחן הנגזרת הראשונה

החלפת סימן של f' מ-+ ל-− היא מקסימום; מ-− ל-+ היא מינימום.

קעירות

$f'' > 0$ כלפי מעלה, $f'' < 0$ כלפי מטה.

גבול בץ

C_p מרבי $= 16/27 \approx 59.3\%$.

בוחן לבדיקה עצמית

1. אם $f'(c) = 0$ ו-$f''(c) > 0$, אז ב-c יש ל-f…

- מקסימום מקומי
- מינימום מקומי
- נקודת פיתול
- אין מסקנה

מינימום מקומי. קעורה כלפי מעלה בנקודה שטוחה: עמק.

2. גבול בץ לטורבינות רוח הוא בערך…

33%

50%

59%

100%

4a(1 − a)² ממקסום של ,59%. 16/27 ≈ 0.593.

3. משפט הערך הממוצע מבטיח נקודה שבה…

f = 0

f′ = 0 תמיד

f′ שווה לקצב השינוי הממוצע

f″ = 0

f′ שווה לקצב השינוי הממוצע. קצב רגעי = קצב ממוצע.

4. נקודת פיתול היא היכן ש…

f′ = 0

f מחליפה סימן

הקעירות מתחלפת

f לא מוגדרת

הקעירות מתחלפת. f″ מחליפה סימן.

לנסות שוב את הבוחן

איך זה עוזר להציל את כדור הארץ

אופטימיזציה היא הנדסה. גבול בץ בדוגמה 5.3 נובע מנגזרת אחת שהושוותה לאפס, והוא אומר למהנדסי רוח מה המרב שטורבינה כלשהי תוכל אי פעם להפיק מהרוח.

גם מתכנני משימות מבצעים אופטימיזציה: מעבר ההמן הוא בדרך כלל המסלול החסכוני ביותר בדלק עם שתי הבערות בין שני מסלולים מעגליים, ופחות דלק פירושו שיגורים קטנים וזולים יותר ללווייני אקלים ומזג אוויר.

שימוש במינימום חומר למשימה, כמו הפחית בדוגמה 5.2, מצמצם את האנרגיה והמשאבים שנדרשים לייצורה.

ב־Saving Planets: מחשבון מעבר ההמן · פיזיקה I, יחידה 4: אנרגיית רוח

מקורות: משרד האנרגיה האמריקאי: איך פועלות טורבינות רוח? (באנגלית) (https://www.energy.gov/eere/wind/how-do-wind-turbines-work) · OpenStax Calculus 1, 4.7 Applied Optimization Problems (באנגלית) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/4-7-applied-optimization-problems)

מקורות לימוד חינמיים

- OpenStax Calculus 1, 4.3 Maxima and Minima (באנגלית) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/4-3-maxima-and-minima): קיצון ונקודות קריטיות.
- OpenStax Calculus 1, 4.5 Derivatives and the Shape of a Graph (באנגלית) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/4-5-derivatives-and-the-shape-of-a-graph): מבחני הנגזרת הראשונה והשנייה.
- OpenStax Calculus 1, 4.7 Applied Optimization Problems (באנגלית) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/4-7-applied-optimization-problems): בעיות תכנון פתורות רבות.

סיימתי את היחידה הזו

אינטגרלים והמשפט היסודי של החשבון האינפיניטסימלי

אינטגרלים מסכמים חלקים זעירים: שטח, מרחק, אנרגיה. המשפט היסודי מקשר אותם לנגזרות.

מטרות הלמידה

בסוף היחידה הזו תוכלו:

- לקרב שטחים בסכומי רימן ובכלל הטרפז.
- להגדיר את האינטגרל המסוים ולהשתמש בתכונותיו.
- להשתמש בשני חלקי המשפט היסודי של החשבון האינפיניטסימלי.
- למצוא פונקציות קדומות, כולל בהצבה, ולחשב שינוי נטו, ערך ממוצע ושטחים בין עקומות.

