Ultimo aggiornamento: November 1, 2026

🗺️ Percorso di quattro anni · Anno 1, Primavera

Informazioni sul corso

Questo corso gratuito ha 7 unità e 4 laboratori. Sono i totali reali, non un programma più lungo accorciato.

Un controllo è un numero o un risultato di codice in una pagina del corso che uno script ricalcola prima della pubblicazione. Il numero stampato e quello ricalcolato devono coincidere.

> Questo è lo schema di un corso gratuito di autoapprendimento scritto da Saving Planets. Non è un corso universitario, non dà crediti accademici e nessuna scuola è coinvolta.
>
> Il programma segue il secondo semestre di analisi universitaria, sul modello degli argomenti e della profondità di materiali aperti come OpenStax Calculus Volume 2 e MIT OpenCourseWare 18.01SC (con concetti parametrici e polari che portano a 18.02SC Multivariable Calculus), a cui rimandiamo in tutto il corso. Queste organizzazioni non approvano questa pagina.
>
> Cosa aggiungiamo: ogni unità è collegata a problemi reali di acqua, energia, ecologia e volo spaziale, ogni numero della pagina viene ricalcolato da uno script di verifica prima della pubblicazione, e quattro laboratori al computer applicano i metodi ai dati.
>
> Seguilo in ordine. Ogni unità ha obiettivi, idee chiave, equazioni, esempi passo per passo, esercizi con soluzioni complete, errori comuni, flashcard e un quiz. I tuoi progressi sono salvati solo in questo browser.

Come questo corso aiuta a salvare il pianeta

Analisi II è il punto in cui il calcolo comincia a modellare il mondo: i volumi d’acqua nei bacini, il lavoro per pomparla, come un inquinante viene espulso da un lago, come si riprende una popolazione di pesci e le orbite ellittiche dei satelliti che osservano tutto questo.

Ogni unità si chiude con una breve sezione con fonti che mostra come le sue idee aiutano persone e natura.

Per gli insegnanti

Puoi insegnare questo corso, oppure lasciare che uno studente lo faccia da solo. È gratis. Saving Planets non dà un voto né crediti scolastici.

- Questa pagina è l'intero corso: 7 unità e 4 laboratori (MATH 111).
- Prevedi 15 settimane, circa 6–9 ore a settimana, comprese le settimane di laboratorio.
- Segui il calendario di 15 settimane. Leggi l'unità, fai la pratica su carta, poi apri la risposta. Nella settimana di laboratorio, fai il laboratorio o la versione a casa.
- Un controllo è un numero o un risultato di codice nella pagina che uno script ricalcola prima della pubblicazione. Il numero che vedi e quello ricalcolato devono coincidere.
- Usa Stampa questa pagina, oppure scarica la guida di studio PDF. Il formulario è verso la fine.
- Chiedi: in che modo questa unità aiuta le persone e il pianeta? Ogni unità ha un riquadro verde con un fatto e la sua fonte.
- Copia il modello di guida per insegnanti e scrivi il nome della classe, il tempo che hai e le domande che farai. Apri il modello di guida per insegnanti

Prima di iniziare

Prerequisiti

- Analisi I: limiti, derivate, regola della catena, integrali di base e sostituzione, teorema fondamentale.
- Identità trigonometriche, in particolare $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ e le formule di duplicazione.
- Esponenziali e logaritmi.

Come studiare

- Leggi l'unità, poi chiudila e prova da solo gli esempi svolti prima di controllare ogni passaggio.
- Svolgi ogni esercizio su carta prima di aprire la risposta.
- Per gli integrali, controlla la risposta derivandola.
- Per le serie, decidi quale criterio è adatto prima di calcolare qualsiasi cosa.
- Disegna ogni regione prima di impostare un integrale di volume o di area.
- Rifai i quiz qualche giorno dopo. La pratica distribuita batte una lunga sessione unica.

Che cosa ti serve

- Un computer o un tablet con un foglio di calcolo.
- Una calcolatrice grafica gratuita come Desmos.
- Facoltativo: Python con NumPy.

Programma suggerito di 15 settimane

Circa 6-9 ore a settimana: lettura, esercizi e, nelle settimane di laboratorio, il laboratorio.

Settimana	Unità	Argomenti	Lettura
1	Tecniche di integrazione	Integrazione per parti	OpenStax 3.1
2	Tecniche di integrazione	Integrali trigonometrici e sostituzione	OpenStax 3.2–3.3
3	Tecniche di integrazione	Fratti semplici; integrazione numerica	OpenStax 3.4–3.6
4	Applicazioni: volume, lunghezza d’arco, lavoro e centro di massa	Aree, volumi per sezioni, dischi, rondelle, gusci cilindrici	OpenStax 2.1–2.3
5	Applicazioni: volume, lunghezza d’arco, lavoro e centro di massa	Lunghezza d’arco, lavoro, forza dei fluidi, centri di massa; Laboratorio B	OpenStax 2.4–2.6
6	Integrali impropri	Integrali impropri e confronto; esercitazione per il compito intermedio	OpenStax 3.7
7	Introduzione alle equazioni differenziali	Equazioni differenziali, campi di direzioni, metodo di Eulero	OpenStax 4.1–4.2
8	Introduzione alle equazioni differenziali	Equazioni a variabili separabili e logistiche; Laboratorio A	OpenStax 4.3–4.4
9	Successioni e serie	Successioni; serie infinite; serie geometriche	OpenStax 5.1–5.2
10	Successioni e serie	Criteri di divergenza, dell’integrale e del confronto	OpenStax 5.3–5.4
11	Successioni e serie	Serie a segni alterni; criteri del rapporto e della radice	OpenStax 5.5–5.6
12	Serie di potenze e serie di Taylor	Serie di potenze e loro proprietà	OpenStax 6.1–6.2
13	Serie di potenze e serie di Taylor	Serie di Taylor e di Maclaurin; Laboratorio C	OpenStax 6.3–6.4
14	Equazioni parametriche e coordinate polari	Equazioni parametriche; coordinate polari e aree; Laboratorio D	OpenStax 7.1–7.4
15	Ripasso	Ripasso ed esercitazione finale	Tutte le unità

I tuoi progressi

Spunta unità e laboratori man mano che li finisci, e fai i quiz. Progressi e punteggi sono salvati solo in questo browser e non ci vengono mai inviati.

Unità

Tecniche di integrazione

Integrazione per parti, integrali e sostituzioni trigonometriche, fratti semplici e integrazione numerica quando non esiste una formula.

Obiettivi di apprendimento

Alla fine di questa unità saprai:

- Integrare per parti scegliendo bene u e dv.
- Calcolare integrali trigonometrici e usare la sostituzione trigonometrica.
- Scomporre funzioni razionali in fratti semplici.
- Approssimare integrali con la regola dei trapezi e la regola di Simpson, e stimare l'errore.

Concetti chiave

- L'integrazione per parti è la regola del prodotto al contrario: ∫u dv = uv − ∫v du. Scegli come u ciò che si semplifica derivando (logaritmi, polinomi).
- Le potenze di seno e coseno si risolvono con identità come sin²x = (1 − cos 2x)/2.
- Per √(a² − x²), sostituisci x = a sin θ; per √(a² + x²), x = a tan θ.
- Una funzione razionale propria si scompone in fratti semplici i cui integrali sono logaritmi e arcotangenti.
- Molti integrali, come ∫e^(−x²) dx, non hanno una primitiva elementare. La regola di Simpson spesso dà molte cifre esatte con pochi punti.

Equazioni chiave

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

`u dv=uv- v du`

Integrazione per parti

$$\sin^2 x = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

`^2x=12(1-2x)`

Identità di riduzione delle potenze

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1/2}{x - 1} - \frac{1/2}{x + 1}$$

`(1)/(x^2-1)=(1/2)/(x-1)-(1/2)/(x+1)`

Una scomposizione in fratti semplici

$$S_n = \frac{\Delta x}{3}\left[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + \cdots + 4f_{n-1} + f_n\right]$$

`S_n=(Δ x)/(3)[f_0+4f_1+2f_2++4f_n-1+f_n]`

Regola di Simpson (n pari)

Esempi svolti passo passo

Esempio 1.1 Calcola $\int_0^1 x\,e^x\,dx$.

1. $u = x$, $dv = e^x\,dx$, quindi $du = dx$, $v = e^x$.
2. $\int x\,e^x\,dx = x\,e^x - \int e^x\,dx = (x-1)e^x$.
3. Da 0 a 1: $0 - (-1) = 1$.

Risposta: 1.

Esempio 1.2 Calcola $\int_2^3 dx/(x^2-1)$.

1. Fratti semplici: $\tfrac{1}{2}[1/(x-1) - 1/(x+1)]$.
2. Primitiva $\tfrac{1}{2}\ln|(x-1)/(x+1)|$.
3. $\tfrac{1}{2}[\ln(2/4) - \ln(1/3)] = \tfrac{1}{2}\ln(3/2)$.

Risposta: $\tfrac{1}{2}\ln 1.5 \approx 0.2027$.

Esempio 1.3 Stima $\int_0^1 e^{\wedge}(-x^2)\,dx$ con la regola di Simpson, $n = 4$.

