آخر تحديث: November 1, 2026

🗺️ خريطة طريق لأربع سنوات · السنة 1, الخريف

عن هذه الدورة

يتضمن هذا المقرر المجاني 6 وحدات و4 مختبرات. هذه الأعداد الحقيقية وليست منهجًا أطول جرى اختصاره.

التحقق هو رقم أو نتيجة برمجية في صفحة مقرر يعيد سكربت حسابها قبل النشر. يجب أن يطابق الرقم المعروض الرقم المعاد حسابه.

هذا مخطط دورة مجانية للتعلّم الذاتي كتبته Saving Planets. وهو ليس مقررًا جامعيًا، ولا يمنح ساعات معتمدة، ولا تشارك فيه أي مؤسسة تعليمية.

يتبع نطاقه الفصل الأول من التفاضل والتكامل الجامعي (التفاضل في متغير واحد ومقدمة في التكاملات)، على غرار موضوعات ومستوى مواد مفتوحة مثل OpenStax Calculus Volume 1 وMIT OpenCourseWare 18.01SC Single Variable Calculus، التي نربط إليها في كل أجزاء الدورة. هذه المنظمات لا تتبنّى هذه الصفحة.

ما نضيفه: كل وحدة تربط التفاضل والتكامل بمشكلات حقيقية في المناخ والطاقة ورحلات الفضاء، وكل رقم في الصفحة يُعاد حسابه ببرنامج تحقق قبل نشره، وأربعة مختبرات حاسوبية تتيح لك تطبيق التفاضل والتكامل على البيانات كما يفعل العلماء والمهندسون.

تابعها بالترتيب. في كل وحدة أهداف وأفكار أساسية ومعادلات وأمثلة خطوة بخطوة وتمارين بإجابات كاملة وأخطاء شائعة وبطاقات تعليمية واختبار قصير. يُحفظ تقدّمك في هذا المتصفح فقط.

كيف تساعد هذه الدورة في إنقاذ الكوكب

التفاضل والتكامل هو رياضيات التغيّر. يستخدم علماء المناخ المشتقات لتحويل سجلّ ثاني أكسيد الكربون أو الجليد البحري إلى معدل تغيّر، ويستخدم المهندسون التحسين للحصول على أكبر قدر من الطاقة من الرياح وأكبر إنجاز من كل كيلوغرام من وقود الصواريخ، وتجمع التكاملات القدرة لتعطي الطاقة.

تنتهي كل وحدة بقسم قصير موثّق بالمصادر يبيّن كيف تساعد أفكارها الناس والطبيعة معًا.

للمعلمين

يمكنك تدريس هذا المقرر، أو أن يتابعه الطالب وحده. إنه مجاني. Saving Planets لا تمنح درجة ولا ساعات معتمدة.

- هذه الصفحة هي المقرر كاملًا: 6 وحدات و4 مختبرات (MATH 110).
- خطّط لخمسة عشر أسبوعًا، نحو 6 إلى 9 ساعات في الأسبوع، بما في ذلك أسابيع المختبر.
- اتبع جدول الخمسة عشر أسبوعًا. اقرأ الوحدة، حلّ التمارين على الورق، ثم افتح الإجابة. في أسبوع المختبر، نفّذ المختبر أو نسخته المنزلية.
- التحقق هو رقم أو نتيجة برمجية في الصفحة يعيد سكربت حسابها قبل النشر. يجب أن يطابق الرقم الظاهر الرقم المعاد حسابه.

- استخدم طباعة هذه الصفحة، أو نزّل دليل الدراسة PDF. ورقة القوانين قرب النهاية.
- اسأل: كيف تساعد هذه الوحدة الناس والكوكب؟ في كل وحدة مربع أخضر فيه حقيقة مع مصدرها.
- انسخ نموذج دليل المعلم واكتب اسم صفك والوقت المتاح والأسئلة التي ستطرحها. افتح نموذج دليل المعلم

قبل أن تبدأ

المتطلبات السابقة

- الجبر: التحليل إلى عوامل، والعبارات النسبية، وحل المعادلات والمتراجحات.
- الدوال والمنحنيات: المجال والمدى والتركيب والدوال العكسية.
- حساب المثلثات: الراديان ودائرة الوحدة والجيب وجيب التمام والظل والمتطابقات الأساسية.
- الدوال الأسية واللوغاريتمية، بما فيها e وln.

كيف تذاكر

- اقرأ الوحدة، ثم أغلقها وجرّب الأمثلة المحلولة بنفسك قبل التحقق من كل خطوة.
- حلّ كل تمرين على الورق قبل فتح الإجابة.
- ارسم منحنى كلما استطعت. معظم أخطاء التفاضل والتكامل تظهر في صورة لا معنى لها.
- تحقّق من المشتقات بتقدير الميل عدديًا، ومن التكاملات بتقدير المساحة.
- استخدم أداة رسم مثل Desmos لاختبار حدسك، لا لتحلّ محل العمل أبدًا.
- أعد الاختبارات القصيرة بعد بضعة أيام. التدرّب المتباعد أفضل من جلسة طويلة واحدة.

ماذا تحتاج

- حاسوب أو جهاز لوحي مع برنامج جداول بيانات (Google Sheets أو Excel أو LibreOffice).
- آلة حاسبة بيانية مجانية مثل Desmos.
- اختياري: Python مع NumPy لمن يريد برمجة المختبرات.

جدول مقترح من 15 أسبوعًا

نحو 6 إلى 9 ساعات أسبوعيًا: قراءة وتمارين، وفي أسابيع المختبر، المختبر.

الأسبوع	الوحدة	الموضوعات	القراءة
1	الدوال والنهايات	مراجعة الدوال؛ فكرة النهاية؛ النهايات من المنحنيات والجداول	OpenStax 1.1–1.5, 2.1–2.2
2	الدوال والنهايات	قوانين النهايات؛ تقنيات جبرية؛ نهايات مثلثية خاصة	OpenStax 2.3
3	الدوال والنهايات	النهايات عند اللانهاية؛ الخطوط المقاربة؛ التعريف الدقيق	OpenStax 2.5, 4.6
4	الاتصال والمشتقة	الاتصال، مبرهنة القيمة الوسطى، المشتقة؛ المختبر A	OpenStax 2.4, 3.1–3.2

الأسبوع	الوحدة	الموضوعات	القراءة
5	قواعد الاشتقاق	قواعد القوة والضرب والقسمة؛ المشتقات العليا	OpenStax 3.3–3.4
6	قواعد الاشتقاق	مشتقات الدوال المثلثية؛ قاعدة السلسلة	OpenStax 3.5–3.6
7	قواعد الاشتقاق	الاشتقاق الضمني؛ مشتقات الدوال الأسية واللوغاريتمية؛ تدريب منتصف الفصل	OpenStax 3.7–3.9
8	التطبيقات I: المعدلات المرتبطة والتقريب وطريقة نيوتن	المعدلات المرتبطة؛ التقريب الخطي والتفاضلات	OpenStax 4.1–4.2
9	التطبيقات I: المعدلات المرتبطة والتقريب وطريقة نيوتن	قاعدة لوبيتال؛ طريقة نيوتن؛ المختبر B	OpenStax 4.8–4.9
10	التطبيقات II: القيم القصوى وشكل المنحنى والتحسين	القيم القصوى، مبرهنة القيمة المتوسطة، شكل المنحنى	OpenStax 4.3–4.5
11	التطبيقات II: القيم القصوى وشكل المنحنى والتحسين	التحسين التطبيقي؛ المختبر C	OpenStax 4.7
12	التكاملات والمبرهنة الأساسية في التفاضل والتكامل	مجاميع ريمان والتكامل المحدد	OpenStax 5.1–5.2
13	التكاملات والمبرهنة الأساسية في التفاضل والتكامل	المبرهنة الأساسية؛ المختبر D	OpenStax 5.3–5.4
14	التكاملات والمبرهنة الأساسية في التفاضل والتكامل	التعويض؛ القيمة المتوسطة؛ المساحات بين المنحنيات	OpenStax 5.5, 6.1
15	المراجعة	مراجعة ومجموعة تمارين نهائية	كل الوحدات

تقدّمك

ضع علامة على الوحدات والمختبرات عند إنهائها، وخص الاختبارات. يُحفظ التقدم ونتائج الاختبارات في هذا المتصفح فقط، ولا تُرسل إلينا أبدًا.

الوحدات

الدوال والنهايات

تصف النهاية ما تقترب منه الدالة. إنها الفكرة التي تقوم عليها كل مشتقة وكل تكامل.

أهداف التعلّم

في نهاية هذه الوحدة ستستطيع أن:

- تقدير النهايات من المنحنيات والجداول، بما فيها النهايات من جهة واحدة.
- حساب النهايات بقوانين النهايات والتحليل إلى عوامل والضرب في المرافق.
- إيجاد النهايات عند اللانهاية وتحديد الخطوط المقاربة الأفقية والرأسية.
- صياغة التعريف الدقيق (ε–δ) للنهاية.

المفاهيم الأساسية

- تعني lim f(x) عندما x → a = L أنه يمكن جعل f(x) قريبة من L بالقدر الذي نريده بأخذ x قريبة بما يكفي من a، دون أن تساويها.
- لا توجد النهاية إلا إذا تساوت النهايتان من اليسار ومن اليمين.
- في الصيغة 0/0، بسّط أولًا: حلّل إلى عوامل أو اختصر أو اضرب في مرافق.
- نهايتان خاصتان: sin x / x → 1 و(1 − cos x)/x → 0 عندما x → 0 (x بالراديان).
- عند اللانهاية، قارن أعلى القوى في الدالة النسبية.

