עודכן לאחרונה: November 1, 2026

🗺️ מפת דרכים לארבע שנים · שנה 1, אביב

על הקורס

לקורס החינמי הזה יש 7 יחידות ו-4 מעבדות. אלה המספרים האמיתיים, לא תוכנית ארוכה יותר שקוצרה.

בדיקה היא מספר או תוצאת קוד בעמוד קורס שסקריפט מחשב מחדש לפני הפרסום. המספר המודפס והמספר שחושב מחדש חייבים להתאים.

זהו מתווה של קורס חינמי ללימוד עצמי שנכתב על ידי Saving Planets. הוא אינו קורס אוניברסיטאי, אינו מעניק נקודות זכות אקדמיות, ואף מוסד לימודים אינו מעורב בו.

היקפו תואם את הסמסטר השני של חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי באוניברסיטה, בהשראת הנושאים והעומק של חומרים פתוחים כמו OpenStax Calculus Volume 2 ו-MIT OpenCourseWare 18.01SC (עם רעיונות פרמטריים וקוטביים שמובילים אל 18.02SC Multivariable Calculus), שאליהם אנו מקשרים לאורך הקורס. ארגונים אלה אינם ממליצים על דף זה.

מה שאנחנו מוסיפים: כל יחידה מחוברת לבעיות אמיתיות של מים, אנרגיה, אקולוגיה וטיסות חלל, כל מספר בדף מחושב מחדש על ידי סקריפט בדיקה לפני הפרסום, וארבע מעבדות מחשב מיישמות את השיטות על נתונים.

עברו עליו לפי הסדר. בכל יחידה יש מטרות, רעיונות מרכזיים, משוואות, דוגמאות צעד אחר צעד, תרגול עם תשובות מלאות, טעויות נפוצות, כרטיסיות ובוחן. ההתקדמות שלכם נשמרת רק בדפדפן הזה.

איך הקורס הזה עוזר להציל את כדור הארץ

חדו"א II הוא המקום שבו החשבון מתחיל למדל את העולם: נפחי מים במאגרים, העבודה הדרושה לשאיבתם, איך מזהם נשטף מאגם, איך אוכלוסיית דגים מתאוששת, והמסלולים האליפטיים של הלווויינים שצופים בכל זה.

כל יחידה מסתיימת בקטע קצר עם מקורות שמראה איך הרעיונות שלה עוזרים גם לאנשים וגם לטבע.

למורים

אפשר ללמד את הקורס הזה, או לתת לתלמיד לעבור אותו לבד. הוא חינם. Saving Planets לא נותנת ציון ולא נקודות זכות.

- העמוד הזה הוא כל הקורס: 7 יחידות ו-4 מעבדות (MATH 111).
- תכננו 15 שבועות, בערך 6 עד 9 שעות בשבוע, כולל שבועות המעבדה.
- עקבו אחרי לוח 15 השבועות. קראו את היחידה, פתרו על הנייר, ואז פתחו את התשובה. בשבוע מעבדה עשו את המעבדה או את הגרסה הביתית.

- בדיקה היא מספר או תוצאת קוד בעמוד שסקריפט מחשב מחדש לפני הפרסום. המספר שרואים והמספר שחושב מחדש חייבים להתאים.
- השתמשו בהדפסת העמוד, או הורידו את מדריך הלימוד ב-PDF. דף הנוסחאות נמצא לקראת הסוף.
- שאלו: איך היחידה הזו עוזרת לאנשים ולכוכב? בכל יחידה יש תיבה ירוקה עם עובדה ומקור.
- העתיקו את תבנית המדריך למורה וכתבו את שם הכיתה, הזמן שיש לכם, והשאלות שתשאלו. פתיחת תבנית המדריך למורה

לפני שמתחילים

ידע מוקדם

- חדו"א I: גבולות, נגזרות, כלל השרשרת, אינטגרלים בסיסיים והצבה, המשפט היסודי.
- זהויות טריגונומטריות, במיוחד $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ונוסחאות הזווית הכפולה.
- פונקציות מעריכיות ולוגריתמים.

איך ללמוד

- קראו את היחידה, סגרו אותה ונסו לפתור לבד את הדוגמאות הפתורות לפני שבודקים כל שלב.
- פתרו כל תרגיל על הנייר לפני שאתם פותחים את התשובה.
- באינטגרלים, בדקו את התשובה על ידי גזירתה.
- בטורים, החליטו איזה מבחן מתאים לפני שמחשבים משהו.
- שרטטו כל תחום לפני שמציבים אינטגרל של נפח או שטח.
- עשו שוב את הבחנים כעבור כמה ימים. תרגול מרווח עדיף על מפגש ארוך אחד.

מה צריך

- מחשב או טאבלט עם גיליון אלקטרוני.
- מחשבון גרפי חינמי כמו Desmos.
- אופציונלי: Python עם NumPy.

לוח זמנים מוצע ל־15 שבועות

כ־6 עד 9 שעות בשבוע: קריאה, תרגילים, ובשבועות המעבדה גם המעבדה.

שבוע	יחידה	נושאים	קריאה
1	טכניקות אינטגרציה	אינטגרציה בחלקים	OpenStax 3.1
2	טכניקות אינטגרציה	אינטגרלים טריגונומטריים והצבה	OpenStax 3.2–3.3
3	טכניקות אינטגרציה	שברים חלקיים; אינטגרציה נומרית	OpenStax 3.4–3.6
4	יישומים: נפח, אורך קשת, עבודה ומרכז מסה	שטחים, נפחים בחתכים, דיסקות, טבעות, קליפות גליליות	OpenStax 2.1–2.3

שבוע	יחידה	נושאים	קריאה
5	יישומים: נפח, אורך קשת, עבודה ומרכז מסה	אורך קשת, עבודה, כוח של נוזל, מרכזי מסה; מעבדה B	OpenStax 2.4–2.6
6	אינטגרלים לא אמיתיים	אינטגרלים לא אמיתיים והשוואה; תרגול לבוחן אמצע	OpenStax 3.7
7	מבוא למשוואות דיפרנציאליות	משוואות דיפרנציאליות, שדות כיוונים, שיטת אוילר	OpenStax 4.1–4.2
8	מבוא למשוואות דיפרנציאליות	משוואות פרידות ולוגיסטיות; מעבדה A	OpenStax 4.3–4.4
9	סדרות וטורים	סדרות; טורים אינסופיים; טורים הנדסיים	OpenStax 5.1–5.2
10	סדרות וטורים	מבחני התבדרות, האינטגרל וההשוואה	OpenStax 5.3–5.4
11	סדרות וטורים	טורים מתחלפים; מבחני המנה והשורש	OpenStax 5.5–5.6
12	טורי חזקות וטורי טיילור	טורי חזקות ותכונותיהם	OpenStax 6.1–6.2
13	טורי חזקות וטורי טיילור	טורי טיילור ומקלורן; מעבדה C	OpenStax 6.3–6.4
14	משוואות פרמטריות וקואורדינטות קוטביות	משוואות פרמטריות; קואורדינטות קוטביות ושטחים; מעבדה D	OpenStax 7.1–7.4
15	חזרה	חזרה וסדרת תרגול מסכמת	כל היחידות

ההתקדמות שלכם

סמנו יחידות ומעבדות כשאתם מסיימים אותן, ועשו את הבחנים. ההתקדמות והציונים נשמרים רק בדפדפן הזה ולעולם לא נשלחים אלינו.

