Dernière mise à jour: November 1, 2026

🗺️ Parcours sur quatre ans · Année 1, Automne

À propos de ce cours

Ce cours gratuit compte 6 unités et 4 travaux pratiques. Ce sont les vrais totaux, pas un programme plus long raccourci.

Un contrôle est un nombre ou un résultat de code sur une page de cours qu'un script recalcule avant publication. Le nombre affiché et le nombre recalculé doivent correspondre.

> Ceci est le plan d'un cours gratuit en autonomie rédigé par Saving Planets. Ce n'est pas un cours universitaire : il ne donne aucun crédit académique et aucun établissement n'y participe.
>
> Son programme suit celui d'un premier semestre d'analyse à l'université (calcul différentiel à une variable et introduction aux intégrales), sur le modèle des thèmes et du niveau de ressources ouvertes comme OpenStax Calculus Volume 1 et MIT OpenCourseWare 18.01SC Single Variable Calculus, vers lesquelles nous renvoyons tout au long du cours. Ces organisations ne cautionnent pas cette page.
>
> Ce que nous ajoutons : chaque unité relie l'analyse à de vrais problèmes de climat, d'énergie et de vol spatial, chaque nombre de la page est recalculé par un script de vérification avant sa mise en ligne, et quatre travaux pratiques sur ordinateur vous font pratiquer l'analyse sur des données, comme le font les scientifiques et les ingénieurs.
>
> Suivez-le dans l'ordre. Chaque unité comporte des objectifs, des notions clés, des équations, des exemples pas à pas, des exercices corrigés en détail, des erreurs fréquentes, des cartes mémoire et un quiz. Votre progression est enregistrée uniquement dans ce navigateur.

Comment ce cours aide à sauver la planète

L'analyse est la mathématique du changement. Les climatologues utilisent les dérivées pour transformer un relevé de dioxyde de carbone ou de banquise en taux de variation, les ingénieurs utilisent l'optimisation pour tirer le plus d'énergie du vent et le plus de mission de chaque kilogramme de carburant de fusée, et les intégrales additionnent une puissance pour obtenir une énergie.

Chaque unité se termine par une courte section sourcée qui montre comment ses idées aident à la fois les gens et la nature.

Pour les enseignants

Vous pouvez enseigner ce cours, ou laisser un élève le faire seul. Il est gratuit. Saving Planets ne donne ni note ni crédit scolaire.

- Cette page est le cours entier : 6 unités et 4 travaux pratiques (MATH 110).
- Prévoyez 15 semaines, environ 6 à 9 heures par semaine, y compris les semaines de travaux pratiques.
- Suivez le calendrier de 15 semaines. Lisez l'unité, faites les exercices sur papier, puis ouvrez la réponse. La semaine d'un TP, faites le TP ou la version à la maison.
- Un contrôle est un nombre ou un résultat de code sur la page qu'un script recalcule avant publication. Le nombre affiché et le nombre recalculé doivent correspondre.
- Utilisez Imprimer cette page, ou téléchargez le guide d'étude PDF. La feuille de formules est vers la fin.
- Demandez : en quoi cette unité aide-t-elle les gens et la planète ? Chaque unité a un encadré vert avec un fait sourcé.
- Copiez le modèle de guide enseignant et écrivez le nom de votre classe, le temps dont vous disposez et les questions que vous poserez. Ouvrir le modèle de guide enseignant

Avant de commencer

Prérequis

- Algèbre : factorisation, expressions rationnelles, résolution d'équations et d'inéquations.
- Fonctions et graphes : domaine, image, composition, fonctions réciproques.
- Trigonométrie : radians, cercle trigonométrique, sinus, cosinus, tangente et identités de base.
- Fonctions exponentielles et logarithmes, dont e et ln.

Comment étudier

- Lisez l'unité, puis refermez-la et essayez vous-même les exemples résolus avant de vérifier chaque étape.
- Faites chaque exercice sur papier avant d'ouvrir la réponse.
- Tracez un graphe dès que possible. La plupart des erreurs d'analyse se voient sur un dessin qui n'a pas de sens.
- Vérifiez les dérivées en estimant la pente numériquement, et les intégrales en estimant l'aire.
- Utilisez un outil graphique comme Desmos pour tester votre intuition, jamais pour remplacer le travail.
- Refaites les quiz quelques jours plus tard. La pratique espacée vaut mieux qu'une longue séance.

Ce qu'il vous faut

- Un ordinateur ou une tablette avec un tableur (Google Sheets, Excel ou LibreOffice).

- Une calculatrice graphique gratuite comme Desmos.
- Facultatif : Python avec NumPy, pour ceux qui veulent programmer les travaux pratiques.

Programme suggéré sur 15 semaines

Environ 6 à 9 heures par semaine : lecture, exercices et, les semaines de TP, le TP.

Semaine	Unité	Thèmes	Lecture
1	Fonctions et limites	Révision des fonctions ; l'idée de limite ; limites à partir de graphes et de tableaux	OpenStax 1.1–1.5, 2.1–2.2
2	Fonctions et limites	Règles de calcul des limites ; techniques algébriques ; limites trigonométriques remarquables	OpenStax 2.3
3	Fonctions et limites	Limites à l'infini ; asymptotes ; la définition précise	OpenStax 2.5, 4.6
4	Continuité et dérivée	Continuité, TVI, la dérivée ; TP A	OpenStax 2.4, 3.1–3.2
5	Règles de dérivation	Règles de la puissance, du produit et du quotient ; dérivées d'ordre supérieur	OpenStax 3.3–3.4
6	Règles de dérivation	Dérivées trigonométriques ; la dérivation en chaîne	OpenStax 3.5–3.6
7	Règles de dérivation	Dérivation implicite ; dérivées des exponentielles et des logarithmes ; entraînement de mi-semestre	OpenStax 3.7–3.9
8	Applications I : taux liés, approximation et méthode de Newton	Taux liés ; approximation linéaire et différentielles	OpenStax 4.1–4.2
9	Applications I : taux liés, approximation et méthode de Newton	Règle de L'Hôpital ; méthode de Newton ; TP B	OpenStax 4.8–4.9
10	Applications II : extrema, allure du graphe et optimisation	Extrema, théorème des accroissements finis, allure du graphe	OpenStax 4.3–4.5
11	Applications II : extrema, allure du graphe et optimisation	Optimisation appliquée ; TP C	OpenStax 4.7

Semaine	Unité	Thèmes	Lecture
12	Intégrales et théorème fondamental de l’analyse	Sommes de Riemann et intégrale définie	OpenStax 5.1–5.2
13	Intégrales et théorème fondamental de l’analyse	Le théorème fondamental ; TP D	OpenStax 5.3–5.4
14	Intégrales et théorème fondamental de l’analyse	Changement de variable ; valeur moyenne ; aires entre courbes	OpenStax 5.5, 6.1
15	Révision	Révision et série d’exercices finale	Toutes les unités

Votre progression

Cochez les unités et les TP à mesure que vous les terminez, et faites les quiz. La progression et les scores sont enregistrés uniquement dans ce navigateur et ne nous sont jamais envoyés.

Unités

Fonctions et limites

Une limite décrit ce dont une fonction s'approche. C'est l'idée qui se trouve sous chaque dérivée et chaque intégrale.

Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette unité, vous saurez :

- Estimer des limites à partir de graphes et de tableaux, y compris les limites à gauche et à droite.
- Calculer des limites avec les règles de calcul, la factorisation et la multiplication par le conjugué.
- Trouver des limites à l'infini et identifier les asymptotes horizontales et verticales.
- Énoncer la définition précise (ε–δ) d'une limite.

Notions clés

- lim f(x) quand x → a = L signifie que l'on peut rendre f(x) aussi proche de L que l'on veut en prenant x assez proche de a, mais différent de a.
- Une limite n'existe que si les limites à gauche et à droite coïncident.
- Pour une forme 0/0, simplifiez d'abord : factorisez, simplifiez ou multipliez par un conjugué.
- Deux limites remarquables : sin x / x → 1 et (1 − cos x)/x → 0 quand x → 0 (x en radians).
- À l'infini, comparez les plus hautes puissances d'une fonction rationnelle.

Équations clés

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

```
_x af(x)=L
```

Notation de limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

```
_x0( x)/(x)=1
```

Une limite trigonométrique fondamentale

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \; 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Définition précise d'une limite

Exemples résolus pas à pas

Exemple 1.1 Calculez $\lim (x^2 - 4)/(x - 2)$ quand $x \to 2$.