المعادلات الأساسية

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

_x af(x)=L

رمز النهاية

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

_x0(x)/(x)=1

نهاية مثلثية أساسية

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \; 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

التعريف الدقيق للنهاية

أمثلة محلولة خطوة بخطوة

مثال 1.1 أوجد lim (x² − 4)/(x − 2) عندما x → 2.

1. التعويض المباشر يعطي 0/0، لذا بسّط.
2. $(x^2 - 4)/(x - 2) = (x - 2)(x + 2)/(x - 2) = x + 2$ عندما $x \neq 2$.
3. عوّض الآن: $2 + 2 = 4$.

الإجابة: 4.

مثال 1.2 أوجد $\lim (\sqrt{(x + 4)} - 2)/x$ عندما $x \to 0$.

1. مرة أخرى 0/0. اضرب البسط والمقام في المرافق $\sqrt{(x + 4)} + 2$.
2. يصبح البسط $(x + 4) - 4 = x$، فتصير العبارة $1/(\sqrt{(x + 4)} + 2)$.
3. عوّض $x = 0$: $1/(2 + 2) = 1/4$.

الإجابة: 1/4.

مثال 1.3 أوجد $\lim (3x^2 + 1)/(2x^2 - 5)$ عندما $x \to \infty$.

1. اقسم البسط والمقام على x^2: $(3 + 1/x^2)/(2 - 5/x^2)$.
2. As $x \to \infty$, $1/x^2 \to 0$.

الإجابة: 3/2، إذن $y = 3/2$ خط مقارب أفقي.

تمارين

حلّ كلًّا منها على الورق أولًا، ثم تحقق.

1. $\lim (x^2 - 9)/(x - 3)$ عندما $x \to 3$

   حلّل إلى عوامل: $x + 3 \to 6$.

2. $\lim (5x + 2)/(x - 1)$ عندما $x \to \infty$

   اقسم على x: 5.

3. $\lim (1 - \cos x)/x$ عندما $x \to 0$

   0 (نهاية معروفة).

4. $\lim 1/x$ عندما $x \to 0^+$ وعندما $x \to 0^-$

   $+\infty$ من اليمين و$-\infty$ من اليسار، لذا النهاية من الجهتين غير موجودة.

5. $\lim \sin(3x)/x$ عندما $x \to 0$

   اكتبها على الصورة $3 \cdot \sin(3x)/(3x) \to 3 \times 1 = 3$.

مفاهيم خاطئة شائعة

خرافة: النهاية هي ببساطة قيمة الدالة عند تلك النقطة.

في الحقيقة: النهاية لا تعتمد على f(a). قد تكون f غير معرّفة عند a ومع ذلك لها نهاية هناك، كما في المثال 1.1.

خرافة: 0/0 تعني أن النهاية تساوي 0 (أو غير موجودة).

في الحقيقة: 0/0 صيغة غير معيّنة: قد تكون النهاية أي شيء. يجب التبسيط.

خرافة: إذا اقترب المنحنى من مستقيم، فلا يمكنه أن يقطعه أبدًا.

في الحقيقة: يمكن للمنحنى أن يقطع خطًا مقاربًا أفقيًا؛ فالخط المقارب يصف السلوك في البعيد.

بطاقات تعليمية

النهاية

القيمة التي تقترب منها f(x) عندما تقترب x من a.

النهاية من جهة واحدة

النهاية من اليسار ($x \to a^-$) أو من اليمين ($x \to a^+$).

صيغة غير معيّنة

0/0 أو ∞/∞: بسّط قبل أن تحكم.

خط مقارب أفقي

$y = L$ عندما $f(x) \to L$ مع $x \to \pm\infty$.

خط مقارب رأسي

$x = a$ عندما $f(x) \to \pm\infty$ مع $x \to a$.

تعريف ε–δ

لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ يُبقي $f(x)$ على بُعد أقل من ε من L.

اختبار ذاتي

1. $\lim (x^2 - 1)/(x - 1)$ عندما $x \to 1$ تساوي...

0

1

2

غير معرّفة

2. حلّل إلى $x + 1 \to 2$.

2. توجد النهاية من الجهتين عندما...

تكون f(a) معرّفة

تتساوى النهايتان من اليسار ومن اليمين

تكون الدالة كثيرة حدود

لا توجد في المنحنى ثقوب

تتساوى النهايتان من اليسار ومن اليمين. يجب أن توجد النهايتان من الجهتين وأن تتساويا.

3. lim sin x / x عندما x → 0 (بالراديان) تساوي...

0

1

∞

π/180

1. نهاية أساسية؛ ولهذا يستخدم التفاضل والتكامل الراديان.

4. lim (4x³ − x)/(2x³ + 7) عندما x → ∞ تساوي...

0

2

4

∞

2. المعاملات الرئيسية: 4/2 = 2.

أعد هذا الاختبار

كيف يساعد هذا في إنقاذ الكوكب

كل سجل مناخي قائمة من القياسات في أوقات منفصلة. وفكرة النهاية، أي تقليص الخطوة الزمنية نحو الصفر، هي ما يتيح للعلماء الحديث عن معدل التغيّر في لحظة بعينها لا على مدى سنة أو عقد فقط.

تقيس NOAA ثاني أكسيد الكربون في مرصد ماونا لوا منذ 1958. وتنشر صفحات بياناتها التركيز ومعدل نموه السنوي معًا، وهو استخدام مباشر لمعدل التغيّر المتوسط الذي تجعله النهايات دقيقًا.

على OCO-2 :Saving Planets: قياس CO_2 من المدار (بالإنجليزية)

المصادر: NOAA GML: اتجاهات CO_2 في الغلاف الجوي (بالإنجليزية) (https://gml.noaa.gov/ccgg/trends/) · NOAA GML: معدلات نمو CO_2 (بالإنجليزية) (https://gml.noaa.gov/ccgg/trends/gr.html)

مصادر تعلّم مجانية

- OpenStax Calculus 1, 2.2 The Limit of a Function (بالإنجليزية) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/2-2-the-limit-of-a-function): قسم من كتاب مدرسي مجاني.
- OpenStax Calculus 1, 2.3 The Limit Laws (بالإنجليزية) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/2-3-the-limit-laws): قوانين النهايات مع أمثلة محلولة.
- OpenStax Calculus 1, 2.5 The Precise Definition of a Limit (بالإنجليزية) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/2-5-the-precise-definition-of-a-limit): براهين ε–δ.
- MIT OpenCourseWare 18.01SC Single Variable Calculus (بالإنجليزية) (https://ocw.mit.edu/courses/18-01sc-single-variable-calculus-fall-2010/): محاضرات وملاحظات ومجموعات مسائل مجانية من MIT.

أنهيت هذه الوحدة

الاتصال والمشتقة

الاتصال يعني عدم وجود انقطاع. والمشتقة هي نهاية معدلات التغيّر المتوسطة: ميل المماس.

أهداف التعلّم

في نهاية هذه الوحدة ستستطيع أن:

- اختبار اتصال دالة واستخدام مبرهنة القيمة الوسطى.
- حساب المشتقة من تعريفها بالنهاية.
- تفسير المشتقة على أنها ميل وسرعة ومعدل تغيّر، مع وحداتها.
- كتابة معادلة المماس.

المفاهيم الأساسية

- تكون f متصلة عند a إذا كانت f(a) معرّفة والنهاية موجودة وكانتا متساويتين.
- مبرهنة القيمة الوسطى: الدالة المتصلة على [a, b] تأخذ كل قيمة بين f(a) وf(b).
- المشتقة f'(a) هي نهاية خارج قسمة الفروق [f(a + h) − f(a)]/h عندما h → 0.
- وحدات f' هي وحدات f لكل وحدة من x: متر لكل ثانية، جزء في المليون لكل سنة.
- الدالة غير قابلة للاشتقاق عند زاوية أو نقطة رجوع أو مماس رأسي أو انقطاع.

المعادلات الأساسية

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

`f'(x)=_h0(f(x+h)-f(x))/(h)`

تعريف المشتقة بالنهاية

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

`y-f(a)=f'(a)(x-a)`

المماس عند x = a

أمثلة محلولة خطوة بخطوة

مثال 2.1 استخدم التعريف لإيجاد مشتقة f(x) = x².

1. [(x + h)² − x²]/h = (2xh + h²)/h = 2x + h.
2. عندما h → 0 يؤول هذا إلى 2x.

الإجابة: f'(x) = 2x.

مثال 2.2 أوجد المماس للمنحنى $y = x^3$ عند $x = 1$.

1. $y' = 3x^2$، إذن الميل عند $x = 1$ يساوي 3.
2. النقطة: $(1, 1)$.
3. $y - 1 = 3(x - 1)$، إذن $y = 3x - 2$.

الإجابة: $y = 3x - 2$.

مثال 2.3 ما قيمة a التي تجعل $f(x) = x + 1$ $(x < 1)$، ax^2 $(x \geq 1)$ متصلة في كل مكان؟

1. النهاية من اليسار عند 1: $1 + 1 = 2$.
2. القيمة والنهاية من اليمين: $a \times 1^2 = a$.
3. الاتصال يتطلب $a = 2$.

الإجابة: $a = 2$.

تمارين

حلّ كلًّا منها على الورق أولًا، ثم تحقق.

1. استخدم التعريف لاشتقاق $f(x) = 1/x$.

   $[1/(x + h) - 1/x]/h = -1/(x(x + h)) \to -1/x^2$.

2. حجر يُترك ليسقط يقطع $s(t) = 4.9t^2$ مترًا. أوجد سرعته المتوسطة من $t = 1$ إلى $t = 3$ s وسرعته اللحظية عند $t = 2$ s.