1. $\Delta x = 0.25$; $f = 1, 0.93941, 0.77880, 0.56978, 0.36788$.
2. $S_4 = (0.25/3)[1 + 4(0.93941) + 2(0.77880) + 4(0.56978) + 0.36788]$.
3. $S_4 = 0.74686$.

Risposta: 0.74686, contro il valore vero 0.74682: un errore di soli 0.00003 con cinque punti.

Esercizi

Svolgi ciascuno prima su carta, poi controlla.

1. $\int_0^{\wedge}\pi\, x \sin x\,dx$

   Per parti: $[-x\cos x + \sin x]_0^{\wedge}\pi = \pi$.

2. $\int_1^e x \ln x\,dx$

Per parti con u = ln x: $[x^2 \ln x/2 - x^2/4]_1^e = (e^2 + 1)/4 \approx 2.097$.

3. $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\, dx$

   Riduzione delle potenze: $\frac{1}{2}[x - \sin 2x/2]_0^{\pi/2} = \pi/4$.

4. $\int_0^1 \sqrt{(1 - x^2)}\, dx$

   $x = \sin\theta$ dà $\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\, d\theta = \pi/4$ (un quarto del disco unitario).

5. $\int_0^1 dx/(1 + x^2)$

   $[\arctan x]_0^1 = \pi/4$.

Errori concettuali comuni

Mito: Scegli sempre come u il primo fattore che vedi.

In realtà: Scegli come u ciò che si semplifica derivando: prima logaritmi e polinomi; esponenziali e funzioni trigonometriche come dv.

Mito: I fratti semplici funzionano con qualsiasi funzione razionale.

In realtà: Dividi prima se il grado del numeratore non è minore di quello del denominatore.

Mito: Se non trovo una primitiva, l'integrale non ha valore.

In realtà: Ha comunque un valore; stimalo numericamente.

Flashcard

Integrazione per parti

$\int u\, dv = uv - \int v\, du$.

Sostituzione trigonometrica

$\sqrt{(a^2 - x^2)}$: $x = a \sin\theta$.

Fratti semplici

Scomporre una funzione razionale in fratti semplici.

Regola dei trapezi

Media delle somme sinistra e destra; errore $\propto \Delta x^2$.

Regola di Simpson

Interpolazione parabolica; errore $\propto \Delta x^4$.

Integrale non elementare

Nessuna primitiva esprimibile con una formula, ad es. $\int e^{(-x^2)}\, dx$.

Quiz di autoverifica

1. Per $\int x^2 e^x\,dx$, una buona prima scelta di u è…

e^x

x^2

$x^2 e^x$

dx

x^2. x^2 si semplifica derivando.

2. $\sqrt{(9 - x^2)}$ suggerisce la sostituzione…

$x = 3 \tan \theta$

$x = 3 \sin \theta$

$x = 3 \sec \theta$

$u = 9 - x^2$

$x = 3 \sin \theta$. $9 - 9 \sin^2\theta = 9 \cos^2\theta$.

3. La regola di Simpson approssima la curva con…

rettangoli

trapezi

parabole

solo cubiche

parabole. Parabole passanti per ogni gruppo di tre punti.

4. $\int \ln x\,dx =$

$1/x + C$

$x \ln x - x + C$

$\ln^2 x/2 + C$

$x \ln x + C$

$x \ln x - x + C$. Per parti con $u = \ln x$, $dv = dx$.

Rifai questo quiz

Come questo aiuta a salvare il pianeta

L'integrale della curva a campana dell'esempio 1.3 non ha una risposta in forma di formula, eppure è dietro ogni barra d'errore di un grafico climatico e ogni incertezza di una misura satellitare. L'integrazione numerica è il modo in cui si calcola davvero, lui e la maggior parte degli integrali che nascono da dati reali.

Metodi come la regola di Simpson trasformano misure irregolari, come le profondità di un fiume attraverso un alveo, in totali come portata o volume.

Su Saving Planets: Analisi I, Laboratorio D: integrazione numerica · Pagina Fiumi

Fonti: OpenStax Calculus 2, 3.6 Numerical Integration (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/3-6-numerical-integration) · OpenStax Calculus 2, 3.1 Integration by Parts (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/3-1-integration-by-parts)

Risorse di apprendimento gratuite

- OpenStax Calculus 2, 3.1 Integration by Parts (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/3-1-integration-by-parts): Sezione di un manuale gratuito.
- OpenStax Calculus 2, 3.2 Trigonometric Integrals (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/3-2-trigonometric-integrals): Potenze di seno e coseno.
- OpenStax Calculus 2, 3.3 Trigonometric Substitution (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/3-3-trigonometric-substitution): Integrandi con radicali.
- OpenStax Calculus 2, 3.4 Partial Fractions (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/3-4-partial-fractions): Funzioni razionali.
- OpenStax Calculus 2, 3.6 Numerical Integration (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/3-6-numerical-integration): Regole dei trapezi e di Simpson con stime dell'errore.

☐ **Ho finito questa unità**

Applicazioni: volume, lunghezza d’arco, lavoro e centro di massa

Affettare, sommare e passare al limite: volumi di solidi, lunghezze di curve, lavoro contro forze, pressione dei fluidi e centri di massa.

Obiettivi di apprendimento

Alla fine di questa unità saprai:

- Trovare volumi per sezioni, dischi, rondelle e gusci cilindrici.
- Calcolare la lunghezza d’arco.
- Calcolare il lavoro di forze variabili, incluso il pompaggio di liquidi, e la forza idrostatica.
- Trovare il centro di massa di aste e lamine sottili.

Concetti chiave

- Ogni applicazione segue lo stesso schema: approssimare una fetta sottile, scriverne il contributo, integrare.
- Metodo dei dischi: V = ∫π[f(x)]² dx attorno all’asse x. Metodo dei gusci: V = ∫2πx f(x) dx attorno all’asse y.
- La lunghezza d’arco somma minuscole ipotenuse: L = ∫√(1 + [f'(x)]²) dx.
- Lavoro = ∫F(x) dx. Pompaggio: ogni strato di liquido viene sollevato di una distanza diversa.
- La pressione cresce con la profondità, quindi la forza su una diga è un integrale sulla profondità.
- Centro di massa = momento ÷ massa.

Equazioni chiave

$$V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 \, dx$$

`V=_a^bπ[f(x)]^2 dx`

Metodo dei dischi

$$V = \int_a^b 2\pi x \, f(x) \, dx$$

`V=_a^b2π x f(x) dx`

Metodo dei gusci cilindrici

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx$$

`L=_a^b1+[f'(x)]^2 dx`

Lunghezza d’arco

$$W = \int_a^b F(x)\,dx$$

`W=_a^bF(x) dx`

Lavoro di una forza variabile

$$\bar{x} = \frac{\int x\,\rho(x)\,dx}{\int \rho(x)\,dx}$$

`x=( x ρ(x) dx)/(ρ(x) dx)`

Centro di massa di un’asta

Esempi svolti passo passo

Esempio 2.1 Trova il volume ottenuto ruotando attorno all’asse x la regione sotto y = √x, 0 ≤ x ≤ 4.

1. Dischi di raggio √x: V = $\int_0^4 \pi\, x\, dx$.
2. $\pi[x^2/2]_0^4 = 8\pi$.

Risposta: 8π ≈ 25.1 unità cubiche.

Esempio 2.2 Un serbatoio cilindrico di raggio 1 m e altezza 2 m è pieno d’acqua. Quanto lavoro serve per pompare tutta l’acqua fuori dalla sommità?

1. Uno strato all’altezza y ha volume $\pi(1)^2\,dy$ e peso $1000 \times 9.81 \times \pi\,dy$ newton, e viene sollevato di $2 - y$ metri.
2. $W = \int_0^2 9{,}810\pi(2 - y)\,dy = 9{,}810\pi \times 2$.
3. $= 19{,}620\pi$ J.

Risposta: ≈ 61,600 J (61.6 kJ).

Esempio 2.3 Un’asta su [0, 2] m ha densità ρ(x) = 1 + x kg/m. Trova il suo centro di massa.

1. Massa: $\int_0^2 (1 + x)\,dx = 2 + 2 = 4$ kg.
2. Momento: $\int_0^2 x(1 + x)\,dx = 2 + 8/3 = 14/3$.
3. $\bar{x} = (14/3)/4 = 7/6$.

Risposta: $\bar{x} = 7/6 \approx 1.17$ m, verso l'estremità più pesante.

Esercizi

Svolgi ciascuno prima su carta, poi controlla.

1. Usa i gusci cilindrici per trovare il volume ottenuto ruotando attorno all'asse y la regione sotto $y = x^2$, $0 \le x \le 1$.

   $V = \int_0^1 2\pi x \cdot x^2 \, dx = 2\pi/4 = \pi/2$.

2. Trova la lunghezza d'arco di y = (2/3)x^(3/2) da x = 0 a 3.

   $y' = \sqrt{x}$, quindi $L = \int_0^3 \sqrt{(1 + x)} \, dx = (2/3)[(1 + x)^{(3/2)}]_0^3 = (2/3)(8 - 1) = 14/3$.