1. La substitution directe donne 0/0, il faut donc simplifier.
2. $(x^2 - 4)/(x - 2) = (x - 2)(x + 2)/(x - 2) = x + 2$ pour $x \neq 2$.
3. Substituez maintenant : $2 + 2 = 4$.

Réponse : 4.

Exemple 1.2 Calculez $\lim (\sqrt{(x + 4)} - 2)/x$ quand $x \to 0$.

1. Encore 0/0. Multipliez le numérateur et le dénominateur par le conjugué $\sqrt{(x + 4)} + 2$.
2. Le numérateur devient $(x + 4) - 4 = x$, donc l'expression vaut $1/(\sqrt{(x + 4)} + 2)$.
3. Substituez $x = 0$: $1/(2 + 2) = 1/4$.

Réponse : 1/4.

Exemple 1.3 Calculez $\lim (3x^2 + 1)/(2x^2 - 5)$ quand $x \to \infty$.

1. Divisez le numérateur et le dénominateur par x^2 : $(3 + 1/x^2)/(2 - 5/x^2)$.
2. As $x \to \infty$, $1/x^2 \to 0$.

Réponse : 3/2, donc $y = 3/2$ est une asymptote horizontale.

Exercices

Faites chacun d'abord sur papier, puis vérifiez.

1. $\lim (x^2 - 9)/(x - 3)$ quand $x \to 3$

   Factorisez : $x + 3 \to 6$.

2. $\lim (5x + 2)/(x - 1)$ quand $x \to \infty$

   Divisez par x : 5.

3. $\lim (1 - \cos x)/x$ quand $x \to 0$

   0 (une limite classique).

4. $\lim 1/x$ quand $x \to 0^+$ et quand $x \to 0^-$

   $+\infty$ à droite, $-\infty$ à gauche, donc la limite bilatérale n'existe pas.

5. $\lim \sin(3x)/x$ quand $x \to 0$

   Écrivez-la $3 \cdot \sin(3x)/(3x) \to 3 \times 1 = 3$.

Idées reçues fréquentes

Idée reçue : Une limite, c'est simplement la valeur de la fonction en ce point.

En réalité : La limite ne tient pas compte de f(a). f peut ne pas être définie en a et avoir quand même une limite en ce point, comme dans l'exemple 1.1.

Idée reçue : 0/0 signifie que la limite vaut 0 (ou n'existe pas).

En réalité : 0/0 est une forme indéterminée : la limite peut valoir n'importe quoi. Il faut simplifier.

Idée reçue : Si le graphe s'approche d'une droite, il ne peut jamais la couper.

En réalité : Un graphe peut couper une asymptote horizontale ; l'asymptote décrit le comportement loin de l'origine.

Cartes mémoire

Limite

La valeur dont f(x) s'approche quand x s'approche de a.

Limite à gauche ou à droite

Limite à gauche ($x \to a^-$) ou à droite ($x \to a^+$).

Forme indéterminée

0/0 ou ∞/∞ : simplifiez avant de conclure.

Asymptote horizontale

$y = L$ quand $f(x) \to L$ lorsque $x \to \pm\infty$.

Asymptote verticale

$x = a$ quand $f(x) \to \pm\infty$ lorsque $x \to a$.

Définition ε–δ

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ qui maintient f(x) à moins de ε de L.

Quiz d'autocontrôle

1. $\lim (x^2 - 1)/(x - 1)$ quand $x \to 1$ vaut…

0

1

2

non définie

2. Factorisez en x + 1 → 2.

2. Une limite bilatérale existe quand…

f(a) est définie

les limites à gauche et à droite sont égales

la fonction est un polynôme

le graphe n’a pas de trous

les limites à gauche et à droite sont égales. Les deux limites latérales doivent exister et coïncider.

3. lim sin x / x quand x → 0 (radians) vaut…

0

1

∞

π/180

1. Une limite fondamentale ; c’est pour cela que l’analyse utilise les radians.

4. lim (4x³ − x)/(2x³ + 7) quand x → ∞ vaut…

0

2

4

∞

2. Coefficients dominants : 4/2 = 2.

Refaire ce quiz

Comment cela aide à sauver la planète

Tout relevé climatique est une liste de mesures prises à des instants séparés. L'idée de limite, faire tendre le pas de temps vers zéro, permet aux scientifiques de parler du taux de variation à un instant donné, et pas seulement sur une année ou une décennie.

La NOAA mesure le dioxyde de carbone à l'observatoire du Mauna Loa depuis 1958. Ses pages de données publient à la fois la concentration et son taux de croissance annuel, une application directe du taux de variation moyen que les limites rendent précis.

Sur Saving Planets : OCO-2 : mesurer le CO_2 depuis l'orbite (en anglais)

Sources : NOAA GML : tendances du CO_2 atmosphérique (en anglais) (https://gml.noaa.gov/ccgg/trends/) · NOAA GML : taux de croissance du CO_2 (en anglais) (https://gml.noaa.gov/ccgg/trends/gr.html)

Ressources d'apprentissage gratuites

- OpenStax Calculus 1, 2.2 The Limit of a Function (en anglais) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/2-2-the-limit-of-a-function): Section de manuel gratuite.
- OpenStax Calculus 1, 2.3 The Limit Laws (en anglais) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/2-3-the-limit-laws): Règles de calcul des limites, avec exemples corrigés.
- OpenStax Calculus 1, 2.5 The Precise Definition of a Limit (en anglais) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/2-5-the-precise-definition-of-a-limit): Démonstrations ε–δ.
- MIT OpenCourseWare 18.01SC Single Variable Calculus (en anglais) (https://ocw.mit.edu/courses/18-01sc-single-variable-calculus-fall-2010/): Cours, notes et séries d'exercices gratuits du MIT.

☐ **J'ai terminé cette unité**

Continuité et dérivée

La continuité, c'est l'absence de rupture. La dérivée est la limite des taux de variation moyens : la pente de la tangente.

Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette unité, vous saurez :

- Tester la continuité d'une fonction et utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.
- Calculer une dérivée à partir de la définition par la limite.
- Interpréter une dérivée comme une pente, une vitesse et un taux de variation, avec ses unités.
- Écrire l'équation d'une tangente.

Notions clés

- f est continue en a si f(a) est définie, si la limite existe et si elles sont égales.
- Théorème des valeurs intermédiaires : une fonction continue sur [a, b] prend toutes les valeurs comprises entre f(a) et f(b).
- La dérivée f'(a) est la limite du taux d'accroissement [f(a + h) − f(a)]/h quand h → 0.
- Les unités de f' sont celles de f par unité de x : mètres par seconde, ppm par an.
- Une fonction n'est pas dérivable en un point anguleux, un point de rebroussement, une tangente verticale ou une discontinuité.

Équations clés

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

```
f'(x)=_h0(f(x+h)-f(x))/(h)
```

Définition de la dérivée par la limite

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

```
y-f(a)=f'(a)(x-a)
```

Tangente en x = a

Exemples résolus pas à pas

Exemple 2.1 Utilisez la définition pour trouver la dérivée de f(x) = x².

1. [(x + h)² − x²]/h = (2xh + h²)/h = 2x + h.
2. Quand h → 0, cela tend vers 2x.

Réponse : $f'(x) = 2x$.

Exemple 2.2 Trouvez la tangente à $y = x^3$ en $x = 1$.

1. $y' = 3x^2$, donc la pente en $x = 1$ vaut 3.
2. Point : $(1, 1)$.
3. $y - 1 = 3(x - 1)$, donc $y = 3x - 2$.

Réponse : $y = 3x - 2$.

Exemple 2.3 Pour quelle valeur de a la fonction $f(x) = x + 1$ $(x < 1)$, ax^2 $(x \geq 1)$ est-elle continue partout ?

1. Limite à gauche en 1 : $1 + 1 = 2$.
2. Valeur et limite à droite : $a \times 1^2 = a$.
3. La continuité exige $a = 2$.

Réponse : $a = 2$.

Exercices

Faites chacun d'abord sur papier, puis vérifiez.

1. Utilisez la définition pour dériver $f(x) = 1/x$.

   $[1/(x + h) - 1/x]/h = -1/(x(x + h)) \to -1/x^2$.

2. Une pierre lâchée tombe de $s(t) = 4.9t^2$ mètres. Trouvez sa vitesse moyenne de $t = 1$ à $t = 3$ s et sa vitesse instantanée à $t = 2$ s.

   Moyenne : $(44.1 - 4.9)/2 = 19.6$ m/s. Instantanée : $s'(t) = 9.8t$, donc 19.6 m/s à $t = 2$.