   المتوسطة: $(44.1 - 4.9)/2 = 19.6$ m/s. اللحظية: $s'(t) = 9.8t$، إذن 19.6 m/s عند $t = 2$.

3. بيّن أن للمعادلة $x^3 + x - 1 = 0$ جذرًا بين 0 و1.

   $f(0) = -1 < 0$ و$f(1) = 1 > 0$، وf متصلة، لذا حسب مبرهنة القيمة الوسطى تمر بـ 0 بينهما.

4. هل $f(x) = |x|$ قابلة للاشتقاق عند 0؟

   لا. الميل -1 من اليسار و$+1$ من اليمين، لذا نهاية خارج قسمة الفروق غير موجودة (زاوية).

مفاهيم خاطئة شائعة

خرافة: المتصلة تعني القابلة للاشتقاق.
في الحقيقة: $|x|$ متصلة عند 0 لكن لا مشتقة لها هناك. أما القابلية للاشتقاق فتستلزم الاتصال.

خرافة: المشتقة هي التغيّر في y.
في الحقيقة: إنها معدل التغيّر: التغيّر في y لكل وحدة تغيّر في x، عند النهاية.

خرافة: المماس يلمس المنحنى في نقطة واحدة فقط.

في الحقيقة: قد يقطع المنحنى في مواضع أخرى، بل وعند نقطة التماس نفسها (كما في $y = x^3$ عند 0).

بطاقات تعليمية

الاتصال عند a

$\lim f(x)$ عندما $x \to a$ تساوي $f(a)$.

مبرهنة القيمة الوسطى

متصلة على $[a, b]$ ⇒ تُبلَغ كل قيمة بين $f(a)$ و$f(b)$.

خارج قسمة الفروق

$[f(x + h) - f(x)]/h$، معدل تغيّر متوسط.

المشتقة

نهاية خارج قسمة الفروق؛ معدل التغيّر اللحظي.

المماس

$y = f(a) + f'(a)(x - a)$.

قابلة للاشتقاق ⇒ متصلة

لكن ليس العكس.

اختبار ذاتي

1. إذا كانت $s(t)$ موضعًا بالمتر وt بالثواني، فوحدات $s'(t)$ هي...

- m
- s
- m/s
- m/s^2
- m/s. وحدات f مقسومة على وحدات x.

2. مشتقة x^2 عند $x = 3$ تساوي...

- 3
- 6
- 9
- 2

.6. f'(x) = 2x

3. أي دالة متصلة لكنها غير قابلة للاشتقاق عند 0؟

x^2

$|x|$

$\sin x$

e^x

$|x|$. لها زاوية عند 0.

4. تتطلب مبرهنة القيمة الوسطى أن تكون الدالة...

قابلة للاشتقاق

متزايدة

متصلة على $[a, b]$

كثيرة حدود

متصلة على $[a, b]$. الاتصال على الفترة المغلقة هو الفرض الأساسي.

أعد هذا الاختبار

كيف يساعد هذا في إنقاذ الكوكب

تحوّل المشتقة سجلّ المواقع إلى سرعة. والملاحة بالأقمار الصناعية تفعل ذلك باستمرار: فمثلًا يقيس GRACE-FO كيف تتغيّر المسافة بين قمريه، وتكشف هذه التغيّرات تحوّلات الماء والجليد على الأرض.

المعدلات مع وحداتها هي الطريقة التي يُبلَّغ بها عن تغيّر المناخ عمليًا: أجزاء في المليون من CO_2 لكل سنة، وملّيمترات من مستوى سطح البحر لكل سنة. وقراءة المشتقة مع وحداتها مهارة أساسية في الثقافة العلمية.

على GRACE-FO: Saving Planets · الفيزياء + 1 المختبر

المصادر: NASA JPL: GRACE-FO (https://gracefo.jpl.nasa.gov/) · OpenStax Calculus 1, 3.1 Defining the Derivative (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/3-1-defining-the-derivative) (بالإنجليزية)

مصادر تعلّم مجانية

- OpenStax Calculus 1, 2.4 Continuity (بالإنجليزية) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/2-4-continuity): الاتصال ومبرهنة القيمة الوسطى.
- OpenStax Calculus 1, 3.1 Defining the Derivative (بالإنجليزية) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/3-1-defining-the-derivative): المشتقة من المبادئ الأولى.
- PhET: Calculus Grapher (https://phet.colorado.edu/en/simulations/calculus-grapher): شاهد الدالة ومشتقتها معًا.

شاهد المحاضرة

Clip 4: Physical Interpretation of Derivatives, Continued (https://ocw.mit.edu/courses/18-01sc-single-variable-calculus-fall-2010/resources/clip-4-physical-interpretation-of-derivatives-continued/) (باللغة الإنجليزية)

MIT 18.01SC Single Variable Calculus (Fall 2010), MIT OpenCourseWare. الترخيص: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · شروط الاستخدام (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). الرابط للدراسة المجانية فقط؛ Saving Planets غير تابع لهذه الجامعة ولا يحظى بتأييدها.

أنهيت هذه الوحدة

قواعد الاشتقاق

قواعد القوة والضرب والقسمة والسلسلة، إضافة إلى مشتقات الدوال المثلثية والأسية واللوغاريتمية، والاشتقاق الضمني.

أهداف التعلّم

في نهاية هذه الوحدة ستستطيع أن:

- اشتقاق كثيرات الحدود وحواصل الضرب والقسمة والتراكيب بسرعة ودقة.
- اشتقاق sin وcos وtan وe^x و$\ln x$.
- استخدام الاشتقاق الضمني لإيجاد dy/dx.
- إيجاد المشتقات العليا وتفسير المشتقة الثانية على أنها تسارع.

المفاهيم الأساسية

- قاعدة القوة: $d/dx\ x^n = nx^{n-1}$ لأي عدد حقيقي n.
- قاعدة الضرب: (fg)' = f'g + fg'. قاعدة القسمة: (f/g)' = (f'g − fg')/g².
- قاعدة السلسلة: مشتقة f(g(x)) هي f'(g(x)) · g'(x)، أي مشتقة الخارج في مشتقة الداخل.
- e^x هي مشتقة نفسها؛ ومشتقة ln x هي 1/x. ولهذا يظهر e في كل نماذج النمو والتناقص.
- الاشتقاق الضمني: اشتق الطرفين بالنسبة إلى x، معاملًا y على أنها دالة في x.

المعادلات الأساسية

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

d/dxx^n=nx^n-1

قاعدة القوة

$$(fg)' = f'g + fg', \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

(fg)'=f'g+fg', (fg)'=(f'g-fg')/(g^2)

قاعدتا الضرب والقسمة

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))\,g'(x)$$

d/dxf(g(x))=f'(g(x)) g'(x)

قاعدة السلسلة

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x, \quad \frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$$

d/dxe^x=e^x, d/dx x=1x

الدالة الأسية واللوغاريتم

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x, \quad \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$$

d/dx x= x, d/dx x=- x

مشتقات الدوال المثلثية

أمثلة محلولة خطوة بخطوة

مثال 3.1 اشتق $y = x^2 \sin x$.

1. قاعدة الضرب مع $f = x^2$، $g = \sin x$.
2. $y' = 2x \sin x + x^2 \cos x$.

الإجابة: $y' = 2x \sin x + x^2 \cos x$.

مثال 3.2 اشتق $y = (3x^2 + 1)^5$.

1. الخارج: $u^5 \to 5u^4$. الداخل: $u = 3x^2 + 1 \to 6x$.
2. $y' = 5(3x^2 + 1)^4 \cdot 6x$.

الإجابة: $y' = 30x(3x^2 + 1)^4$.

مثال 3.3 أوجد ميل الدائرة $x^2 + y^2 = 25$ عند $(3, 4)$.

1. اشتق: $2x + 2y\,y' = 0$.
2. $y' = -x/y = -3/4$.

الإجابة: $-3/4$.

تمارين

حلّ كلًّا منها على الورق أولًا، ثم تحقق.

1. $\frac{d}{dx}(3x^4 - 5x^2 + 7)$

   $12x^3 - 10x$.

2. $\frac{d}{dx}\ln(x^2 + 1)$

$2x/(x^2 + 1)$ (قاعدة السلسلة).

3. $d/dx\ (x/(x + 1))$

$[(x + 1) - x]/(x + 1)^2 = 1/(x + 1)^2$.

4. تنمو كمية وفق $Q(t) = 1000e^{(0.02t)}$. ما سرعة نموها عند $t = 0$، وما معدل نموها النسبي؟

$Q'(t) = 20e^{(0.02t)}$، إذن 20 وحدة لكل وحدة زمن عند $t = 0$. و$Q'/Q = 0.02$، أي 2% ثابتة لكل وحدة زمن.

5. إذا كانت $s(t) = t^3 - 6t^2$، فأوجد السرعة والتسارع عند $t = 1$.

$v = 3t^2 - 12t = -9$; $a = 6t - 12 = -6$.

مفاهيم خاطئة شائعة

خرافة: مشتقة حاصل الضرب هي حاصل ضرب المشتقات.
في الحقيقة: استخدم قاعدة الضرب: $(fg)' = f'g + fg'$.

خرافة: $d/dx\ \sin(3x) = \cos(3x)$.
في الحقيقة: قاعدة السلسلة: $3\cos(3x)$.

خرافة: $d/dx\ e^x = x\,e^{x-1}$.
في الحقيقة: لا تنطبق قاعدة القوة على الأسس المتغيرة. $d/dx\ e^x = e^x$.

بطاقات تعليمية

قاعدة القوة

$d/dx\ x^n = nx^{n-1}$.

قاعدة الضرب

$(fg)' = f'g + fg'$.

قاعدة القسمة

$(f/g)' = (f'g - fg')/g^2$.