3. Una molla con k = 200 N/m viene allungata di 0.10 m dalla lunghezza a riposo. Quanto lavoro viene compiuto?

   $W = \int_0^{0.1} 200x \, dx = 100(0.01) = 1.0$ J.

4. Una paratoia rettangolare verticale larga 10 m trattiene acqua profonda 5 m. Trova la forza totale dell'acqua su di essa.

   $F = \int_0^5 \rho g \, y \, (10) \, dy = 1{,}000 \times 9.81 \times 10 \times 25/2 = 1.23 \times 10^6$ N.

Errori concettuali comuni

Mito: Volume di rotazione = π × area.

In realtà: Bisogna elevare al quadrato il raggio dentro l'integrale: $\int \pi f^2 \, dx$, non $\pi(\int f \, dx)$.

Mito: Il lavoro di pompaggio è peso × altezza del serbatoio.

In realtà: Ogni strato si sposta di una distanza diversa, quindi bisogna integrare.

Mito: Il centro di massa è sempre il punto medio.

In realtà: Solo con densità uniforme e forma simmetrica.

Flashcard

Metodo dei dischi

$V = \int \pi \, f(x)^2 \, dx$.

Metodo delle rondelle

$V = \int \pi(R^2 - r^2) \, dx$.

Metodo dei gusci cilindrici

Lunghezza d'arco

$V = \int 2\pi x\, f(x)\, dx$.

$L = \int \sqrt{1 + f'^2}\, dx$.

Lavoro

$W = \int F\, dx$.

Centro di massa

Momento diviso massa.

Quiz di autoverifica

1. I gusci attorno all'asse y usano l'integrando...

$\pi\, f(x)^2$

$2\pi x\, f(x)$

$f(x)^2$

$2\pi\, f(x)$

$2\pi x\, f(x)$. Circonferenza $2\pi x$ × altezza $f(x)$ × spessore dx.

2. La lunghezza d'arco usa...

$\int f(x)\, dx$

$\int \sqrt{1 + f'^2}\, dx$

$\int f'\, dx$

$\int \pi f^2\, dx$

$\int \sqrt{1 + f'^2}\, dx$. Pitagora su ogni pezzetto.

3. La pressione idrostatica su una diga cresce...

con il quadrato della profondità

linearmente con la profondità

per niente

con la larghezza della diga

linearmente con la profondità. P = ρgh; la forza totale cresce quindi con il quadrato della profondità.

4. Il lavoro per allungare una molla di x dalla posizione di riposo è...

kx

$\frac{1}{2}kx^2$

kx^2

2kx

$\frac{1}{2}kx^2$. $\int_0^x kt\,dt$.

Rifai questo quiz

Come questo aiuta a salvare il pianeta

Gli ingegneri idraulici usano direttamente questi integrali: il volume di un bacino in base alla sua forma, l'energia per pompare l'acqua dove serve e la forza che una diga o una barriera antipiena deve trattenere. Il pompaggio è un costo energetico rilevante in molti sistemi idrici, quindi impostare bene l'integrale fa risparmiare energia e denaro.

Oggi i satelliti misurano dall'orbita l'altezza di fiumi, laghi e bacini. La missione SWOT di NASA e CNES rileva le acque superficiali per stimare le variazioni dell'acqua immagazzinata: affettare e sommare su scala planetaria.

Su Saving Planets: SWOT · Spazio per il fiume

Fonti: OpenStax Calculus 2, 2.5 Physical Applications (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/2-5-physical-applications) · NASA: missione SWOT (https://swot.jpl.nasa.gov/)

Risorse di apprendimento gratuite

- OpenStax Calculus 2, 2.2 Determining Volumes by Slicing (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/2-2-determining-volumes-by-slicing): Dischi e rondelle.
- OpenStax Calculus 2, 2.3 Volumes of Revolution: Cylindrical Shells (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/2-3-volumes-of-revolution-cylindrical-shells): Gusci cilindrici.
- OpenStax Calculus 2, 2.4 Arc Length of a Curve and Surface Area (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/2-4-arc-length-of-a-curve-and-surface-area): Lunghezza d'arco.
- OpenStax Calculus 2, 2.5 Physical Applications (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/2-5-physical-applications): Lavoro, pompaggio e forza dei fluidi.

- OpenStax Calculus 2, 2.6 Moments and Centers of Mass (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/2-6-moments-and-centers-of-mass): Baricentri.

Guarda la lezione

Clip 1: Introduction to Arc Length (https://ocw.mit.edu/courses/18-01sc-single-variable-calculus-fall-2010/resources/clip-1-introduction-to-arc-length/) (in inglese)

MIT 18.01SC Single Variable Calculus (Fall 2010), MIT OpenCourseWare. Licenza: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Condizioni d'uso (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Link fornito solo per lo studio gratuito; Saving Planets non è affiliato a questa università né approvato da essa.

☐ **Ho finito questa unità**

Integrali impropri

Integrali su intervalli infiniti o attraverso picchi infiniti: quando danno un numero finito e quando no.

Obiettivi di apprendimento

Alla fine di questa unità saprai:

- Calcolare integrali impropri come limiti.
- Stabilire la convergenza con il criterio p e il confronto.
- Applicare gli integrali impropri all'energia di fuga e alle vite medie.

Concetti chiave

- $\int_a^\infty f\,dx$ indica il limite di $\int_a^b f\,dx$ per $b \to \infty$. Se il limite è finito, l'integrale converge.
- $\int_1^\infty dx/x^p$ converge esattamente quando $p > 1$. $\int_0^1 dx/x^p$ converge esattamente quando $p < 1$.
- Confronto: se $0 \le f \le g$ e $\int g$ converge, converge anche $\int f$.
- Una regione infinita può avere area finita.

Equazioni chiave

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

`_a^∞f(x) dx=_b∞_a^bf(x) dx`

Integrale improprio

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1}\ (p>1)$$

`_1^∞(dx)/(x^p)=1p-1\ (p>1)`

Integrale p

$$W_\infty = \int_R^\infty \frac{GMm}{r^2}\,dr = \frac{GMm}{R}$$

`W_∞=_R^∞(GMm)/(r^2) dr=GMm/R`

Lavoro per sfuggire alla gravità di un pianeta

Esempi svolti passo passo

Esempio 3.1 Calcola $\int_1^\infty dx/x^2$.

1. $\int_1^b x^{-2}\,dx = 1 - 1/b$.
2. As $b \to \infty$, $1/b \to 0$.

Risposta: 1 (converge).

Esempio 3.2 $\int_1^\infty dx/x$ converge?

1. $\int_1^b dx/x = \ln b$.
2. $\ln b \to \infty$.

Risposta: No, diverge, anche se $1/x \to 0$.

Esempio 3.3 Quanta energia per chilogrammo serve per sfuggire alla gravità terrestre dalla superficie (trascurando aria e rotazione)?

1. $W/m = \int_R^\infty GM/r^2\,dr = GM/R$.
2. $GM = 3.986 \times 10^{14}\ m^3/s^2$, $R = 6.371 \times 10^6$ m.
3. $W/m = 6.26 \times 10^7$ J/kg.

Risposta: Circa 62.6 MJ per chilogrammo, un valore finito anche se la distanza è infinita. Ponendo $\frac{1}{2}v^2$ uguale a questo valore si ottiene la velocità di fuga di 11.2 km/s.

Esercizi

Svolgi ciascuno prima su carta, poi controlla.

1. $\int_0^\infty e^{-x}\,dx$

   $[-e^{-x}]_0^\infty = 0 + 1 = 1$.

2. $\int_0^1 dx/\sqrt{x}$

   $[2\sqrt{x}]_0^1 = 2$ (converge; $p = \frac{1}{2} < 1$).

3. $\int_2^\infty dx/x^3$

   $[-1/(2x^2)]_2^\infty = 1/8$.

4. $\int_1^\infty dx/(x^2 + 1)$ converge?

   Sì: è minore di $1/x^2$, che converge. Anzi, vale $\pi/4$.

5. Per un decadimento esponenziale con tasso λ, la vita media è $\int_0^{\infty} t\,\lambda e^{-\lambda t}\,dt$. Calcolala.

   Per parti: $1/\lambda$.

Errori concettuali comuni

Mito: Se $f(x) \to 0$ per $x \to \infty$, l'integrale converge.
In realtà: $1/x \to 0$ ma $\int_1^{\infty} dx/x$ diverge.

Mito: Una regione infinitamente lunga ha area infinita.
In realtà: $\int_1^{\infty} dx/x^2 = 1$.

Mito: $\int_{-1}^{1} dx/x^2 = -2$ con la formula usuale.
In realtà: L'integrando esplode in 0, quindi l'integrale è improprio, e diverge.

Flashcard

Integrale improprio

Intervallo infinito o integrando infinito; definito tramite un limite.

Converge

Il limite esiste ed è finito.

Criterio p (∞)

$\int_1^{\infty} x^{-p}$ converge se e solo se $p > 1$.

Criterio p (0)

$\int_0^{1} x^{-p}$ converge se e solo se $p < 1$.

Criterio del confronto

Minore di uno convergente ⇒ converge.

Energia di fuga

GM/R per kg.