3. Montrez que $x^3 + x - 1 = 0$ a une racine entre 0 et 1.

   $f(0) = -1 < 0$ et $f(1) = 1 > 0$, et f est continue, donc d'après le TVI elle passe par 0 entre les deux.

4. $f(x) = |x|$ est-elle dérivable en 0 ?

   Non. La pente vaut -1 à gauche et $+1$ à droite, donc la limite du taux d'accroissement n'existe pas (point anguleux).

Idées reçues fréquentes

Idée reçue : Continue signifie dérivable.

En réalité : |x| est continue en 0 mais n'y est pas dérivable. En revanche, dérivable implique bien continue.

Idée reçue : La dérivée, c'est la variation de y.

En réalité : C'est le taux de variation : variation de y par unité de variation de x, à la limite.

Idée reçue : La tangente ne touche la courbe qu'en un seul point.

En réalité : Elle peut couper la courbe ailleurs, et même au point de tangence (comme $y = x^3$ en 0).

Cartes mémoire

Continuité en a

lim f(x) quand x → a est égale à f(a).

Théorème des valeurs intermédiaires

Continue sur [a, b] ⇒ toute valeur entre f(a) et f(b) est atteinte.

Taux d'accroissement

[f(x + h) − f(x)]/h, un taux de variation moyen.

Dérivée

Limite du taux d'accroissement ; taux de variation instantané.

Tangente

y = f(a) + f'(a)(x − a).

Dérivable ⇒ continue

Mais pas l'inverse.

Quiz d'autocontrôle

1. Si s(t) est une position en mètres et t est en secondes, s'(t) s'exprime en…

m

s

m/s

m/s^2

m/s. Unités de f divisées par unités de x.

2. La dérivée de x^2 en $x = 3$ vaut…

3

6

9

2

6. $f'(x) = 2x$.

3. Quelle fonction est continue mais non dérivable en 0 ?

x^2

$|x|$

sin x

e^x

$|x|$. Elle présente un point anguleux en 0.

4. Le TVI exige que la fonction soit…

dérivable

croissante

continue sur [a, b]

un polynôme

continue sur [a, b]. La continuité sur l'intervalle fermé est l'hypothèse clé.

Refaire ce quiz

Comment cela aide à sauver la planète

La dérivée transforme un relevé de positions en vitesse. La navigation par satellite le fait en permanence : GRACE-FO, par exemple, mesure comment varie la distance entre ses deux satellites,

et ces variations révèlent des déplacements d'eau et de glace sur Terre.

Les taux avec leurs unités sont la façon dont on rend compte du changement climatique en pratique : parties par million de CO_2 par an, millimètres de niveau marin par an. Lire une dérivée avec ses unités est une compétence de base de la culture scientifique.

Sur Saving Planets : GRACE-FO · Physique I + TP

Sources : NASA JPL: GRACE-FO (https://gracefo.jpl.nasa.gov/) · OpenStax Calculus 1, 3.1 Defining the Derivative (en anglais) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/3-1-defining-the-derivative)

Ressources d'apprentissage gratuites

- OpenStax Calculus 1, 2.4 Continuity (en anglais) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/2-4-continuity): La continuité et le TVI.
- OpenStax Calculus 1, 3.1 Defining the Derivative (en anglais) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/3-1-defining-the-derivative): La dérivée à partir de la définition.
- PhET : Calculus Grapher (https://phet.colorado.edu/en/simulations/calculus-grapher): Voir une fonction et sa dérivée côte à côte.

Regarder le cours magistral

Clip 4: Physical Interpretation of Derivatives, Continued (https://ocw.mit.edu/courses/18-01sc-single-variable-calculus-fall-2010/resources/clip-4-physical-interpretation-of-derivatives-continued/) (en anglais)

MIT 18.01SC Single Variable Calculus (Fall 2010), MIT OpenCourseWare. Licence : CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Conditions d'utilisation (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Lien fourni uniquement pour l'étude gratuite ; Saving Planets n'est ni affilié à cette université ni soutenu par elle.

☐ **J'ai terminé cette unité**

Règles de dérivation

Règles de la puissance, du produit, du quotient et de la dérivation en chaîne, plus les dérivées des fonctions trigonométriques, exponentielles et logarithmes, et la dérivation implicite.

Objectifs d’apprentissage

À la fin de cette unité, vous saurez :

- Dériver rapidement et correctement des polynômes, des produits, des quotients et des composées.
- Dériver sin, cos, tan, e^x et ln x.
- Utiliser la dérivation implicite pour trouver dy/dx.
- Trouver des dérivées d’ordre supérieur et interpréter la dérivée seconde comme une accélération.

Notions clés

- Règle de la puissance : d/dx x^n = nx^{n-1} pour tout réel n.
- Règle du produit : (fg)' = f'g + fg'. Règle du quotient : (f/g)' = (f'g − fg')/g^2.
- Dérivation en chaîne : la dérivée de f(g(x)) est f'(g(x)) · g'(x), dérivée extérieure fois dérivée intérieure.
- e^x est sa propre dérivée ; ln x a pour dérivée 1/x. C’est pourquoi e apparaît dans tous les modèles de croissance et de décroissance.
- Dérivation implicite : dérivez les deux membres par rapport à x, en traitant y comme une fonction de x.

Équations clés

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

`d/dxx^n=nx^n-1`

Règle de la puissance

$$(fg)' = f'g + fg', \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

`(fg)'=f'g+fg', ( fg)'=(f'g-fg')/(g^2)`

Règles du produit et du quotient

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))\,g'(x)$$

`d/dxf(g(x))=f'(g(x)) g'(x)`

Dérivation en chaîne

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x, \quad \frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$$

`d/dxe^x=e^x, d/dx x=1x`

Exponentielle et logarithme

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x, \quad \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$$

`d/dx x= x, d/dx x=- x`

Dérivées trigonométriques

Exemples résolus pas à pas

Exemple 3.1 Dérivez $y = x^2 \sin x$.

1. Règle du produit avec $f = x^2$, $g = \sin x$.
2. $y' = 2x \sin x + x^2 \cos x$.

Réponse : $y' = 2x \sin x + x^2 \cos x$.

Exemple 3.2 Dérivez $y = (3x^2 + 1)^5$.

1. Extérieur : $u^5 \to 5u^4$. Intérieur : $u = 3x^2 + 1 \to 6x$.
2. $y' = 5(3x^2 + 1)^4 \cdot 6x$.

Réponse : $y' = 30x(3x^2 + 1)^4$.

Exemple 3.3 Trouvez la pente du cercle $x^2 + y^2 = 25$ au point $(3, 4)$.

1. Dérivez : $2x + 2y\,y' = 0$.
2. $y' = -x/y = -3/4$.

Réponse : $-3/4$.

Exercices

Faites chacun d’abord sur papier, puis vérifiez.

1. d/dx $(3x^4 - 5x^2 + 7)$

   $12x^3 - 10x$.

2. d/dx $\ln(x^2 + 1)$

   $2x/(x^2 + 1)$ (dérivation en chaîne).

3. d/dx $(x/(x + 1))$

   $[(x + 1) - x]/(x + 1)^2 = 1/(x + 1)^2$.

4. Une quantité croît selon Q(t) = 1000e^(0.02t). À quelle vitesse croît-elle à t = 0, et quel est son taux de croissance relatif ?

   Q'(t) = 20e^(0.02t), donc 20 unités par unité de temps à t = 0. Q'/Q = 0.02, soit 2% constants par unité de temps.

5. Si $s(t) = t^3 - 6t^2$, trouvez la vitesse et l'accélération à t = 1.

   $v = 3t^2 - 12t = -9$; $a = 6t - 12 = -6$.

Idées reçues fréquentes

Idée reçue : La dérivée d'un produit est le produit des dérivées.

En réalité : Utilisez la règle du produit : (fg)' = f'g + fg'.

Idée reçue : d/dx sin(3x) = cos(3x).

En réalité : Dérivation en chaîne : 3 cos(3x).

Idée reçue : d/dx $e^x = x\,e^{x-1}$.

En réalité : La règle de la puissance ne s'applique pas aux exposants variables. d/dx $e^x = e^x$.

Cartes mémoire

Règle de la puissance

d/dx $x^n = nx^{n-1}$.

Règle du produit

(fg)' = f'g + fg'.

Règle du quotient

$(f/g)' = (f'g - fg')/g^2$.

Dérivation en chaîne

[f(g(x))]' = f'(g(x)) g'(x).

d/dx e^x

d/dx ln x

e^x. $1/x$.

Quiz d’autocontrôle

1. $d/dx\ (x^5) =$

$5x^4$

x^4

$5x^5$

$4x^5$

$5x^4$. Règle de la puissance.