قاعدة السلسلة

$[f(g(x))]' = f'(g(x))\ g'(x)$.

$d/dx\ e^x$

e^x.

$d/dx\ \ln x$

$1/x$.

اختبار ذاتي

1. $d/dx\ (x^5) =$

$5x^4$

x^4

$5x^5$

$4x^5$

$5x^4$. قاعدة القوة.

2. d/dx sin(x²) =

$\cos(x^2)$

$2x \cos(x^2)$

$2 \sin x \cos x$

$-2x \cos(x^2)$

$2x \cos(x^2)$. قاعدة السلسلة: $2x \cdot \cos(x^2)$.

3. d/dx ln(5x) =

$5/x$

$1/(5x)$

$1/x$

$\ln 5$

$1/x$. $5/(5x) = 1/x$.

4. إذا كان الموضع s(t)، فالتسارع هو...

$s(t)$

$s'(t)$

$s''(t)$

$\int s\, dt$

s"(t). التسارع هو مشتقة السرعة.

أعد هذا الاختبار

كيف يساعد هذا في إنقاذ الكوكب

تصف نماذج النمو والتناقص المبنية على e^x نموّ السكان، والتحلل الإشعاعي المستخدم لتأريخ لبّات الجليد، والنمو المركّب للانبعاثات. وتعطي قاعدة السلسلة معدلات تغيّرها في خطوة واحدة.

معدل النمو النسبي (Q'/Q) هو ما يستخدمه العلماء لمقارنة التغيّرات في كميات مختلفة الأحجام جدًا، مثل سرعة تغيّر مساحة غابة أو غاز دفيئة كنسبة مئوية في السنة.

على Saving Planets: ملف إزالة الغابات · رصد الأرض

المصادر: OpenStax Calculus 1, 3.9 Derivatives of Exponential and Logarithmic Functions (بالإنجليزية) (https://opensta x.org/books/calculus-volume-1/pages/3-9-derivatives-of-exponential-and-logarithmic-functions) · ناسا: ثاني أكسيد الكربون مؤشرًا حيويًا (بالإنجليزية) (https://climate.nasa.gov/vital-signs/carbon-dioxide/)

مصادر تعلّم مجانية

- OpenStax Calculus 1, 3.3 Differentiation Rules (بالإنجليزية) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/3-3-di fferentiation-rules): قواعد القوة والضرب والقسمة.
- OpenStax Calculus 1, 3.5 Derivatives of Trigonometric Functions (بالإنجليزية) (https://openstax.org/books/calculus -volume-1/pages/3-5-derivatives-of-trigonometric-functions): مشتقات الدوال المثلثية.
- OpenStax Calculus 1, 3.6 The Chain Rule (بالإنجليزية) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/3-6-the-chai n-rule): قاعدة السلسلة مع أمثلة كثيرة.
- OpenStax Calculus 1, 3.8 Implicit Differentiation (بالإنجليزية) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/3-8 -implicit-differentiation): الاشتقاق الضمني.

شاهد المحاضرة

Clip 2: Introduction to General Rules for Differentiation (https://ocw.mit.edu/courses/18-01sc-single-variable-calculus-f all-2010/resources/clip-2-introduction-to-general-rules-for-differentiation/) (باللغة الإنجليزية)

MIT 18.01SC Single Variable Calculus (Fall 2010), MIT OpenCourseWare. الترخيص: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommo ns.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · شروط الاستخدام (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). الرابط للدراسة المجانية فقط؛ Saving Planets غير تابع لهذه الجامعة ولا يحظى بتأييدها.

أنهيت هذه الوحدة

التطبيقات I: المعدلات المرتبطة والتقريب وطريقة نيوتن

استخدام المشتقات لربط الكميات المتغيّرة، وتقريب القيم الصعبة، وحساب النهايات المعقدة، وحل المعادلات عدديًا.

أهداف التعلّم

في نهاية هذه الوحدة ستستطيع أن:

- حل مسائل المعدلات المرتبطة.
- استخدام التقريب الخطي والتفاضلات لتقدير القيم والأخطاء.
- تطبيق قاعدة لوبيتال على الصيغتين 0/0 و∞/∞.
- حل المعادلات بطريقة نيوتن.

المفاهيم الأساسية

- المعدلات المرتبطة: اكتب معادلة تربط الكميات، واشتق بالنسبة إلى الزمن، ثم عوّض القيم.
- قرب x = a، f(x) ≈ f(a) + f'(a)(x − a): المماس هو أفضل تقدير بخط مستقيم.
- قاعدة لوبيتال: في 0/0 أو ∞/∞، lim f/g = lim f'/g' إذا وُجد الطرف الأيمن.
- طريقة نيوتن: $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$. وعادةً ما تتقارب بسرعة كبيرة من تخمين أولي جيد.

المعادلات الأساسية

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

```
L(x)=f(a)+f'(a)(x-a)
```

التقريب الخطي

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

```
(f(x))/(g(x))=(f'(x))/(g'(x))
```

قاعدة لوبيتال (0/0 أو ∞/∞)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

```
x_n+1=x_n-(f(x_n))/(f'(x_n))
```

طريقة نيوتن

أمثلة محلولة خطوة بخطوة

مثال 4.1 يزداد نصف قطر منطاد طقس كروي بمعدل 2 cm/s. ما سرعة ازدياد حجمه عندما r = 10 cm؟

1. $V = (4/3)\pi r^3$، إذن $dV/dt = 4\pi r^2 \, dr/dt$.
2. $dV/dt = 4\pi \times 10^2 \times 2 = 800\pi \approx 2{,}513 \text{ cm}^3/\text{s}$.

الإجابة: نحو $2510 \text{ cm}^3/\text{s}$.

مثال 4.2 قدّر $\sqrt{4.1}$ بتقريب خطي.

1. $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 4$: $f(4) = 2$, $f'(4) = 1/(2\sqrt{4}) = 1/4$.
2. $L(4.1) = 2 + (1/4)(0.1) = 2.025$.

الإجابة: 2.025 (القيمة الحقيقية 2.02485...).

مثال 4.3 استخدم طريقة نيوتن لحل $x^2 = 2$ بدءًا من $x_0 = 1$.

1. $f(x) = x^2 - 2$، $f'(x) = 2x$، إذن $x_{n+1} = x_n - (x_n^2 - 2)/(2x_n)$.
2. $x_1 = 1.5$, $x_2 = 1.416667$, $x_3 = 1.414216$.

الإجابة: $x_3 = 1.414216$، صحيح بالفعل حتى 6 أرقام معنوية ($\sqrt{2} = 1.4142136$...).

تمارين

حلّ كلًّا منها على الورق أولًا، ثم تحقق.

1. سُلّم طوله 5 m ينزلق على جدار؛ وتبتعد قاعدته بسرعة 0.5 m/s. ما سرعة هبوط أعلاه عندما تكون القاعدة على بُعد 3 m من الجدار؟

   $x^2 + y^2 = 25$، إذن $x\,x' + y\,y' = 0$. مع $x = 3$، $y = 4$: $y' = -(3/4)(0.5) = -0.375$ m/s، أي يهبط بسرعة 0.375 m/s.

2. $\lim (e^x - 1)/x$ عندما $x \to 0$

   لوبيتال: $e^x/1 \to 1$.

3. طريقة نيوتن للمعادلة $x^3 - 2x - 5 = 0$ بدءًا من $x_0 = 2$. أوجد x_1 وx_2.

   $f(2) = -1$، $f'(2) = 10$، إذن $x_1 = 2.1$. $f(2.1) = 0.061$، $f'(2.1) = 11.23$، إذن $x_2 = 2.0946$.

4. استخدم التفاضلات لتقدير التغيّر في مساحة قرص نصف قطره 10 cm إذا زاد نصف القطر بمقدار 0.1 cm.

   $dA = 2\pi r \, dr = 2\pi \times 10 \times 0.1 = 2\pi \approx 6.28 \text{ cm}^2$.

مفاهيم خاطئة شائعة

خرافة: قاعدة لوبيتال تعني اشتقاق خارج القسمة f/g.
في الحقيقة: اشتق البسط والمقام كلًّا على حدة، وفقط في الصيغتين $0/0$ أو ∞/∞.

خرافة: في المعدلات المرتبطة، عوّض الأرقام أولًا ثم اشتق.

في الحقيقة: اشتق أولًا؛ فالتعويض المبكر يحوّل المتغيرات إلى ثوابت مشتقتها صفر.

خرافة: طريقة نيوتن تجد جذرًا دائمًا.

في الحقيقة: نقطة بداية سيئة، أو f' قريبة من الصفر، قد تُبعدها أو تجعلها تدور في حلقة.

بطاقات تعليمية

المعدلات المرتبطة

اشتقاق معادلة تربط بين الكميات بالنسبة إلى t.

التقريب الخطي

$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$.

التفاضل

$dy = f'(x)\,dx$.

قاعدة لوبيتال

في 0/0 أو ∞/∞: $\lim f/g = \lim f'/g'$.

طريقة نيوتن

$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$.

التقارب التربيعي

قرب جذر بسيط، تضاعف طريقة نيوتن تقريبًا عدد الأرقام الصحيحة في كل خطوة.

اختبار ذاتي

1. يستخدم التقريب الخطي...

القاطع

المماس

العمودي على المماس

القيمة المتوسطة

المماس. L(x) هو المماس عند a.

2. تنطبق قاعدة لوبيتال على...

أي نهاية

الصيغتين 0/0 و∞/∞

كثيرات الحدود فقط

الصيغ 1/0

الصيغتين 0/0 و∞/∞. خوارج القسمة غير المعيّنة فقط.

3. خطوة واحدة من طريقة نيوتن على $f(x) = x^2 - 9$ بدءًا من $x_0 = 4$ تعطي...