Quiz di autoverifica

1. $\int_1^{\infty} dx/x^{1.5}$...

diverge

converge a 2

converge a 1

converge a 1.5

converge a 2. 1/(p − 1) = 1/0.5 = 2.

2. $\int_1^{\infty} dx/x$...

converge a 1

diverge

converge a 0

è uguale a ln 2

diverge. ln b → ∞.

3. $\int_0^{\infty} e^{(-2x)}\, dx$ =

2

1/2

1

∞

1/2. $[-e^{(-2x)/2}]_0^{\infty}$ = 1/2.

4. Un integrale improprio è definito come...

una somma

un limite di integrali propri

una derivata

sempre infinito

un limite di integrali propri. Si prende il limite di $\int_a^b$.

Rifai questo quiz

Come questo aiuta a salvare il pianeta

Gli integrali impropri danno l'energia per lasciare un pianeta, il numero dietro ogni lancio di un satellite meteorologico o climatico. È finita, ed è per questo che il volo spaziale è possibile.

Le vite medie, anch'esse integrali impropri, descrivono per quanto tempo le sostanze restano: quanto persiste un inquinante in un lago, o quanto dura un tracciante radioattivo usato per datare il ghiaccio e l'acqua oceanica.

Su Saving Planets: Fisica I, Unità 7: orbite · Calcolatore di delta-v

Fonti: OpenStax Calculus 2, 3.7 Improper Integrals (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/3-7-improper-integrals) · Scheda NASA sulla Terra (in inglese) (https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/earthfact.html)

Risorse di apprendimento gratuite

- OpenStax Calculus 2, 3.7 Improper Integrals (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/3-7-improper-integrals): Sezione gratuita del libro di testo con criteri di confronto.

Guarda la lezione

Lecture 36: Improper Integrals (https://ocw.mit.edu/courses/18-01-single-variable-calculus-fall-2006/resources/lecture-36-improper-integrals/) (in inglese)

MIT 18.01 Single Variable Calculus (Fall 2006), MIT OpenCourseWare. Licenza: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Condizioni d'uso (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Link fornito solo per lo studio gratuito; Saving Planets non è affiliato a questa università né approvato da essa.

☐ **Ho finito questa unità**

Introduzione alle equazioni differenziali

Equazioni per i tassi di variazione: crescita e decadimento esponenziale, raffreddamento, miscelazione e il modello logistico delle popolazioni.

Obiettivi di apprendimento

Alla fine di questa unità saprai:

- Verificare le soluzioni e risolvere problemi ai valori iniziali.
- Leggere i campi di direzioni e usare il metodo di Eulero.
- Risolvere equazioni a variabili separabili, inclusi problemi di miscelazione e raffreddamento.
- Usare l'equazione logistica e interpretarne la capacità portante.

Concetti chiave

- Un'equazione differenziale collega una funzione alle sue derivate. La sua soluzione è una funzione, di solito una famiglia fissata da una condizione iniziale.
- Equazioni a variabili separabili: porta tutte le y da una parte e tutte le x dall'altra, poi integra.
- y' = ky dà $y = y_0 e^{kt}$: crescita se k > 0, decadimento se k < 0.
- Miscelazione: tasso di variazione di un inquinante = tasso in entrata − tasso in uscita.
- Logistica: P' = rP(1 − P/K). La crescita rallenta quando P si avvicina alla capacità portante K; è massima per P = K/2.
- Il metodo di Eulero avanza lungo la pendenza: $y_{n+1} = y_n + h\, f(t_n, y_n)$. Passi più piccoli, errore più piccolo.

Equazioni chiave

$$\frac{dy}{dt} = ky \;\Rightarrow\; y = y_0 e^{kt}$$

`dy/dt=ky\ \ y=y_0e^kt`

Crescita e decadimento esponenziale

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_s)$$

`dT/dt=-k(T-T_s)`

Legge di raffreddamento di Newton

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right), \quad P(t) = \frac{K}{1 + \frac{K - P_0}{P_0} e^{-rt}}$$

```
dP/dt=rP(1- PK), P(t)=1+(K-P_0)/(P_0)e^-rt
```

Equazione logistica e sua soluzione

$$y_{n+1} = y_n + h\, f(t_n, y_n)$$

```
y_n+1=y_n+h f(t_n,y_n)
```

Metodo di Eulero

Esempi svolti passo passo

Esempio 4.1 Una parte di un lago contiene 1000 m³ d'acqua con 50 kg di un inquinante disciolto. Acqua pulita entra a 10 m³/giorno e acqua ben miscelata esce alla stessa portata. Quanto tempo serve perché sparisca metà dell'inquinante?

1. dS/dt = −(10/1,000)S = −S/100.
2. S(t) = 50e^(−t/100).
3. Metà: e^(−t/100) = ½, quindi t = 100 ln 2.

Risposta: ≈ 69.3 giorni (un modello semplificato, perfettamente miscelato).

Esempio 4.2 Uno stock ittico segue P' = 0.5P(1 − P/1000) con P(0) = 100. Trova P(4).

1. P(t) = 1,000/(1 + 9e^(−0.5t)).
2. P(4) = 1,000/(1 + 9e^(−2)) = 1,000/2.218.

Risposta: ≈ 451 pesci, vicino al livello di crescita più rapida K/2 = 500.

Esempio 4.3 Usa il metodo di Eulero con h = 0.5 per stimare y(1) per y' = y, y(0) = 1.

1. y_1 = 1 + 0.5(1) = 1.5.
2. y_2 = 1.5 + 0.5(1.5) = 2.25.

Risposta: 2.25, contro il valore esatto e ≈ 2.718; dimezzare h riduce l'errore.

Esercizi

Svolgi ciascuno prima su carta, poi controlla.

1. Un caffè a 90 °C si raffredda in una stanza a 20 °C con k = 0.1 al minuto. Trova la sua temperatura dopo 10 minuti.

T = 20 + 70e^(−1) ≈ 45.8 °C.

2. Risolvi y' = xy con y(0) = 2 e trova y(1).

   dy/y = x dx, quindi y = 2e^(x²/2); y(1) = 2e^0.5 ≈ 3.30.

3. Risolvi y' = −2y, y(0) = 5. Trova y(1).

   y = 5e^(−2t); y(1) ≈ 0.677.

4. Per P' = rP(1 − P/K), con quale popolazione la crescita è più rapida?

   rP(1 − P/K) è una parabola rivolta verso il basso in P con il vertice in P = K/2.

Errori concettuali comuni

Mito: La soluzione di un'equazione differenziale è un numero.
In realtà: È una funzione (o una famiglia di funzioni).

Mito: Il metodo di Eulero dà la risposta esatta se si è attenti.
In realtà: Ha un errore legato al passo; converge solo per h → 0.

Mito: Le popolazioni logistiche smettono di crescere a K/2.
In realtà: La crescita è massima a K/2 e si annulla solo quando P si avvicina a K.

Flashcard

Equazione differenziale

Un'equazione che coinvolge una funzione e le sue derivate.

Problema ai valori iniziali

Una ED più un valore di partenza.

A variabili separabili

g(y) dy = h(x) dx.

Equazione logistica

P' = rP(1 − P/K).

Capacità portante

K, il limite a lungo termine di una popolazione logistica.

Metodo di Eulero

$y_{n+1} = y_n + h\, f(t_n, y_n)$.

Quiz di autoverifica

1. La soluzione generale di y' = 3y è...

$3e^x$

Ce^(3x)

e^(3x) + C

3x + C

Ce^(3x). Separa e integra.

2. Nel modello logistico, K è...

il tasso di crescita

la popolazione iniziale

la capacità portante

il tempo di dimezzamento

la capacità portante. Il livello a cui tende la popolazione.

3. Un passo di Eulero da (0, 2) con y' = y e h = 0.1 dà...

2.1

2.2

2.02

2.0

2.2. 2 + 0.1 × 2.

4. $dy/dx = x^2y$ è...

non separabile

a variabili separabili

solo lineare a coefficienti costanti

logistica

a variabili separabili. $dy/y = x^2\,dx$.

Rifai questo quiz

Come questo aiuta a salvare il pianeta

I modelli di popolazione basati sull'equazione logistica fanno parte del modo in cui gli scienziati della pesca valutano gli stock e fissano limiti di cattura che permettono alle popolazioni di restare in salute, proteggendo gli ecosistemi marini e le persone che ne dipendono.

Le equazioni di miscelazione come quella dell'esempio 4.1 sono il primo passo per stimare quanto rapidamente un lago o un estuario elimina un inquinante una volta fermata la fonte.

I modelli meteorologici e climatici risolvono sistemi enormi di equazioni differenziali con metodi numerici passo passo, discendenti del metodo di Eulero.

Su Saving Planets: Sezione Laghi · Sezione Oceani

Fonti: OpenStax Calculus 2, 4.4 The Logistic Equation (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/4-4-the-logistic-equation) · NOAA Fisheries: valutazioni delle popolazioni (https://www.fisheries.noaa.gov/topic/population-assessments)

Risorse di apprendimento gratuite

- OpenStax Calculus 2, 4.1 Basics of Differential Equations (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/4-1-basics-of-differential-equations): Sezione di un manuale gratuito.
- OpenStax Calculus 2, 4.2 Direction Fields and Numerical Methods (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/4-2-direction-fields-and-numerical-methods): Metodo di Eulero.
- OpenStax Calculus 2, 4.3 Separable Equations (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/4-3-separable-equations): Miscelazione e raffreddamento.
- OpenStax Calculus 2, 4.4 The Logistic Equation (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/4-4-the-logistic-equation): Modelli di popolazione.