יחידות

טכניקות אינטגרציה

אינטגרציה בחלקים, אינטגרלים והצבות טריגונומטריים, שברים חלקיים, ואינטגרציה נומרית כשאין נוסחה.

מטרות הלמידה

בסוף היחידה הזו תוכלו:

- לבצע אינטגרציה בחלקים תוך בחירה נכונה של u ו-dv.
- לחשב אינטגרלים טריגונומטריים ולהשתמש בהצבה טריגונומטרית.
- לפרק פונקציות רציונליות לשברים חלקיים.
- לקרב אינטגרלים בכלל הטרפז ובכלל סימפסון, ולהעריך את השגיאה.

מושגי מפתח

- אינטגרציה בחלקים היא כלל המכפלה בכיוון ההפוך: ∫u dv = uv − ∫v du. בחרו u שנעשה פשוט יותר בגזירה (לוגריתמים, פולינומים).
- חזקות של סינוס וקוסינוס נפתרות בעזרת זהויות כמו sin²x = (1 − cos 2x)/2.
- עבור √(a² − x²) הציבו x = a sin θ; עבור √(a² + x²), x = a tan θ.
- פונקציה רציונלית אמיתית מתפרקת לשברים פשוטים שהאינטגרלים שלהם הם לוגריתמים וארקטנגנסים.
- לאינטגרלים רבים, כמו ∫e^(−x²) dx, אין פונקציה קדומה אלמנטרית. כלל סימפסון נותן לעיתים קרובות ספרות מדויקות רבות עם מעט נקודות.

משוואות מפתח

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

u dv=uv- v du

אינטגרציה בחלקים

$$\sin^2 x = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

^2x=12(1-2x)

זהות הורדת חזקה

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1/2}{x-1} - \frac{1/2}{x+1}$$

(1)/(x^2-1)=(1/2)/(x-1)-(1/2)/(x+1)

פירוק לשברים חלקיים

$$S_n = \frac{\Delta x}{3}\left[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + \cdots + 4f_{n-1} + f_n\right]$$

S_n=(Δ x)/(3)[f_0+4f_1+2f_2++4f_n-1+f_n]

כלל סימפסון (n זוגי)

דוגמאות פתורות שלב אחר שלב

דוגמה 1.1 חשבו ∫₀¹ x eˣ dx.

1. du = dx, v = eˣ ולכן ,u = x, dv = eˣ dx.
2. ∫x eˣ dx = x eˣ − ∫eˣ dx = (x − 1)eˣ.
3. מ-0 עד 1: 0 − (−1) = 1.

תשובה: 1.

דוגמה 1.2 חשבו ∫₂³ dx/(x² − 1).

1. שברים חלקיים: ½[1/(x − 1) − 1/(x + 1)].
2. פונקציה קדומה ½ ln|(x − 1)/(x + 1)|.
3. ½[ln(2/4) − ln(1/3)] = ½ ln(3/2).

תשובה: ½ ln 1.5 ≈ 0.2027.

דוגמה 1.3 העריכו את ∫₀¹ e^(−x²) dx בכלל סימפסון, n = 4.

1. Δx = 0.25; f = 1, 0.93941, 0.77880, 0.56978, 0.36788.
2. S_4 = (0.25/3)[1 + 4(0.93941) + 2(0.77880) + 4(0.56978) + 0.36788].
3. S_4 = 0.74686.

תשובה: 0.74686, לעומת הערך האמיתי 0.74682: שגיאה של 0.00003 בלבד מחמש נקודות.

תרגילים

פתרו כל אחד קודם על נייר, ואז בדקו.

1. ∫₀^π x sin x dx

   בחלקים: [−x cos x + sin x]₀^π = π.

2. ∫₁^e x ln x dx

בחלקים עם $u = \ln x$: $[x^2 \ln x/2 - x^2/4]_1^e = (e^2 + 1)/4 \approx 2.097$.

3. $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\, dx$

הורדת חזקה: $\tfrac{1}{2}[x - \sin 2x/2]_0^{\pi/2} = \pi/4$.

4. $\int_0^1 \sqrt{(1 - x^2)}\, dx$

$x = \sin\theta$ נותן $\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\, d\theta = \pi/4$ (רבע מעיגול היחידה).

5. $\int_0^1 dx/(1 + x^2)$

$[\arctan x]_0^1 = \pi/4$.

תפיסות שגויות נפוצות

מיתוס: תמיד בחרו כ-u את הגורם הראשון שאתם רואים.

בפועל: בחרו u שנעשה פשוט יותר בגזירה: קודם לוגריתמים ופולינומים, ופונקציות מעריכיות וטריגונומטריות כ-dv.

מיתוס: שברים חלקיים עובדים על כל פונקציה רציונלית.

בפועל: חלקו קודם אם מעלת המונה אינה קטנה ממעלת המכנה.

מיתוס: אם אני לא מוצא פונקציה קדומה, לאינטגרל אין ערך.

בפועל: עדיין יש לו ערך; העריכו אותו נומרית.

כרטיסיות

אינטגרציה בחלקים

$\int u\, dv = uv - \int v\, du$.

הצבה טריגונומטרית

$x = a \sin\theta$: $\sqrt{(a^2 - x^2)}$.

שברים חלקיים

פירוק פונקציה רציונלית לשברים פשוטים.

כלל הטרפז

ממוצע של הסכום השמאלי והימני; שגיאה $\propto \Delta x^2$.

כלל סימפסון

התאמה פרבולית; שגיאה $\propto \Delta x^4$.

אינטגרל לא אלמנטרי

אין פונקציה קדומה בנוסחה, למשל $\int e^{(-x^2)}\, dx$.

בוחן לבדיקה עצמית

1. עבור $\int x^2 e^x\, dx$, בחירה ראשונה טובה של u היא…

e^x

x^2

$x^2\, e^x$

dx

x^2. x^2 נעשה פשוט יותר בגזירה.

2. מרמז על ההצבה… $\sqrt{(9 - x^2)}$

$x = 3 \tan \theta$

$x = 3 \sin \theta$

$x = 3 \sec \theta$

$u = 9 - x^2$

$x = 3 \sin \theta$. $9 - 9 \sin^2\theta = 9 \cos^2\theta$.

3. כלל סימפסון מתאים את העקומה בעזרת…

מלבנים

טרפזים

פרבולות

פולינומים ממעלה שלישית בלבד

פרבולות. פרבולות דרך כל שלשת נקודות.

4. $\int \ln x \, dx =$

$1/x + C$

$x \ln x - x + C$

$\ln^2 x/2 + C$

$x \ln x + C$

$x \ln x - x + C$. בחלקים עם $u = \ln x,\ dv = dx$.

לנסות שוב את הבוחן

איך זה עוזר להציל את כדור הארץ

לאינטגרל של עקומת הפעמון בדוגמה 1.3 אין תשובה בנוסחה, ובכל זאת הוא עומד מאחורי כל פס שגיאה בגרף אקלים וכל אי-ודאות במדידת לוויין. אינטגרציה נומרית היא הדרך שבה מחשבים אותו בפועל, אותו ואת רוב האינטגרלים שמגיעים מנתונים אמיתיים.