מושגי מפתח

- סכום רימן מסכם f(xᵢ)Δx על פני פרוסות קטנות; האינטגרל המסוים הוא הגבול שלו כשהפרוסות מצטמצמות.
- המשפט היסודי, חלק 1: d/dx ∫ₐˣ f(t) dt = f(x). אינטגרציה וגזירה מבטלות זו את זו.
- המשפט היסודי, חלק 2: ∫ₐᵇ f(x) dx = F(b) − F(a) לכל פונקציה קדומה F.
- משפט השינוי נטו: אינטגרציה של קצב נותנת את השינוי הכולל. אינטגרציה של הספק נותנת אנרגיה; של מהירות נותנת העתק.
- הצבה היא כלל השרשרת בכיוון ההפוך.

משוואות מפתח

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

_a^bf(x) dx=_n∞_i=1^nf(x_i^*)Δ x

אינטגרל מסוים

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

d/dx_a^xf(t) dt=f(x)

המשפט היסודי, חלק 1

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

_a^bf(x) dx=F(b)-F(a)

המשפט היסודי, חלק 2

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C\ (n \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

x^n dx=^n+1n+1+C\ (n-1), 1x dx=|x|+C

פונקציות קדומות בסיסיות

$$f_{avg} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

f_avg=1b-a_a^bf(x) dx

ערך ממוצע

דוגמאות פתורות שלב אחר שלב

דוגמה 6.1 חשבו את ∫₀² x² dx.

1. פונקציה קדומה x³/3.
2. 8/3 − 0 = 8/3.

תשובה: 8/3 ≈ 2.667.

דוגמה 6.2 חשבו את ∫₀¹ 2x(x² + 1)³ dx.

1. נציב u = x² + 1, du = 2x dx; u נע מ-1 עד 2.
2. ∫₁² u³ du = [u⁴/4]₁² = (16 − 1)/4.

תשובה: 15/4 = 3.75.

דוגמה 6.3 ביום בהיר, תפוקה של מערך סולארי מתוארת כ-P(t) = 5 sin(πt/12) kW עבור 0 ≤ t ≤ 12 שעות אחרי הזריחה. כמה אנרגיה הוא מפיק?

1. אנרגיה = ∫₀¹² 5 sin(πt/12) dt.
2. פונקציה קדומה: −(60/π) cos(πt/12).
3. −(60/π)(cos π − cos 0) = 120/π.

תשובה: 120/π ≈ 38.2 kWh (מודל מפושט, לא מערך אמיתי).

תרגילים

פתרו כל אחד קודם על נייר, ואז בדקו.

1. $\int_0^{\pi} \sin x \, dx$.

   $[-\cos x]_0^{\pi} = 1 + 1 = 2$.

2. $\frac{d}{dx} \int_0^{x} \cos(t^2) \, dt$.

   $\cos(x^2)$, לפי חלק 1 של המשפט היסודי.

3. מהירות העלייה של טיל היא $v(t) = 9.8t$ m/s במשך 3 s. לאיזה גובה הוא עולה?

   $\int_0^{3} 9.8t \, dt = 4.9 \times 9 = 44.1$ m.

4. מצאו את השטח בין $y = x$ ל-$y = x^2$ בקטע $[0, 1]$.

   $\int_0^{1} (x - x^2) \, dx = 1/2 - 1/3 = 1/6$.

5. מצאו את הערך הממוצע של $f(x) = x^2$ בקטע $[0, 3]$.

   $(1/3) \int_0^{3} x^2 \, dx = (1/3)(9) = 3$.

תפיסות שגויות נפוצות

מיתוס: אינטגרל הוא תמיד שטח, ולכן הוא תמיד חיובי.

בפועל: זה שטח מסומן: חלקים מתחת לציר נחשבים שליליים. $\int_0^{2\pi} \sin x \, dx = 0$.

מיתוס: לשכוח את ה-C + לא משנה.

בפועל: באינטגרלים לא מסוימים הקבוע הוא חלק מהתשובה; הוא חשוב בכל פעם שניתן תנאי התחלה.

מיתוס: בהצבה, השאירו את הגבולות הישנים.

בפועל: החליפו את הגבולות לערכי u, או הציבו חזרה לפני החישוב.

כרטיסיות

סכום רימן

$\sum f(x_i^*) \, \Delta x$; הערכת שטח.

אינטגרל מסוים

הגבול של סכומי רימן; שטח מסומן.

המשפט היסודי, חלק 1

$\frac{d}{dx} \int_a^{x} f = f(x)$.