2. $d/dx\ \sin(x^2) =$

$\cos(x^2)$

$2x\cos(x^2)$

$2\sin x\cos x$

$-2x\cos(x^2)$

$2x\cos(x^2)$. Dérivation en chaîne : $\cos(x^2) \cdot 2x$.

3. $d/dx\ \ln(5x) =$

$5/x$

$1/(5x)$

$1/x$

$\ln 5$

$1/x$. $5/(5x) = 1/x$.

4. Si la position est s(t), l’accélération est…

s(t)

s'(t)

s''(t)

∫s dt

s''(t). L'accélération est la dérivée de la vitesse.

Refaire ce quiz

Comment cela aide à sauver la planète

Les modèles de croissance et de décroissance fondés sur e^x décrivent la croissance des populations, la désintégration radioactive utilisée pour dater les carottes de glace et la croissance composée des émissions. La dérivation en chaîne donne leurs taux de variation en une seule étape.

Un taux de croissance relatif (Q'/Q) permet aux scientifiques de comparer les variations de quantités de tailles très différentes, par exemple la vitesse à laquelle une surface forestière ou un gaz à effet de serre évolue, en pourcentage par an.

Sur Saving Planets : Dossier déforestation · Observation de la Terre

Sources : OpenStax Calculus 1, 3.9 Derivatives of Exponential and Logarithmic Functions (en anglais) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/3-9-derivatives-of-exponential-and-logarithmic-functions) · NASA : le dioxyde de carbone, signe vital de la planète (en anglais) (https://climate.nasa.gov/vital-signs/carbon-dioxide/)

Ressources d'apprentissage gratuites

- OpenStax Calculus 1, 3.3 Differentiation Rules (en anglais) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/3-3-differentiation-rules): Règles de la puissance, du produit et du quotient.
- OpenStax Calculus 1, 3.5 Derivatives of Trigonometric Functions (en anglais) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/3-5-derivatives-of-trigonometric-functions): Dérivées trigonométriques.
- OpenStax Calculus 1, 3.6 The Chain Rule (en anglais) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/3-6-the-chain-rule): La dérivation en chaîne, avec de nombreux exemples.
- OpenStax Calculus 1, 3.8 Implicit Differentiation (en anglais) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/3-8-implicit-differentiation): La dérivation implicite.

Regarder le cours magistral

Clip 2: Introduction to General Rules for Differentiation (https://ocw.mit.edu/courses/18-01sc-single-variable-calculus-fall-2010/resources/clip-2-introduction-to-general-rules-for-differentiation/) (en anglais)

MIT 18.01SC Single Variable Calculus (Fall 2010), MIT OpenCourseWare. Licence : CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Conditions d'utilisation (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Lien fourni

uniquement pour l’étude gratuite ; Saving Planets n’est ni affilié à cette université ni soutenu par elle.

- [ ] **J’ai terminé cette unité**

Applications I : taux liés, approximation et méthode de Newton

Utiliser les dérivées pour relier des grandeurs qui varient, approcher des valeurs difficiles, calculer des limites délicates et résoudre des équations numériquement.

Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette unité, vous saurez :

- Résoudre des problèmes de taux liés.
- Utiliser l'approximation linéaire et les différentielles pour estimer des valeurs et des erreurs.
- Appliquer la règle de L'Hôpital aux formes 0/0 et ∞/∞.
- Résoudre des équations par la méthode de Newton.

Notions clés

- Taux liés : écrivez une équation reliant les grandeurs, dérivez par rapport au temps, puis substituez les valeurs.
- Près de x = a, f(x) ≈ f(a) + f'(a)(x − a) : la tangente est la meilleure estimation par une droite.
- Règle de L'Hôpital : pour 0/0 ou ∞/∞, lim f/g = lim f'/g' si le membre de droite existe.
- Méthode de Newton : $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$. Elle converge en général très vite à partir d'une bonne valeur de départ.

Équations clés

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

`L(x)=f(a)+f'(a)(x-a)`

Approximation linéaire

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

`(f(x))/(g(x))=(f'(x))/(g'(x))`

Règle de L'Hôpital (0/0 ou ∞/∞)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

`x_n+1=x_n-(f(x_n))/(f'(x_n))`

Méthode de Newton

Exemples résolus pas à pas

Exemple 4.1 Le rayon d'un ballon météorologique sphérique augmente de 2 cm/s. À quelle vitesse son volume augmente-t-il quand r = 10 cm ?

1. $V = (4/3)\pi r^3$, donc $dV/dt = 4\pi r^2\, dr/dt$.
2. $dV/dt = 4\pi \times 10^2 \times 2 = 800\pi \approx 2{,}513\ \text{cm}^3/\text{s}$.

Réponse : Environ 2510 cm^3/s.

Exemple 4.2 Estimez $\sqrt{4.1}$ par une approximation linéaire.

1. $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 4$: $f(4) = 2$, $f'(4) = 1/(2\sqrt{4}) = 1/4$.
2. $L(4.1) = 2 + (1/4)(0.1) = 2.025$.

Réponse : 2.025 (la vraie valeur est 2.02485…).

Exemple 4.3 Utilisez la méthode de Newton pour résoudre $x^2 = 2$ à partir de $x_0 = 1$.

1. $f(x) = x^2 - 2$, $f'(x) = 2x$, donc $x_{n+1} = x_n - (x_n^2 - 2)/(2x_n)$.
2. $x_1 = 1.5$, $x_2 = 1.416667$, $x_3 = 1.414216$.

Réponse : $x_3 = 1.414216$, déjà exact à 6 chiffres significatifs ($\sqrt{2} = 1.4142136\ldots$).

Exercices

Faites chacun d'abord sur papier, puis vérifiez.

1. Une échelle de 5 m glisse le long d'un mur ; son pied s'éloigne à 0.5 m/s. À quelle vitesse le haut descend-il quand le pied est à 3 m du mur ?

   $x^2 + y^2 = 25$, donc $x\,x' + y\,y' = 0$. Avec $x = 3$, $y = 4$: $y' = -(3/4)(0.5) = -0.375$ m/s, il descend à 0.375 m/s.

2. $\lim (e^x - 1)/x$ quand $x \to 0$

   L'Hôpital : $e^x/1 \to 1$.

3. Méthode de Newton pour $x^3 - 2x - 5 = 0$ à partir de $x_0 = 2$. Trouvez x_1 et x_2.

   $f(2) = -1$, $f'(2) = 10$, donc $x_1 = 2.1$. $f(2.1) = 0.061$, $f'(2.1) = 11.23$, donc $x_2 = 2.0946$.

4. Utilisez les différentielles pour estimer la variation de l’aire d’un disque de 10 cm de rayon si le rayon augmente de 0.1 cm.

   $dA = 2\pi r\, dr = 2\pi \times 10 \times 0.1 = 2\pi \approx 6.28$ cm².

Idées reçues fréquentes

Idée reçue : L’Hôpital, c’est dériver le quotient f/g.

En réalité : Dérivez séparément le numérateur et le dénominateur, et seulement pour les formes 0/0 ou ∞/∞.

Idée reçue : Pour les taux liés, on remplace d’abord par les nombres, puis on dérive.

En réalité : Dérivez d’abord ; remplacer trop tôt transforme des variables en constantes de dérivée nulle.

Idée reçue : La méthode de Newton trouve toujours une racine.

En réalité : Un mauvais point de départ, ou f' proche de zéro, peut la faire diverger ou tourner en boucle.

Cartes mémoire

Taux liés

Dériver par rapport à t une équation reliant des grandeurs.

Approximation linéaire

$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$.

Différentielle

$dy = f'(x)\, dx$.

Règle de L’Hôpital

Pour 0/0 ou ∞/∞ : $\lim f/g = \lim f'/g'$.

Méthode de Newton

$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$.

Convergence quadratique

Près d’une racine simple, la méthode de Newton double à peu près le nombre de chiffres exacts à chaque étape.

Quiz d’autocontrôle

1. L’approximation linéaire utilise la…

sécante

tangente

normale

valeur moyenne

tangente. L(x) est la tangente en a.

2. La règle de L'Hôpital s'applique aux...

toutes les limites

formes 0/0 et ∞/∞

polynômes seulement

formes 1/0

formes 0/0 et ∞/∞. Seulement aux quotients indéterminés.

3. Une étape de la méthode de Newton sur $f(x) = x^2 - 9$ à partir de $x_0 = 4$ donne...

3

3.125

3.5

4.5

3.125. $4 - 7/8 = 3.125$.