שיטות כמו כלל סימפסון הופכות מדידות לא סדירות, כמו עומקי נהר לרוחב האפיק, לסכומים כמו ספיקה או נפח.

ב־Saving Planets: חדו"א I, מעבדה D: אינטגרציה נומרית · דף הנהרות

מקורות: OpenStax Calculus 2, 3.6 Numerical Integration (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/3-6-numerical-integration) · OpenStax Calculus 2, 3.1 Integration by Parts (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/3-1-integration-by-parts)

מקורות לימוד חינמיים

- OpenStax Calculus 2, 3.1 Integration by Parts (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/3-1-integration-by-parts): פרק מספר לימוד חינמי.
- OpenStax Calculus 2, 3.2 Trigonometric Integrals (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/3-2-trigonometric-integrals): חזקות של סינוס וקוסינוס.
- OpenStax Calculus 2, 3.3 Trigonometric Substitution (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/3-3-trigonometric-substitution): אינטגרנדים עם שורשים.
- OpenStax Calculus 2, 3.4 Partial Fractions (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/3-4-partial-fractions): פונקציות רציונליות.
- OpenStax Calculus 2, 3.6 Numerical Integration (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/3-6-numerical-integration): כללי הטרפז וסימפסון עם חסמי שגיאה.

סיימתי את היחידה הזו

יישומים: נפח, אורך קשת, עבודה ומרכז מסה

לחתוך, לסכם ולקחת גבול: נפחים של גופים, אורכי עקומות, עבודה נגד כוחות, לחץ נוזלים ומרכזי מסה.

מטרות הלמידה

בסוף היחידה הזו תוכלו:

- למצוא נפחים בחתכים, דיסקות, טבעות וקליפות גליליות.
- לחשב אורך קשת.
- לחשב עבודה של כוחות משתנים, כולל שאיבת נוזלים, וכוח הידרוסטטי.
- למצוא את מרכז המסה של מוטות ולוחות דקים.

מושגי מפתח

- לכל יישום אותו דפוס: לקרב פרוסה דקה, לכתוב את תרומתה, לבצע אינטגרציה.
- שיטת הדיסקות: V = ∫π[f(x)]² dx סביב ציר x. שיטת הקליפות: V = ∫2πx f(x) dx סביב ציר y.
- אורך קשת מסכם יתרים זעירים: L = ∫√(1 + [f′(x)]²) dx.
- עבודה ∫F(x) dx =. שאיבה: כל שכבת נוזל מורמת למרחק משלה.
- הלחץ גדל עם העומק, ולכן הכוח על סכר הוא אינטגרל לפי העומק.
- מרכז מסה = מומנט ÷ מסה.

משוואות מפתח

$$V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 \, dx$$

V=_a^bπ[f(x)]^2 dx

שיטת הדיסקות

$$V = \int_a^b 2\pi x \, f(x) \, dx$$

V=_a^b2π x f(x) dx

שיטת הקליפות הגליליות

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx$$

L=_a^b1+[f'(x)]^2 dx

אורך קשת

$$W = \int_a^b F(x)\,dx$$

`W=_a^bF(x) dx`

עבודה של כוח משתנה

$$\bar{x} = \frac{\int x\,\rho(x)\,dx}{\int \rho(x)\,dx}$$

`x=( x ρ(x) dx)/(ρ(x) dx)`

מרכז מסה של מוט

דוגמאות פתורות שלב אחר שלב

דוגמה 2.1 מצאו את הנפח שמתקבל מסיבוב התחום מתחת ל-$y = \sqrt{x}$, $0 \le x \le 4$, סביב ציר x.

1. דיסקות ברדיוס $\sqrt{x}$: $V = \int_0^4 \pi\, x\, dx$.
2. $\pi[x^2/2]_0^4 = 8\pi$.

תשובה: $8\pi \approx 25.1$ יחידות מעוקבות.

דוגמה 2.2 מכל גלילי ברדיוס 1 m ובגובה 2 m מלא מים. כמה עבודה דרושה כדי לשאוב את כל המים מעל הדופן העליונה?

1. לשכבה בגובה y יש נפח $\pi(1)^2\,dy$ ומשקל $\pi \times 9.81 \times 1000$ ניוטון, והיא מורמת $2 - y$ מטרים.
2. $W = \int_0^2 9{,}810\pi(2 - y)\,dy = 9{,}810\pi \times 2$.
3. $= 19{,}620\pi$ J.

תשובה: $\approx 61{,}600$ J (61.6 kJ).

דוגמה 2.3 למוט על $[0, 2]$ m צפיפות $\rho(x) = 1 + x$ kg/m. מצאו את מרכז המסה שלו.

1. מסה: $\int_0^2 (1 + x)\,dx = 2 + 2 = 4$ kg.
2. מומנט: $\int_0^2 x(1 + x)\,dx = 2 + 8/3 = 14/3$.
3. $\bar{x} = (14/3)/4 = 7/6$ =.

תשובה: $\bar{x} \approx 1.17$ m = 7/6, לכיוון הקצה הכבד יותר.

תרגילים

פתרו כל אחד קודם על נייר, ואז בדקו.

1. השתמשו בקליפות כדי למצוא את הנפח שמתקבל מסיבוב התחום מתחת ל-$y = x^2$, $0 \le x \le 1$, סביב ציר y.

   $V = \int_0^1 2\pi x \cdot x^2 \, dx = 2\pi/4 = \pi/2$.

2. מצאו את אורך הקשת של $y = (2/3)x^{(3/2)}$ מ-$x = 0$ עד 3.

   $y' = \sqrt{x}$, ולכן $L = \int_0^3 \sqrt{(1 + x)} \, dx = (2/3)[(1 + x)^{(3/2)}]_0^3 = (2/3)(8 - 1) = 14/3$.

3. קפיץ עם $k = 200$ N/m נמתח ב-0.10 m מאורכו במנוחה. כמה עבודה נעשית?

   $W = \int_0^{0.1} 200x \, dx = 100(0.01) = 1.0$ J.

4. שער מלבני אנכי ברוחב 10 m עוצר מים בעומק 5 m. מצאו את כוח המים הכולל עליו.

   $F = \int_0^5 \rho g \, y \, (10) \, dy = 1{,}000 \times 9.81 \times 10 \times 25/2 = 1.23 \times 10^6$ N.

תפיסות שגויות נפוצות

מיתוס: נפח גוף סיבוב = π × שטח.

בפועל: יש להעלות את הרדיוס בריבוע בתוך האינטגרל: $\pi \int f^2 \, dx$, ולא $\pi(\int f \, dx)$.

מיתוס: עבודת השאיבה היא משקל × גובה המכל.

בפועל: כל שכבה נעה מרחק שונה, ולכן חייבים לבצע אינטגרציה.

מיתוס: מרכז המסה הוא תמיד נקודת האמצע.

בפועל: רק בצפיפות אחידה ובצורה סימטרית.

כרטיסיות

שיטת הדיסקות

$V = \int \pi \, f(x)^2 \, dx$.

שיטת הטבעות

$V = \int \pi (R^2 - r^2) \, dx$.

שיטת הקליפות הגליליות

$V = \int 2\pi x \, f(x) \, dx$.

אורך קשת

$L = \int \sqrt{(1 + f'^2)} \, dx$.