Guarda la lezione

Lecture 16: Differential Equations (https://ocw.mit.edu/courses/18-01-single-variable-calculus-fall-2006/resources/lecture-16-differential-equations/) (in inglese)

MIT 18.01 Single Variable Calculus (Fall 2006), MIT OpenCourseWare. Licenza: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Condizioni d'uso (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Link fornito solo per lo studio gratuito; Saving Planets non è affiliato a questa università né approvato da essa.

☐ **Ho finito questa unità**

Successioni e serie

Quando sommare infiniti numeri dà un totale finito? Serie geometriche, serie armonica e criteri di convergenza.

Obiettivi di apprendimento

Alla fine di questa unità saprai:

- Trovare i limiti delle successioni.
- Sommare serie geometriche e telescopiche.
- Applicare i criteri di divergenza, dell'integrale, del confronto, delle serie a segni alterni, del rapporto e della radice.
- Distinguere la convergenza assoluta da quella condizionata.

Concetti chiave

- Una serie Σa_n converge se le sue somme parziali tendono a un limite.
- Geometrica: $\Sigma\, ar^n$ $(n \geq 0) = a/(1 - r)$ quando $|r| < 1$.
- Criterio di divergenza: se a_n non $\to 0$, la serie diverge. Il viceversa è falso: la serie armonica $\Sigma 1/n$ diverge.
- La serie p $\Sigma 1/n^p$ converge se e solo se $p > 1$ (per il criterio dell'integrale).
- Criterio del rapporto: se $|a_{n+1}/a_n| \to L < 1$ la serie converge assolutamente; se $L > 1$ diverge; $L = 1$ non dice nulla.
- Le serie a segni alterni con termini decrescenti a 0 convergono; $\Sigma(-1)^{n+1}/n = \ln 2$.

Equazioni chiave

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r} \ (|r| < 1)$$

_n=0^∞ar^n=(a)/(1-r)\ (|r|<1)

Serie geometrica

$$\sum \frac{1}{n^p} \text{ converges } \iff p > 1$$

Serie p

$$L = \lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

L=|_n+1a_n|

Esempi svolti passo passo

Esempio 5.1 Somma $\Sigma\ (1/2)^n$ da $n = 0$.

1. Geometrica con $a = 1$, $r = ½$.
2. $1/(1 - ½) = 2$.

Risposta: 2.

Esempio 5.2 Ogni anno un lago perde il 10% di un inquinante accumulato e ne riceve altre 5 tonnellate. A quale livello si stabilizza?

1. Dopo molti anni la quantità è $5 + 5(0.9) + 5(0.9)^2 + \ldots$
2. Geometrica: $5/(1 - 0.9)$.

Risposta: 50 tonnellate. Dimezzare l'apporto annuo dimezza il livello a lungo termine (un modello semplificato).

Esempio 5.3 $\Sigma\ n/2^n$ converge?

1. Rapporto: $[(n + 1)/2^{n+1}]/[n/2^n] = (n + 1)/(2n) \to ½$.
2. $½ < 1$.

Risposta: Converge (la somma è 2).

Esercizi

Svolgi ciascuno prima su carta, poi controlla.

1. $\Sigma\ 0.9(0.1)^n$ da $n = 0$

   $0.9/(1 - 0.1) = 1$. So $0.999\ldots = 1$.

2. $\Sigma\ 1/n^2$ converge?

   Sì, $p = 2 > 1$ (la somma è $\pi^2/6$).

3. $\Sigma\ n/(n + 1)$ converge?

   No: i termini $\to 1$, non 0 (criterio di divergenza).

4. Somma $\Sigma\, 3(2/3)^n$ da $n = 0$.

   $3/(1 - 2/3) = 9$.

5. $\Sigma\, (-1)^{n+1}/n$ converge assolutamente?

   No. Converge (a $\ln 2$), ma $\Sigma 1/n$ diverge, quindi la convergenza è condizionata.

Errori concettuali comuni

Mito: Se i termini tendono a 0, la serie converge.
In realtà: La serie armonica è il controesempio.

Mito: Un limite pari a 1 nel criterio del rapporto significa divergenza.
In realtà: $L = 1$ non è conclusivo; usa un altro criterio.

Mito: Riordinare i termini non cambia mai una somma.
In realtà: Per le serie condizionatamente convergenti può cambiarla.

Flashcard

Successione

Un elenco ordinato a_1, a_2, ...

Serie

Somma di una successione; limite delle somme parziali.

Serie geometrica

$a/(1 - r)$ per $|r| < 1$.

Serie armonica

$\Sigma 1/n$, diverge.

Criterio del rapporto

$L < 1$ converge, $L > 1$ diverge, $L = 1$ non conclusivo.

Convergenza condizionata

Converge, ma non assolutamente.

Quiz di autoverifica

1. $\Sigma\, (1/3)^n$ da $n = 0$ =

1/3

3/2

3

2

3/2. 1/(1 − 1/3).

2. La serie armonica Σ1/n...

converge a 1

diverge

converge a ln 2

converge a e

diverge. p = 1, criterio dell'integrale.

3. Σ 1/n^1.01...

converge

diverge

non si può stabilire

è uguale a 1

converge. p > 1.

4. Il criterio del rapporto per Σ 1/n! dà L =

1

0

∞

1/2

0. 1/(n + 1) → 0, quindi converge.

Rifai questo quiz

Come questo aiuta a salvare il pianeta

Le serie geometriche descrivono tutto ciò che viene in parte riportato da un periodo al successivo, come nell'esempio 5.2. Questo semplice modello mostra un fatto chiave dell'inquinamento e dei gas serra: il livello a lungo termine dipende dal ritmo degli apporti, quindi ridurre gli apporti abbassa il livello di equilibrio.

I sistemi reali sono più complessi di una sola serie geometrica, e gli scienziati usano modelli completi, ma la serie è la giusta prima intuizione.

Su Saving Planets: Previsione delle fioriture algali del lago Erie · Sezione Laghi

Fonti: OpenStax Calculus 2, 5.2 Infinite Series (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/5-2-infinite-series) · NOAA GML: andamento della CO_2 atmosferica (in inglese) (https://gml.noaa.gov/ccgg/trends/)

Risorse di apprendimento gratuite

- OpenStax Calculus 2, 5.1 Sequences (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/5-1-sequences): Sezione di un manuale gratuito.
- OpenStax Calculus 2, 5.2 Infinite Series (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/5-2-infinite-series): Serie geometriche e telescopiche.
- OpenStax Calculus 2, 5.6 Ratio and Root Tests (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/5-6-ratio-and-root-tests): Criteri del rapporto e della radice.

☐ **Ho finito questa unità**

Serie di potenze e serie di Taylor

Trasformare funzioni in polinomi infiniti. Le serie di Taylor sono il modo in cui calcolano le calcolatrici e in cui i fisici semplificano problemi difficili.

Obiettivi di apprendimento

Alla fine di questa unità saprai:

- Trovare il raggio e l'intervallo di convergenza di una serie di potenze.
- Costruire serie e polinomi di Taylor e di Maclaurin.
- Stimare l'errore di un'approssimazione di Taylor.
- Usare le serie per approssimare integrali e giustificare le approssimazioni per piccoli angoli.

Concetti chiave

- Una serie di potenze $\Sigma c_n(x - a)^n$ converge all'interno di un raggio R e diverge all'esterno; controlla gli estremi separatamente.
- Serie di Taylor: $c_n = f^{(n)}(a)/n!$. Attorno ad a = 0 si chiama serie di Maclaurin.
- Serie fondamentali: $e^x = \Sigma x^n/n!$, $\sin x = x - x^3/3! + x^5/5! - \ldots$, $\cos x = 1 - x^2/2! + x^4/4! - \ldots$, $\ln(1 + x) = x - x^2/2 + x^3/3 - \ldots$ ($|x| < 1$).
- Resto di Taylor: l'errore è al massimo $M|x - a|^{n+1}/(n + 1)!$, dove M maggiora la derivata successiva.
- Tenere solo il primo termine trasforma $\sin\theta$ in θ, l'approssimazione per piccoli angoli dietro la formula del pendolo semplice.

Equazioni chiave

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

`f(x)=_n=0^∞^(n)(a)n!(x-a)^n`

Serie di Taylor

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

`e^x=_n=0^∞(x^n)/(n!)`

Serie esponenziale

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

`x=x-(x^3)/(3!)+(x^5)/(5!)-·s`

Serie del seno

$$|R_n(x)| \le \frac{M|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Stima del resto di Taylor

Esempi svolti passo passo

Esempio 6.1 Stima e^0.1 con i primi quattro termini della sua serie.

1. 1 + 0.1 + 0.01/2 + 0.001/6.
2. = 1.105167.

Risposta: 1.105167, contro il valore vero 1.105171.