4. Si $V = s^3$ et $ds/dt = 1$, alors dV/dt en $s = 2$ vaut...

3

6

8

12

12. $3s^2\, ds/dt = 12$.

Refaire ce quiz

Comment cela aide à sauver la planète

Prédire où sera un satellite, c'est résoudre l'équation de Kepler, M = E − e sin E, en E. Elle n'a pas de solution algébrique ; on la résout donc couramment de façon numérique, souvent par la méthode de Newton, comme dans le TP B. Une prévision d'orbite précise maintient les satellites d'observation de la Terre à bonne distance les uns des autres et place correctement leurs images sur la carte.

Les ballons météorologiques, comme celui de l'exemple 4.1, emportent des instruments qui mesurent l'atmosphère pour les prévisions météo ; les taux liés relient la vitesse à laquelle ils montent et se dilatent.

Sur Saving Planets : Guide des orbites · Calculateur de période orbitale

Sources : OpenStax Calculus 1, 4.9 Newton's Method (en anglais) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/4-9-newtons-method) · OpenStax University Physics 1, 13.5 Kepler's Laws (en anglais) (https://openstax.org/books/university-physics-volume-1/pages/13-5-keplers-laws-of-planetary-motion)

Ressources d'apprentissage gratuites

- OpenStax Calculus 1, 4.1 Related Rates (en anglais) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/4-1-related-rates): Section de manuel gratuite.
- OpenStax Calculus 1, 4.2 Linear Approximations and Differentials (en anglais) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/4-2-linear-approximations-and-differentials): Estimations par la tangente et erreur.
- OpenStax Calculus 1, 4.8 L'Hôpital's Rule (en anglais) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/4-8-lhopitals-rule): Formes indéterminées.
- OpenStax Calculus 1, 4.9 Newton's Method (en anglais) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/4-9-newtons-method): Recherche itérative de racines.

Regarder le cours magistral

Lecture 12: Related Rates (https://ocw.mit.edu/courses/18-01-single-variable-calculus-fall-2006/resources/lecture-12-related-rates/) (en anglais)

MIT 18.01 Single Variable Calculus (Fall 2006), MIT OpenCourseWare. Licence : CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Conditions d'utilisation (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Lien fourni uniquement pour l'étude gratuite ; Saving Planets n'est ni affilié à cette université ni soutenu par elle.

☐ **J'ai terminé cette unité**

Applications II : extrema, allure du graphe et optimisation

Trouver maxima et minima, lire l’allure d’un graphe à partir de f' et f'', et résoudre de vrais problèmes de conception par l’optimisation.

Objectifs d’apprentissage

À la fin de cette unité, vous saurez :

- Trouver les points critiques et les extrema absolus sur un intervalle fermé.
- Énoncer et utiliser le théorème des accroissements finis.
- Utiliser les tests de la dérivée première et seconde et trouver les points d’inflexion.
- Poser et résoudre des problèmes d’optimisation appliquée.

Notions clés

- Les points critiques sont ceux où f' = 0 ou f' n’existe pas. Les extrema d’une fonction régulière s’y trouvent, ou aux bornes.
- Théorème des accroissements finis : sur un intervalle régulier, le taux instantané est égal au taux moyen quelque part.
- f' > 0 signifie croissante ; f'' > 0 signifie convexe (concavité vers le haut). Un point d’inflexion est un point où la concavité change.
- Méthode d’optimisation : faites un dessin, écrivez la grandeur à optimiser comme fonction d’une seule variable grâce à la contrainte, dérivez, trouvez les points critiques, vérifiez les bornes.

Équations clés

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

`f'(c)=(f(b)-f(a))/(b-a)`

Théorème des accroissements finis

$$f'(c) = 0,\ f''(c) < 0 \Rightarrow \text{local max}$$

`f'(c)=0,\ f''(c)<0 max`

Test de la dérivée seconde

$$C_p(a) = 4a(1 - a)^2$$

`C_p(a)=4a(1-a)^2`

Coefficient de puissance d’une éolienne en fonction de l’induction axiale a (modèle du disque actuateur)

Exemples résolus pas à pas

Exemple 5.1 Trouvez les extrema locaux de $f(x) = x^3 - 3x$.

1. $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$ en $x = \pm 1$.
2. $f''(x) = 6x$: $f''(-1) = -6 < 0$ (max), $f''(1) = 6 > 0$ (min).
3. $f(-1) = 2$, $f(1) = -2$.

Réponse : Maximum local 2 en $x = -1$; minimum local -2 en $x = 1$.

Exemple 5.2 Une boîte cylindrique fermée doit contenir 500 cm^3. Quel rayon utilise le moins de métal ?

1. Contrainte : $\pi r^2 h = 500$, donc $h = 500/(\pi r^2)$.
2. Aire $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r^2 + 1000/r$.
3. $A' = 4\pi r - 1000/r^2 = 0$ donne $r^3 = 500/(2\pi)$, $r = 4.30$ cm.
4. Alors $h = 8.60$ cm $= 2r$, et $A = 349$ cm^2.

Réponse : $r = 4.30$ cm, $h = 8.60$ cm (la hauteur est égale au diamètre).

Exemple 5.3 Dans le modèle le plus simple d'une éolienne, la fraction de la puissance du vent captée est $Cp = 4a(1 - a)^2$, où a mesure à quel point le rotor ralentit le vent. Trouvez le maximum.

1. $Cp' = 4(1 - a)^2 - 8a(1 - a) = 4(1 - a)(1 - 3a)$.
2. Points critiques $a = 1$ et $a = 1/3$; $a = 1$ donne $Cp = 0$.
3. $Cp(1/3) = 4 \times (1/3) \times (2/3)^2 = 16/27 = 0.593$.

Réponse : 59.3% : la limite de Betz, le maximum théorique pour toute éolienne.

Exercices

Faites chacun d'abord sur papier, puis vérifiez.

1. Un agriculteur dispose de 100 m de clôture pour trois côtés d'un rectangle longeant une rivière. Quelle est la plus grande aire possible ?

   $A = x(100 - 2x)$; $A' = 100 - 4x = 0$ en $x = 25$. Aire $= 25 \times 50 = 1250$ m^2.

2. Trouvez le maximum et le minimum absolus de $f(x) = x^2 - 4x$ sur $[0, 5]$.

   Point critique $x = 2$: $f = -4$. Bornes : $f(0) = 0$, $f(5) = 5$. Max 5, min -4.

3. Vérifiez le TAF pour $f(x) = x^2$ sur $[1, 3]$.

   Taux moyen $(9 - 1)/2 = 4$; $f'(c) = 2c = 4$ en $c = 2$, à l'intérieur de $[1, 3]$.

4. Où $f(x) = x^3 - 6x^2$ est-elle convexe ?

   $f'' = 6x - 12 > 0$ quand $x > 2$; point d'inflexion en $x = 2$.

Idées reçues fréquentes

Idée reçue : $f'(c) = 0$ signifie toujours un maximum ou un minimum.
En réalité : x^3 a $f'(0) = 0$ mais pas d'extremum en ce point.

Idée reçue : Le maximum absolu est toujours en un point critique.
En réalité : Sur un intervalle fermé, il peut être en une borne. Vérifiez-les toujours.

Idée reçue : Convexe signifie croissante.
En réalité : La concavité dépend de f'' ; une fonction peut être convexe et décroissante, comme e^{-x}.

Cartes mémoire

Point critique

$f' = 0$ ou non définie.

Théorème des valeurs extrêmes

Continue sur $[a, b] \Rightarrow$ un maximum et un minimum absolus existent.

Théorème des accroissements finis

$f'(c) = [f(b) - f(a)]/(b - a)$ pour un certain c.

Test de la dérivée première

Un changement de signe de f' de + à − donne un maximum ; de − à +, un minimum.

Concavité

$f'' > 0$ vers le haut, $f'' < 0$ vers le bas.

Limite de Betz

Cp max = 16/27 ≈ 59.3%.

Quiz d'autocontrôle

1. Si $f'(c) = 0$ et $f''(c) > 0$, alors f a en c un...

maximum local

minimum local

point d’inflexion

aucune conclusion

minimum local. Convexe en un point à tangente horizontale : une vallée.

2. La limite de Betz pour les éoliennes vaut environ…

33%

50%

59%

100%

59%. 16/27 ≈ 0.593, en maximisant $4a(1 - a)^2$.

3. Le TAF garantit un point où…

f = 0

f' = 0 toujours

f' est égale au taux de variation moyen

f'' = 0

f' est égale au taux de variation moyen. Taux instantané = taux moyen.

4. Un point d’inflexion est un point où…

f' = 0

f change de signe

la concavité change

f n’est pas définie

la concavité change. f'' change de signe.