המשפט היסודי, חלק 2

$\int_a^{b} f = F(b) - F(a)$.

שינוי נטו

הצבה

אינטגרל של קצב = שינוי כולל. u = g(x), du = g′(x) dx: כלל השרשרת בכיוון ההפוך.

בוחן לבדיקה עצמית

1. $\int_1^3 2x\,dx =$

4

8

9

6

$[x^2]_1^3 = 9 - 1 = 8$. 8.

2. אינטגרציה של עקומת הספק (kW) לאורך זמן (h) נותנת…

kW

kWh של אנרגיה

kW/h

הספק ממוצע

kWh של אנרגיה. משפט השינוי נטו: האינטגרל של קצב הוא סך כולל.

3. $\frac{d}{dx}\int_2^x t^3\,dt =$

x^3

$3x^2$

$x^4/4$

$x^3 - 8$

x^3. המשפט היסודי, חלק 1.

4. $\int 1/x\,dx =$

$x^0/0$

$\ln|x| + C$

$-1/x^2 + C$

$e^x + C$

$\ln|x| + C$. החריג $n = -1$ בכלל החזקה.

לנסות שוב את הבוחן

איך זה עוזר להציל את כדור הארץ

אנרגיה היא האינטגרל של ההספק לאורך זמן. מתכנני רשת החשמל מסכמים כך את תפוקת השמש והרוח שעה אחר שעה כדי לדעת כמה אנרגיה נקייה יקבלו וכמה אגירה יצטרכו.

מכשירי לוויין מודדים קצבים, כמו זרימת אור שמש או מים, ואינטגרלים הופכים את הקצבים האלה לסכומים: כמה אנרגיה כדור הארץ סופג, או כמה מים אגן נהר מרוויח או מאבד במהלך עונה.

האינטגרציה המספרית במעבדה D היא בדיוק הדרך שבה מבצעים אינטגרציה לנתונים אמיתיים, שמגיעים כמדידות נפרדות.

ב־GRACE-FO: Saving Planets · מחשבונים

מקורות: OpenStax Calculus 1, 5.3 The Fundamental Theorem of Calculus (באנגלית) https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/5-3-the-fundamental-theorem-of-calculus · משרד האנרגיה האמריקאי: איך פועלות טורבינות רוח? (באנגלית) https://www.energy.gov/eere/wind/how-do-wind-turbines-work

מקורות לימוד חינמיים

- OpenStax Calculus 1, 5.1 Approximating Areas (באנגלית) https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/5-1-approximating-areas: סכומי רימן.
- OpenStax Calculus 1, 5.2 The Definite Integral (באנגלית) https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/5-2-the-definite-integral: הגדרה ותכונות.
- OpenStax Calculus 1, 5.3 The Fundamental Theorem of Calculus (באנגלית) https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/5-3-the-fundamental-theorem-of-calculus: שני החלקים עם הוכחות.
- OpenStax Calculus 1, 5.5 Substitution (באנגלית) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/5-5-substitution): הצבת u.
- OpenStax Calculus 1, 6.1 Areas between Curves (באנגלית) https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/6-1-areas-between-curves: שטחים בין עקומות.

צפו בהרצאה

Clip 1: Proof of the Second Fundamental Theorem of Calculus (https://ocw.mit.edu/courses/18-01sc-single-variable-calculus-fall-2010/resources/clip-1-proof-of-the-second-fundamental-theorem-of-calculus/) (באנגלית)

MIT 18.01SC Single Variable Calculus (Fall 2010), MIT OpenCourseWare. רישיון: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · תנאי שימוש (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use). הקישור מיועד ללימוד חינמי בלבד; Saving Planets אינו קשור לאוניברסיטה זו ואינו נתמך על ידה.

סיימתי את היחידה הזו

תרגילים

התרגילים האלה נמצאים בתוך כל יחידה. פתרו על הנייר, ואז פתחו את התשובה.