Esempio 6.2 Stima sin 0.5 con tre termini e maggiora l'errore.

1. 0.5 − 0.125/6 + 0.03125/120 = 0.479427.
2. Stima con il termine successivo: $0.5^7/7! = 1.55 \times 10^{-6}$.

Risposta: 0.479427, errore inferiore a 1.6×10^{-6} (valore vero 0.479426).

Esempio 6.3 Trova il raggio di convergenza di $\Sigma\, x^n/3^n$.

1. Rapporto: $|x|/3 < 1$.
2. Gli estremi $x = \pm 3$ danno termini ± 1, che non $\to 0$.

Risposta: $R = 3$; converge per $-3 < x < 3$.

Esercizi

Svolgi ciascuno prima su carta, poi controlla.

1. Scrivi il polinomio di Maclaurin di grado 4 di cos x e usalo per cos 0.2.

   $1 - x^2/2 + x^4/24$; $\cos 0.2 \approx 1 - 0.02 + 0.0000667 = 0.980067$ (valore vero 0.980067).

2. Trova la serie di Maclaurin di $1/(1-x)$.

   Σx^n per $|x| < 1$ (geometrica).

3. Trova il raggio di convergenza di $\Sigma\, x^n/n$.

   $R = 1$ (rapporto $n/(n+1) \to 1$).

4. Usa una serie per stimare $\int_0^1 e^{\wedge}(-x^2)\, dx$ con tre termini.

   $\int(1 - x^2 + x^4/2)\, dx = 1 - 1/3 + 1/10 = 0.7667$. Con più termini ci si avvicina a 0.7468.

Errori concettuali comuni

Mito: Un polinomio di Taylor è preciso ovunque.

In realtà: È migliore vicino al centro a e può essere pessimo lontano da esso o fuori dal raggio di convergenza.

Mito: Ogni funzione liscia è uguale alla sua serie di Taylor.

In realtà: Non sempre, anche se vale ovunque per e^x, sin x e cos x.

Mito: Il raggio di convergenza decide anche gli estremi.

In realtà: Gli estremi vanno controllati separatamente.

Flashcard

Serie di potenze

$\Sigma c_n(x - a)^n$.

Raggio di convergenza

R tale che la serie converge per $|x - a| < R$.

Coefficiente di Taylor

$f^{(n)}(a)/n!$.

Serie di Maclaurin

Serie di Taylor in $a = 0$.

Approssimazione per piccoli angoli

$\sin\theta \approx \theta$, $\cos\theta \approx 1 - \theta^2/2$.

Stima del resto

$M|x - a|^{n+1}/(n+1)!$.

Quiz di autoverifica

1. La serie di Maclaurin di e^x è...

Σx^n

$\Sigma x^n/n!$

$\Sigma(-1)^n x^n$

$\Sigma x^n/n$

$\Sigma x^n/n!$. Tutte le derivate di e^x in 0 valgono 1.

2. Per θ piccolo, $\sin\theta \approx$...

1

θ

θ^2

$1-\theta$

θ. Il primo termine della serie.

3. Il coefficiente di x^3 nella serie di sin x è...

1/3

−1/6

1/6

−1/3

−1/6. −1/3!.

4. Σx^n converge per...

ogni x

$|x| < 1$

$|x| \leq 1$

$x > 0$

$|x| < 1$. Serie geometrica.

Rifai questo quiz

Come questo aiuta a salvare il pianeta

Le serie di Taylor permettono ai fisici di trasformare equazioni difficili in equazioni utilizzabili. Il periodo del pendolo $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ di Fisica I si basa su $\sin\theta \approx \theta$, e lo stesso tipo di linearizzazione è alla base di gran parte dell'analisi delle vibrazioni di turbine eoliche, ponti e aerei da parte degli ingegneri.

I modelli delle orbite dei satelliti e del clima sviluppano effetti complicati in serie e tengono i termini che contano. Conoscere la stima dell'errore dice quando un'approssimazione è abbastanza buona da fidarsene.

Su Saving Planets: Fisica I, Unità 8: oscillazioni · Calcolatore del periodo del pendolo

Fonti: OpenStax Calculus 2, 6.3 Taylor and Maclaurin Series (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/6-3-taylor-and-maclaurin-series) · OpenStax University Physics 1, 15.4 Pendulums (in inglese) (https://openstax.org/books/university-physics-volume-1/pages/15-4-pendulums)

Risorse di apprendimento gratuite

- OpenStax Calculus 2, 6.3 Taylor and Maclaurin Series (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/6-3-taylor-and-maclaurin-series): Sezione di un manuale gratuito.
- MIT OpenCourseWare 18.01SC (https://ocw.mit.edu/courses/18-01sc-single-variable-calculus-fall-2010/): Lezioni ed esercizi sulle serie.

Guarda la lezione

Lecture 38: Taylor's Series (https://ocw.mit.edu/courses/18-01-single-variable-calculus-fall-2006/resources/lecture-38-taylors-series/) (in inglese)

MIT 18.01 Single Variable Calculus (Fall 2006), MIT OpenCourseWare. Licenza: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Condizioni d'uso (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Link fornito solo per lo studio gratuito; Saving Planets non è affiliato a questa università né approvato da essa.

☐ **Ho finito questa unità**

Equazioni parametriche e coordinate polari

Descrivere traiettorie in funzione del tempo e curve in funzione di un angolo, inclusa l’ellisse che segue ogni satellite e ogni pianeta.

Obiettivi di apprendimento

Alla fine di questa unità saprai:

- Tracciare curve parametriche, trovare dy/dx e la lunghezza d’arco.
- Passare tra coordinate polari e cartesiane.
- Trovare aree e lunghezze d’arco in coordinate polari.
- Descrivere un’orbita kepleriana in forma polare.

Concetti chiave

- Una curva parametrica dà x(t) e y(t); dy/dx = (dy/dt)/(dx/dt).
- Lunghezza d’arco: ∫√(x'² + y'²) dt.
- Polari: x = r cos θ, y = r sin θ. Area di una regione polare: ½∫r² dθ.
- Un’orbita attorno a un fuoco è r = p/(1 + e cos θ), dove e è l’eccentricità.
- La seconda legge di Keplero (aree uguali in tempi uguali) equivale a dire che ½r² dθ/dt è costante.

Equazioni chiave

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

`dy/dx=(dy/dt)/(dx/dt)`

Pendenza di una curva parametrica

$$L = \int_a^b \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\, dt$$

`L=_a^b(x')^2+(y')^2 dt`

Lunghezza d’arco parametrica

$$A = \tfrac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2\, d\theta$$

`A=12_α^β r^2 dθ`

Area in polari

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$$

`r=(a(1-e^2))/(1+eθ)`

Orbita conica in forma polare

Esempi svolti passo passo

Esempio 7.1 Trova la pendenza di x = t², y = t³ in t = 1.

1. dx/dt = 2t, dy/dt = 3t².
2. dy/dx = 3t²/(2t) = 3t/2 = 3/2 in t = 1.

Risposta: 3/2.

Esempio 7.2 Trova l'area all'interno della cardioide r = 1 + cos θ.

1. A = ½∫₀^(2π) (1 + cos θ)² dθ.
2. = ½∫(1 + 2cos θ + cos²θ) dθ = ½(2π + 0 + π).

Risposta: 3π/2 ≈ 4.71.

Esempio 7.3 L'orbita terrestre ha a = 149.6 milioni di km ed e = 0.0167. Trova le sue distanze minima e massima dal Sole.

1. At θ = 0: r = a(1 − e) = 149.6 × 0.9833.
2. At θ = π: r = a(1 + e) = 149.6 × 1.0167.

Risposta: Circa 147.1 e 152.1 milioni di km, in accordo con il perielio e l'afelio pubblicati dalla NASA.

Esercizi

Svolgi ciascuno prima su carta, poi controlla.

1. Trova la lunghezza di x = cos t, y = sin t per 0 ≤ t ≤ 2π.

   ∫√(sin²t + cos²t) dt = 2π (la circonferenza di un cerchio).

2. Trova l'area del cerchio r = 3.

   ½∫₀^(2π) 9 dθ = 9π.

3. Converti $r = 2 \cos \theta$ in forma cartesiana.

   $r^2 = 2r \cos \theta$ dà $x^2 + y^2 = 2x$: un cerchio di raggio 1 centrato in (1, 0), di area π.

4. Elimina t da $x = 2 \cos t$, $y = \sin t$.

   $x^2/4 + y^2 = 1$, un'ellisse.

Errori concettuali comuni

Mito: $dy/dx = dy/dt \times dx/dt$.
In realtà: Dividi: $(dy/dt)/(dx/dt)$.

Mito: L'area in polari è $\int r \, d\theta$.
In realtà: È $\frac{1}{2}\int r^2 \, d\theta$, da sottili fette di torta.

Mito: Il Sole è al centro dell'orbita terrestre.
In realtà: È in uno dei fuochi dell'ellisse.

Flashcard

Curva parametrica

$x = x(t)$, $y = y(t)$.

Pendenza parametrica

$(dy/dt)/(dx/dt)$.

Coordinate polari

(r, θ); $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$.

Area in polari

$\frac{1}{2}\int r^2 \, d\theta$.