עבודה

$W = \int F \, dx$.

מרכז מסה

מומנט חלקי מסה.

בוחן לבדיקה עצמית

1. קליפות סביב ציר y משתמשות באינטגרנד…

π f(x)²

2πx f(x)

f(x)²

2π f(x)

2πx f(x). היקף × 2πx גובה × f(x) עובי dx.

2. אורך קשת משתמש ב…

∫f(x) dx

∫√(1 + f′²) dx

∫f′ dx

∫π f² dx

∫√(1 + f′²) dx. פיתגורס על כל חתיכה זעירה.

3. הלחץ ההידרוסטטי על סכר גדל…

עם ריבוע העומק

באופן ליניארי עם העומק

בכלל לא

עם רוחב הסכר

באופן ליניארי עם העומק. P = ρgh; לכן הכוח הכולל גדל עם ריבוע העומק.

4. העבודה למתיחת קפיץ ב-x ממנוחה היא…

kx

½kx²

kx^2

$2kx$

$\frac{1}{2}kx^2$. $\int_0^x kt\,dt$.

לנסות שוב את הבוחן

איך זה עוזר להציל את כדור הארץ

מהנדסי מים משתמשים באינטגרלים האלה ישירות: נפח מאגר לפי צורתו, האנרגיה לשאיבת מים למקום שבו הם נחוצים, והכוח שסכר או מחסום הצפות חייב לעמוד בו. שאיבה היא עלות אנרגיה משמעותית במערכות מים רבות, ולכן ניסוח נכון של האינטגרל חוסך גם אנרגיה וגם כסף.

לוויינים מודדים כיום ממסלול את גובה הנהרות, האגמים והמאגרים. משימת SWOT של NASA ו-CNES סוקרת את המים העיליים כדי להעריך שינויים במים האגורים: חיתוך וסכימה בקנה מידה פלנטרי.

ב־SWOT: Saving Planets · מקום לנהר

מקורות: OpenStax Calculus 2, 2.5 Physical Applications (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/2-5-physical-applications) · NASA: משימת SWOT (https://swot.jpl.nasa.gov/)

מקורות לימוד חינמיים

- OpenStax Calculus 2, 2.2 Determining Volumes by Slicing (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/2-2-determining-volumes-by-slicing): דיסקות וטבעות.
- OpenStax Calculus 2, 2.3 Volumes of Revolution: Cylindrical Shells (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/2-3-volumes-of-revolution-cylindrical-shells): קליפות גליליות.
- OpenStax Calculus 2, 2.4 Arc Length of a Curve and Surface Area (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/2-4-arc-length-of-a-curve-and-surface-area): אורך קשת.
- OpenStax Calculus 2, 2.5 Physical Applications (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/2-5-physical-applications): עבודה, שאיבה וכוח של נוזלים.
- OpenStax Calculus 2, 2.6 Moments and Centers of Mass (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/2-6-moments-and-centers-of-mass): מרכזי כובד.

צפו בהרצאה

Clip 1: Introduction to Arc Length (https://ocw.mit.edu/courses/18-01sc-single-variable-calculus-fall-2010/resources/clip-1-introduction-to-arc-length/) (באנגלית)

MIT 18.01SC Single Variable Calculus (Fall 2010), MIT OpenCourseWare. רישיון: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · תנאי שימוש (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use). הקישור מיועד ללימוד חינמי בלבד; Saving Planets אינו קשור לאוניברסיטה זו ואינו נתמך על ידה.

- [ ] סיימתי את היחידה הזו

אינטגרלים לא אמיתיים

אינטגרלים על קטעים אינסופיים או דרך שיאים אינסופיים: מתי הם מסתכמים במספר סופי ומתי לא.

מטרות הלמידה

בסוף היחידה הזו תוכלו:

- לחשב אינטגרלים לא אמיתיים כגבולות.
- לקבוע התכנסות בעזרת מבחן p והשוואה.
- ליישם אינטגרלים לא אמיתיים על אנרגיית מילוט ועל זמני חיים ממוצעים.

מושגי מפתח

- ∫_a^∞ f dx פירושו הגבול של ∫_a^b f dx כאשר b → ∞. אם הגבול סופי, האינטגרל מתכנס.
- ∫_1^∞ dx/x^p מתכנס בדיוק כאשר p > 1. ∫_0^1 dx/x^p מתכנס בדיוק כאשר p < 1.
- השוואה: אם 0 ≤ f ≤ g ו-∫g מתכנס, אז גם ∫f מתכנס.
- לתחום אינסופי יכול להיות שטח סופי.

משוואות מפתח

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^{b} f(x)\,dx$$

_a^∞f(x) dx=_b∞_a^bf(x) dx

אינטגרל לא אמיתי

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1}\ (p>1)$$

_1^∞(dx)/(x^p)=1p-1\ (p>1)

אינטגרל p

$$W_{\infty} = \int_R^{\infty} \frac{GMm}{r^2}\,dr = \frac{GMm}{R}$$

W_∞=_R^∞(GMm)/(r^2) dr=GMm/R

העבודה הדרושה כדי להימלט מכוח המשיכה של כוכב לכת

דוגמאות פתורות שלב אחר שלב

דוגמה 3.1 חשבו ∫_1^∞ dx/x².

1. $\int_1^b x^{-2}\,dx = 1 - 1/b$.
2. As $b \to \infty$, $1/b \to 0$.

תשובה: 1 (מתכנס).

דוגמה 3.2 האם $\int_1^\infty dx/x$ מתכנס?

1. $\int_1^b dx/x = \ln b$.
2. $\ln b \to \infty$.

תשובה: לא, הוא מתבדר, אף ש-$1/x \to 0$.

דוגמה 3.3 כמה אנרגיה לכל קילוגרם דרושה כדי להימלט מכוח המשיכה של כדור הארץ מפני השטח (בהתעלם מהאוויר ומהסיבוב)?

1. $W/m = \int_R^\infty GM/r^2\,dr = GM/R$.
2. $GM = 3.986 \times 10^{14}\ m^3/s^2$, $R = 6.371 \times 10^{6}\ m$.
3. $W/m = 6.26 \times 10^{7}\ J/kg$.

תשובה: כ-62.6 MJ לקילוגרם, ערך סופי אף שהמרחק אינסופי. השוואת $\tfrac{1}{2}v^2$ לערך זה נותנת את מהירות המילוט 11.2 km/s.

תרגילים

פתרו כל אחד קודם על נייר, ואז בדקו.

1. $\int_0^\infty e^{-x}\,dx$

   $[-e^{-x}]_0^\infty = 0 + 1 = 1$.

2. $\int_0^1 dx/\sqrt{x}$

   $[2\sqrt{x}]_0^1 = 2$ (מתכנס; $p = \tfrac{1}{2} < 1$).

3. $\int_2^\infty dx/x^3$

   $[-1/(2x^2)]_2^\infty = 1/8$.

4. האם $\int_1^\infty dx/(x^2+1)$ מתכנס?

   כן: הוא קטן מ-$1/x^2$, שמתכנס. למעשה הוא שווה $\pi/4$.

5. בדעיכה מעריכית בקצב λ, זמן החיים הממוצע הוא $\int_0^\infty t\,\lambda e^{-\lambda t}\,dt$. חשבו אותו.

