Última actualización: November 1, 2026

🗺️ Ruta de cuatro años · Año 1, Otoño

Sobre este curso

Este curso gratuito tiene 6 unidades y 4 laboratorios. Son los totales reales, no un programa más largo recortado.

Una comprobación es un número o un resultado de código en una página de curso que un script vuelve a calcular antes de publicar. El número impreso y el recalculado tienen que coincidir.

> Este es el esquema de un curso gratuito de autoestudio escrito por Saving Planets. No es un curso universitario, no otorga créditos académicos y ninguna institución participa.
>
> Su alcance sigue el primer semestre de cálculo universitario (cálculo diferencial de una variable y una introducción a las integrales), con los temas y la profundidad de materiales abiertos como OpenStax Calculus Volume 1 y MIT OpenCourseWare 18.01SC Single Variable Calculus, que enlazamos a lo largo del curso. Esas organizaciones no respaldan esta página.
>
> Lo que añadimos: cada unidad conecta el cálculo con problemas reales de clima, energía y vuelos espaciales, cada número de la página lo vuelve a calcular un script de verificación antes de publicarse, y cuatro laboratorios de computadora te permiten hacer cálculo con datos como lo hacen científicos e ingenieros.
>
> Síguelo en orden. Cada unidad tiene objetivos, ideas clave, ecuaciones, ejemplos paso a paso, práctica con respuestas completas, errores comunes, tarjetas de estudio y un cuestionario. Tu progreso se guarda solo en este navegador.

Cómo ayuda este curso a salvar el planeta

El cálculo es la matemática del cambio. Los científicos del clima usan derivadas para convertir un registro de dióxido de carbono o de hielo marino en una tasa de cambio, los ingenieros usan la optimización para sacar la mayor energía del viento y la mayor misión de cada kilogramo de combustible de cohete, y las integrales suman potencia para obtener energía.

Cada unidad termina con una breve sección con fuentes que muestra cómo sus ideas ayudan a las personas y a la naturaleza.

Para docentes

Puedes enseñar este curso o dejar que un estudiante lo haga solo. Es gratis. Saving Planets no pone nota ni da crédito escolar.

- Esta página es el curso completo: 6 unidades y 4 laboratorios (MATH 110).
- Calcula 15 semanas, unas 6 a 9 horas por semana, incluidas las semanas de laboratorio.
- Sigue el calendario de 15 semanas. Lee la unidad, haz la práctica en papel y luego abre la respuesta. En una semana de laboratorio, haz el laboratorio o la versión en casa.
- Una comprobación es un número o un resultado de código en la página que un script vuelve a calcular antes de publicar. El número que ves y el recalculado tienen que coincidir.
- Usa Imprimir esta página, o descarga la guía de estudio en PDF. La hoja de fórmulas está cerca del final.
- Pregunta: ¿cómo ayuda esta unidad a las personas y al planeta? Cada unidad tiene un recuadro verde con un dato y su fuente.
- Copia la plantilla de guía docente y escribe el nombre de tu clase, el tiempo que tienes y las preguntas que harás. Abrir la plantilla de guía docente

Antes de empezar

Requisitos previos

- Álgebra: factorización, expresiones racionales, resolución de ecuaciones e inecuaciones.
- Funciones y gráficas: dominio, rango, composición, funciones inversas.
- Trigonometría: radianes, circunferencia unitaria, seno, coseno, tangente e identidades básicas.
- Funciones exponenciales y logarítmicas, incluidos e y ln.

Cómo estudiar

- Lee la unidad, ciérrala e intenta los ejemplos resueltos por tu cuenta antes de comprobar cada paso.
- Resuelve cada ejercicio en papel antes de abrir la respuesta.
- Dibuja una gráfica siempre que puedas. La mayoría de los errores de cálculo aparecen como un dibujo que no tiene sentido.
- Comprueba las derivadas estimando la pendiente numéricamente, y las integrales estimando el área.
- Usa una herramienta de gráficas como Desmos para poner a prueba tu intuición, nunca para sustituir el trabajo.
- Repite los cuestionarios unos días después. La práctica espaciada es mejor que una sesión larga.

Qué necesitas

- Una computadora o tableta con hoja de cálculo (Google Sheets, Excel o LibreOffice).

- Una calculadora gráfica gratuita como Desmos.
- Opcional: Python con NumPy, para quien quiera programar los laboratorios.

Calendario sugerido de 15 semanas

Unas 6 a 9 horas por semana: lectura, problemas de práctica y, en las semanas de laboratorio, el laboratorio.

Semana	Unidad	Temas	Lectura
1	Funciones y límites	Repaso de funciones; la idea de límite; límites a partir de gráficas y tablas	OpenStax 1.1–1.5, 2.1–2.2
2	Funciones y límites	Leyes de los límites; técnicas algebraicas; límites trigonométricos especiales	OpenStax 2.3
3	Funciones y límites	Límites al infinito; asíntotas; la definición precisa	OpenStax 2.5, 4.6
4	Continuidad y derivada	Continuidad, TVI, la derivada; laboratorio A	OpenStax 2.4, 3.1–3.2
5	Reglas de derivación	Reglas de la potencia, del producto y del cociente; derivadas de orden superior	OpenStax 3.3–3.4
6	Reglas de derivación	Derivadas trigonométricas; la regla de la cadena	OpenStax 3.5–3.6
7	Reglas de derivación	Derivación implícita; derivadas exponenciales y logarítmicas; práctica de examen parcial	OpenStax 3.7–3.9
8	Aplicaciones I: tasas relacionadas, aproximación y método de Newton	Tasas relacionadas; aproximación lineal y diferenciales	OpenStax 4.1–4.2
9	Aplicaciones I: tasas relacionadas, aproximación y método de Newton	Regla de L’Hôpital; método de Newton; laboratorio B	OpenStax 4.8–4.9
10	Aplicaciones II: extremos, forma de la gráfica y optimización	Extremos, teorema del valor medio, forma de la gráfica	OpenStax 4.3–4.5
11	Aplicaciones II: extremos, forma de la gráfica y optimización	Optimización aplicada; laboratorio C	OpenStax 4.7

Semana	Unidad	Temas	Lectura
12	Integrales y teorema fundamental del cálculo	Sumas de Riemann y la integral definida	OpenStax 5.1–5.2
13	Integrales y teorema fundamental del cálculo	El teorema fundamental; laboratorio D	OpenStax 5.3–5.4
14	Integrales y teorema fundamental del cálculo	Sustitución; valor promedio; áreas entre curvas	OpenStax 5.5, 6.1
15	Repaso	Repaso y serie de práctica final	Todas las unidades

Tu progreso

Marca las unidades y los laboratorios al terminarlos y haz los cuestionarios. El progreso y las puntuaciones se guardan solo en este navegador y nunca se nos envían.

Unidades

Funciones y límites

Un límite describe a qué se acerca una función. Es la idea que hay debajo de cada derivada e integral.

Objetivos de aprendizaje

Al terminar esta unidad podrás:

- Estimar límites a partir de gráficas y tablas, incluidos los límites laterales.
- Calcular límites con las leyes de los límites, la factorización y la racionalización.
- Hallar límites al infinito e identificar asíntotas horizontales y verticales.
- Enunciar la definición precisa (ε–δ) de límite.

Conceptos clave

- lim f(x) cuando x → a = L significa que f(x) puede acercarse a L tanto como queramos tomando x lo bastante cerca de a, pero distinto de a.
- Un límite existe solo si los límites por la izquierda y por la derecha coinciden.
- Para una forma 0/0, simplifica primero: factoriza, cancela o multiplica por un conjugado.
- Dos límites especiales: sin x / x → 1 y (1 − cos x)/x → 0 cuando x → 0 (x en radianes).
- En el infinito, compara las potencias más altas de una función racional.

Ecuaciones clave

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

```
_x af(x)=L
```

Notación de límite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

```
_x0( x)/(x)=1
```

Un límite trigonométrico fundamental

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \; 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Definición precisa de límite

Ejemplos resueltos paso a paso

Ejemplo 1.1 Halla $\lim (x^2 - 4)/(x - 2)$ cuando $x \to 2$.

1. La sustitución directa da 0/0, así que simplifica.
2. $(x^2 - 4)/(x - 2) = (x - 2)(x + 2)/(x - 2) = x + 2$ para $x \neq 2$.
3. Ahora sustituye: $2 + 2 = 4$.