Eccentricità

$e = 0$ cerchio, $0 < e < 1$ ellisse.

Seconda legge di Keplero

Aree uguali in tempi uguali.

Quiz di autoverifica

1. L'area in polari usa...

$\int r \, d\theta$

$\frac{1}{2}\int r^2 \, d\theta$

$\int r^2 \, d\theta$

$2\pi\int r\, d\theta$

$\frac{1}{2}\int r^2\, d\theta$. Ogni fetta è approssimativamente un settore di area $\frac{1}{2}r^2\, d\theta$.

2. x = r cos θ, y = ...

r tan θ

r sin θ

θ sin r

r/θ

r sin θ. Da polari a cartesiane.

3. Per un'orbita r = p/(1 + e cos θ), e = 0 dà...

una parabola

un cerchio

una retta

un'iperbole

un cerchio. r = p è costante.

4. La seconda legge di Keplero dice che $r^2\, d\theta/dt$ è...

zero

costante

crescente

uguale a e

costante. Aree uguali in tempi uguali.

Rifai questo quiz

Come questo aiuta a salvare il pianeta

Ogni satellite di osservazione della Terra segue una traiettoria descritta dall'equazione polare dell'orbita di questa unità. I progettisti di missione scelgono forma e inclinazione dell'orbita in modo che gli strumenti ripassino sugli stessi luoghi con un'illuminazione simile, il che rende più facile rilevare i cambiamenti al suolo.

Le equazioni parametriche descrivono la traccia al suolo che un satellite disegna sulla Terra, che decide quali foreste, coste e calotte glaciali può vedere e quando.

Su Saving Planets: Guida alle orbite · Landsat 9

Fonti: Scheda NASA sulla Terra (in inglese) (https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/earthfact.html) · OpenStax Calculus 2, 7.4 Area and Arc Length in Polar Coordinates (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/7-4-area-and-arc-length-in-polar-coordinates)

Risorse di apprendimento gratuite

- OpenStax Calculus 2, 7.1 Parametric Equations (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/7-1-parametric-equations): Sezione di un manuale gratuito.
- OpenStax Calculus 2, 7.3 Polar Coordinates (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/7-3-polar-coordinates): Grafici polari.
- OpenStax Calculus 2, 7.4 Area and Arc Length in Polar Coordinates (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/7-4-area-and-arc-length-in-polar-coordinates): Area e lunghezza in polari.
- PhET: Kepler's Laws (https://phet.colorado.edu/en/simulations/keplers-laws): Orbite, aree e periodi.

Guarda la lezione

Lecture 31: Parametric Equations (https://ocw.mit.edu/courses/18-01-single-variable-calculus-fall-2006/resources/lecture-31-parametric-equations/) (in inglese)

MIT 18.01 Single Variable Calculus (Fall 2006), MIT OpenCourseWare. Licenza: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Condizioni d'uso (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Link fornito solo per lo studio gratuito; Saving Planets non è affiliato a questa università né approvato da essa.

☐ **Ho finito questa unità**

Esercizi

Questi esercizi stanno dentro ogni unità. Falli su carta, poi apri la risposta.

1. Tecniche di integrazione
   5 esercizi
2. Applicazioni: volume, lunghezza d'arco, lavoro e centro di massa
   4 esercizi
3. Integrali impropri

5 esercizi

4. Introduzione alle equazioni differenziali
   4 esercizi
5. Successioni e serie
   5 esercizi
6. Serie di potenze e serie di Taylor
   4 esercizi
7. Equazioni parametriche e coordinate polari
   4 esercizi

Laboratori al computer

Quattro brevi laboratori al computer applicano le unità con un foglio di calcolo: il metodo di Eulero per un modello di popolazione, la regola di Simpson per il volume di un bacino, la precisione delle serie di Taylor e la seconda legge di Keplero in coordinate polari.

Sono i metodi numerici che scienziati e ingegneri usano ogni giorno. I dati di esempio sono indicati come tali; ogni laboratorio rimanda alla sua fonte.

Riferimento per la sicurezza: OpenStax Calculus Volume 2 (libro di testo gratuito) (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/1-introduction)

Laboratorio A: metodo di Eulero per uno stock ittico in ripresa

SETTIMANA 8

Obiettivo: Risolvere numericamente l'equazione logistica e confrontarla con la soluzione esatta.

$$P_{n+1} = P_n + h\,r P_n \left(1 - \frac{P_n}{K}\right)$$

```
P_n+1=P_n+h rP_n(1-(P_n)/(K))
```

Metodo di Eulero per l'equazione logistica

Procedimento

1. Imposta r = 0.5, K = 1000, P_0 = 100 e h = 1 in un foglio di calcolo.
2. Trascina verso il basso i passi di Eulero fino a t = 4.
3. Aggiungi una colonna con la soluzione esatta e l'errore.
4. Ripeti con h = 0.5 e h = 0.25; come cambia l'errore?

Tabella dei dati

t	P di Eulero (h = 1)
0	100
1	145.0
2	207.0
3	289.1
4	391.9

Valori calcolati dal modello (non una vera attività di pesca). P(4) esatto = 450.9.

Calcolo di esempio

1. P_1 = 100 + 0.5 × 100 × 0.9 = 145.0.
2. P_2 = 145 + 0.5 × 145 × 0.855 = 207.0.
3. Qui Eulero sottostima (391.9 contro 450.9) perché la curva si piega verso l'alto all'inizio della crescita; dimezzare h dimezza circa l'errore.

> **Sicurezza**
>
> - Nessuna, oltre al normale uso del computer.

Alternativa a casa o virtuale

- Basta un foglio di calcolo.

OpenStax Calculus 2, 4.2 Direction Fields and Numerical Methods (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/4-2-direction-fields-and-numerical-methods)

Legame con il pianeta: I modelli numerici di popolazione supportano la gestione della pesca. NOAA Fisheries: valutazioni delle popolazioni (https://www.fisheries.noaa.gov/topic/population-assessments)

- [ ] **Ho completato questo laboratorio (reale o virtuale)**

Laboratorio B: volume di un bacino con la regola di Simpson

SETTIMANA 5

Obiettivo: Stimare il volume di un bacino da misure dell'area della superficie a diverse profondità.

$$V = \int_0^H A(h)\,dh \approx \frac{\Delta h}{3}[A_0 + 4A_1 + 2A_2 + 4A_3 + A_4]$$

V=_0^HA(h) dh≈Δ h3[A_0+4A_1+2A_2+4A_3+A_4]

Il volume come integrale dell'area della sezione

Procedimento

1. Inserisci le aree di esempio a 0, 2, 4, 6 e 8 m sopra il fondo.
2. Applica la regola di Simpson con Δh = 2 m.
3. Confronta con la regola dei trapezi.

Tabella dei dati

Altezza h (m)	Area della superficie A (km²)
0	0.0
2	1.2
4	2.6
6	4.0
8	5.6

Valori di esempio per esercitarsi, non un bacino reale.

Calcolo di esempio

1. Simpson: (2/3)[0 + 4(1.2) + 2(2.6) + 4(4.0) + 5.6] = (2/3)(31.6) = 21.07 km²·m.
2. 1 km²·m = 10^6 m³, quindi V ≈ 2.11 × 10^7 m³ (21 milioni di metri cubi).
3. Trapezi: 2[0/2 + 1.2 + 2.6 + 4.0 + 5.6/2] = 21.2 km²·m, vicino a Simpson.

> **Sicurezza**
>
> - Nessuna, oltre al normale uso del computer.

Alternativa a casa o virtuale

- Basta un foglio di calcolo.

NASA: missione SWOT (https://swot.jpl.nasa.gov/)

Legame con il pianeta: I satelliti per le acque superficiali come SWOT aiutano a stimare le variazioni dell'acqua immagazzinata in laghi e bacini.

- [ ] **Ho completato questo laboratorio (reale o virtuale)**

Laboratorio C: quanto è buono un polinomio di Taylor?

SETTIMANA 13

Obiettivo: Confrontare i polinomi di Taylor di sin x con il valore vero e con la stima del resto.

$$P_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

```
P_5(x)=x-(x^3)/(6)+(x^5)/(120)
```

Polinomio di Maclaurin di grado 5 di sin x

Procedimento

1. Tabula sin x, P_1 = x, P_3 e P_5 per x da 0 a π con passo 0.25.
2. Traccia gli errori.
3. Trova dove l'approssimazione per piccoli angoli sin x ≈ x sbaglia dell'1%.

Tabella dei dati

x	sin x	$P_5(x)$
0.5	0.479426	0.479427
1.0	0.841471	0.841667
2.0	0.909297	0.933333

Valori calcolati.

Calcolo di esempio

1. In x = 0.5, P_5 sbaglia di circa 10^{-6}; in x = 2 di 0.024. La precisione cala in fretta allontanandosi da 0.
2. sin x ≈ x resta entro l'1% fino a circa x = 0.24 rad (14°), ed è per questo che la formula del pendolo si usa per piccole oscillazioni.

> **Sicurezza**
>
> - Nessuna, oltre al normale uso del computer.

Alternativa a casa o virtuale

- I cursori di Desmos funzionano bene.