1. פונקציות וגבולות
   5 תרגילים
2. רציפות ונגזרת
   4 תרגילים
3. כללי גזירה
   5 תרגילים
4. יישומים I: קצבים קשורים, קירוב ושיטת ניוטון
   4 תרגילים
5. יישומים II: קיצון, צורת הגרף ואופטימיזציה
   4 תרגילים
6. אינטגרלים והמשפט היסודי של החשבון האינפיניטסימלי
   5 תרגילים

מעבדות מחשב

לחשבון אינפיניטסימלי אין מעבדה רטובה, ולכן בקורס הזה יש במקומה ארבע מעבדות מחשב קצרות. כל אחת מיישמת יחידה על נתונים בסגנון אמיתי בגיליון אלקטרוני: הפרשים סופיים, שיטת ניוטון, אופטימיזציה ואינטגרציה מספרית.

אלה אותן שיטות מספריות שמהנדסים ומדעני אקלים משתמשים בהן כל יום. נתוני הדוגמה בכל מעבדה נועדו לתרגול; כל מעבדה מקשרת למקור הנתונים האמיתי.

מקור בטיחות: המעבדה לניטור גלובלי של NOAA: מגמות CO_2 (באנגלית) (https://gml.noaa.gov/ccgg/trends/)

מעבדה A: קצבי שינוי מנתונים

שבוע 4

מטרה: להעריך קצב שינוי ואת התאוצה שלו מתוך טבלת מדידות, כמו שמדעני אקלים מטפלים ברשומת CO_2.

$$f'(t_i) \approx \frac{f(t_{i+1}) - f(t_{i-1})}{t_{i+1} - t_{i-1}}, \quad f''(t_i) \approx \frac{f(t_{i+1}) - 2f(t_i) + f(t_{i-1})}{h^2}$$

הפרשים מרכזיים לנגזרת הראשונה והשנייה

מהלך הניסוי

1. הזינו את טבלת הדוגמה לגיליון אלקטרוני.
2. חשבו הפרשים קדמיים (קצב בכל שנה) והפרשים מרכזיים.
3. חשבו את ההפרש השני: האם הקצב עצמו עולה?
4. הורידו את הממוצעים השנתיים האמיתיים מ-NOAA וחזרו על התהליך; השוו לקצבי הגידול ש-NOAA מפרסמת.

טבלת נתונים

שנה t	C (ppm)
0	400.0
1	402.4
2	404.9
3	407.5
4	410.2

ערכי דוגמה לתרגול, לא מדידות אמיתיות. השתמשו בנתוני NOAA לעבודה האמיתית.

חישוב לדוגמה

1. הפרש מרכזי ב-t = 2: (407.5 − 402.4)/2 = 2.55 ppm לשנה.
2. הפרש שני ב-t = 2: 407.5 − 2(404.9) + 402.4 = 0.1 ppm לשנה².
3. הפרש שני חיובי פירושו שקצב הגידול עצמו עולה (בדוגמה הזו).

בטיחות

- שמרו עותק של הנתונים הגולמיים בלי לגעת בו; בצעו חישובים בעמודות חדשות.

חלופה ביתית או וירטואלית

- כאן הכול נעשה במחשב או אפילו ביד.

NOAA GML: קצבי הגידול של CO_2 (באנגלית) (https://gml.noaa.gov/ccgg/trends/gr.html)

הקשר לכדור הארץ: קצבי שינוי הם הדרך שבה מדווחים על מגמות CO_2 ומשווים ביניהן. NOAA GML: מגמות CO_2 באטמוספרה (באנגלית) (https://gml.noaa.gov/ccgg/trends/)

☐ **השלמתי את המעבדה הזו (רטובה או וירטואלית)**

מעבדה B: שיטת ניוטון ומשוואת קפלר

שבוע 9

מטרה: לפתור את משוואת קפלר M = E − e sin E עבור האנומליה האקסצנטרית E של לוויין, הצעד המרכזי בחיזוי מיקומו.

$$E_{n+1} = E_n - \frac{E_n - e\sin E_n - M}{1 - e\cos E_n}$$

```
E_n+1=E_n-(E_n-e E_n-M)/(1-e E_n)
```

שיטת ניוטון למשוואת קפלר

מהלך הניסוי

1. קבעו M = 1.0 rad ו-e = 0.1 בגיליון אלקטרוני; התחילו מ-E_0 = M.
2. העתיקו את נוסחת ניוטון כלפי מטה לארבע שורות.
3. שימו לב כמה ספרות מפסיקות להשתנות בכל צעד.
4. נסו e = 0.9 ו-E_0 = M: כמה צעדים נדרשים עכשיו?