Respuesta: 4.

Ejemplo 1.2 Halla $\lim (\sqrt{(x + 4)} - 2)/x$ cuando $x \to 0$.

1. Otra vez 0/0. Multiplica numerador y denominador por el conjugado $\sqrt{(x + 4)} + 2$.
2. El numerador queda $(x + 4) - 4 = x$, así que la expresión es $1/(\sqrt{(x + 4)} + 2)$.
3. Sustituye $x = 0$: $1/(2 + 2) = 1/4$.

Respuesta: 1/4.

Ejemplo 1.3 Halla $\lim (3x^2 + 1)/(2x^2 - 5)$ cuando $x \to \infty$.

1. Divide numerador y denominador entre x^2: $(3 + 1/x^2)/(2 - 5/x^2)$.
2. As $x \to \infty$, $1/x^2 \to 0$.

Respuesta: 3/2, así que $y = 3/2$ es una asíntota horizontal.

Problemas de práctica

Resuelve cada uno primero en papel y luego comprueba.

1. $\lim (x^2 - 9)/(x - 3)$ cuando $x \to 3$

   Factoriza: $x + 3 \to 6$.

2. $\lim (5x + 2)/(x - 1)$ cuando $x \to \infty$

   Divide entre x: 5.

3. $\lim (1 - \cos x)/x$ cuando $x \to 0$

   0 (un límite estándar).

4. $\lim 1/x$ cuando $x \to 0^+$ y cuando $x \to 0^-$

   $+\infty$ por la derecha, $-\infty$ por la izquierda, así que el límite bilateral no existe.

5. lim sin(3x)/x cuando x → 0

   Escríbelo como 3 · sin(3x)/(3x) → 3 × 1 = 3.

Ideas erróneas comunes

Mito: Un límite es solo el valor de la función en ese punto.

En realidad: El límite ignora f(a). f puede no estar definida en a y aun así tener límite ahí, como en el ejemplo 1.1.

Mito: 0/0 significa que el límite es 0 (o no existe).

En realidad: 0/0 es una forma indeterminada: el límite podría ser cualquier cosa. Hay que simplificar.

Mito: Si la gráfica se acerca a una recta, nunca puede cruzarla.

En realidad: Una gráfica puede cruzar una asíntota horizontal; la asíntota describe el comportamiento lejano.

Tarjetas de estudio

Límite

El valor al que se acerca f(x) cuando x se acerca a a.

Límite lateral

Límite por la izquierda ($x \to a^-$) o por la derecha ($x \to a^+$).

Forma indeterminada

0/0 o ∞/∞: simplifica antes de decidir.

Asíntota horizontal

y = L cuando f(x) → L al x → ±∞.

Asíntota vertical

x = a cuando f(x) → ±∞ al x → a.

Definición ε–δ

Para todo ε > 0 existe δ > 0 que mantiene f(x) a menos de ε de L.

Cuestionario de autoevaluación

1. lim $(x^2 - 1)/(x - 1)$ cuando x → 1 es...

0

1

2

indefinido

2. Factoriza a x + 1 → 2.

2. Un límite bilateral existe cuando...

f(a) está definida

los límites por la izquierda y por la derecha son iguales

la función es un polinomio

la gráfica no tiene huecos

los límites por la izquierda y por la derecha son iguales. Ambos límites laterales deben existir y coincidir.

3. lim sin x / x cuando x → 0 (radianes) es igual a...

0

1

∞

π/180

1. Un límite fundamental; por eso el cálculo usa radianes.

4. lim $(4x^3 - x)/(2x^3 + 7)$ cuando x → ∞ es...

0

2

4

∞

2. Coeficientes principales: 4/2 = 2.

Repetir este cuestionario

Cómo ayuda esto a salvar el planeta

Todo registro climático es una lista de mediciones en momentos separados. La idea de límite, reducir el paso de tiempo hacia cero, es lo que permite a los científicos hablar de la tasa de cambio en un instante y no solo a lo largo de un año o una década.

La NOAA mide el dióxido de carbono en el Observatorio de Mauna Loa desde 1958. Sus páginas de datos publican la concentración y su tasa de crecimiento anual, un uso directo de la tasa de cambio promedio que los límites hacen precisa.

En Saving Planets: OCO-2: medir el CO_2 desde la órbita (en inglés)

Fuentes: NOAA GML: tendencias del CO_2 atmosférico (en inglés) (https://gml.noaa.gov/ccgg/trends/) · NOAA GML: tasas de crecimiento del CO_2 (en inglés) (https://gml.noaa.gov/ccgg/trends/gr.html)

Recursos de aprendizaje gratuitos

- OpenStax Calculus 1, 2.2 The Limit of a Function (en inglés) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/2-2-the-limit-of-a-function): Sección de libro de texto gratuita.
- OpenStax Calculus 1, 2.3 The Limit Laws (en inglés) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/2-3-the-limit-laws): Leyes de los límites con ejemplos resueltos.
- OpenStax Calculus 1, 2.5 The Precise Definition of a Limit (en inglés) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/2-5-the-precise-definition-of-a-limit): Demostraciones ε–δ.
- MIT OpenCourseWare 18.01SC Single Variable Calculus (en inglés) (https://ocw.mit.edu/courses/18-01sc-single-variable-calculus-fall-2010/): Clases, apuntes y series de problemas gratuitos del MIT.

☐ **Terminé esta unidad**

Continuidad y derivada

La continuidad significa que no hay saltos. La derivada es el límite de las tasas de cambio promedio: la pendiente de la recta tangente.

Objetivos de aprendizaje

Al terminar esta unidad podrás:

- Comprobar la continuidad de una función y usar el teorema del valor intermedio.
- Calcular una derivada a partir de la definición por límite.
- Interpretar una derivada como pendiente, velocidad y tasa de cambio, con unidades.
- Escribir la ecuación de una recta tangente.

Conceptos clave

- f es continua en a si f(a) está definida, el límite existe y ambos son iguales.
- Teorema del valor intermedio: una función continua en [a, b] toma todos los valores entre f(a) y f(b).
- La derivada f'(a) es el límite del cociente incremental [f(a + h) − f(a)]/h cuando h → 0.
- Las unidades de f' son las de f por unidad de x: metros por segundo, ppm por año.
- Una función no es derivable en una esquina, una cúspide, una tangente vertical o un salto.

Ecuaciones clave

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

`f'(x)=_h0(f(x+h)-f(x))/(h)`

Definición de la derivada por límite

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

`y-f(a)=f'(a)(x-a)`

Recta tangente en x = a

Ejemplos resueltos paso a paso

Ejemplo 2.1 Usa la definición para hallar la derivada de f(x) = x².

1. [(x + h)² − x²]/h = (2xh + h²)/h = 2x + h.
2. Cuando h → 0, esto tiende a 2x.

Respuesta: $f'(x) = 2x$.

Ejemplo 2.2 Halla la recta tangente a $y = x^3$ en $x = 1$.

1. $y' = 3x^2$, así que la pendiente en $x = 1$ es 3.
2. Punto: $(1, 1)$.
3. $y - 1 = 3(x - 1)$, así que $y = 3x - 2$.

Respuesta: $y = 3x - 2$.

Ejemplo 2.3 ¿Para qué a es $f(x) = x + 1$ $(x < 1)$, ax^2 $(x \geq 1)$ continua en todas partes?

1. Límite por la izquierda en 1: $1 + 1 = 2$.
2. Valor y límite por la derecha: $a \times 1^2 = a$.
3. La continuidad exige $a = 2$.

Respuesta: $a = 2$.

Problemas de práctica

Resuelve cada uno primero en papel y luego comprueba.

1. Usa la definición para derivar $f(x) = 1/x$.

   $[1/(x + h) - 1/x]/h = -1/(x(x + h)) \to -1/x^2$.

2. Una piedra que se deja caer recorre $s(t) = 4.9t^2$ metros. Halla su velocidad promedio de $t = 1$ a $t = 3$ s y su velocidad instantánea en $t = 2$ s.

   Promedio: $(44.1 - 4.9)/2 = 19.6$ m/s. Instantánea: $s'(t) = 9.8t$, así que 19.6 m/s en $t = 2$.

3. Demuestra que $x^3 + x - 1 = 0$ tiene una raíz entre 0 y 1.

   $f(0) = -1 < 0$ y $f(1) = 1 > 0$, y f es continua, así que por el TVI cruza 0 entre ambos.