PhET: Pendulum Lab (https://phet.colorado.edu/en/simulations/pendulum-lab)

Legame con il pianeta: Conoscere l’errore di un’approssimazione è il modo in cui gli ingegneri decidono di quale modello semplificato fidarsi.

- [ ] **Ho completato questo laboratorio (reale o virtuale)**

Laboratorio D: seconda legge di Keplero in coordinate polari

SETTIMANA 14

Obiettivo: Mostrare numericamente che un'orbita ellittica spazza area più velocemente per angolo vicino al fuoco, ma a un ritmo costante nel tempo.

$$A(\theta_1, \theta_2) = \tfrac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} r(\theta)^2\, d\theta, \quad r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$$

`A(θ_1,θ_2)=12_θ_1^θ_2r(θ)^2 dθ, r=(a(1-e^2))/(1+eθ)`

Area spazzata da un'orbita

Procedimento

1. Usa a = 1 ed e = 0.5.
2. Calcola con la regola di Simpson l'area spazzata da θ = 0 a 0.5 e da θ = π − 0.25 a π + 0.25 (stessa ampiezza di 0.5 rad).
3. Spiega perché angoli uguali non danno aree uguali, e quindi richiedono tempi diversi.

Tabella dei dati

Arc	Area spazzata
θ = 0 a 0.5 (vicino al Sole)	0.0643
θ = π ± 0.25 (lato lontano)	0.5513

Valori calcolati per a = 1, e = 0.5.

Calcolo di esempio

1. Vicino al Sole r ≈ 0.5, sul lato lontano r ≈ 1.5: area ∝ r², quindi l'arco lontano spazza circa 8.6 volte più area (0.5513 ÷ 0.0643).
2. Poiché l'area cresce a ritmo costante nel tempo, il pianeta impiega circa 8.6 volte di più a percorrere gli 0.5 rad lontani: si muove più lentamente all'afelio.

> **Sicurezza**
>
> - Nessuna, oltre al normale uso del computer.

Alternativa a casa o virtuale

- Basta un foglio di calcolo o Desmos.

PhET: Kepler's Laws (https://phet.colorado.edu/en/simulations/keplers-laws)

Legame con il pianeta: La geometria dell'orbita decide quando un satellite può vedere un luogo sulla Terra.

- [ ] **Ho completato questo laboratorio (reale o virtuale)**

Serie di esercizi per gli esami

Cronometrati: circa 10 minuti per problema. Poi confronta con le soluzioni complete.

Serie di esercizi di metà corso (unità 1–3)

1. Trova $\int_0^1 x^2 e^x \, dx$.
    1. Due volte per parti: $\int x^2 e^x \, dx = (x^2 - 2x + 2)e^x$.
    2. Da 0 a 1: $e - 2$.

    Risposta: $e - 2 \approx 0.718$.

2. Trova $\int_0^1 x/(x + 1) \, dx$.
    1. $x/(x + 1) = 1 - 1/(x + 1)$.
    2. $[x - \ln(x + 1)]_0^1 = 1 - \ln 2$.

    Risposta: $1 - \ln 2 \approx 0.307$.

3. Trova il volume ottenuto ruotando attorno all'asse x la regione sotto $y = x^2$, $0 \le x \le 2$.
    1. Dischi: $\int_0^2 \pi x^4 \, dx = \pi \times 32/5$.

    Risposta: $32\pi/5 \approx 20.1$.

4. Calcola $\int_2^\infty dx/x^3$.
    1. $[-1/(2x^2)]_2^\infty = 1/8$.

    Risposta: $1/8$.

Serie di esercizi finale (tutte le unità)

1. Risolvi $y' = -2y$, $y(0) = 5$, e trova $y(1)$.
    1. $y = 5e^{(-2t)}$.

    Risposta: $5e^{(-2)} \approx 0.677$.

2. Somma $\Sigma\, 3(2/3)^n$ da $n = 0$.
    1. Geometrica: $3/(1 - 2/3)$.

Risposta: 9.

3. Stima cos 0.2 con il polinomio di Maclaurin di grado 4.

    1. 1 − 0.04/2 + 0.0016/24.

    Risposta: 0.980067.

4. Trova l’area all’interno di r = 3.

    1. ½∫₀^(2π) 9 dθ.

    Risposta: 9π ≈ 28.3.

5. Trova l’intervallo di convergenza di Σ xⁿ/3ⁿ.

    1. Rapporto: |x|/3 < 1; gli estremi divergono.

    Risposta: −3 < x < 3.

6. L’inquinante di una vasca di miscelazione segue S' = −S/50 con S(0) = 20 kg. Quando S = 5 kg?

    1. S = 20e^(−t/50); e^(−t/50) = 1/4.
    2. t = 50 ln 4.

    Risposta: ≈ 69.3 unità di tempo.

Formulario

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\sin^2 x = \tfrac{1}{2}(1-\cos 2x),\ \cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1+\cos 2x)$$

$$S_n = \tfrac{\Delta x}{3}[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + \cdots + f_n]$$

$$V = \int \pi f^2\,dx,\ V = \int 2\pi x f\,dx$$

$$L = \int \sqrt{1+f'^2}\,dx$$

$$W = \int F\,dx$$

$$\int_1^\infty x^{-p}dx < \infty \iff p > 1$$

$$y' = ky \Rightarrow y = y_0 e^{kt}$$

$$P' = rP(1-P/K)$$

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$$

$$\sum ar^n = a/(1-r)$$

$$L = \lim |a_{n+1}/a_n|$$

$$e^x = \sum x^n/n!$$

$$\sin x = \sum (-1)^n x^{2n+1}/(2n+1)!$$

$$\cos x = \sum (-1)^n x^{2n}/(2n)!$$

$$dy/dx = (dy/dt)/(dx/dt)$$

$$A = \tfrac{1}{2}\int r^2\,d\theta$$

Costanti

Costante	Valore
e	2.718281828…
π	3.141592654…
ln 2	0.693147…
Eccentricità orbitale della Terra	0.0167
Semiasse maggiore della Terra	149.6 milioni di km
Densità dell’acqua	1,000 kg/m³

Fonte: Scheda NASA sulla Terra (in inglese) (https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/earthfact.html)

Strumenti per grafici e dati

Usa questi strumenti gratuiti insieme al corso.

- Calcolatrice grafica Desmos (https://www.desmos.com/calculator): Tracciare curve parametriche e polari, cursori e polinomi di Taylor.
- MIT OpenCourseWare 18.01SC (https://ocw.mit.edu/courses/18-01sc-single-variable-calculus-fall-2010/): Lezioni ed esercizi gratuiti del MIT su integrazione e serie.
- MIT OpenCourseWare 18.02SC (https://ocw.mit.edu/courses/18-02sc-multivariable-calculus-fall-2010/): Il corso successivo: analisi in più variabili.

Glossario

Lunghezza d’arco
Lunghezza di una curva, ∫√(1 + f'²) dx.

Capacità portante
Limite a lungo termine K di una popolazione logistica.

Centro di massa
Punto di equilibrio; momento diviso massa.

Convergenza condizionata
Converge, ma i valori assoluti divergono.

Equazione differenziale
Equazione che coinvolge le derivate di una funzione incognita.

Eccentricità
Quanto è allungata un'orbita.

Metodo di Eulero
Soluzione numerica passo passo di una ED.

Serie geometrica
Σar^n.

Integrale improprio
Integrale con un estremo o un integrando infinito.

Integrazione per parti
$\int u\,dv = uv - \int v\,du$.

Equazione logistica
$P' = rP(1 - P/K)$.

Serie di Maclaurin
Serie di Taylor in 0.

Equazioni parametriche
x e y date come funzioni di t.

Fratti semplici
Scomposizione di una funzione razionale in termini più semplici.

Coordinate polari
Posizione data da una distanza r e da un angolo θ.

Serie di potenze
$\Sigma c_n(x - a)^n$.

Raggio di convergenza
Distanza dal centro entro la quale una serie di potenze converge.

Equazione a variabili separabili
ED che si può scrivere $g(y)\,dy = h(x)\,dx$.

Regola di Simpson
Integrazione numerica con parabole.

Serie di Taylor
$\Sigma f^{(n)}(a)(x - a)^n/n!$.

Griglia di autovalutazione

Non si assegnano voti né crediti. Usala per valutare onestamente a che punto sei in ogni unità.

Livello	Come si presenta
4 · Padronanza	Sceglie da solo la tecnica o il criterio giusto, lo giustifica e verifica i risultati numericamente.
3 · Competente	Risolve gli esercizi con qualche errore occasionale.
2 · In sviluppo	Segue gli esempi svolti ma fatica a scegliere un metodo.
1 · Principiante	Applica le formule senza verificare le condizioni; deve ripassare l’unità.

Pesi suggeriti se vuoi un punteggio

Parte	Peso
Esercizi	30%
Laboratori al computer	15%
Serie di esercizi di metà corso	25%
Serie di esercizi finale	30%

Punta al livello 3 o superiore in ogni unità prima di passare al corso successivo.

Corsi correlati

- Analisi I MATH 110
- Introduzione all’ingegneria aerospaziale AERO 101
- Chimica generale I + Laboratorio CHEM 110 + CHEM 110L
- Tutti i corsi