   בחלקים: $1/\lambda$.

תפיסות שגויות נפוצות

מיתוס: אם $f(x) \to 0$ כאשר $x \to \infty$, האינטגרל מתכנס.

בפועל: $1/x \to 0$ אבל $\int_1^\infty dx/x$ מתבדר.

מיתוס: לתחום ארוך אינסופית יש שטח אינסופי.

בפועל: $\int_1^\infty dx/x^2 = 1$.

מיתוס: $\int_{-1}^{1} dx/x^2 = -2$ לפי הנוסחה הרגילה.

בפועל: האינטגרנד מתפוצץ ב-0, ולכן האינטגרל לא אמיתי, והוא מתבדר.

כרטיסיות

אינטגרל לא אמיתי

קטע אינסופי או אינטגרנד אינסופי; מוגדר בעזרת גבול.

מתכנס

הגבול קיים וסופי.

מבחן p (∞)

$\int_1^\infty x^{-p}$ מתכנס אם ורק אם $p > 1$.

מבחן p (0)

$\int_0^1 x^{-p}$ מתכנס אם ורק אם $p < 1$.

מבחן ההשוואה

קטן ממתכנס ⇒ מתכנס.

אנרגיית מילוט

GM/R לכל kg.

בוחן לבדיקה עצמית

1. $\int_1^\infty dx/x^{1.5}$…

מתבדר

מתכנס ל-2

מתכנס ל-1

מתכנס ל-1.5

2. $1/(p-1) = 1/0.5 =$ מתכנס ל-2.

2. $\int_1^\infty dx/x$...

מתכנס ל-1

מתבדר

מתכנס ל-0

שווה ln 2

מתבדר. $\ln b \to \infty$.

3. $\int_0^\infty e^{-2x}\,dx =$

2

1/2

1

∞

$[-e^{-2x}/2]_0^\infty = 1/2$. 1/2.

4. אינטגרל לא אמיתי מוגדר כ...

סכום

גבול של אינטגרלים אמיתיים

נגזרת

תמיד אינסופי

גבול של אינטגרלים אמיתיים. לקחת את הגבול של $\int_a^b$.

לנסות שוב את הבוחן

איך זה עוזר להציל את כדור הארץ

אינטגרלים לא אמיתיים נותנים את האנרגיה הדרושה כדי לעזוב כוכב לכת, המספר שמאחורי כל שיגור של לוויין מזג אוויר או אקלים. היא סופית, ולכן טיסות חלל אפשריות בכלל.

זמני חיים ממוצעים, שגם הם אינטגרלים לא אמיתיים, מתארים כמה זמן חומרים נשארים: כמה זמן מזהם נשאר באגם, או כמה זמן נשאר סמן רדיואקטיבי המשמש לתיארוך קרח ומי אוקיינוס.

ב־Saving Planets: פיזיקה I, יחידה 7: מסלולים · מחשבון delta-v

מקורות: OpenStax Calculus 2, 3.7 Improper Integrals (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/3-7-improper-integrals) · גיליון הנתונים של NASA על כדור הארץ (באנגלית) (https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/earthfact.html)

מקורות לימוד חינמיים

- OpenStax Calculus 2, 3.7 Improper Integrals (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/3-7-improper-integrals): פרק חינמי מספר לימוד עם מבחני השוואה.

צפו בהרצאה

Lecture 36: Improper Integrals (https://ocw.mit.edu/courses/18-01-single-variable-calculus-fall-2006/resources/lecture-36-improper-integrals/) (באנגלית)

MIT 18.01 Single Variable Calculus (Fall 2006), MIT OpenCourseWare. רישיון: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · תנאי שימוש (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). הקישור מיועד ללימוד חינמי בלבד; Saving Planets אינו קשור לאוניברסיטה זו ואינו נתמך על ידה.

סיימתי את היחידה הזו

מבוא למשוואות דיפרנציאליות

משוואות לקצבי שינוי: גדילה ודעיכה מעריכיות, קירור, ערבוב, והמודל הלוגיסטי של אוכלוסיות.

מטרות הלמידה

בסוף היחידה הזו תוכלו:

- לאמת פתרונות ולפתור בעיות התחלה.
- לקרוא שדות כיוונים ולהשתמש בשיטת אוילר.
- לפתור משוואות פרידות, כולל בעיות ערבוב וקירור.
- להשתמש במשוואה הלוגיסטית ולפרש את כושר הנשיאה שלה.

מושגי מפתח

- משוואה דיפרנציאלית מקשרת בין פונקציה לנגזרותיה. הפתרון שלה הוא פונקציה, בדרך כלל משפחה שנקבעת על ידי תנאי התחלה.
- משוואות פרידות: העבירו את כל ה-y לצד אחד ואת כל ה-x לצד השני, ואז בצעו אינטגרציה.
- y′ = ky נותן y = y₀e^(kt): גדילה אם k > 0, דעיכה אם k < 0.
- ערבוב: קצב השינוי של מזהם = קצב כניסה − קצב יציאה.
- לוגיסטית: P′ = rP(1 − P/K). הגדילה מאטה כש-P מתקרב לכושר הנשיאה K; היא המהירה ביותר ב-P = K/2.
- שיטת אוילר מתקדמת לאורך השיפוע: $y_{n+1} = y_n + h\,f(t_n, y_n)$. צעדים קטנים יותר, שגיאה קטנה יותר.

משוואות מפתח

$$\frac{dy}{dt} = ky \;\Rightarrow\; y = y_0 e^{kt}$$

```
dy/dt=ky\ \ y=y_0e^kt
```

גדילה ודעיכה מעריכיות

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_s)$$

```
dT/dt=-k(T-T_s)
```

חוק הקירור של ניוטון

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right), \quad P(t) = \frac{K}{1 + \frac{K - P_0}{P_0}e^{-rt}}$$

```
dP/dt=rP(1- PK), P(t)=1+(K-P_0)/(P_0)e^-rt
```

המשוואה הלוגיסטית ופתרונה

$$y_{n+1} = y_n + h\,f(t_n, y_n)$$

```
y_n+1=y_n+h f(t_n,y_n)
```

שיטת אוילר

דוגמאות פתורות שלב אחר שלב

דוגמה 4.1 חלק מאגם מכיל 1000 m³ מים עם 50 kg של מזהם מומס. מים נקיים זורמים פנימה בקצב 10 m³/יום ומים מעורבבים היטב יוצאים באותו קצב. כמה זמן יעבור עד שמחצית המזהם תיעלם?

1. $dS/dt = -(10/1{,}000)S = -S/100$.
2. $S(t) = 50e^{(-t/100)}$.
3. מחצית: $\tfrac{1}{2} = e^{(-t/100)}$, ולכן $t = 100 \ln 2$.

תשובה: 69.3 ימים (מודל מפושט של ערבוב מלא).

דוגמה 4.2 אוכלוסיית דגים מקיימת $P' = 0.5P(1 - P/1000)$ עם $P(0) = 100$. מצאו את $P(4)$.

1. $P(t) = 1{,}000/(1 + 9e^{(-0.5t)})$.
2. $P(4) = 1{,}000/(1 + 9e^{(-2)}) = 1{,}000/2.218$.

תשובה: 451 דגים, קרוב לרמת הגדילה המהירה ביותר $K/2 = 500$.