4. ¿Es $f(x) = |x|$ derivable en 0?

   No. La pendiente es -1 por la izquierda y $+1$ por la derecha, así que el límite del cociente incremental no existe (una esquina).

Ideas erróneas comunes

Mito: Continua significa derivable.

En realidad: |x| es continua en 0 pero no tiene derivada ahí. En cambio, derivable sí implica continua.

Mito: La derivada es el cambio en y.

En realidad: Es la tasa de cambio: cambio en y por unidad de cambio en x, en el límite.

Mito: La recta tangente toca la curva en un solo punto.

En realidad: Puede cruzar la curva en otros puntos, e incluso en el punto de tangencia (como $y = x^3$ en 0).

Tarjetas de estudio

Continuidad en a

lim f(x) cuando x → a es igual a f(a).

Teorema del valor intermedio

Continua en [a, b] ⇒ se alcanza todo valor entre f(a) y f(b).

Cociente incremental

[f(x + h) − f(x)]/h, una tasa de cambio promedio.

Derivada

Límite del cociente incremental; tasa de cambio instantánea.

Recta tangente

y = f(a) + f'(a)(x − a).

Derivable ⇒ continua

Pero no al revés.

Cuestionario de autoevaluación

1. Si s(t) es la posición en metros y t está en segundos, s'(t) tiene unidades de...

m

s

m/s

m/s^2

m/s. Unidades de f divididas entre unidades de x.

2. La derivada de x^2 en x = 3 es...

3

6

9

2

6. f'(x) = 2x.

3. ¿Qué función es continua pero no derivable en 0?

x^2

|x|

sin x

e^x

|x|. Tiene una esquina en 0.

4. El TVI exige que la función sea...

derivable

creciente

continua en [a, b]

un polinomio

continua en [a, b]. La continuidad en el intervalo cerrado es la hipótesis clave.

Repetir este cuestionario

Cómo ayuda esto a salvar el planeta

La derivada convierte un registro de posiciones en una rapidez. La navegación por satélite lo hace constantemente: GRACE-FO, por ejemplo, mide cómo cambia la distancia entre sus dos satélites, y esos cambios revelan movimientos de agua y hielo en la Tierra.

Las tasas con unidades son la forma en que se informa del cambio climático en la práctica: partes por millón de CO_2 por año, milímetros de nivel del mar por año. Leer una derivada con sus unidades es una habilidad básica de alfabetización científica.

En Saving Planets: GRACE-FO · Física I + Laboratorio

Fuentes: NASA JPL: GRACE-FO (https://gracefo.jpl.nasa.gov/) · OpenStax Calculus 1, 3.1 Defining the Derivative (en inglés) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/3-1-defining-the-derivative)

Recursos de aprendizaje gratuitos

- OpenStax Calculus 1, 2.4 Continuity (en inglés) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/2-4-continuity): La continuidad y el TVI.
- OpenStax Calculus 1, 3.1 Defining the Derivative (en inglés) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/3-1-defining-the-derivative): La derivada a partir de la definición.
- PhET: Calculus Grapher (https://phet.colorado.edu/en/simulations/calculus-grapher): Ver una función y su derivada juntas.

Ver la clase

Clip 4: Physical Interpretation of Derivatives, Continued (https://ocw.mit.edu/courses/18-01sc-single-variable-calculus-fall-2010/resources/clip-4-physical-interpretation-of-derivatives-continued/) (en inglés)

MIT 18.01SC Single Variable Calculus (Fall 2010), MIT OpenCourseWare. Licencia: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Condiciones de uso (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Enlace solo para estudio gratuito; Saving Planets no está afiliado a esta universidad ni cuenta con su respaldo.

☐ **Terminé esta unidad**

Reglas de derivación

Reglas de la potencia, del producto, del cociente y de la cadena, además de derivadas de funciones trigonométricas, exponenciales y logarítmicas, y derivación implícita.

Objetivos de aprendizaje

Al terminar esta unidad podrás:

- Derivar polinomios, productos, cocientes y composiciones de forma rápida y correcta.
- Derivar sin, cos, tan, e^x y ln x.
- Usar la derivación implícita para hallar dy/dx.
- Hallar derivadas de orden superior e interpretar la segunda derivada como aceleración.

Conceptos clave

- Regla de la potencia: d/dx x^n = nx^{n-1} para todo n real.
- Regla del producto: (fg)' = f'g + fg'. Regla del cociente: (f/g)' = (f'g − fg')/g^2.
- Regla de la cadena: la derivada de f(g(x)) es f'(g(x)) · g'(x), derivada de fuera por derivada de dentro.
- e^x es su propia derivada; ln x tiene derivada 1/x. Por eso e aparece en todo modelo de crecimiento y decaimiento.
- Derivación implícita: deriva ambos lados respecto a x, tratando y como función de x.

Ecuaciones clave

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

`d/dxx^n=nx^n-1`

Regla de la potencia

$$(fg)' = f'g + fg', \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

`(fg)'=f'g+fg', ( fg)'=(f'g-fg')/(g^2)`

Reglas del producto y del cociente

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))\,g'(x)$$

`d/dxf(g(x))=f'(g(x)) g'(x)`

Regla de la cadena

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x, \quad \frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$$

`d/dxe^x=e^x, d/dx x=1x`

Exponencial y logaritmo

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x, \quad \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$$

`d/dx x= x, d/dx x=- x`

Derivadas trigonométricas

Ejemplos resueltos paso a paso

Ejemplo 3.1 Deriva $y = x^2 \sin x$.

1. Regla del producto con $f = x^2$, $g = \sin x$.
2. $y' = 2x \sin x + x^2 \cos x$.

Respuesta: $y' = 2x \sin x + x^2 \cos x$.

Ejemplo 3.2 Deriva $y = (3x^2 + 1)^5$.

1. Fuera: $u^5 \to 5u^4$. Dentro: $u = 3x^2 + 1 \to 6x$.
2. $y' = 5(3x^2 + 1)^4 \cdot 6x$.

Respuesta: $y' = 30x(3x^2 + 1)^4$.

Ejemplo 3.3 Halla la pendiente de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ en $(3, 4)$.

1. Deriva: $2x + 2y\,y' = 0$.
2. $y' = -x/y = -3/4$.

Respuesta: $-3/4$.

Problemas de práctica

Resuelve cada uno primero en papel y luego comprueba.

1. $d/dx\ (3x^4 - 5x^2 + 7)$

$12x^3 - 10x$.

2. d/dx $\ln(x^2 + 1)$

   $2x/(x^2 + 1)$ (regla de la cadena).

3. d/dx $(x/(x + 1))$

   $[(x + 1) - x]/(x + 1)^2 = 1/(x + 1)^2$.

4. Una cantidad crece según Q(t) = 1000e^(0.02t). ¿Con qué rapidez crece en t = 0 y cuál es su tasa de crecimiento relativa?

   Q'(t) = 20e^(0.02t), así que 20 unidades por unidad de tiempo en t = 0. Q'/Q = 0.02, un 2% constante por unidad de tiempo.

5. Si $s(t) = t^3 - 6t^2$, halla la velocidad y la aceleración en t = 1.

   $v = 3t^2 - 12t = -9$; $a = 6t - 12 = -6$.

Ideas erróneas comunes

Mito: La derivada de un producto es el producto de las derivadas.

En realidad: Usa la regla del producto: (fg)' = f'g + fg'.

Mito: d/dx sin(3x) = cos(3x).

En realidad: Regla de la cadena: 3 cos(3x).

Mito: d/dx $e^x = x\,e^{x-1}$.

En realidad: La regla de la potencia no se aplica a exponentes variables. d/dx $e^x = e^x$.

Tarjetas de estudio

Regla de la potencia

d/dx $x^n = nx^{n-1}$.

Regla del producto

(fg)' = f'g + fg'.

Regla del cociente

$(f/g)' = (f'g - fg')/g^2$.

Regla de la cadena

$[f(g(x))]' = f'(g(x))\,g'(x)$.

d/dx e^x

e^x.

d/dx ln x

1/x.

Cuestionario de autoevaluación

1. d/dx (x^5) =

$5x^4$

x^4

$5x^5$

$4x^5$

$5x^4$. Regla de la potencia.

2. d/dx sin(x^2) =

$\cos(x^2)$

$2x \cos(x^2)$

$2 \sin x \cos x$

$-2x \cos(x^2)$

$2x \cos(x^2)$. Regla de la cadena: $\cos(x^2) \cdot 2x$.