טבלת נתונים

צעד n	E_n (rad)
0	1.000000
1	1.088953
2	1.088598
3	1.088598

ערכים מחושבים (M = 1.0 rad, e = 0.1).

חישוב לדוגמה

1. f(E) = E − 0.1 sin E − 1; f′(E) = 1 − 0.1 cos E.
2. מ-E_0 = 1: E_1 = 1.088953, E_2 = 1.088598, ואחרי זה 7 הספרות הראשונות מפסיקות להשתנות.
3. בדיקה: 1.088598 − 0.1 sin(1.088598) = 1.000000.

בטיחות

- אין, מעבר לשימוש רגיל במחשב.

חלופה ביתית או וירטואלית

- מספיק גיליון אלקטרוני או Desmos.

OpenStax Calculus 1, 4.9 Newton's Method’ (באנגלית) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/4-9-newtons-method)

הקשר לכדור הארץ: חיזוי מסלולים שומר על לווייני תצפית כדור הארץ וממקם נכון את הנתונים שלהם.

- [ ] **השלמתי את המעבדה הזו (רטובה או וירטואלית)**

מעבדה C: אופטימיזציה של טורבינת רוח

שבוע 11

מטרה: לאשר את גבול בץ באופן מספרי ובחשבון אינפיניטסימלי.

$$C_p(a) = 4a(1-a)^2, \quad C_p'(a) = 4(1-a)(1-3a)$$

```
C_p(a)=4a(1-a)^2, C_p'(a)=4(1-a)(1-3a)
```

מקדם ההספק והנגזרת שלו

מהלך הניסוי

1. צרו טבלה של Cp עבור a מ-0 עד 0.5 בצעדים של 0.05 ושרטטו אותה.
2. מצאו את הערך הגבוה ביותר בטבלה.
3. פתרו Cp′(a) = 0 ביד והשוו.

טבלת נתונים

a	Cp
0.20	0.512
0.30	0.588
1/3	0.593
0.40	0.576

ערכים מחושבים מהמודל.

חישוב לדוגמה

1. Cp(0.3) = 4 × 0.3 × 0.7² = 0.588.
2. Cp(1/3) = 16/27 = 0.593, המקסימום.
3. טורבינות אמיתיות לוכדות פחות בגלל גרר, סיבוב השובל והפסדים בקצות הלהבים.

בטיחות

- אין, מעבר לשימוש רגיל במחשב.

חלופה ביתית או וירטואלית

- מספיק גיליון אלקטרוני או Desmos.

משרד האנרגיה האמריקאי: איך פועלות טורבינות רוח? (באנגלית) (https://www.energy.gov/eere/wind/how-do-wind-turbines-work)

הקשר לכדור הארץ: ידיעת התקרה אומרת למהנדסים כמה שיפור עוד אפשרי.

- [ ] השלמתי את המעבדה הזו (רטובה או וירטואלית)

מעבדה D: אינטגרציה מספרית של אנרגיה סולארית

שבוע 13

מטרה: לבצע אינטגרציה לעקומת הספק בכלל נקודת האמצע ובכלל הטרפז ולהשוות לתשובה המדויקת.

$$T_n = \frac{\Delta t}{2}\left[f_0 + 2f_1 + \cdots + 2f_{n-1} + f_n\right]$$

```
T_n=Δ t2[f_0+2f_1++2f_n-1+f_n]
```

כלל הטרפז

מהלך הניסוי

1. מודל $P(t) = 5\sin(\pi t/12)$ kW בתחום $0 \le t \le 12$ h.
2. עם $n = 6$ פרוסות ($\Delta t = 2$ h), חשבו את סכומי נקודת האמצע והטרפז.
3. השוו לערך המדויק $120/\pi$ kWh. הכפילו את n וצפו בשגיאות מצטמצמות.

טבלת נתונים

שיטה ($n = 6$)	אנרגיה (kWh)
נקודת אמצע	38.64
טרפז	37.32
מדויק (המשפט היסודי)	38.20

ערכי מודל, לא נתונים ממערך אמיתי.