Refaire ce quiz

Comment cela aide à sauver la planète

L'optimisation, c'est de l'ingénierie. La limite de Betz de l'exemple 5.3 vient d'une seule dérivée égalée à zéro, et elle indique aux ingénieurs éoliens le maximum qu'une éolienne pourra jamais tirer du vent.

Les concepteurs de missions optimisent aussi : un transfert de Hohmann est généralement la route à deux poussées la plus économe en carburant entre deux orbites circulaires, et moins d'ergols signifie des lancements plus petits et moins chers pour les satellites climatiques et météo.

Utiliser le moins de matière possible pour un usage donné, comme la boîte de l'exemple 5.2, réduit l'énergie et les ressources nécessaires à sa fabrication.

Sur Saving Planets : Calculateur de transfert de Hohmann · Physique I, unité 4 : l'énergie éolienne

Sources : DOE des États-Unis : comment fonctionnent les éoliennes ? (en anglais) (https://www.energy.gov/eere/wind/how-do-wind-turbines-work) · OpenStax Calculus 1, 4.7 Applied Optimization Problems (en anglais) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/4-7-applied-optimization-problems)

Ressources d'apprentissage gratuites

- OpenStax Calculus 1, 4.3 Maxima and Minima (en anglais) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/4-3-maxima-and-minima): Extrema et points critiques.
- OpenStax Calculus 1, 4.5 Derivatives and the Shape of a Graph (en anglais) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/4-5-derivatives-and-the-shape-of-a-graph): Tests de la dérivée première et seconde.
- OpenStax Calculus 1, 4.7 Applied Optimization Problems (en anglais) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/4-7-applied-optimization-problems): De nombreux problèmes de conception résolus.

☐ **J'ai terminé cette unité**

Intégrales et théorème fondamental de l’analyse

Les intégrales additionnent de minuscules morceaux : aire, distance, énergie. Le théorème fondamental les relie aux dérivées.

Objectifs d’apprentissage

À la fin de cette unité, vous saurez :

- Approcher des aires par des sommes de Riemann et la méthode des trapèzes.
- Définir l’intégrale définie et utiliser ses propriétés.
- Utiliser les deux parties du théorème fondamental de l’analyse.
- Trouver des primitives, y compris par changement de variable, et calculer une variation nette, une valeur moyenne et des aires entre courbes.

Notions clés

- Une somme de Riemann additionne f(xᵢ)Δx sur de petites tranches ; l’intégrale définie en est la limite quand les tranches rétrécissent.
- TFA partie 1 : d/dx ∫ₐˣ f(t) dt = f(x). L’intégration et la dérivation se défont l’une l’autre.
- TFA partie 2 : ∫ₐᵇ f(x) dx = F(b) − F(a) pour toute primitive F.
- Théorème de la variation nette : intégrer un taux donne la variation totale. Intégrer une puissance donne une énergie ; intégrer une vitesse donne un déplacement.
- Le changement de variable, c’est la dérivation en chaîne à l’envers.

Équations clés

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

```
_a^bf(x) dx=_n∞_i=1^nf(x_i^*)Δ x
```

Intégrale définie

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

```
d/dx_a^xf(t) dt=f(x)
```

TFA partie 1

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

```
_a^bf(x) dx=F(b)-F(a)
```

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C\ (n \neq -1), \quad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

```
x^n dx=^n+1n+1+C\ (n-1), 1x dx=|x|+C
```

Primitives usuelles

$$f_{avg} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

```
f_avg=1b-a_a^bf(x) dx
```

Valeur moyenne

Exemples résolus pas à pas

Exemple 6.1 Calculez $\int_0^2 x^2\,dx$.

1. Primitive $x^3/3$.
2. $8/3 - 0 = 8/3$.

Réponse : $8/3 \approx 2.667$.

Exemple 6.2 Calculez $\int_0^1 2x(x^2+1)^3\,dx$.

1. Posez $u = x^2 + 1$, $du = 2x\,dx$; u va de 1 à 2.
2. $\int_1^2 u^3\,du = [u^4/4]_1^2 = (16 - 1)/4$.

Réponse : $15/4 = 3.75$.

Exemple 6.3 Par temps clair, la production d'un champ solaire est modélisée par $P(t) = 5\sin(\pi t/12)$ kW pour $0 \le t \le 12$ heures après le lever du soleil. Combien d'énergie produit-il ?

1. Énergie $= \int_0^{12} 5\sin(\pi t/12)\,dt$.
2. Primitive : $-(60/\pi)\cos(\pi t/12)$.
3. $-(60/\pi)(\cos\pi - \cos 0) = 120/\pi$.

Réponse : $120/\pi \approx 38.2$ kWh (un modèle simplifié, pas un vrai champ solaire).

Exercices

Faites chacun d'abord sur papier, puis vérifiez.

1. $\int_0^{\pi} \sin x \, dx$

   $[-\cos x]_0^{\pi} = 1 + 1 = 2$.

2. $\frac{d}{dx} \int_0^{x} \cos(t^2) \, dt$

   $\cos(x^2)$, d'après la partie 1 du TFA.

3. La vitesse ascendante d'une fusée est $v(t) = 9.8t$ m/s pendant 3 s. De combien monte-t-elle ?

   $\int_0^3 9.8t \, dt = 4.9 \times 9 = 44.1$ m.

4. Trouvez l'aire entre $y = x$ et $y = x^2$ sur $[0, 1]$.

   $\int_0^1 (x - x^2) \, dx = 1/2 - 1/3 = 1/6$.

5. Trouvez la valeur moyenne de $f(x) = x^2$ sur $[0, 3]$.

   $(1/3) \int_0^3 x^2 \, dx = (1/3)(9) = 3$.

Idées reçues fréquentes

Idée reçue : Une intégrale est toujours une aire, donc elle est toujours positive.

En réalité : C'est une aire algébrique : les parties sous l'axe comptent négativement. $\int_0^{2\pi} \sin x \, dx = 0$.

Idée reçue : Oublier le + C n'a pas d'importance.

En réalité : Pour les intégrales indéfinies, la constante fait partie de la réponse ; elle compte dès qu'une condition initiale est donnée.

Idée reçue : Lors d'un changement de variable, gardez les anciennes bornes.

En réalité : Changez les bornes en valeurs de u, ou revenez à x avant d'évaluer.

Cartes mémoire

Somme de Riemann

$\Sigma f(x_i^*) \Delta x$; une estimation d'aire.

Intégrale définie

Limite des sommes de Riemann ; aire algébrique.

TFA partie 1

TFA partie 2

$d/dx \int_a^x f = f(x)$.

$\int_a^b f = F(b) - F(a)$.

Variation nette

Intégrale d’un taux = variation totale.

Changement de variable

$u = g(x)$, $du = g'(x)\,dx$: la dérivation en chaîne à l’envers.

Quiz d’autocontrôle

1. $\int_1^3 2x\,dx =$

4

8

9

6

8. $[x^2]_1^3 = 9 - 1 = 8$.

2. Intégrer une courbe de puissance (kW) dans le temps (h) donne…

kW

des kWh d’énergie

kW/h

la puissance moyenne

des kWh d’énergie. Théorème de la variation nette : l’intégrale d’un taux est un total.

3. $d/dx \int_2^x t^3\,dt =$

x^3

$3x^2$

$x^4/4$

$x^3 - 8$

x^3. TFA partie 1.

4. $\int 1/x\,dx =$

$x^0/0$

$\ln|x| + C$

$-1/x^2 + C$

$e^x + C$

$\ln|x| + C$. L'exception $n = -1$ de la règle de la puissance.

Refaire ce quiz

Comment cela aide à sauver la planète

L'énergie est l'intégrale de la puissance dans le temps. Les planificateurs du réseau électrique additionnent ainsi la production solaire et éolienne heure par heure pour savoir combien d'énergie propre ils obtiendront et de quel stockage ils auront besoin.

Les instruments satellitaires mesurent des taux, comme le flux de lumière solaire ou d'eau, et les intégrales transforment ces taux en totaux : combien d'énergie la Terre absorbe, ou combien d'eau un bassin fluvial gagne ou perd au cours d'une saison.

L'intégration numérique du TP D est exactement la façon dont on intègre des données réelles, qui se présentent sous forme de mesures séparées.