3. d/dx ln(5x) =

$5/x$

$1/(5x)$

$1/x$

$\ln 5$

$1/x$. $5/(5x) = 1/x$.

4. Si la posición es s(t), la aceleración es...

s(t)

s'(t)

s''(t)

∫s dt

s''(t). La aceleración es la derivada de la velocidad.

Repetir este cuestionario

Cómo ayuda esto a salvar el planeta

Los modelos de crecimiento y decaimiento basados en e^x describen el crecimiento de poblaciones, la desintegración radiactiva que se usa para datar núcleos de hielo y el crecimiento compuesto de las emisiones. La regla de la cadena da sus tasas de cambio en un solo paso.

Una tasa de crecimiento relativa (Q'/Q) es como los científicos comparan cambios en cantidades de tamaños muy distintos, por ejemplo con qué rapidez cambia una superficie forestal o un gas de efecto invernadero, en porcentaje por año.

En Saving Planets: Especial sobre deforestación · Observación de la Tierra

Fuentes: OpenStax Calculus 1, 3.9 Derivatives of Exponential and Logarithmic Functions (en inglés) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/3-9-derivatives-of-exponential-and-logarithmic-functions) · NASA: el dióxido de carbono, signo vital del planeta (en inglés) (https://climate.nasa.gov/vital-signs/carbon-dioxide/)

Recursos de aprendizaje gratuitos

- OpenStax Calculus 1, 3.3 Differentiation Rules (en inglés) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/3-3-differentiation-rules): Reglas de la potencia, del producto y del cociente.
- OpenStax Calculus 1, 3.5 Derivatives of Trigonometric Functions (en inglés) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/3-5-derivatives-of-trigonometric-functions): Derivadas trigonométricas.
- OpenStax Calculus 1, 3.6 The Chain Rule (en inglés) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/3-6-the-chain-rule): La regla de la cadena con muchos ejemplos.
- OpenStax Calculus 1, 3.8 Implicit Differentiation (en inglés) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/3-8-implicit-differentiation): La derivación implícita.

Ver la clase

Clip 2: Introduction to General Rules for Differentiation (https://ocw.mit.edu/courses/18-01sc-single-variable-calculus-fall-2010/resources/clip-2-introduction-to-general-rules-for-differentiation/) (en inglés)

MIT 18.01SC Single Variable Calculus (Fall 2010), MIT OpenCourseWare. Licencia: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Condiciones de uso (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Enlace solo para estudio gratuito; Saving Planets no está afiliado a esta universidad ni cuenta con su respaldo.

- [ ] **Terminé esta unidad**

UNIDAD 4 · SEMANAS 8–9

Aplicaciones I: tasas relacionadas, aproximación y método de Newton

Usar derivadas para relacionar cantidades que cambian, aproximar valores difíciles, evaluar límites complicados y resolver ecuaciones numéricamente.

Objetivos de aprendizaje

Al terminar esta unidad podrás:

- Resolver problemas de tasas relacionadas.
- Usar la aproximación lineal y los diferenciales para estimar valores y errores.
- Aplicar la regla de L'Hôpital a formas 0/0 e ∞/∞.
- Resolver ecuaciones con el método de Newton.

Conceptos clave

- Tasas relacionadas: escribe una ecuación que relacione las cantidades, deriva respecto al tiempo y luego sustituye los valores.
- Cerca de x = a, f(x) ≈ f(a) + f'(a)(x − a): la recta tangente es la mejor estimación lineal.
- Regla de L'Hôpital: para 0/0 o ∞/∞, lim f/g = lim f'/g' si el lado derecho existe.
- Método de Newton: x_{n+1} = x_n − f(x_n)/f'(x_n). Suele converger muy rápido desde un buen valor inicial.

Ecuaciones clave

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

`L(x)=f(a)+f'(a)(x-a)`

Aproximación lineal

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

`(f(x))/(g(x))=(f'(x))/(g'(x))`

Regla de L'Hôpital (0/0 o ∞/∞)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

`x_n+1=x_n-(f(x_n))/(f'(x_n))`

Método de Newton

Ejemplos resueltos paso a paso

Ejemplo 4.1 El radio de un globo meteorológico esférico crece a 2 cm/s. ¿Con qué rapidez crece su volumen cuando r = 10 cm?

1. $V = (4/3)\pi r^3$, así que $dV/dt = 4\pi r^2\, dr/dt$.
2. $dV/dt = 4\pi \times 10^2 \times 2 = 800\pi \approx 2{,}513\ cm^3/s$.

Respuesta: Unos 2510 cm^3/s.

Ejemplo 4.2 Estima $\sqrt{4.1}$ con una aproximación lineal.

1. $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 4$: $f(4) = 2$, $f'(4) = 1/(2\sqrt{4}) = 1/4$.
2. $L(4.1) = 2 + (1/4)(0.1) = 2.025$.

Respuesta: 2.025 (el valor real es 2.02485…).

Ejemplo 4.3 Usa el método de Newton para resolver $x^2 = 2$ partiendo de $x_0 = 1$.

1. $f(x) = x^2 - 2$, $f'(x) = 2x$, así que $x_{n+1} = x_n - (x_n^2 - 2)/(2x_n)$.
2. $x_1 = 1.5$, $x_2 = 1.416667$, $x_3 = 1.414216$.

Respuesta: $x_3 = 1.414216$, ya correcto con 6 cifras significativas ($\sqrt{2} = 1.4142136\ldots$).

Problemas de práctica

Resuelve cada uno primero en papel y luego comprueba.

1. Una escalera de 5 m se desliza por una pared; su base se aleja a 0.5 m/s. ¿Con qué rapidez baja la parte superior cuando la base está a 3 m de la pared?

   $x^2 + y^2 = 25$, así que $x\,x' + y\,y' = 0$. Con $x = 3$, $y = 4$: $y' = -(3/4)(0.5) = -0.375$ m/s, baja a 0.375 m/s.

2. $\lim (e^x - 1)/x$ cuando $x \to 0$

   L’Hôpital: $e^x/1 \to 1$.

3. Método de Newton para $x^3 - 2x - 5 = 0$ desde $x_0 = 2$. Halla x_1 y x_2.

   $f(2) = -1$, $f'(2) = 10$, así que $x_1 = 2.1$. $f(2.1) = 0.061$, $f'(2.1) = 11.23$, así que $x_2 = 2.0946$.

4. Usa diferenciales para estimar el cambio en el área de un disco de 10 cm de radio si el radio crece 0.1 cm.

   $dA = 2\pi r\, dr = 2\pi \times 10 \times 0.1 = 2\pi \approx 6.28$ cm².

Ideas erróneas comunes

Mito: L'Hôpital significa derivar el cociente f/g.

En realidad: Deriva el numerador y el denominador por separado, y solo para formas 0/0 o ∞/∞.

Mito: En tasas relacionadas, primero se sustituyen los números y luego se deriva.

En realidad: Deriva primero; sustituir demasiado pronto convierte variables en constantes de derivada cero.

Mito: El método de Newton siempre encuentra una raíz.

En realidad: Un mal punto de partida, o f' cercana a cero, puede hacer que se desvíe o entre en ciclo.

Tarjetas de estudio

Tasas relacionadas

Derivar respecto a t una ecuación que relaciona cantidades.

Aproximación lineal

$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$.

Diferencial

$dy = f'(x)\, dx$.

Regla de L'Hôpital

Para 0/0 o ∞/∞: $\lim f/g = \lim f'/g'$.

Método de Newton

$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$.

Convergencia cuadrática

Cerca de una raíz simple, el método de Newton duplica aproximadamente los dígitos correctos en cada paso.

Cuestionario de autoevaluación

1. La aproximación lineal usa la...

recta secante

recta tangente

recta normal

valor promedio

recta tangente. L(x) es la recta tangente en a.

2. La regla de L'Hôpital se aplica a...

cualquier límite

formas 0/0 e ∞/∞

solo polinomios

formas 1/0

formas 0/0 e ∞/∞. Solo cocientes indeterminados.

3. Un paso del método de Newton en $f(x) = x^2 - 9$ desde $x_0 = 4$ da...

3

3.125

3.5

4.5

3.125. 4 − 7/8 = 3.125.

4. Si $V = s^3$ y $ds/dt = 1$, entonces dV/dt en $s = 2$ es...

3

6

8

12

12. $3s^2\, ds/dt = 12$.