3

3.125

3.5

4.5

3.125. $4 - 7/8 = 3.125$.

4. إذا كان $V = s^3$ و$ds/dt = 1$، فإن dV/dt عند $s = 2$ تساوي...

3

6

8

12

12. $3s^2\, ds/dt = 12$.

أعد هذا الاختبار

كيف يساعد هذا في إنقاذ الكوكب

التنبؤ بموضع قمر صناعي يعني حل معادلة كبلر، $M = E - e \sin E$، بالنسبة إلى E. لا حل جبريًا لها، لذا تُحلّ عادةً عدديًا، وغالبًا بطريقة نيوتن كما في المختبر B. والتنبؤ الدقيق بالمدارات يُبقي أقمار رصد الأرض متباعدة بأمان ويضع صورها في مكانها الصحيح على الخريطة.

تحمل مناطيد الطقس، مثل الذي في المثال 4.1، أجهزة تقيس الغلاف الجوي من أجل التنبؤات الجوية؛ وتربط المعدلات المرتبطة بين سرعة صعودها وتمددها.

على Saving Planets: دليل المدارات · حاسبة الدورة المدارية

المصادر: OpenStax Calculus 1, 4.9 Newton's Method (بالإنجليزية) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/4-9-newtons-method) · OpenStax University Physics 1, 13.5 Kepler's Laws (بالإنجليزية) (https://openstax.org/books/university-physics-volume-1/pages/13-5-keplers-laws-of-planetary-motion)

مصادر تعلّم مجانية

- OpenStax Calculus 1, 4.1 Related Rates (بالإنجليزية) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/4-1-related-rates): قسم من كتاب مدرسي مجاني.
- OpenStax Calculus 1, 4.2 Linear Approximations and Differentials (بالإنجليزية) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/4-2-linear-approximations-and-differentials): التقديرات بالمماس والخطأ.
- OpenStax Calculus 1, 4.8 L'Hôpital's Rule (بالإنجليزية) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/4-8-lhopitals-rule): الصيغ غير المعيّنة.
- OpenStax Calculus 1, 4.9 Newton's Method (بالإنجليزية) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/4-9-newtons-method): إيجاد الجذور بالتكرار.

شاهد المحاضرة

Lecture 12: Related Rates (https://ocw.mit.edu/courses/18-01-single-variable-calculus-fall-2006/resources/lecture-12-related-rates/) (باللغة الإنجليزية)

MIT 18.01 Single Variable Calculus (Fall 2006), MIT OpenCourseWare. الترخيص: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · شروط الاستخدام (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). الرابط للدراسة المجانية فقط؛ Saving Planets غير تابع لهذه الجامعة ولا يحظى بتأييدها.

أنهيت هذه الوحدة

التطبيقات II: القيم القصوى وشكل المنحنى والتحسين

إيجاد القيم العظمى والصغرى، وقراءة شكل المنحنى من f' وf"، وحل مسائل تصميم حقيقية بالتحسين.

أهداف التعلّم

في نهاية هذه الوحدة ستستطيع أن:

- إيجاد النقاط الحرجة والقيم القصوى المطلقة على فترة مغلقة.
- صياغة مبرهنة القيمة المتوسطة واستخدامها.
- استخدام اختباري المشتقة الأولى والثانية وإيجاد نقاط الانعطاف.
- صياغة مسائل التحسين التطبيقية وحلها.

المفاهيم الأساسية

- النقاط الحرجة هي حيث f' = 0 أو حيث لا توجد f'. والقيم القصوى للدالة الملساء تقع عندها أو عند طرفي الفترة.
- مبرهنة القيمة المتوسطة: على فترة ملساء، يساوي المعدل اللحظي المعدل المتوسط في موضع ما.
- f' > 0 تعني متزايدة؛ وf" < 0 تعني مقعّرة إلى الأعلى. ونقطة الانعطاف هي حيث يتغيّر التقعّر.
- وصفة التحسين: ارسم المسألة، واكتب الكمية المراد تحسينها كدالة في متغير واحد باستخدام القيد، واشتق، وأوجد النقاط الحرجة، وافحص الطرفين.

المعادلات الأساسية

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

```
f'(c)=(f(b)-f(a))/(b-a)
```

مبرهنة القيمة المتوسطة

$$f'(c) = 0,\ f''(c) < 0 \Rightarrow \text{local max}$$

```
f'(c)=0,\ f''(c)<0 max
```

اختبار المشتقة الثانية

$$C_p(a) = 4a(1-a)^2$$

```
C_p(a)=4a(1-a)^2
```

معامل قدرة توربين الرياح مقابل الحث المحوري a (نموذج القرص المشغّل)

أمثلة محلولة خطوة بخطوة

مثال 5.1 أوجد القيم القصوى المحلية للدالة f(x) = x³ − 3x.

1. $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$ عند $x = \pm 1$.
2. $f''(x) = 6x$: $f''(-1) = -6 < 0$ (عظمى)، $f''(1) = 6 > 0$ (صغرى).
3. $f(-1) = 2,\ f(1) = -2$.

الإجابة: قيمة عظمى محلية 2 عند $x = -1$؛ وصغرى محلية -2 عند $x = 1$.

مثال 5.2 علبة أسطوانية مغلقة يجب أن تتسع لـ $500\ \text{cm}^3$. ما نصف القطر الذي يستهلك أقل قدر من المعدن؟

1. القيد: $\pi r^2 h = 500$، إذن $h = 500/(\pi r^2)$.
2. المساحة $A = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + 1000/r$.
3. $A' = 4\pi r - 1000/r^2 = 0$ يعطي $r^3 = 500/(2\pi)$، $r = 4.30\ \text{cm}$.
4. إذن $h = 8.60\ \text{cm} = 2r$، و$A = 349\ \text{cm}^2$.

الإجابة: $r = 4.30\ \text{cm}$، $h = 8.60\ \text{cm}$ (الارتفاع يساوي القطر).

مثال 5.3 في أبسط نموذج لتوربين الرياح، يكون الجزء المُلتقَط من قدرة الرياح $C_p = 4a(1-a)^2$، حيث a مقدار إبطاء الدوّار للرياح. أوجد القيمة العظمى.

1. $C_p' = 4(1-a)^2 - 8a(1-a) = 4(1-a)(1-3a)$.
2. النقطتان الحرجتان $a = 1$ و$a = 1/3$؛ و$a = 1$ تعطي $C_p = 0$.
3. $C_p(1/3) = 4 \times (1/3) \times (2/3)^2 = 16/27 = 0.593$.

الإجابة: 59.3%: حدّ بيتز، الحد الأقصى النظري لأي توربين رياح.

تمارين

حلّ كلًّا منها على الورق أولًا، ثم تحقق.

1. لدى مزارع $100\ \text{m}$ من السياج لثلاثة أضلاع من مستطيل بمحاذاة نهر. ما أكبر مساحة ممكنة؟

   $A = x(100 - 2x)$؛ $A' = 100 - 4x = 0$ عند $x = 25$. المساحة $= 50 \times 25 = 1250\ \text{m}^2$.

2. أوجد القيمتين العظمى والصغرى المطلقتين للدالة $f(x) = x^2 - 4x$ على $[0,\ 5]$.

   النقطة الحرجة $x = 2$: $f = -4$. الطرفان: $f(0) = 0$، $f(5) = 5$. العظمى 5، والصغرى -4.

3. تحقق من مبرهنة القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = x^2$ على $[1,\ 3]$.

   المعدل المتوسط $= (9 - 1)/2 = 4$؛ $f'(c) = 2c = 4$ عند $c = 2$، داخل $[1,\ 3]$.

4. أين تكون $f(x) = x^3 - 6x^2$ مقعّرة إلى الأعلى؟

   $f'' = 6x - 12 > 0$ عندما $x > 2$؛ ونقطة انعطاف عند $x = 2$.

مفاهيم خاطئة شائعة

خرافة: $f'(c) = 0$ تعني دائمًا قيمة عظمى أو صغرى.
في الحقيقة: للدالة x^3 قيمة $f'(0) = 0$ لكن لا قيمة قصوى هناك.

خرافة: القيمة العظمى المطلقة تقع دائمًا عند نقطة حرجة.
في الحقيقة: على فترة مغلقة قد تقع عند أحد الطرفين. افحصهما دائمًا.

خرافة: المقعّرة إلى الأعلى تعني متزايدة.
في الحقيقة: التقعّر يتعلق بـ f''؛ فقد تكون الدالة مقعّرة إلى الأعلى ومتناقصة معًا، مثل e^{-x}.

بطاقات تعليمية

نقطة حرجة

$f' = 0$ أو غير معرّفة.

مبرهنة القيمة القصوى

متصلة على $[a, b]$ ⇒ توجد قيمتان عظمى وصغرى مطلقتان.

مبرهنة القيمة المتوسطة

$f'(c) = [f(b) - f(a)]/(b - a)$ لقيمة ما c.

اختبار المشتقة الأولى

تغيّر إشارة f' من + إلى − يعني قيمة عظمى؛ ومن − إلى + يعني صغرى.

التقعّر

$f'' > 0$ إلى الأعلى، $f'' < 0$ إلى الأسفل.

حدّ بيتز

أقصى $Cp = 16/27 \approx 59.3\%$.

اختبار ذاتي

1. إذا كانت $f'(c) = 0$ و$f''(c) > 0$، فإن للدالة f عند c...

- قيمة عظمى محلية
- قيمة صغرى محلية
- نقطة انعطاف
- لا استنتاج

قيمة صغرى محلية. تقعّر إلى الأعلى عند نقطة مستوية: وادٍ.

2. حدّ بيتز لتوربينات الرياح يساوي نحو...