Sur Saving Planets : GRACE-FO · Calculateurs

Sources : OpenStax Calculus 1, 5.3 The Fundamental Theorem of Calculus (en anglais) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/5-3-the-fundamental-theorem-of-calculus) · DOE des États-Unis : comment fonctionnent les éoliennes ? (en anglais) (https://www.energy.gov/eere/wind/how-do-wind-turbines-work)

Ressources d'apprentissage gratuites

- OpenStax Calculus 1, 5.1 Approximating Areas (en anglais) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/5-1-approximating-areas): Sommes de Riemann.
- OpenStax Calculus 1, 5.2 The Definite Integral (en anglais) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/5-2-the-definite-integral): Définition et propriétés.
- OpenStax Calculus 1, 5.3 The Fundamental Theorem of Calculus (en anglais) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/5-3-the-fundamental-theorem-of-calculus): Les deux parties, avec démonstrations.

- OpenStax Calculus 1, 5.5 Substitution (en anglais) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/5-5-substitution): Changement de variable u.
- OpenStax Calculus 1, 6.1 Areas between Curves (en anglais) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/6-1-areas-between-curves): Aires entre courbes.

Regarder le cours magistral

Clip 1: Proof of the Second Fundamental Theorem of Calculus (https://ocw.mit.edu/courses/18-01sc-single-variable-calculus-fall-2010/resources/clip-1-proof-of-the-second-fundamental-theorem-of-calculus/) (en anglais)

MIT 18.01SC Single Variable Calculus (Fall 2010), MIT OpenCourseWare. Licence : CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Conditions d'utilisation (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Lien fourni uniquement pour l'étude gratuite ; Saving Planets n'est ni affilié à cette université ni soutenu par elle.

☐ **J'ai terminé cette unité**

Exercices

Ces exercices sont dans chaque unité. Faites-les sur papier, puis ouvrez la réponse.

1. Fonctions et limites
   5 exercices
2. Continuité et dérivée
   4 exercices
3. Règles de dérivation
   5 exercices
4. Applications I : taux liés, approximation et méthode de Newton
   4 exercices
5. Applications II : extrema, allure du graphe et optimisation
   4 exercices
6. Intégrales et théorème fondamental de l'analyse
   5 exercices

Travaux pratiques sur ordinateur

L'analyse n'a pas de laboratoire de paillasse, ce cours propose donc à la place quatre courts TP sur ordinateur. Chacun applique une unité à des données de type réel avec un tableur : différences finies, méthode de Newton, optimisation et intégration numérique.

Ce sont les mêmes méthodes numériques que les ingénieurs et les climatologues utilisent tous les jours. Les données d'exemple de chaque TP servent à s'entraîner ; chaque TP renvoie vers la vraie source de données.

Référence de sécurité : Laboratoire de surveillance mondiale de la NOAA : tendances du CO_2 (en anglais) (https://gml.noaa.gov/ccgg/trends/)

TP A : taux de variation à partir de données

SEMAINE 4

Objectif : Estimer un taux de variation et son accélération à partir d'un tableau de mesures, comme les climatologues traitent un relevé de CO_2.

$$f'(t_i) \approx \frac{f(t_{i+1}) - f(t_{i-1})}{t_{i+1} - t_{i-1}}, \quad f''(t_i) \approx \frac{f(t_{i+1}) - 2f(t_i) + f(t_{i-1})}{h^2}$$

Différences centrées pour la dérivée première et seconde

Mode opératoire

1. Saisissez le tableau d'exemple dans un tableur.
2. Calculez les différences avant (taux sur chaque année) et les différences centrées.
3. Calculez la différence seconde : le taux lui-même augmente-t-il ?
4. Téléchargez les vraies moyennes annuelles de la NOAA et recommencez ; comparez avec les taux de croissance publiés par la NOAA.

Tableau de données

Année t	C (ppm)
0	400.0
1	402.4
2	404.9
3	407.5
4	410.2

Valeurs d'exemple pour s'entraîner, pas de vraies mesures. Utilisez les données de la NOAA pour le vrai travail.

Exemple de calcul

1. Différence centrée en t = 2 : (407.5 − 402.4)/2 = 2.55 ppm par an.
2. Différence seconde en t = 2 : 407.5 − 2(404.9) + 402.4 = 0.1 ppm par an².
3. Une différence seconde positive signifie que le taux de croissance lui-même augmente (dans cet exemple).

> **Sécurité**
>
> - Gardez une copie intacte des données brutes ; faites les calculs dans de nouvelles colonnes.

Alternative à la maison ou virtuelle

- Tout se fait ici sur ordinateur, voire à la main.

NOAA GML : taux de croissance du CO_2 (en anglais) (https://gml.noaa.gov/ccgg/trends/gr.html)

Lien avec la planète : C'est par des taux de variation que l'on rend compte des tendances du CO_2 et qu'on les compare. NOAA GML : tendances du CO_2 atmosphérique (en anglais) (https://gml.noaa.gov/ccgg/trends/)

☐ **J'ai terminé ce TP (réel ou virtuel)**

TP B : méthode de Newton et équation de Kepler

SEMAINE 9

Objectif : Résoudre l'équation de Kepler M = E − e sin E pour trouver l'anomalie excentrique E d'un satellite, l'étape clé pour prédire sa position.

$$E_{n+1} = E_n - \frac{E_n - e\sin E_n - M}{1 - e\cos E_n}$$

```
E_n+1=E_n-(E_n-e E_n-M)/(1-e E_n)
```

Méthode de Newton pour l'équation de Kepler

Mode opératoire

1. Fixez M = 1.0 rad et e = 0.1 dans un tableur ; partez de E_0 = M.
2. Recopiez la formule de Newton vers le bas sur quatre lignes.
3. Observez combien de chiffres cessent de changer à chaque étape.
4. Essayez e = 0.9 et E_0 = M : combien d'étapes faut-il maintenant ?

Tableau de données

Étape n	E_n (rad)
0	1.000000
1	1.088953
2	1.088598
3	1.088598

Valeurs calculées (M = 1.0 rad, e = 0.1).

Exemple de calcul

1. f(E) = E − 0.1 sin E − 1 ; f'(E) = 1 − 0.1 cos E.
2. À partir de E_0 = 1 : E_1 = 1.088953, E_2 = 1.088598, après quoi les 7 premiers chiffres ne changent plus.
3. Vérification : 1.088598 − 0.1 sin(1.088598) = 1.000000.

> **Sécurité**
>
> - Aucune, au-delà d'un usage normal de l'ordinateur.

Alternative à la maison ou virtuelle

- Un tableur ou Desmos suffit.

OpenStax Calculus 1, 4.9 Newton's Method (en anglais) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/4-9-newtons-method)

Lien avec la planète : La prévision d'orbite protège les satellites d'observation de la Terre et place correctement leurs données.

☐ **J'ai terminé ce TP (réel ou virtuel)**

TP C : optimiser une éolienne

SEMAINE 11

Objectif : Confirmer la limite de Betz numériquement et par le calcul.

$$C_p(a) = 4a(1-a)^2, \quad C_p'(a) = 4(1-a)(1-3a)$$

`C_p(a)=4a(1-a)^2, C_p'(a)=4(1-a)(1-3a)`

Coefficient de puissance et sa dérivée

Mode opératoire

1. Tabulez Cp pour a de 0 à 0.5 par pas de 0.05 et tracez-le.
2. Trouvez la plus grande valeur du tableau.
3. Résolvez Cp'(a) = 0 à la main et comparez.

Tableau de données

a	Cp
0.20	0.512
0.30	0.588
1/3	0.593
0.40	0.576

Valeurs calculées à partir du modèle.

Exemple de calcul

1. Cp(0.3) = 4 × 0.3 × 0.7² = 0.588.
2. Cp(1/3) = 16/27 = 0.593, le maximum.
3. Les vraies éoliennes captent moins à cause de la traînée, de la rotation du sillage et des pertes en bout de pale.

> **Sécurité**
>
> - Aucune, au-delà d'un usage normal de l'ordinateur.

Alternative à la maison ou virtuelle

- Un tableur ou Desmos suffit.

DOE des États-Unis : comment fonctionnent les éoliennes ? (en anglais) (https://www.energy.gov/eere/wind/how-do-wind-turbines-work)

Lien avec la planète : Connaître le plafond indique aux ingénieurs quelle marge de progrès reste possible.

- [ ] **J’ai terminé ce TP (réel ou virtuel)**

TP D : intégration numérique de l’énergie solaire

SEMAINE 13

Objectif : Intégrer une courbe de puissance par les méthodes du point milieu et des trapèzes, et comparer avec la réponse exacte.

$$T_n = \frac{\Delta t}{2}\left[f_0 + 2f_1 + \cdots + 2f_{n-1} + f_n\right]$$

```
T_n=Δ t2[f_0+2f_1++2f_n-1+f_n]
```

Méthode des trapèzes

Mode opératoire

1. Modèle P(t) = 5 sin(πt/12) kW sur 0 ≤ t ≤ 12 h.
2. Avec n = 6 tranches (Δt = 2 h), calculez les sommes du point milieu et des trapèzes.
3. Comparez avec la valeur exacte 120/π kWh. Doublez n et regardez les erreurs diminuer.