חישוב לדוגמה

1. טרפז: $[0 + 2(2.5 + 4.330 + 5 + 4.330 + 2.5) + 0]/2 \times 2 = 37.32$ kWh.
2. נקודת אמצע: $2 \times \sum P$ ב-$t = 1, 3, \ldots$, $= 38.64$ kWh.
3. שגיאות: נקודת אמצע $+0.44$, טרפז -0.88. השגיאה של נקודת האמצע היא בערך חצי משגיאת הטרפז, בסימן הפוך, כפי שהתאוריה צופה.

בטיחות

- אין, מעבר לשימוש רגיל במחשב.

חלופה ביתית או וירטואלית

- מספיק גיליון אלקטרוני או Desmos.

OpenStax Calculus 1, 5.1 Approximating Areas (באנגלית) https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/5-1-approximating-areas

הקשר לכדור הארץ: כך מסכמים נתוני אנרגיה אמיתיים לפי שעה כדי לתכנן חשמל נקי ואגירה.

☐ **השלמתי את המעבדה הזו (רטובה או וירטואלית)**

מערכי תרגול למבחן

מדדו זמן: כ־10 דקות לבעיה. אחר כך השוו לפתרונות המלאים.

מערך תרגול לאמצע הקורס (יחידות 3–1)

1. מצאו את $\lim (x - 4)/(\sqrt{x} - 2)$ כאשר $x \to 4$.

   1. הכפילו ב-$\sqrt{x} + 2$: $(x - 4)/(\sqrt{x} + 2) = \sqrt{x} + 2$.
   2. הציבו $x = 4$: $2 + 2$.

   תשובה: 4.

2. גזרו את $y = x^3 e^x$ וחשבו ב-$x = 1$.

   1. כלל המכפלה: $y' = 3x^2 e^x + x^3 e^x = (3x^2 + x^3)e^x$.
   2. At $x = 1$: $4e$.

   תשובה: $4e \approx 10.87$.

3. מצאו את המשיק ל-$y = \ln x$ ב-$x = 1$.

   1. $y(1) = 0$, $y' = 1/x = 1$.
   2. $y - 0 = 1(x - 1)$.

   תשובה: $y = x - 1$.

4. גזרו את $y = \sin(3x^2)$.

   1. כלל השרשרת: $\cos(3x^2) \cdot 6x$.

   תשובה: $y' = 6x \cos(3x^2)$.

מערך תרגול מסכם (כל היחידות)

1. מים זורמים לתוך מכל גלילי ברדיוס 2 m בקצב $0.5\ m^3/min$. באיזה קצב עולה המפלס?

   1. $V = \pi r^2 h = 4\pi h$, ולכן $dV/dt = 4\pi\, dh/dt$.
   2. $dh/dt = 0.5/(4\pi)$.

   תשובה: בערך 0.0398 m/min (4.0 cm לדקה).

2. חשבו את $\int_1^e (1/x)\, dx$.

.[ln x]₁^e = 1 − 0 .1

תשובה: 1.

3. חשבו את ∫₀⁴ √x dx.

1. פונקציה קדומה (2/3)x^(3/2).
2. (2/3)(8) = 16/3.

תשובה: 16/3 ≈ 5.33.

4. למלבן היקף של 40 m. אילו ממדים ממקסמים את שטחו?

1. A = x(20 − x); A′ = 20 − 2x = 0 עבור x = 10.

תשובה: ריבוע של 10 m × 10 m, בשטח 100 m².

5. השתמשו בלופיטל כדי למצוא את lim x²/eˣ כאשר x → ∞.

1. 2x/eˣ → ∞/∞: ∞/∞, עדיין.
2. 2/eˣ → 0.

תשובה: 0: פונקציות מעריכיות גדלות מהר יותר מכל חזקה.