33%

50%

59%

100%

4a(1 − a)² من تعظيم 59%. 16/27 ≈ 0.593.

3. تضمن مبرهنة القيمة المتوسطة وجود نقطة حيث...

f = 0

f' = 0 دائمًا

f' تساوي معدل التغيّر المتوسط

f'' = 0

f' تساوي معدل التغيّر المتوسط. المعدل اللحظي = المعدل المتوسط.

4. نقطة الانعطاف هي حيث...

f' = 0

تتغيّر إشارة f

يتغيّر التقعّر

f غير معرّفة

يتغيّر التقعّر. تتغيّر إشارة f''.

أعد هذا الاختبار

كيف يساعد هذا في إنقاذ الكوكب

التحسين هندسة. فحدّ بيتز في المثال 5.3 ينتج عن مساواة مشتقة واحدة بالصفر، ويخبر مهندسي الرياح بأقصى ما يمكن لأي توربين أن يستخلصه من الرياح.

مصممو البعثات يحسّنون أيضًا: فمناورة هوهمان هي عادةً المسار الأوفر وقودًا بإشعالين بين مدارين دائريين، وقلة الوقود الدافع تعني عمليات إطلاق أصغر وأرخص لأقمار المناخ والطقس.

استخدام أقل قدر من المواد لأداء مهمة، مثل العلبة في المثال 5.2، يقلل الطاقة والموارد اللازمة لصنعها.

على Saving Planets: حاسبة مناورة هوهمان · الفيزياء ١، الوحدة 4: طاقة الرياح

المصادر: وزارة الطاقة الأمريكية: كيف تعمل توربينات الرياح؟ (بالإنجليزية) (https://www.energy.gov/eere/wind/how-do-wind-turbines-work) · OpenStax Calculus 1, 4.7 Applied Optimization Problems (بالإنجليزية) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/4-7-applied-optimization-problems)

مصادر تعلّم مجانية

- OpenStax Calculus 1, 4.3 Maxima and Minima (بالإنجليزية) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/4-3-maxima-and-minima): القيم القصوى والنقاط الحرجة.
- OpenStax Calculus 1, 4.5 Derivatives and the Shape of a Graph (بالإنجليزية) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/4-5-derivatives-and-the-shape-of-a-graph): اختبارا المشتقة الأولى والثانية.
- OpenStax Calculus 1, 4.7 Applied Optimization Problems (بالإنجليزية) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/4-7-applied-optimization-problems): مسائل تصميم كثيرة محلولة.

أنهيت هذه الوحدة

التكاملات والمبرهنة الأساسية في التفاضل والتكامل

تجمع التكاملات قطعًا صغيرة جدًا: المساحة والمسافة والطاقة. وتربطها المبرهنة الأساسية بالمشتقات.

أهداف التعلّم

في نهاية هذه الوحدة ستستطيع أن:

- تقريب المساحات بمجاميع ريمان وقاعدة شبه المنحرف.
- تعريف التكامل المحدد واستخدام خصائصه.
- استخدام جزأي المبرهنة الأساسية في التفاضل والتكامل.
- إيجاد الدوال الأصلية، بما في ذلك بالتعويض، وحساب التغيّر الصافي والقيمة المتوسطة والمساحات بين المنحنيات.

المفاهيم الأساسية

- يجمع مجموع ريمان f(xᵢ)Δx على شرائح صغيرة؛ والتكامل المحدد هو نهايته حين تضيق الشرائح.
- المبرهنة الأساسية، الجزء 1: d/dx ∫ₐˣ f(t) dt = f(x). التكامل والاشتقاق يلغي كلٌّ منهما الآخر.
- المبرهنة الأساسية، الجزء 2: ∫ₐᵇ f(x) dx = F(b) − F(a) لأي دالة أصلية F.
- مبرهنة التغيّر الصافي: تكامل المعدل يعطي التغيّر الكلي. تكامل القدرة يعطي الطاقة، وتكامل السرعة يعطي الإزاحة.
- التعويض هو قاعدة السلسلة معكوسةً.

المعادلات الأساسية

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

_a^bf(x) dx=_n∞_i=1^nf(x_i^*)Δ x

التكامل المحدد

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

d/dx_a^xf(t) dt=f(x)

المبرهنة الأساسية، الجزء 1

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

_a^bf(x) dx=F(b)-F(a)

المبرهنة الأساسية، الجزء 2

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C\ (n \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

```
x^n dx=^n+1n+1+C\ (n-1), 1x dx=|x|+C
```

الدوال الأصلية الأساسية

$$f_{avg} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

```
f_avg=1b-a_a^bf(x) dx
```

القيمة المتوسطة

أمثلة محلولة خطوة بخطوة

مثال 6.1 احسب ∫₀² x² dx.

1. الدالة الأصلية x³/3.
2. 8/3 − 0 = 8/3.

الإجابة: 8/3 ≈ 2.667.

مثال 6.2 احسب ∫₀¹ 2x(x² + 1)³ dx.

1. ليكن u = x² + 1، du = 2x dx؛ وتتغيّر u من 1 إلى 2.
2. ∫₁² u³ du = [u⁴/4]₁² = (16 − 1)/4.

الإجابة: 15/4 = 3.75.

مثال 6.3 في يوم صافٍ، يُمثَّل إنتاج مصفوفة شمسية بـ P(t) = 5 sin(πt/12) kW حيث 0 ≤ t ≤ 12 ساعة بعد الشروق. كم من الطاقة تنتج؟

1. الطاقة = ∫₀¹² 5 sin(πt/12) dt.
2. الدالة الأصلية: −(60/π) cos(πt/12).
3. −(60/π)(cos π − cos 0) = 120/π.

الإجابة: 120/π ≈ 38.2 kWh (نموذج مبسّط، لا مصفوفة حقيقية).

تمارين

حلّ كلًّا منها على الورق أولًا، ثم تحقق.

1. $\int_0^{\pi} \sin x \, dx$

   $[-\cos x]_0^{\pi} = 1 + 1 = 2$.

2. $\frac{d}{dx} \int_0^{x} \cos(t^2)\, dt$

   $\cos(x^2)$، حسب الجزء 1 من المبرهنة الأساسية.

3. سرعة صاروخ إلى الأعلى $v(t) = 9.8t$ m/s لمدة 3 s. كم يرتفع؟

   $\int_0^3 9.8t \, dt = 4.9 \times 9 = 44.1$ m.

4. أوجد المساحة بين $y = x$ و$y = x^2$ على $[0, 1]$.

   $\int_0^1 (x - x^2)\, dx = 1/2 - 1/3 = 1/6$.

5. أوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = x^2$ على $[0, 3]$.

   $(1/3)\int_0^3 x^2 \, dx = (1/3)(9) = 3$.

مفاهيم خاطئة شائعة

خرافة: التكامل مساحة دائمًا، لذا فهو موجب دائمًا.
في الحقيقة: إنها مساحة ذات إشارة: الأجزاء تحت المحور تُحسب سالبة. $\int_0^{2\pi} \sin x \, dx = 0$.

خرافة: نسيان $+ C$ لا يهم.
في الحقيقة: في التكاملات غير المحددة، الثابت جزء من الإجابة؛ ويهم كلما أُعطي شرط ابتدائي.

خرافة: في التعويض، احتفظ بالحدود القديمة.
في الحقيقة: حوّل الحدود إلى قيم u، أو أعد التعويض قبل الحساب.

بطاقات تعليمية

مجموع ريمان

$\Sigma\, f(x_i^*)\, \Delta x$؛ تقدير للمساحة.

التكامل المحدد

نهاية مجاميع ريمان؛ مساحة ذات إشارة.

المبرهنة الأساسية، الجزء 1

$\frac{d}{dx} \int_a^x f = f(x)$.

المبرهنة الأساسية، الجزء 2

$\int_a^b f = F(b) - F(a)$.

التغيّر الصافي

التعويض

تكامل المعدل = التغيّر الكلي. قاعدة السلسلة معكوسةً: $u = g(x)$، $du = g'(x)\,dx$.

اختبار ذاتي

1. $\int_1^3 2x\,dx =$

4

8

9

6

8. $[x^2]_1^3 = 9 - 1 = 8$.

2. تكامل منحنى القدرة (kW) عبر الزمن (h) يعطي...

kW

kWh من الطاقة

kW/h

القدرة المتوسطة

kWh من الطاقة. مبرهنة التغيّر الصافي: تكامل المعدل مجموع كلي.

3. $\frac{d}{dx}\int_2^x t^3\,dt =$

x^3

$3x^2$

$x^4/4$

$x^3 - 8$

x^3. المبرهنة الأساسية، الجزء 1.

4. $\int 1/x\,dx =$

$x^0/0$

$\ln|x| + C$

$-1/x^2 + C$

$e^x + C$

$\ln|x| + C$. الاستثناء $n = -1$ من قاعدة القوة.

أعد هذا الاختبار

كيف يساعد هذا في إنقاذ الكوكب

الطاقة هي تكامل القدرة عبر الزمن. ويجمع مخططو الشبكة الكهربائية إنتاج الشمس والرياح ساعة بساعة بهذه الطريقة ليعرفوا كم من الطاقة النظيفة سيحصلون عليه وكم يحتاجون من التخزين.

تقيس أجهزة الأقمار الصناعية معدلات، مثل تدفق ضوء الشمس أو الماء، وتحوّل التكاملات هذه المعدلات إلى مجاميع: كم من الطاقة تمتص الأرض، أو كم من الماء يكسب حوض نهر أو يفقده خلال موسم.

التكامل العددي في المختبر D هو بالضبط طريقة تكامل البيانات الحقيقية التي تأتي على شكل قياسات منفصلة.