Repetir este cuestionario

Cómo ayuda esto a salvar el planeta

Predecir dónde estará un satélite significa resolver la ecuación de Kepler, M = E − e sin E, para E. No tiene solución algebraica, así que suele resolverse numéricamente, a menudo con el método de Newton, como en el laboratorio B. Una predicción orbital precisa mantiene separados con seguridad los satélites de observación de la Tierra y sitúa bien sus imágenes en el mapa.

Los globos meteorológicos, como el del ejemplo 4.1, llevan instrumentos que miden la atmósfera para los pronósticos del tiempo; las tasas relacionadas vinculan lo rápido que suben y se expanden.

En Saving Planets: Guía de órbitas · Calculadora de período orbital

Fuentes: OpenStax Calculus 1, 4.9 Newton's Method (en inglés) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/4-9-newtons-method) · OpenStax University Physics 1, 13.5 Kepler's Laws (en inglés) (https://openstax.org/books/university-physics-volume-1/pages/13-5-keplers-laws-of-planetary-motion)

Recursos de aprendizaje gratuitos

- OpenStax Calculus 1, 4.1 Related Rates (en inglés) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/4-1-related-rates): Sección de libro de texto gratuita.
- OpenStax Calculus 1, 4.2 Linear Approximations and Differentials (en inglés) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/4-2-linear-approximations-and-differentials): Estimaciones con la recta tangente y error.
- OpenStax Calculus 1, 4.8 L'Hôpital's Rule (en inglés) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/4-8-lhopitals-rule): Formas indeterminadas.
- OpenStax Calculus 1, 4.9 Newton's Method (en inglés) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/4-9-newtons-method): Búsqueda iterativa de raíces.

Ver la clase

Lecture 12: Related Rates (https://ocw.mit.edu/courses/18-01-single-variable-calculus-fall-2006/resources/lecture-12-related-rates/) (en inglés)

MIT 18.01 Single Variable Calculus (Fall 2006), MIT OpenCourseWare. Licencia: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Condiciones de uso (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Enlace solo para estudio gratuito; Saving Planets no está afiliado a esta universidad ni cuenta con su respaldo.

☐ **Terminé esta unidad**

Aplicaciones II: extremos, forma de la gráfica y optimización

Hallar máximos y mínimos, leer la forma de una gráfica a partir de f' y f'', y resolver problemas reales de diseño mediante optimización.

Objetivos de aprendizaje

Al terminar esta unidad podrás:

- Hallar puntos críticos y extremos absolutos en un intervalo cerrado.
- Enunciar y usar el teorema del valor medio.
- Usar los criterios de la primera y segunda derivada y hallar puntos de inflexión.
- Plantear y resolver problemas de optimización aplicada.

Conceptos clave

- Los puntos críticos son donde f' = 0 o f' no existe. Los extremos de una función suave ocurren ahí o en los extremos del intervalo.
- Teorema del valor medio: en un intervalo suave, la tasa instantánea es igual a la tasa promedio en algún punto.
- f' > 0 significa creciente; f'' > 0 significa cóncava hacia arriba. Un punto de inflexión es donde cambia la concavidad.
- Receta de optimización: dibuja, escribe la cantidad a optimizar como función de una variable usando la restricción, deriva, halla los puntos críticos y revisa los extremos.

Ecuaciones clave

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

`f'(c)=(f(b)-f(a))/(b-a)`

Teorema del valor medio

$$f'(c) = 0,\ f''(c) < 0 \Rightarrow \text{local max}$$

`f'(c)=0,\ f''(c)<0 max`

Criterio de la segunda derivada

$$C_p(a) = 4a(1-a)^2$$

`C_p(a)=4a(1-a)^2`

Coeficiente de potencia de un aerogenerador frente a la inducción axial a (modelo de disco actuador)

Ejemplos resueltos paso a paso

Ejemplo 5.1 Halla los extremos locales de $f(x) = x^3 - 3x$.

1. $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$ en $x = \pm 1$.
2. $f''(x) = 6x$: $f''(-1) = -6 < 0$ (máx.), $f''(1) = 6 > 0$ (mín.).
3. $f(-1) = 2$, $f(1) = -2$.

Respuesta: Máximo local 2 en $x = -1$; mínimo local -2 en $x = 1$.

Ejemplo 5.2 Una lata cilíndrica cerrada debe contener 500 cm^3. ¿Qué radio usa menos metal?

1. Restricción: $\pi r^2 h = 500$, así que $h = 500/(\pi r^2)$.
2. Área $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r^2 + 1000/r$.
3. $A' = 4\pi r - 1000/r^2 = 0$ da $r^3 = 500/(2\pi)$, $r = 4.30$ cm.
4. Entonces $h = 8.60$ cm $= 2r$, y $A = 349$ cm^2.

Respuesta: $r = 4.30$ cm, $h = 8.60$ cm (la altura es igual al diámetro).

Ejemplo 5.3 En el modelo más simple de un aerogenerador, la fracción de potencia del viento captada es $Cp = 4a(1 - a)^2$, donde a indica cuánto frena el rotor al viento. Halla el máximo.

1. $Cp' = 4(1 - a)^2 - 8a(1 - a) = 4(1 - a)(1 - 3a)$.
2. Puntos críticos $a = 1$ y $a = 1/3$; $a = 1$ da $Cp = 0$.
3. $Cp(1/3) = 4 \times (1/3) \times (2/3)^2 = 16/27 = 0.593$.

Respuesta: 59.3%: el límite de Betz, el máximo teórico para cualquier aerogenerador.

Problemas de práctica

Resuelve cada uno primero en papel y luego comprueba.

1. Un agricultor tiene 100 m de cerca para tres lados de un rectángulo junto a un río. ¿Cuál es el área máxima?

   $A = x(100 - 2x)$; $A' = 100 - 4x = 0$ en $x = 25$. Área $= 25 \times 50 = 1250$ m^2.

2. Halla el máximo y el mínimo absolutos de $f(x) = x^2 - 4x$ en $[0, 5]$.

   Punto crítico $x = 2$: $f = -4$. Extremos: $f(0) = 0$, $f(5) = 5$. Máx. 5, mín. -4.

3. Verifica el TVM para $f(x) = x^2$ en $[1, 3]$.

Tasa promedio $(9 - 1)/2 = 4$; $f'(c) = 2c = 4$ en $c = 2$, dentro de $[1, 3]$.

4. ¿Dónde es $f(x) = x^3 - 6x^2$ cóncava hacia arriba?

   $f'' = 6x - 12 > 0$ cuando $x > 2$; punto de inflexión en $x = 2$.

Ideas erróneas comunes

Mito: $f'(c) = 0$ siempre significa un máximo o un mínimo.

En realidad: x^3 tiene $f'(0) = 0$ pero no hay extremo ahí.

Mito: El máximo absoluto siempre está en un punto crítico.

En realidad: En un intervalo cerrado puede estar en un extremo. Revísalos siempre.

Mito: Cóncava hacia arriba significa creciente.

En realidad: La concavidad depende de f''; una función puede ser cóncava hacia arriba y decreciente, como e^{-x}.

Tarjetas de estudio

Punto crítico

$f' = 0$ o no definida.

Teorema del valor extremo

Continua en $[a, b] \Rightarrow$ existen máximo y mínimo absolutos.

Teorema del valor medio

$f'(c) = [f(b) - f(a)]/(b - a)$ para algún c.

Criterio de la primera derivada

Un cambio de signo de f' de + a − es un máximo; de − a +, un mínimo.

Concavidad

$f'' > 0$ hacia arriba, $f'' < 0$ hacia abajo.

Límite de Betz

Cp máx. = $16/27 \approx 59.3\%$.

Cuestionario de autoevaluación

1. Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) > 0$, entonces en c f tiene un...

máximo local

mínimo local

punto de inflexión

ninguna conclusión

mínimo local. Cóncava hacia arriba en un punto plano: un valle.

2. El límite de Betz para aerogeneradores es aproximadamente...

33%

50%

59%

100%

59%. 16/27 ≈ 0.593, al maximizar $4a(1 - a)^2$.

3. El TVM garantiza un punto donde...

f = 0

f' = 0 siempre

f' es igual a la tasa de cambio promedio

f'' = 0

f' es igual a la tasa de cambio promedio. Tasa instantánea = tasa promedio.