Tableau de données

Méthode (n = 6)	Énergie (kWh)
Point milieu	38.64
Trapèzes	37.32
Exacte (TFA)	38.20

Valeurs du modèle, pas des données d’un vrai champ solaire.

Exemple de calcul

1. Trapèzes : 2 × [0 + 2(2.5 + 4.330 + 5 + 4.330 + 2.5)]/2 = 37.32 kWh.
2. Point milieu : 2 × Σ P en t = 1, 3, ..., 11 = 38.64 kWh.
3. Erreurs : point milieu +0.44, trapèzes −0.88. L’erreur du point milieu vaut environ la moitié de celle des trapèzes, avec le signe opposé, comme le prévoit la théorie.

> **Sécurité**
>
> - Aucune, au-delà d’un usage normal de l’ordinateur.

Alternative à la maison ou virtuelle

- Un tableur ou Desmos suffit.

OpenStax Calculus 1, 5.1 Approximating Areas (en anglais) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/5-1-approximating-areas)

Lien avec la planète : C'est ainsi que l'on additionne de vraies données d'énergie horaires pour planifier l'électricité propre et le stockage.

☐ **J'ai terminé ce TP (réel ou virtuel)**

Séries d'entraînement aux examens

Chronométrez-vous : environ 10 minutes par problème. Comparez ensuite avec les solutions complètes.

Série d'entraînement de mi-parcours (unités 1–3)

1. Calculez $\lim (x - 4)/(\sqrt{x} - 2)$ quand $x \to 4$.

    1. Multipliez par $\sqrt{x} + 2$: $(x - 4)(\sqrt{x} + 2)/(x - 4) = \sqrt{x} + 2$.
    2. Substituez $x = 4$: $2 + 2$.

    Réponse : 4.

2. Dérivez $y = x^3e^x$ et évaluez en $x = 1$.

    1. Règle du produit : $y' = 3x^2e^x + x^3e^x = (3x^2 + x^3)e^x$.
    2. At $x = 1$: $4e$.

    Réponse : $4e \approx 10.87$.

3. Trouvez la tangente à $y = \ln x$ en $x = 1$.

    1. $y(1) = 0$, $y' = 1/x = 1$.
    2. $y - 0 = 1(x - 1)$.

    Réponse : $y = x - 1$.

4. Dérivez $y = \sin(3x^2)$.

    1. Dérivation en chaîne : $\cos(3x^2) \cdot 6x$.

    Réponse : $y' = 6x \cos(3x^2)$.

Série d'entraînement finale (toutes les unités)

1. De l'eau entre dans une cuve cylindrique de 2 m de rayon à 0.5 m^3/min. À quelle vitesse le niveau monte-t-il ?

    1. $V = \pi r^2 h = 4\pi h$, donc $dV/dt = 4\pi\, dh/dt$.

2. dh/dt = 0.5/(4π).

Réponse : Environ 0.0398 m/min (4.0 cm par minute).

2. Calculez $\int_1^e (1/x)\,dx$.

    1. $[\ln x]_1^e = 1 - 0$.

    Réponse : 1.

3. Calculez $\int_0^4 \sqrt{x}\,dx$.

    1. Primitive (2/3)x^(3/2).
    2. (2/3)(8) = 16/3.

    Réponse : 16/3 ≈ 5.33.

4. Un rectangle a un périmètre de 40 m. Quelles dimensions maximisent son aire ?

    1. A = x(20 − x) ; A' = 20 − 2x = 0 en x = 10.

    Réponse : Un carré de 10 m × 10 m, d'aire 100 m².

5. Utilisez L'Hôpital pour trouver $\lim x^2/e^x$ quand $x \to \infty$.

    1. ∞/∞ : → $2x/e^x$, encore ∞/∞.
    2. → $2/e^x$ → 0.

    Réponse : 0 : les exponentielles croissent plus vite que toute puissance.

Fiche de formules

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} [f(x+h) - f(x)]/h \qquad (x^n)' = nx^{n-1}$$

$$(fg)' = f'g + fg' \qquad (f/g)' = (f'g - fg')/g^2$$

$$[f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x) \qquad (e^x)' = e^x,\ (\ln x)' = 1/x$$

$$(\sin x)' = \cos x,\ (\cos x)' = -\sin x,\ (\tan x)' = \sec^2 \qquad L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n) \qquad f'(c) = [f(b) - f(a)]/(b-a)$$

$$\int x^n\,dx = x^{n+1}/(n+1) + C \qquad \int e^x\,dx = e^x + C,\ \int dx/x = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C,\ \int \cos x\,dx = \sin x + C \qquad \int_a^b f\,dx = F(b) - F(a)$$

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x) \qquad f_{avg} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f\,dx$$

Constantes

Constante	Valeur
e	2.718281828...
π	3.141592654...
ln 2	0.693147...
1 radian	57.2958°

Source : NIST : constantes physiques fondamentales (en anglais) (https://physics.nist.gov/cuu/Constants/)

Outils de tracé et de données

Utilisez ces outils et sources de données gratuits en parallèle du cours.

- Calculatrice graphique Desmos (en anglais) (https://www.desmos.com/calculator): Tracez des fonctions, des curseurs et des tangentes dans le navigateur.
- PhET : Calculus Grapher (https://phet.colorado.edu/en/simulations/calculus-grapher): Dessinez une fonction et voyez sa dérivée et son intégrale.
- NOAA : tendances du CO_2 atmosphérique (en anglais) (https://gml.noaa.gov/ccgg/trends/): De vraies données de CO_2 du Mauna Loa et mondiales pour s'entraîner aux taux de variation.

Glossaire

Primitive
Une fonction F telle que F' = f.

Asymptote
Une droite dont un graphe s'approche au loin ou près d'une explosion de valeurs.

Dérivation en chaîne
Dérivée d'une composée : dérivée extérieure × dérivée intérieure.

Concavité

Sens dans lequel un graphe se courbe ; signe de f''.

Continuité
Pas de rupture : la limite est égale à la valeur de la fonction.

Point critique
Là où f' est nulle ou non définie.

Intégrale définie
Aire algébrique sous une courbe entre deux bornes.

Dérivée
Taux de variation instantané ; pente de la tangente.

Différentielle
$dy = f'(x)\,dx$.

Théorème fondamental de l'analyse
Relie dérivées et intégrales ; $\int_a^b f = F(b) - F(a)$.

Forme indéterminée
$0/0$ ou ∞/∞ ; demande plus de travail.

Point d'inflexion
Là où la concavité change.

Limite
La valeur dont une fonction s'approche.

Approximation linéaire
Estimation par la tangente.

Théorème des accroissements finis
Le taux instantané est égal au taux moyen quelque part.

Méthode de Newton
Recherche itérative de racine à l'aide de tangentes.

Optimisation
Trouver la meilleure valeur d'une grandeur sous contraintes.

Somme de Riemann
Somme d'aires de rectangles qui approche une intégrale.

Changement de variable
Technique d'intégration qui inverse la dérivation en chaîne.

Méthode des trapèzes
Intégration numérique avec des trapèzes.

Grille d'autoévaluation

Aucune note ni aucun crédit ne sont attribués. Utilisez cette grille pour juger honnêtement où vous en êtes dans chaque unité.

Niveau	À quoi cela ressemble
4 · Maîtrise	Résout des problèmes inédits, justifie chaque étape par une règle ou un théorème, et vérifie ses réponses par un graphe ou une estimation.
3 · Compétent	Résout correctement les exercices, avec quelques erreurs d'algèbre occasionnelles.
2 · En progression	Suit les exemples corrigés mais a du mal à choisir une méthode, ou applique mal la dérivation en chaîne.
1 · Débutant	Mémorise les formules sans savoir quand elles s'appliquent ; doit revoir l'unité.

Pondération suggérée si vous voulez une note

Partie	Poids
Exercices	30%
Travaux pratiques sur ordinateur	15%
Série d'entraînement de mi-parcours	25%
Série d'entraînement finale	30%

Visez le niveau 3 ou mieux dans chaque unité avant de passer au cours suivant.

Cours associés

- Physique I + TP PHYS 110 + PHYS 110L
- Analyse II MATH 111
- Chimie générale I + TP CHEM 110 + CHEM 110L
- Tous les cours