דוגמה 4.3 השתמשו בשיטת אוילר עם $h = 0.5$ כדי להעריך את $y(1)$ עבור $y' = y$, $y(0) = 1$.

1. $y_1 = 1 + 0.5(1) = 1.5$.
2. $y_2 = 1.5 + 0.5(1.5) = 2.25$.

תשובה: 2.25, לעומת הערך המדויק $e \approx 2.718$; חציית h מקטינה את השגיאה.

תרגילים

פתרו כל אחד קודם על נייר, ואז בדקו.

1. קפה ב-$90\,°C$ מתקרר בחדר ב-$20\,°C$ עם $k = 0.1$ לדקה. מצאו את הטמפרטורה שלו אחרי 10 דקות.

   $T = 20 + 70e^{(-1)} \approx 45.8\,°C$.

2. פתרו $y' = xy$ עם $y(0) = 2$, ומצאו את $y(1)$.

   $dy/y = x\,dx$, ולכן $y = 2e^{(x^2/2)}$; $y(1) = 2e^{0.5} \approx 3.30$.

3. פתרו $y' = -2y,\ y(0) = 5$. מצאו את $y(1)$.

$y = 5e^{(-2t)};\ y(1) \approx 0.677$.

4. עבור $P' = rP(1 - P/K)$, באיזו אוכלוסייה הגדילה המהירה ביותר?

$rP(1 - P/K)$ היא פרבולה הפונה כלפי מטה ב-P, שקודקודה ב-$P = K/2$.

תפיסות שגויות נפוצות

מיתוס: הפתרון של משוואה דיפרנציאלית הוא מספר.

בפועל: הוא פונקציה (או משפחה של פונקציות).

מיתוס: שיטת אוילר נותנת את התשובה המדויקת אם נזהרים.

בפועל: יש לה שגיאה התלויה בגודל הצעד; היא מתכנסת רק כאשר $h \to 0$.

מיתוס: אוכלוסיות לוגיסטיות מפסיקות לגדול ב-$K/2$.

בפועל: הגדילה המהירה ביותר היא ב-$K/2$, והיא מאטה עד אפס רק כש-P מתקרב ל-K.

כרטיסיות

משוואה דיפרנציאלית

משוואה הכוללת פונקציה ונגזרותיה.

בעיית התחלה

משוואה דיפרנציאלית ועוד ערך התחלתי.

פרידה

$g(y)\,dy = h(x)\,dx$.

משוואה לוגיסטית

$P' = rP(1 - P/K)$.

כושר נשיאה

K, הגבול לטווח ארוך של אוכלוסייה לוגיסטית.

שיטת אוילר

$y_{n+1} = y_n + h\,f(t_n, y_n)$.

בוחן לבדיקה עצמית

1. הפתרון הכללי של $y' = 3y$ הוא…

- $3e^x$
- $Ce^{(3x)}$
- $e^{(3x)} + C$

3x + C

Ce^(3x). הפרידו ובצעו אינטגרציה.

2. במודל הלוגיסטי, K הוא…

קצב הגדילה

האוכלוסייה ההתחלתית

כושר הנשיאה

זמן מחצית החיים

כושר הנשיאה. הרמה שאליה האוכלוסייה מתקרבת.

3. צעד אוילר אחד מ-(0, 2) עם y′ = y ו-h = 0.1 נותן…

2.1

2.2

2.02

2.0

2 + 0.1 × 2. 2.2.

4. dy/dx = x²y היא…

לא פרידה

פרידה

ליניארית עם מקדמים קבועים בלבד

לוגיסטית

פרידה. dy/y = x² dx.

לנסות שוב את הבוחן

איך זה עוזר להציל את כדור הארץ

מודלים של אוכלוסיות המבוססים על המשוואה הלוגיסטית הם חלק מהדרך שבה מדעני דיג מעריכים מלאים וקובעים מכסות דיג שמאפשרות לאוכלוסיות להישאר בריאות, וכך מגינים על המערכות האקולוגיות באוקיינוס ועל האנשים התלויים בהן.

משוואות ערבוב כמו בדוגמה 4.1 הן הצעד הראשון בהערכה של כמה מהר אגם או שפך נהר נשטפים ממזהם לאחר שהמקור נעצר.

מודלים של מזג אוויר ואקלים פותרים מערכות עצומות של משוואות דיפרנציאליות בשיטות נומריות צעד אחר צעד, צאצאיות של שיטת אוילר.

ב־Saving Planets: מרכז האגמים · מרכז האוקיינוסים

מקורות: OpenStax Calculus 2, 4.4 The Logistic Equation (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/4-4-the-logistic-equation) · NOAA Fisheries: הערכות אוכלוסייה (https://www.fisheries.noaa.gov/topic/population-assessments)

מקורות לימוד חינמיים

- OpenStax Calculus 2, 4.1 Basics of Differential Equations (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/4-1-basics-of-differential-equations): פרק מספר לימוד חינמי.
- OpenStax Calculus 2, 4.2 Direction Fields and Numerical Methods (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/4-2-direction-fields-and-numerical-methods): שיטת אוילר.
- OpenStax Calculus 2, 4.3 Separable Equations (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/4-3-separable-equations): ערבוב וקירור.
- OpenStax Calculus 2, 4.4 The Logistic Equation (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/4-4-the-logistic-equation): מודלים של אוכלוסיות.

צפו בהרצאה

Lecture 16: Differential Equations (https://ocw.mit.edu/courses/18-01-single-variable-calculus-fall-2006/resources/lecture-16-differential-equations/) (באנגלית)

MIT 18.01 Single Variable Calculus (Fall 2006), MIT OpenCourseWare. רישיון: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · תנאי שימוש (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). הקישור מיועד ללימוד חינמי בלבד; Saving Planets אינו קשור לאוניברסיטה זו ואינו נתמך על ידה.

☐ **סיימתי את היחידה הזו**

סדרות וטורים

מתי חיבור של אינסוף מספרים נותן סכום סופי? טורים הנדסיים, הטור ההרמוני ומבחני ההתכנסות.

מטרות הלמידה

בסוף היחידה הזו תוכלו:

- למצוא גבולות של סדרות.
- לסכם טורים הנדסיים וטלסקופיים.
- ליישם את מבחני ההתבדרות, האינטגרל, ההשוואה, הטורים המתחלפים, המנה והשורש.
- להבחין בין התכנסות בהחלט להתכנסות בתנאי.

מושגי מפתח

- טור $\sum a_n$ מתכנס אם הסכומים החלקיים שלו שואפים לגבול.
- הנדסי: $\sum ar^n$ ($n \ge 0$) $= a/(1-r)$ כאשר $|r| < 1$.
- מבחן ההתבדרות: אם a_n אינו $\to 0$, הטור מתבדר. הכיוון ההפוך אינו נכון: הטור ההרמוני $\sum 1/n$ מתבדר.
- טור p $\sum 1/n^p$ מתכנס אם ורק אם $p > 1$ (לפי מבחן האינטגרל).
- מבחן המנה: אם $L = \lim |a_{n+1}/a_n|$ הטור מתכנס בהחלט; אם $L > 1$ הוא מתבדר; $L = 1$ אינו אומר דבר.
- טורים מתחלפים שאיבריהם יורדים ל-0 מתכנסים; $\sum (-1)^{n+1}/n = \ln 2$.