4. Un punto de inflexión es donde...

f' = 0

f cambia de signo

cambia la concavidad

f no está definida

cambia la concavidad. f'' cambia de signo.

Repetir este cuestionario

Cómo ayuda esto a salvar el planeta

La optimización es ingeniería. El límite de Betz del ejemplo 5.3 sale de igualar a cero una sola derivada, y dice a los ingenieros eólicos lo máximo que cualquier aerogenerador podría extraer del viento.

Los diseñadores de misiones también optimizan: una transferencia de Hohmann suele ser la ruta de dos encendidos más eficiente en combustible entre dos órbitas circulares, y menos propelente significa lanzamientos más pequeños y baratos para satélites climáticos y meteorológicos.

Usar el menor material posible para una tarea, como la lata del ejemplo 5.2, reduce la energía y los recursos que se gastan en fabricarla.

En Saving Planets: Calculadora de transferencia de Hohmann · Física I, unidad 4: energía eólica

Fuentes: DOE de EE. UU.: ¿cómo funcionan los aerogeneradores? (en inglés) (https://www.energy.gov/eere/wind/how-do-wind-turbines-work) · OpenStax Calculus 1, 4.7 Applied Optimization Problems (en inglés) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/4-7-applied-optimization-problems)

Recursos de aprendizaje gratuitos

- OpenStax Calculus 1, 4.3 Maxima and Minima (en inglés) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/4-3-maxima-and-minima): Extremos y puntos críticos.
- OpenStax Calculus 1, 4.5 Derivatives and the Shape of a Graph (en inglés) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/4-5-derivatives-and-the-shape-of-a-graph): Criterios de la primera y segunda derivada.
- OpenStax Calculus 1, 4.7 Applied Optimization Problems (en inglés) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/4-7-applied-optimization-problems): Muchos problemas de diseño resueltos.

☐ **Terminé esta unidad**

UNIDAD 6 · SEMANAS 12–14

Integrales y teorema fundamental del cálculo

Las integrales suman pedazos diminutos: área, distancia, energía. El teorema fundamental las relaciona con las derivadas.

Objetivos de aprendizaje

Al terminar esta unidad podrás:

- Aproximar áreas con sumas de Riemann y la regla del trapecio.
- Definir la integral definida y usar sus propiedades.
- Usar las dos partes del teorema fundamental del cálculo.
- Hallar antiderivadas, también por sustitución, y calcular cambio neto, valor promedio y áreas entre curvas.

Conceptos clave

- Una suma de Riemann suma $f(x_i)\Delta x$ sobre franjas pequeñas; la integral definida es su límite cuando las franjas se estrechan.
- TFC parte 1: $d/dx \int_a^x f(t)\,dt = f(x)$. La integración y la derivación se deshacen mutuamente.
- TFC parte 2: $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ para cualquier antiderivada F.
- Teorema del cambio neto: integrar una tasa da el cambio total. Integrar potencia da energía; integrar velocidad da desplazamiento.
- La sustitución es la regla de la cadena al revés.

Ecuaciones clave

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

```
_a^bf(x) dx=_n∞_i=1^nf(x_i^*)Δ x
```

Integral definida

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

```
d/dx_a^xf(t) dt=f(x)
```

TFC parte 1

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

```
_a^bf(x) dx=F(b)-F(a)
```

TFC parte 2

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C\ (n \neq -1), \quad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

x^n dx=^n+1n+1+C\ (n-1), 1x dx=|x|+C

Antiderivadas básicas

$$f_{avg} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

f_avg=1b-a_a^bf(x) dx

Valor promedio

Ejemplos resueltos paso a paso

Ejemplo 6.1 Halla $\int_0^2 x^2\,dx$.

1. Antiderivada $x^3/3$.
2. $8/3 - 0 = 8/3$.

Respuesta: $8/3 \approx 2.667$.

Ejemplo 6.2 Halla $\int_0^1 2x(x^2+1)^3\,dx$.

1. Sea $u = x^2 + 1$, $du = 2x\,dx$; u va de 1 a 2.
2. $\int_1^2 u^3\,du = [u^4/4]_1^2 = (16 - 1)/4$.

Respuesta: $15/4 = 3.75$.

Ejemplo 6.3 En un día despejado, la producción de un campo solar se modela como $P(t) = 5\sin(\pi t/12)$ kW para $0 \le t \le 12$ horas tras el amanecer. ¿Cuánta energía produce?

1. Energía $= \int_0^{12} 5\sin(\pi t/12)\,dt$.
2. Antiderivada: $-(60/\pi)\cos(\pi t/12)$.
3. $-(60/\pi)(\cos\pi - \cos 0) = 120/\pi$.

Respuesta: $120/\pi \approx 38.2$ kWh (un modelo simplificado, no un campo real).

Problemas de práctica

Resuelve cada uno primero en papel y luego comprueba.

1. $\int_0^{\pi} \sin x \, dx$

   $[-\cos x]_0^{\pi} = 1 + 1 = 2$.

2. $\frac{d}{dx} \int_0^{x} \cos(t^2) \, dt$

   $\cos(x^2)$, por la parte 1 del TFC.

3. La velocidad de ascenso de un cohete es $v(t) = 9.8t$ m/s durante 3 s. ¿Cuánto sube?

   $\int_0^3 9.8t \, dt = 4.9 \times 9 = 44.1$ m.

4. Halla el área entre $y = x$ e $y = x^2$ en $[0, 1]$.

   $\int_0^1 (x - x^2) \, dx = 1/2 - 1/3 = 1/6$.

5. Halla el valor promedio de $f(x) = x^2$ en $[0, 3]$.

   $(1/3) \int_0^3 x^2 \, dx = (1/3)(9) = 3$.

Ideas erróneas comunes

Mito: Una integral siempre es un área, así que siempre es positiva.

En realidad: Es un área con signo: las partes bajo el eje cuentan como negativas. $\int_0^{2\pi} \sin x \, dx = 0$.

Mito: Olvidar el + C no importa.

En realidad: En las integrales indefinidas la constante es parte de la respuesta; importa siempre que se da una condición inicial.

Mito: En una sustitución, conserva los límites antiguos.

En realidad: Cambia los límites a valores de u, o vuelve a sustituir antes de evaluar.

Tarjetas de estudio

Suma de Riemann

$\Sigma f(x_i^*) \Delta x$; una estimación del área.

Integral definida

Límite de las sumas de Riemann; área con signo.

TFC parte 1

$\frac{d}{dx} \int_a^x f = f(x)$.

TFC parte 2

$\int_a^b f = F(b) - F(a)$.

Cambio neto

Integral de una tasa = cambio total.

Sustitución

u = g(x), du = g'(x) dx: la regla de la cadena al revés.

Cuestionario de autoevaluación

1. $\int_1^3 2x\,dx =$

4

8

9

6

8. $[x^2]_1^3 = 9 - 1 = 8$.

2. Integrar una curva de potencia (kW) en el tiempo (h) da...

kW

kWh de energía

kW/h

potencia promedio

kWh de energía. Teorema del cambio neto: la integral de una tasa es un total.

3. $d/dx \int_2^x t^3\,dt =$

x^3

$3x^2$

$x^4/4$

$x^3 - 8$

x^3. TFC parte 1.

4. $\int 1/x\,dx =$

$x^0/0$

$\ln|x| + C$

$-1/x^2 + C$

$e^x + C$

$\ln|x| + C$. La excepción n = −1 de la regla de la potencia.

Repetir este cuestionario

Cómo ayuda esto a salvar el planeta

La energía es la integral de la potencia en el tiempo. Los planificadores de la red suman así la producción solar y eólica hora a hora para saber cuánta energía limpia obtendrán y cuánto almacenamiento necesitarán.

Los instrumentos satelitales miden tasas, como el flujo de luz solar o de agua, y las integrales convierten esas tasas en totales: cuánta energía absorbe la Tierra o cuánta agua gana o pierde una cuenca en una estación.

La integración numérica del laboratorio D es exactamente cómo se integran los datos reales, que llegan como mediciones separadas.