على GRACE-FO :Saving Planets · الحاسبات

المصادر: OpenStax Calculus 1, 5.3 The Fundamental Theorem of Calculus (بالإنجليزية) (https://openstax.org/books/calculu s-volume-1/pages/5-3-the-fundamental-theorem-of-calculus) · وزارة الطاقة الأمريكية: كيف تعمل توربينات الرياح؟ (بالإنجليزية) (https://ww w.energy.gov/eere/wind/how-do-wind-turbines-work)

مصادر تعلّم مجانية

- OpenStax Calculus 1, 5.1 Approximating Areas (بالإنجليزية) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/5-1-ap proximating-areas): مجاميع ريمان.
- OpenStax Calculus 1, 5.2 The Definite Integral (بالإنجليزية) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/5-2-th e-definite-integral): التعريف والخصائص.
- OpenStax Calculus 1, 5.3 The Fundamental Theorem of Calculus (بالإنجليزية) (https://openstax.org/books/calculus -volume-1/pages/5-3-the-fundamental-theorem-of-calculus): الجزآن مع البراهين.
- OpenStax Calculus 1, 5.5 Substitution (بالإنجليزية) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/5-5-substitutio n): التعويض بـ u.
- OpenStax Calculus 1, 6.1 Areas between Curves (بالإنجليزية) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/6-1- areas-between-curves): المساحات بين المنحنيات.

شاهد المحاضرة

Clip 1: Proof of the Second Fundamental Theorem of Calculus (https://ocw.mit.edu/courses/18-01sc-single-variable-c alculus-fall-2010/resources/clip-1-proof-of-the-second-fundamental-theorem-of-calculus/) (باللغة الإنجليزية)

MIT 18.01SC Single Variable Calculus (Fall 2010), MIT OpenCourseWare. الترخيص: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · شروط الاستخدام (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). الرابط للدراسة المجانية فقط؛ Saving Planets غير تابع لهذه الجامعة ولا يحظى بتأييدها.

أنهيت هذه الوحدة

مجموعات المسائل

هذه التمارين داخل كل وحدة. حلّها على الورق أولًا، ثم افتح الإجابة.

1. الدوال والنهايات
   5 مسائل
2. الاتصال والمشتقة
   4 مسائل
3. قواعد الاشتقاق
   5 مسائل
4. التطبيقات I: المعدلات المرتبطة والتقريب وطريقة نيوتن
   4 مسائل
5. التطبيقات II: القيم القصوى وشكل المنحنى والتحسين
   4 مسائل
6. التكاملات والمبرهنة الأساسية في التفاضل والتكامل
   5 مسائل

المختبرات الحاسوبية

لا يوجد مختبر تجارب للتفاضل والتكامل، لذا تضم هذه الدورة بدلًا من ذلك أربعة مختبرات حاسوبية قصيرة. كل منها يطبّق وحدة على بيانات شبيهة بالواقع باستخدام جدول بيانات: الفروق المنتهية، وطريقة نيوتن، والتحسين، والتكامل العددي.

هذه هي الطرق العددية نفسها التي يستخدمها المهندسون وعلماء المناخ كل يوم. والبيانات النموذجية في كل مختبر للتدريب؛ ويرتبط كل مختبر بمصدر البيانات الحقيقي.

مرجع السلامة: مختبر الرصد العالمي التابع لـ NOAA: اتجاهات CO_2 (بالإنجليزية) (https://gml.noaa.gov/ccgg/trends/)

المختبر A: معدلات التغيّر من البيانات

الأسبوع 4

الهدف: تقدير معدل التغيّر وتسارعه من جدول قياسات، كما يعالج علماء المناخ سجل CO_2.

$$f'(t_i) \approx \frac{f(t_{i+1}) - f(t_{i-1})}{t_{i+1} - t_{i-1}}, \quad f''(t_i) \approx \frac{f(t_{i+1}) - 2f(t_i) + f(t_{i-1})}{h^2}$$

الفروق المركزية للمشتقتين الأولى والثانية

الإجراء

1. أدخل الجدول النموذجي في جدول بيانات.
2. احسب الفروق الأمامية (المعدل في كل سنة) والفروق المركزية.
3. احسب الفرق الثاني: هل المعدل نفسه يزداد؟
4. نزّل المتوسطات السنوية الحقيقية من NOAA وكرّر؛ وقارن بمعدلات النمو التي تنشرها NOAA.

جدول البيانات

السنة t	C (جزء في المليون)
0	400.0
1	402.4
2	404.9
3	407.5
4	410.2

قيم نموذجية للتدريب، وليست قياسات حقيقية. استخدم بيانات NOAA للعمل الحقيقي.

مثال حسابي

1. الفرق المركزي عند t = 2: (407.5 − 402.4)/2 = 2.55 جزء في المليون لكل سنة.
2. الفرق الثاني عند t = 2: 407.5 − 2(404.9) + 402.4 = 0.1 جزء في المليون لكل سنة².
3. الفرق الثاني الموجب يعني أن معدل النمو نفسه يتزايد (في هذه العينة).

السلامة

- احتفظ بنسخة سليمة من البيانات الخام؛ وأجرِ الحسابات في أعمدة جديدة.

بديل منزلي أو افتراضي

- كل شيء هنا يُنجز على الحاسوب أو حتى يدويًا.

NOAA GML: معدلات نمو CO_2 (بالإنجليزية) (https://gml.noaa.gov/ccgg/trends/gr.html)

الصلة بالكوكب: معدلات التغيّر هي طريقة الإبلاغ عن اتجاهات CO_2 ومقارنتها. NOAA GML: اتجاهات CO_2 في الغلاف الجوي (بالإنجليزية) (https://gml.noaa.gov/ccgg/trends/)

☐ **أكملت هذا المختبر (عمليًا أو افتراضيًا)**

المختبر B: طريقة نيوتن ومعادلة كبلر

الأسبوع 9

الهدف: حل معادلة كبلر M = E − e sin E لإيجاد الشذوذ اللامركزي E لقمر صناعي، وهي الخطوة الأساسية في التنبؤ بموضعه.

$$E_{n+1} = E_n - \frac{E_n - e\sin E_n - M}{1 - e\cos E_n}$$

```
E_n+1=E_n-(E_n-e E_n-M)/(1-e E_n)
```

طريقة نيوتن لمعادلة كبلر

الإجراء

1. ضع M = 1.0 rad وe = 0.1 في جدول بيانات؛ وابدأ بـ $E_0 = M$.
2. انسخ صيغة نيوتن إلى الأسفل في أربعة صفوف.
3. لاحظ كم رقمًا يتوقف عن التغيّر في كل خطوة.
4. جرّب e = 0.9 و$E_0 = M$: كم خطوة تحتاج الآن؟

جدول البيانات

الخطوة n	E_n (rad)
0	1.000000
1	1.088953
2	1.088598
3	1.088598

قيم محسوبة (M = 1.0 rad، e = 0.1).

مثال حسابي

1. f(E) = E − 0.1 sin E − 1؛ f'(E) = 1 − 0.1 cos E.
2. بدءًا من $E_0 = 1$: $E_1 = 1.088953$، $E_2 = 1.088598$، وبعدها تتوقف أول 7 أرقام عن التغيّر.
3. التحقق: 0.1 sin(1.088598) = 1.000000 − 1.088598.

السلامة

- لا شيء يتجاوز الاستخدام العادي للحاسوب.

بديل منزلي أو افتراضي

- يكفي جدول بيانات أو Desmos.

s Method’OpenStax Calculus 1, 4.9 Newton (بالإنجليزية) https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/4-9-newtons-method

الصلة بالكوكب: التنبؤ بالمدارات يحمي أقمار رصد الأرض ويضع بياناتها في مكانها الصحيح.

☐ **أكملت هذا المختبر (عمليًا أو افتراضيًا)**

المختبر C: تحسين توربين رياح

الأسبوع 11

الهدف: التحقق من حدّ بيتز عدديًا وبالتفاضل والتكامل.

$$C_p(a) = 4a(1-a)^2, \quad C_p'(a) = 4(1-a)(1-3a)$$

```
C_p(a)=4a(1-a)^2, C_p'(a)=4(1-a)(1-3a)
```

معامل القدرة ومشتقته

الإجراء

1. أنشئ جدولًا لـ Cp عند a من 0 إلى 0.5 بخطوات 0.05 وارسمه.
2. أوجد أكبر قيمة في الجدول.
3. حلّ Cp'(a) = 0 يدويًا وقارن.

جدول البيانات

a	Cp
0.20	0.512
0.30	0.588
1/3	0.593
0.40	0.576

قيم محسوبة من النموذج.

مثال حسابي

1. Cp(0.3) = 4 × 0.3 × 0.7² = 0.588.
2. Cp(1/3) = 16/27 = 0.593، القيمة العظمى.
3. تلتقط التوربينات الحقيقية أقل بسبب السحب ودوران الأثر وخسائر أطراف الشفرات.

السلامة

- لا شيء يتجاوز الاستخدام العادي للحاسوب.

بديل منزلي أو افتراضي

- يكفي جدول بيانات أو Desmos.

وزارة الطاقة الأمريكية: كيف تعمل توربينات الرياح؟ (بالإنجليزية) (https://www.energy.gov/eere/wind/how-do-wind-turbines-wor)
(k)

الصلة بالكوكب: معرفة السقف تخبر المهندسين بمقدار التحسين الذي لا يزال ممكنًا.