דף נוסחאות

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} [f(x+h) - f(x)]/h$$

$$(x^n)' = n x^{n-1}$$

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$(f/g)' = (f'g - fg')/g^2$$

$$[f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x)$$

$$(e^x)' = e^x,\ (\ln x)' = 1/x$$

$$(\sin x)' = \cos x,\ (\cos x)' = -\sin x,\ (\tan x)' = \sec^2$$

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$$

$$f'(c) = [f(b) - f(a)]/(b - a)$$

$$\int x^n\,dx = x^{n+1}/(n+1) + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C,\ \int dx/x = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C,\ \int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int_a^b f\,dx = F(b) - F(a)$$

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

$$f_{avg} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f\,dx$$

קבועים

קבוע	ערך
e	2.718281828…
π	3.141592654…
ln 2	0.693147…
1 רדיאן	57.2958°

מקור: NIST: קבועים פיזיקליים יסודיים (באנגלית) (https://physics.nist.gov/cuu/Constants/)

כלי גרפים ונתונים

השתמשו בכלים ובמקורות הנתונים החינמיים האלה לצד הקורס.

- המחשבון הגרפי Desmos (https://www.desmos.com/calculator): שרטטו פונקציות, מחוונים ומשיקים בדפדפן.
- PhET: Calculus Grapher (https://phet.colorado.edu/en/simulations/calculus-grapher): ציירו פונקציה וראו את הנגזרת והאינטגרל שלה.
- NOAA: מגמות CO_2 באטמוספרה (באנגלית) (https://gml.noaa.gov/ccgg/trends/): נתוני CO_2 אמיתיים ממאונה לואה ומכל העולם לתרגול קצבי שינוי.

מילון מונחים

פונקציה קדומה
פונקציה F שמקיימת F′ = f.

אסימפטוטה
ישר שגרף מתקרב אליו הרחק או ליד נקודת התפוצצות.

כלל השרשרת
נגזרת של הרכבה: נגזרת חיצונית × נגזרת פנימית.

קעירות
הכיוון שבו גרף מתעקם; סימן f″.

רציפות
בלי קטיעות: הגבול שווה לערך הפונקציה.

נקודה קריטית
היכן ש-f′ אפס או לא מוגדרת.

אינטגרל מסוים
שטח מסומן מתחת לעקומה בין שני גבולות.

נגזרת

קצב שינוי רגעי; שיפוע המשיק.

דיפרנציאל

$dy = f'(x)\,dx$.

המשפט היסודי של החשבון האינפיניטסימלי

מקשר בין נגזרות לאינטגרלים; $\int_a^b f = F(b) - F(a)$.

צורה לא מוגדרת

$0/0$ או ∞/∞; דורש עוד עבודה.

נקודת פיתול

היכן שהקעירות מתחלפת.

גבול

הערך שפונקציה מתקרבת אליו.

קירוב לינארי

הערכה באמצעות המשיק.

משפט הערך הממוצע

הקצב הרגעי שווה לקצב הממוצע בנקודה כלשהי.

שיטת ניוטון

מציאת שורשים באיטרציות בעזרת משיקים.

אופטימיזציה

מציאת הערך הטוב ביותר של גודל תחת אילוצים.

סכום רימן

סכום שטחי מלבנים שמקרב אינטגרל.

הצבה

טכניקת אינטגרציה שהופכת את כלל השרשרת.

כלל הטרפז

אינטגרציה מספרית בעזרת טרפזים.

מחוון להערכה עצמית

לא ניתנים ציון או נקודות זכות. השתמשו בזה כדי להעריך בכנות איפה אתם עומדים בכל יחידה.

רמה	איך זה נראה
4 · שליטה מלאה	פותר בעיות חדשות, מצדיק כל צעד בכלל או במשפט, ובודק תשובות בעזרת גרף או הערכה.
3 · מיומן	פותר נכון את התרגילים עם טעויות אלגברה מזדמנות.
2 · מתפתח	עוקב אחרי דוגמאות פתורות אך מתקשה לבחור שיטה, או מיישם לא נכון את כלל השרשרת.
1 · מתחיל	משנן נוסחאות בלי לדעת מתי הן חלות; צריך לחזור על היחידה.

שקלול מוצע אם רוצים ציון

חלק	משקל
תרגילים	30%
מעבדות מחשב	15%
מערך תרגול לאמצע הקורס	25%
מערך תרגול מסכם	30%

שאפו לרמה 3 ומעלה בכל יחידה לפני שעוברים לקורס הבא.

קורסים קשורים

- פיזיקה + 1 מעבדה PHYS 110 + PHYS 110L
- חשבון אינפיניטסימלי 2 MATH 111
- כימיה כללית + 1 מעבדה CHEM 110 + CHEM 110L
- כל הקורסים