משוואות מפתח

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r} \quad (|r| < 1)$$

_n=0^∞ar^n=(a)/(1-r)\ (|r|<1)

טור הנדסי

$$\sum \frac{1}{n^p} \text{ converges} \iff p > 1$$

טור p

$$L = \lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

L=|_n+1a_n|

מבחן המנה

דוגמאות פתורות שלב אחר שלב

דוגמה 5.1 סכמו $\sum_{n=0} (1/2)^n$ החל מ-$n = 0$.

1. הנדסי עם $a = 1, r = ½$.
2. $1/(1 - ½) = 2$.

תשובה: 2.

דוגמה 5.2 בכל שנה אגם מאבד 10% ממזהם אגור, ומתווספות 5 טונות. באיזו רמה הוא מתייצב?

1. אחרי שנים רבות הכמות היא $\ldots + 5(0.9)^2 + 5(0.9) + 5$.
2. הנדסי: $5/(1 - 0.9)$.

תשובה: 50 טונות. חציית הקלט השנתי חוצה את הרמה לטווח ארוך (מודל מפושט).

דוגמה 5.3 האם $\sum_{n} n/2^n$ מתכנס?

1. מנה: $[(n + 1)/2^{n+1}]/[n/2^n] = (n + 1)/(2n) \to ½$.
2. $½ < 1$.

תשובה: מתכנס (סכומו 2).

תרגילים

פתרו כל אחד קודם על נייר, ואז בדקו.

1. $\sum_{n=0} 0.9(0.1)^n$ החל מ-$n = 0$.

   $0.9/(1 - 0.1) = 1$. So $0.999\ldots = 1$.

2. האם $\sum 1/n^2$ מתכנס?

   כן, $p = 2 > 1$ (הסכום הוא $\pi^2/6$).

3. האם $\sum n/(n + 1)$ מתכנס?

   לא: האיברים $\to 1$, לא 0 (מבחן ההתבדרות).

4. סכמו $\sum_{n=0} 3(2/3)^n$ החל מ-$n = 0$.

   $3/(1 - 2/3) = 9$.

5. האם $\sum (-1)^{n+1}/n$ מתכנס בהחלט?

לא. הוא מתכנס (ל-$\ln 2$), אבל $\Sigma 1/n$ מתבדר, ולכן ההתכנסות היא בתנאי.

תפיסות שגויות נפוצות

מיתוס: אם האיברים שואפים ל-0, הטור מתכנס.

בפועל: הטור ההרמוני הוא הדוגמה הנגדית.

מיתוס: גבול 1 במבחן המנה פירושו התבדרות.

בפועל: $L = 1$ אינו חד-משמעי; השתמשו במבחן אחר.

מיתוס: סידור מחדש של האיברים לעולם אינו משנה סכום.

בפועל: בטורים המתכנסים בתנאי הוא יכול לשנות.

כרטיסיות

סדרה

רשימה סדורה $a_1, a_2, \ldots$

טור

סכום של סדרה; גבול הסכומים החלקיים.

טור הנדסי

$a/(1-r)$ עבור $|r| < 1$.

הטור ההרמוני

$\Sigma 1/n$, מתבדר.

מבחן המנה

$L < 1$ מתכנס, $L > 1$ מתבדר, $L = 1$ אינו חד-משמעי.

התכנסות בתנאי

מתכנס, אבל לא בהחלט.

בוחן לבדיקה עצמית

1. $\Sigma_{n=0}^{\infty} (1/3)^n$ החל מ-=

1/3

3/2

3

2

$1/(1-1/3) = 3/2$.

2. הטור ההרמוני Σ1/n…

מתכנס ל-1

מתבדר

מתכנס ל-ln 2

מתכנס ל-e

מתבדר. p = 1, מבחן האינטגרל.

3. Σ 1/n^1.01…

מתכנס

מתבדר

לא ניתן להכריע

שווה 1

מתכנס. p > 1.

4. מבחן המנה עבור Σ 1/n! נותן L =

1

0

∞

1/2

0 → (n + 1)/1. 0, ולכן הוא מתכנס.

לנסות שוב את הבוחן

איך זה עוזר להציל את כדור הארץ

טורים הנדסיים מתארים כל דבר שחלקו עובר מתקופה אחת לבאה, כמו בדוגמה 5.2. המודל הפשוט הזה מראה עובדה מרכזית על זיהום ועל גזי חממה: הרמה לטווח ארוך תלויה בקצב הקלט, ולכן הפחתת הקלט מורידה את הרמה שבה הדברים מתייצבים.

מערכות אמיתיות מורכבות יותר מטור הנדסי אחד, ומדענים משתמשים במודלים מלאים, אבל הטור הוא האינטואיציה הראשונה הנכונה.

ב־Saving Planets: תחזית פריחת אצות באגם אירי · מרכז האגמים

מקורות: OpenStax Calculus 2, 5.2 Infinite Series (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/5-2-infinite-series) · NOAA GML: מגמות CO_2 באטמוספרה (באנגלית) (https://gml.noaa.gov/ccgg/trends/)

מקורות לימוד חינמיים

- OpenStax Calculus 2, 5.1 Sequences (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/5-1-sequences): פרק מספר לימוד חינמי.
- OpenStax Calculus 2, 5.2 Infinite Series (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/5-2-infinite-series): טורים הנדסיים וטלסקופיים.
- OpenStax Calculus 2, 5.6 Ratio and Root Tests (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/5-6-ratio-and-root-tests): מבחני המנה והשורש.

סיימתי את היחידה הזו

טורי חזקות וטורי טיילור

להפוך פונקציות לפולינומים אינסופיים. טורי טיילור הם הדרך שבה מחשבונים מחשבים, והדרך שבה פיזיקאים הופכים בעיות קשות לפשוטות.

מטרות הלמידה

בסוף היחידה הזו תוכלו:

- למצוא את רדיוס ותחום ההתכנסות של טור חזקות.
- לבנות טורים ופולינומים של טיילור ומקלורן.
- לחסום את השגיאה של קירוב טיילור.
- להשתמש בטורים כדי לקרב אינטגרלים ולהצדיק קירובי זווית קטנה.

מושגי מפתח

- טור חזקות $\Sigma c_n(x-a)^n$ מתכנס בתוך רדיוס R ומתבדר מחוצה לו; בדקו את נקודות הקצה בנפרד.
- טור טיילור: $c_n = f^{(n)}(a)/n!$. סביב $a = 0$ הוא נקרא טור מקלורן.
- טורים מרכזיים: $e^x = \Sigma x^n/n!$, $\sin x = x - x^3/3! + x^5/5! - \dots$, $\cos x = 1 - x^2/2! + x^4/4! - \dots$, $\ln(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 - \dots$ $(|x| < 1)$.
- שארית טיילור: השגיאה היא לכל היותר $M|x-a|^{n+1}/(n+1)!$, כאשר M חוסם את הנגזרת הבאה.
- שמירה על האיבר הראשון בלבד הופכת את $\sin\theta$ ל-θ, קירוב הזווית הקטנה שמאחורי נוסחת המטוטלת הפשוטה.