En Saving Planets: GRACE-FO · Calculadoras

Fuentes: OpenStax Calculus 1, 5.3 The Fundamental Theorem of Calculus (en inglés) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/5-3-the-fundamental-theorem-of-calculus) · DOE de EE. UU.: ¿cómo funcionan los aerogeneradores? (en inglés) (https://www.energy.gov/eere/wind/how-do-wind-turbines-work)

Recursos de aprendizaje gratuitos

- OpenStax Calculus 1, 5.1 Approximating Areas (en inglés) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/5-1-approximating-areas): Sumas de Riemann.
- OpenStax Calculus 1, 5.2 The Definite Integral (en inglés) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/5-2-the-definite-integral): Definición y propiedades.
- OpenStax Calculus 1, 5.3 The Fundamental Theorem of Calculus (en inglés) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/5-3-the-fundamental-theorem-of-calculus): Ambas partes con demostraciones.

- OpenStax Calculus 1, 5.5 Substitution (en inglés) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/5-5-substitution): Sustitución u.
- OpenStax Calculus 1, 6.1 Areas between Curves (en inglés) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/6-1-areas-between-curves): Áreas entre curvas.

Ver la clase

Clip 1: Proof of the Second Fundamental Theorem of Calculus (https://ocw.mit.edu/courses/18-01sc-single-variable-calculus-fall-2010/resources/clip-1-proof-of-the-second-fundamental-theorem-of-calculus/) (en inglés)

MIT 18.01SC Single Variable Calculus (Fall 2010), MIT OpenCourseWare. Licencia: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Condiciones de uso (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Enlace solo para estudio gratuito; Saving Planets no está afiliado a esta universidad ni cuenta con su respaldo.

☐ **Terminé esta unidad**

Problemas

Estos problemas están dentro de cada unidad. Hazlos en papel y luego abre la respuesta.

1. Funciones y límites
   5 problemas
2. Continuidad y derivada
   4 problemas
3. Reglas de derivación
   5 problemas
4. Aplicaciones I: tasas relacionadas, aproximación y método de Newton
   4 problemas
5. Aplicaciones II: extremos, forma de la gráfica y optimización
   4 problemas
6. Integrales y teorema fundamental del cálculo
   5 problemas

Laboratorios de computadora

El cálculo no tiene laboratorio húmedo, así que este curso tiene en su lugar cuatro laboratorios cortos de computadora. Cada uno aplica una unidad a datos de estilo real con una hoja de cálculo: diferencias finitas, método de Newton, optimización e integración numérica.

Son los mismos métodos numéricos que usan a diario ingenieros y científicos del clima. Los datos de muestra de cada laboratorio son para practicar; cada laboratorio enlaza a la fuente de datos real.

Referencia de seguridad: Laboratorio de Monitoreo Global de la NOAA: tendencias del CO_2 (en inglés) (https://gml.noaa.gov/ccgg/trends/)

Laboratorio A: tasas de cambio a partir de datos

SEMANA 4

Objetivo: Estimar una tasa de cambio y su aceleración a partir de una tabla de mediciones, como tratan los científicos del clima un registro de CO_2.

$$f'(t_i) \approx \frac{f(t_{i+1}) - f(t_{i-1})}{t_{i+1} - t_{i-1}}, \quad f''(t_i) \approx \frac{f(t_{i+1}) - 2f(t_i) + f(t_{i-1})}{h^2}$$

Diferencias centradas para la primera y segunda derivada

Procedimiento

1. Introduce la tabla de muestra en una hoja de cálculo.
2. Calcula las diferencias hacia adelante (tasa en cada año) y las diferencias centradas.
3. Calcula la segunda diferencia: ¿la tasa misma está subiendo?
4. Descarga las medias anuales reales de la NOAA y repite; compara con las tasas de crecimiento publicadas por la NOAA.

Tabla de datos

Año t	C (ppm)
0	400.0
1	402.4
2	404.9
3	407.5
4	410.2

Valores de muestra para practicar, no mediciones reales. Usa los datos de la NOAA para lo real.

Cálculo de ejemplo

1. Diferencia centrada en t = 2: (407.5 − 402.4)/2 = 2.55 ppm por año.
2. Segunda diferencia en t = 2: 407.5 − 2(404.9) + 402.4 = 0.1 ppm por año².
3. Una segunda diferencia positiva significa que la tasa de crecimiento misma aumenta (en esta muestra).

> **Seguridad**
>
> - Guarda una copia intacta de los datos brutos; haz los cálculos en columnas nuevas.

Alternativa en casa o virtual

- Aquí todo se hace en computadora o incluso a mano.

NOAA GML: tasas de crecimiento del CO_2 (en inglés) (https://gml.noaa.gov/ccgg/trends/gr.html)

Vínculo con el planeta: Las tasas de cambio son la forma de informar y comparar las tendencias del CO_2. NOAA GML: tendencias del CO_2 atmosférico (en inglés) (https://gml.noaa.gov/ccgg/trends/)

☐ **Completé este laboratorio (real o virtual)**

Laboratorio B: método de Newton y ecuación de Kepler

SEMANA 9

Objetivo: Resolver la ecuación de Kepler M = E − e sin E para la anomalía excéntrica E de un satélite, el paso clave para predecir dónde está.

$$E_{n+1} = E_n - \frac{E_n - e\sin E_n - M}{1 - e\cos E_n}$$

```
E_n+1=E_n-(E_n-e E_n-M)/(1-e E_n)
```

Método de Newton para la ecuación de Kepler

Procedimiento

1. Fija M = 1.0 rad y e = 0.1 en una hoja de cálculo; empieza con E_0 = M.
2. Copia la fórmula de Newton hacia abajo en cuatro filas.
3. Observa cuántos dígitos dejan de cambiar en cada paso.
4. Prueba e = 0.9 y E_0 = M: ¿cuántos pasos necesita ahora?

Tabla de datos

Paso n	E_n (rad)
0	1.000000
1	1.088953
2	1.088598
3	1.088598

Valores calculados (M = 1.0 rad, e = 0.1).

Cálculo de ejemplo

1. f(E) = E − 0.1 sin E − 1; f'(E) = 1 − 0.1 cos E.
2. Desde E_0 = 1: E_1 = 1.088953, E_2 = 1.088598, tras lo cual los primeros 7 dígitos dejan de cambiar.
3. Comprobación: 1.088598 − 0.1 sin(1.088598) = 1.000000.

> **Seguridad**
>
> - Ninguna más allá del uso normal de una computadora.

Alternativa en casa o virtual

- Basta una hoja de cálculo o Desmos.

OpenStax Calculus 1, 4.9 Newton's Method (en inglés) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/4-9-newtons-method)

Vínculo con el planeta: La predicción orbital mantiene seguros los satélites de observación de la Tierra y bien situados sus datos.

- [ ] **Completé este laboratorio (real o virtual)**

Laboratorio C: optimizar un aerogenerador

SEMANA 11

Objetivo: Confirmar el límite de Betz numéricamente y con cálculo.

$$C_p(a) = 4a(1-a)^2, \quad C_p'(a) = 4(1-a)(1-3a)$$

`C_p(a)=4a(1-a)^2, C_p'(a)=4(1-a)(1-3a)`

Coeficiente de potencia y su derivada

Procedimiento

1. Tabula Cp para a = 0 a 0.5 en pasos de 0.05 y grafícalo.
2. Encuentra el valor más alto de la tabla.
3. Resuelve Cp'(a) = 0 a mano y compara.

Tabla de datos

a	Cp
0.20	0.512
0.30	0.588
1/3	0.593
0.40	0.576

Valores calculados con el modelo.

Cálculo de ejemplo

1. Cp(0.3) = 4 × 0.3 × 0.7² = 0.588.
2. Cp(1/3) = 16/27 = 0.593, el máximo.
3. Los aerogeneradores reales captan menos por el arrastre, la rotación de la estela y las pérdidas en la punta de las palas.

> **Seguridad**
>
> - Ninguna más allá del uso normal de una computadora.

Alternativa en casa o virtual

- Basta una hoja de cálculo o Desmos.

DOE de EE. UU.: ¿cómo funcionan los aerogeneradores? (en inglés) (https://www.energy.gov/eere/wind/how-do-wind-turbines-work)

Vínculo con el planeta: Conocer el techo dice a los ingenieros cuánto se puede mejorar todavía.

- [ ] **Completé este laboratorio (real o virtual)**

Laboratorio D: integración numérica de la energía solar

SEMANA 13

Objetivo: Integrar una curva de potencia con las reglas del punto medio y del trapecio y comparar con la respuesta exacta.

$$T_n = \frac{\Delta t}{2}\left[f_0 + 2f_1 + \cdots + 2f_{n-1} + f_n\right]$$

```
T_n=Δ t2[f_0+2f_1++2f_n-1+f_n]
```

Regla del trapecio

Procedimiento

1. Modelo P(t) = 5 sin(πt/12) kW en 0 ≤ t ≤ 12 h.
2. Con n = 6 franjas (Δt = 2 h), calcula las sumas del punto medio y del trapecio.
3. Compara con el valor exacto 120/π kWh. Duplica n y observa cómo se reducen los errores.