- [ ] **أكملت هذا المختبر (عمليًا أو افتراضيًا)**

المختبر D: التكامل العددي للطاقة الشمسية

الأسبوع 13

الهدف: تكامل منحنى قدرة بقاعدتي النقطة الوسطى وشبه المنحرف ومقارنة النتيجة بالإجابة الدقيقة.

$$T_n = \frac{\Delta t}{2}\left[f_0 + 2f_1 + \cdots + 2f_{n-1} + f_n\right]$$

```
T_n=Δ t2[f_0+2f_1++2f_n-1+f_n]
```

قاعدة شبه المنحرف

الإجراء

1. النموذج P(t) = 5 sin(πt/12) kW على 0 ≤ t ≤ 12 h.
2. مع n = 6 شرائح (Δt = 2 h)، احسب مجموعي النقطة الوسطى وشبه المنحرف.
3. قارن بالقيمة الدقيقة 120/π kWh. ضاعف n وراقب الأخطاء وهي تصغر.

جدول البيانات

الطريقة (n = 6)	الطاقة (kWh)
النقطة الوسطى	38.64
شبه المنحرف	37.32
دقيقة (المبرهنة الأساسية)	38.20

قيم النموذج، وليست بيانات من مصفوفة حقيقية.

مثال حسابي

1. شبه المنحرف: 37.32 kWh = 2/[0 + 2(2.5 + 4.330 + 5 + 4.330 + 2.5)] × 2.
2. النقطة الوسطى: Σ P × 2 عند t = 1, 3, ..., 11 = 38.64 kWh.
3. الأخطاء: النقطة الوسطى 0.44+، وشبه المنحرف 0.88−. خطأ النقطة الوسطى نحو نصف خطأ شبه المنحرف وبإشارة معاكسة، كما تتنبأ النظرية.

السلامة

- لا شيء يتجاوز الاستخدام العادي للحاسوب.

بديل منزلي أو افتراضي

- يكفي جدول بيانات أو Desmos.

OpenStax Calculus 1, 5.1 Approximating Areas (بالإنجليزية) (https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/5-1-approximating-areas)

الصلة بالكوكب: هكذا تُجمع بيانات الطاقة الحقيقية كل ساعة لتخطيط الكهرباء النظيفة والتخزين.

☐ **أكملت هذا المختبر (عمليًا أو افتراضيًا)**

مجموعات تدريب للامتحان

وقّت نفسك: نحو 10 دقائق لكل مسألة. ثم قارن بالحلول الكاملة.

مجموعة تدريب منتصف الفصل (الوحدات 3–1)

1. أوجد $\lim (x - 4)/(\sqrt{x} - 2)$ عندما $x \to 4$.

1. اضرب في $\sqrt{x} + 2$: $(x - 4)(\sqrt{x} + 2)/(x - 4) = \sqrt{x} + 2$.
2. عوّض $x = 4$: $2 + 2$.

الإجابة: 4.

2. اشتق $y = x^3 e^x$ واحسبها عند $x = 1$.

1. قاعدة الضرب: $y' = 3x^2 e^x + x^3 e^x = (3x^2 + x^3)e^x$.
2. At $x = 1$: $4e$.

الإجابة: $4e \approx 10.87$.

3. أوجد المماس للمنحنى $y = \ln x$ عند $x = 1$.

1. $y(1) = 0$, $y' = 1/x = 1$.
2. $y - 0 = 1(x - 1)$.

الإجابة: $y = x - 1$.

4. اشتق $y = \sin(3x^2)$.

1. قاعدة السلسلة: $\cos(3x^2) \cdot 6x$.

الإجابة: $y' = 6x \cos(3x^2)$.

مجموعة التدريب النهائية (كل الوحدات)

1. يتدفق الماء إلى خزان أسطواني نصف قطره 2 m بمعدل $0.5\ m^3/min$. ما سرعة ارتفاع المستوى؟

1. $V = \pi r^2 h = 4\pi h$، إذن $dV/dt = 4\pi\, dh/dt$.
2. $dh/dt = 0.5/(4\pi)$.

الإجابة: نحو 0.0398 m/min (4.0 cm في الدقيقة).

2. احسب $\int_1^e (1/x)\, dx$.

.[ln x]₁^e = 1 − 0 .1

الإجابة: 1.

3. احسب ∫₀^4 √x dx.

1. الدالة الأصلية (2/3)x^(3/2).
.(2/3)(8) = 16/3 .2

الإجابة: 16/3 ≈ 5.33.

4. مستطيل محيطه 40 m. ما الأبعاد التي تجعل مساحته أكبر ما يمكن؟

.x = 10 عند A' = 20 − 2x = 0 ؛A = x(20 − x) .1

الإجابة: مربع 10 m × 10 m، مساحته 100 m².

5. استخدم قاعدة لوبيتال لإيجاد lim x²/eˣ عندما x → ∞.

.∞/∞، وما زالت ∞/∞: → 2x/eˣ .1
.→ 2/eˣ → 0 .2

الإجابة: 0: الدوال الأسية تتفوق في النمو على أي قوة.

ورقة الصيغ

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} [f(x+h) - f(x)]/h \qquad (x^n)' = n x^{n-1}$$

$$(fg)' = f'g + fg' \qquad (f/g)' = (f'g - fg')/g^2$$

$$[f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x) \qquad (e^x)' = e^x,\ (\ln x)' = 1/x$$

$$(\sin x)' = \cos x,\ (\cos x)' = -\sin x,\ (\tan x)' = \sec^2 \qquad L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n) \qquad f'(c) = [f(b) - f(a)]/(b-a)$$

$$\int x^n\,dx = x^{n+1}/(n+1) + C \qquad \int e^x\,dx = e^x + C,\ \int dx/x = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C,\ \int \cos x\,dx = \sin x + C \qquad \int_a^b f\,dx = F(b) - F(a)$$

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

$$f_{avg} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f\,dx$$

الثوابت

الثابت	القيمة
e	2.718281828...
π	3.141592654...
ln 2	0.693147...
1 راديان	57.2958°

المصدر: NIST: الثوابت الفيزيائية الأساسية (بالإنجليزية) (https://physics.nist.gov/cuu/Constants/)

أدوات الرسم البياني والبيانات

استخدم هذه الأدوات ومصادر البيانات المجانية إلى جانب الدورة.

- آلة Desmos الحاسبة البيانية (https://www.desmos.com/calculator): ارسم الدوال وأشرطة التمرير والمماسات في المتصفح.
- PhET: Calculus Grapher (https://phet.colorado.edu/en/simulations/calculus-grapher): ارسم دالة وشاهد مشتقتها وتكاملها.
- NOAA: اتجاهات CO_2 في الغلاف الجوي (بالإنجليزية) (https://gml.noaa.gov/ccgg/trends/): بيانات حقيقية لـ CO_2 من ماونا لوا ومن العالم للتدرب على معدلات التغيّر.

مسرد المصطلحات

الدالة الأصلية
دالة F تحقق F' = f.

الخط المقارب
مستقيم يقترب منه المنحنى في البعيد أو قرب موضع انفجاره.

قاعدة السلسلة
مشتقة التركيب: مشتقة الخارج × مشتقة الداخل.

التقعّر
اتجاه انحناء المنحنى؛ إشارة f".

الاتصال
لا انقطاع: النهاية تساوي قيمة الدالة.

نقطة حرجة
حيث تكون f' صفرًا أو غير معرّفة.

التكامل المحدد
مساحة ذات إشارة تحت منحنى بين حدّين.

المشتقة
معدل التغيّر اللحظي؛ ميل المماس.

التفاضل
$dy = f'(x)\,dx$.

المبرهنة الأساسية في التفاضل والتكامل
تربط المشتقات بالتكاملات؛ $\int_a^b f = F(b) - F(a)$.

صيغة غير معيّنة
0/0 أو ∞/∞؛ تحتاج إلى مزيد من العمل.

نقطة الانعطاف
حيث يتغيّر التقعّر.

النهاية
القيمة التي تقترب منها الدالة.

التقريب الخطي
تقدير بالمماس.

مبرهنة القيمة المتوسطة
المعدل اللحظي يساوي المعدل المتوسط في موضع ما.

طريقة نيوتن
إيجاد الجذور بالتكرار باستخدام المماسات.

التحسين
إيجاد أفضل قيمة لكمية في ظل قيود.

مجموع ريمان
مجموع مساحات مستطيلات يقرّب التكامل.

التعويض
تقنية تكامل تعكس قاعدة السلسلة.

قاعدة شبه المنحرف
تكامل عددي باستخدام أشباه المنحرف.

معايير التقييم الذاتي

لا تُمنح درجة ولا ساعات معتمدة. استخدم هذا لتقيّم بصدق أين أنت في كل وحدة.

المستوى	كيف يبدو
4 · إتقان	يحلّ مسائل جديدة، ويبرّر كل خطوة بقاعدة أو مبرهنة، ويتحقق من الإجابات بمنحنى أو تقدير.
3 · متمكن	يحلّ التمارين بشكل صحيح مع زلات جبرية عرضية.
2 · قيد التطور	يتبع الأمثلة المحلولة لكنه يجد صعوبة في اختيار الطريقة، أو يطبّق قاعدة السلسلة خطأً.
1 · مبتدئ	يحفظ الصيغ دون أن يعرف متى تنطبق؛ يحتاج إلى مراجعة الوحدة.

الأوزان المقترحة إذا أردت درجة

الجزء	الوزن
تمارين	30%
المختبرات الحاسوبية	15%
مجموعة تدريب منتصف الفصل	25%
مجموعة التدريب النهائية	30%

استهدف المستوى 3 أو أعلى في كل وحدة قبل الانتقال إلى الدورة التالية.

دورات ذات صلة

- الفيزياء + 1 المختبر PHYS 110 + PHYS 110L
- التفاضل والتكامل 2 MATH 111
- الكيمياء العامة + 1 المختبر CHEM 110 + CHEM 110L
- كل الدورات