Tabla de datos

Método (n = 6)	Energía (kWh)
Punto medio	38.64
Trapecio	37.32
Exacta (TFC)	38.20

Valores del modelo, no datos de un campo real.

Cálculo de ejemplo

1. Trapecio: 2 × [0 + 2(2.5 + 4.330 + 5 + 4.330 + 2.5)]/2 = 37.32 kWh.
2. Punto medio: 2 × Σ P en t = 1, 3, ..., 11 = 38.64 kWh.
3. Errores: punto medio +0.44, trapecio −0.88. El error del punto medio es aproximadamente la mitad del del trapecio, con signo opuesto, como predice la teoría.

> **Seguridad**
>
> - Ninguna más allá del uso normal de una computadora.

Alternativa en casa o virtual

- Basta una hoja de cálculo o Desmos.

OpenStax Calculus 1, 5.1 Approximating Areas (en inglés) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/5-1-approximating-areas)

Vínculo con el planeta: Así se suman los datos reales de energía por hora para planificar la energía limpia y el almacenamiento.

- [ ] **Completé este laboratorio (real o virtual)**

Series de práctica para exámenes

Cronométrate: unos 10 minutos por problema. Luego compara con las soluciones completas.

Serie de práctica de mitad de curso (unidades 1–3)

1. Halla $\lim (x - 4)/(\sqrt{x} - 2)$ cuando $x \to 4$.

    1. Multiplica por $\sqrt{x} + 2$: $(x - 4)(\sqrt{x} + 2)/(x - 4) = \sqrt{x} + 2$.
    2. Sustituye $x = 4$: $2 + 2$.

    Respuesta: 4.

2. Deriva $y = x^3 e^x$ y evalúa en $x = 1$.

    1. Regla del producto: $y' = 3x^2 e^x + x^3 e^x = (3x^2 + x^3)e^x$.
    2. At $x = 1$: $4e$.

    Respuesta: $4e \approx 10.87$.

3. Halla la recta tangente a $y = \ln x$ en $x = 1$.

    1. $y(1) = 0$, $y' = 1/x = 1$.
    2. $y - 0 = 1(x - 1)$.

    Respuesta: $y = x - 1$.

4. Deriva $y = \sin(3x^2)$.

    1. Regla de la cadena: $\cos(3x^2) \cdot 6x$.

    Respuesta: $y' = 6x \cos(3x^2)$.

Serie de práctica final (todas las unidades)

1. Entra agua en un tanque cilíndrico de 2 m de radio a 0.5 m^3/min. ¿Con qué rapidez sube el nivel?

    1. $V = \pi r^2 h = 4\pi h$, así que $dV/dt = 4\pi\, dh/dt$.
    2. $dh/dt = 0.5/(4\pi)$.

Respuesta: Unos 0.0398 m/min (4.0 cm por minuto).

2. Halla $\int_1^e (1/x)\,dx$.

    1. $[\ln x]_1^e = 1 - 0$.

    Respuesta: 1.

3. Halla $\int_0^4 \sqrt{x}\,dx$.

    1. Antiderivada $(2/3)x^{(3/2)}$.
    2. $(2/3)(8) = 16/3$.

    Respuesta: $16/3 \approx 5.33$.

4. Un rectángulo tiene 40 m de perímetro. ¿Qué dimensiones maximizan su área?

    1. $A = x(20 - x)$; $A' = 20 - 2x = 0$ en $x = 10$.

    Respuesta: Un cuadrado de 10 m × 10 m, de área 100 m².

5. Usa L'Hôpital para hallar $\lim x^2/e^x$ cuando $x \to \infty$.

    1. ∞/∞: $\to 2x/e^x$, todavía ∞/∞.
    2. $\to 2/e^x \to 0$.

    Respuesta: 0: las exponenciales crecen más que cualquier potencia.

Hoja de fórmulas

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} [f(x+h) - f(x)]/h \qquad (x^n)' = nx^{n-1}$$

$$(fg)' = f'g + fg' \qquad (f/g)' = (f'g - fg')/g^2$$

$$[f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x) \qquad (e^x)' = e^x,\ (\ln x)' = 1/x$$

$$(\sin x)' = \cos x,\ (\cos x)' = -\sin x,\ (\tan x)' = \sec^2 \qquad L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n) \qquad f'(c) = [f(b) - f(a)]/(b - a)$$

$$\int x^n\,dx = x^{n+1}/(n+1) + C \qquad \int e^x\,dx = e^x + C,\ \int dx/x = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C,\ \int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int_a^b f\,dx = F(b) - F(a)$$

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

$$f_{avg} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f\,dx$$

Constantes

Constante	Valor
e	2.718281828...
π	3.141592654...
ln 2	0.693147...
1 radián	57.2958°

Fuente: NIST: constantes físicas fundamentales (en inglés) (https://physics.nist.gov/cuu/Constants/)

Herramientas de gráficas y datos

Usa estas herramientas y fuentes de datos gratuitas junto con el curso.

- Calculadora gráfica Desmos (https://www.desmos.com/calculator): Grafica funciones, deslizadores y rectas tangentes en el navegador.
- PhET: Calculus Grapher (https://phet.colorado.edu/en/simulations/calculus-grapher): Dibuja una función y ve su derivada y su integral.
- NOAA: tendencias del CO_2 atmosférico (en inglés) (https://gml.noaa.gov/ccgg/trends/): Datos reales de CO_2 de Mauna Loa y globales para practicar tasas de cambio.

Glosario

Antiderivada
Una función F con F' = f.

Asíntota
Una recta a la que se acerca una gráfica lejos o cerca de donde se dispara.

Regla de la cadena
Derivada de una composición: derivada de fuera × derivada de dentro.

Concavidad
Dirección en que se curva una gráfica; signo de f".

Continuidad
Sin saltos: el límite es igual al valor de la función.

Punto crítico
Donde f' es cero o no está definida.

Integral definida
Área con signo bajo una curva entre dos límites.

Derivada
Tasa de cambio instantánea; pendiente de la recta tangente.

Diferencial
dy = f'(x) dx.

Teorema fundamental del cálculo
Relaciona derivadas e integrales; $\int_a^b f = F(b) - F(a)$.

Forma indeterminada
0/0 o ∞/∞; requiere más trabajo.

Punto de inflexión
Donde cambia la concavidad.

Límite
El valor al que se acerca una función.

Aproximación lineal
Estimación con la recta tangente.

Teorema del valor medio
La tasa instantánea es igual a la tasa promedio en algún punto.

Método de Newton
Búsqueda iterativa de raíces con rectas tangentes.

Optimización
Hallar el mejor valor de una cantidad bajo restricciones.

Suma de Riemann
Suma de áreas de rectángulos que aproxima una integral.

Sustitución
Técnica de integración que invierte la regla de la cadena.

Regla del trapecio
Integración numérica con trapecios.

Rúbrica de autoevaluación

No se otorga nota ni crédito. Úsala para valorar con honestidad dónde estás en cada unidad.

Nivel	Cómo se ve
4 · Dominio	Resuelve problemas nuevos, justifica cada paso con una regla o teorema y comprueba las respuestas con una gráfica o una estimación.

Nivel	Cómo se ve
3 · Competente	Resuelve correctamente los ejercicios con algún desliz algebraico ocasional.
2 · En desarrollo	Sigue los ejemplos resueltos pero le cuesta elegir un método, o aplica mal la regla de la cadena.
1 · Inicial	Memoriza fórmulas sin saber cuándo se aplican; necesita repasar la unidad.

Ponderación sugerida si quieres una nota

Parte	Peso
Problemas de práctica	30%
Laboratorios de computadora	15%
Serie de práctica de mitad de curso	25%
Serie de práctica final	30%

Apunta al nivel 3 o superior en cada unidad antes de pasar al siguiente curso.

Cursos relacionados

- Física I + Laboratorio PHYS 110 + PHYS 110L
- Cálculo II MATH 111
- Química General I + Laboratorio CHEM 110 + CHEM 110L
- Todos los cursos