משוואות מפתח

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

```
f(x)=_n=0^∞^(n)(a)n!(x-a)^n
```

טור טיילור

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

```
e^x=_n=0^∞(x^n)/(n!)
```

הטור המעריכי

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

```
x=x-(x^3)/(3!)+(x^5)/(5!)-·s
```

טור הסינוס

$$|R_n(x)| \le \frac{M|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

דוגמאות פתורות שלב אחר שלב

דוגמה 6.1 העריכו את e^0.1 בעזרת ארבעת האיברים הראשונים של הטור שלה.

1. 1 + 0.1 + 0.01/2 + 0.001/6.
2. = 1.105167.

תשובה: 1.105167, לעומת הערך האמיתי 1.105171.

דוגמה 6.2 העריכו את sin 0.5 בשלושה איברים וחסמו את השגיאה.

1. 0.5 − 0.125/6 + 0.03125/120 = 0.479427.
2. חסם האיבר הבא: $0.5^7/7! = 1.55 \times 10^{-6}$.

תשובה: 0.479427, שגיאה קטנה מ-1.6×10^{-6} (הערך האמיתי 0.479426).

דוגמה 6.3 מצאו את רדיוס ההתכנסות של $\sum x^n/3^n$.

1. מנה: $|x|/3 < 1$.
2. נקודות הקצה $x = \pm 3$ נותנות איברים ± 1, שאינם $\to 0$.

תשובה: $R = 3$; הטור מתכנס עבור $-3 < x < 3$.

תרגילים

פתרו כל אחד קודם על נייר, ואז בדקו.

1. כתבו את פולינום מקלורן ממעלה 4 של cos x והשתמשו בו עבור cos 0.2.

   (הערך האמיתי 0.980067). $\cos 0.2 \approx 1 - 0.02 + 0.0000667 = 0.980067$; $1 - x^2/2 + x^4/24$

2. מצאו את טור מקלורן של $1/(1-x)$.

   $\sum x^n$ עבור $|x| < 1$ (הנדסי).

3. מצאו את רדיוס ההתכנסות של $\sum x^n/n$.

$R = 1$ (מנה $(n/(n+1)) \to 1$).

4. השתמשו בטור כדי להעריך את $\int_0^1 e^{(-x^2)}\,dx$ בשלושה איברים.

$\int(1 - x^2 + x^4/2)\,dx = 1 - 1/3 + 1/10 = 0.7667$. איברים נוספים מתקרבים ל-0.7468.

תפיסות שגויות נפוצות

מיתוס: פולינום טיילור מדויק בכל מקום.

בפועל: הוא הכי טוב ליד המרכז a ויכול להיות גרוע מאוד רחוק ממנו או מחוץ לרדיוס ההתכנסות.

מיתוס: כל פונקציה חלקה שווה לטור טיילור שלה.

בפועל: לא תמיד, אם כי זה נכון בכל מקום עבור e^x, $\sin x$ ו-$\cos x$.

מיתוס: רדיוס ההתכנסות מכריע גם את נקודות הקצה.

בפועל: יש לבדוק את נקודות הקצה בנפרד.

כרטיסיות

טור חזקות

$\Sigma c_n(x - a)^n$.

רדיוס התכנסות

R כך שהטור מתכנס עבור $|x - a| < R$.

מקדם טיילור

$f^{(n)}(a)/n!$.

טור מקלורן

טור טיילור ב-$a = 0$.

קירוב זווית קטנה

$\sin\theta \approx \theta$, $\cos\theta \approx 1 - \theta^2/2$.

חסם השארית

$M|x - a|^{n+1}/(n+1)!$.

בוחן לבדיקה עצמית

1. טור מקלורן של e^x הוא…

Σx^n

$\Sigma x^n/n!$

$\Sigma(-1)^n x^n$

$\Sigma x^n/n$

$\Sigma x^n/n!$. כל הנגזרות של e^x ב-0 שוות 1.

2. עבור θ קטן, $\sin\theta \approx$…

1

θ

θ^2

$1 - \theta$

θ. האיבר הראשון של הטור.

3. המקדם של x^3 בטור של sin x הוא…

1/3

−1/6

1/6

−1/3

.−1/6. −1/3!

4. Σx^n מתכנס עבור…

כל x

$|x| < 1$

$|x| \le 1$

$x > 0$

$|x| < 1$. טור הנדסי.

לנסות שוב את הבוחן

איך זה עוזר להציל את כדור הארץ

טורי טיילור הם הדרך שבה פיזיקאים הופכים משוואות קשות לשמישות. זמן המחזור של המטוטלת $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ בפיזיקה I מבוסס על $\sin\theta \approx \theta$, ואותו סוג של ליניאריזציה עומד בבסיס חלק גדול מניתוח הרעידות של טורבינות רוח, גשרים ומטוסים על ידי מהנדסים.

מודלים של מסלולי לוויינים ושל אקלים מפתחים השפעות מסובכות לטורים ושומרים על האיברים החשובים. ידיעת חסם השגיאה אומרת מתי קירוב טוב מספיק כדי לסמוך עליו.

ב־Saving Planets: פיזיקה I, יחידה 8: תנודות · מחשבון זמן מחזור של מטוטלת

מקורות: OpenStax Calculus 2, 6.3 Taylor and Maclaurin Series (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/6-3-taylor-and-maclaurin-series) · OpenStax University Physics 1, 15.4 Pendulums (באנגלית) (https://openstax.org/books/university-physics-volume-1/pages/15-4-pendulums)

מקורות לימוד חינמיים

- OpenStax Calculus 2, 6.3 Taylor and Maclaurin Series (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/6-3-taylor-and-maclaurin-series): פרק מספר לימוד חינמי.
- MIT OpenCourseWare 18.01SC (https://ocw.mit.edu/courses/18-01sc-single-variable-calculus-fall-2010/): הרצאות ותרגילים על טורים.

צפו בהרצאה

Lecture 38: Taylor's Series (https://ocw.mit.edu/courses/18-01-single-variable-calculus-fall-2006/resources/lecture-38-taylors-series/) (באנגלית)

MIT 18.01 Single Variable Calculus (Fall 2006), MIT OpenCourseWare. רישיון: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · תנאי שימוש (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). הקישור מיועד ללימוד חינמי בלבד; Saving Planets אינו קשור לאוניברסיטה זו ואינו נתמך על ידה.

☐ **סיימתי את היחידה הזו**

משוואות פרמטריות וקואורדינטות קוטביות

לתאר מסלולים לפי זמן ועקומות לפי זווית, כולל האליפסה שכל לוויין וכל כוכב לכת עוקבים אחריה.

מטרות הלמידה

בסוף היחידה הזו תוכלו:

- לשרטט עקומות פרמטריות, למצוא dy/dx ואורך קשת.
- להמיר בין קואורדינטות קוטביות לקרטזיות.
- למצוא שטחים ואורכי קשת בקואורדינטות קוטביות.
- לתאר מסלול קפלרי בצורה קוטבית.

מושגי מפתח

- עקומה פרמטרית נותנת x(t) ו-y(t); dy/dx = (dy/dt)/(dx/dt).
- אורך קשת: ∫√(x′² + y′²) dt.
- קוטבי: x = r cos θ, y = r sin θ. שטח של תחום קוטבי: ½∫r² dθ.
- מסלול סביב מוקד אחד הוא r = p/(1 + e cos θ), כאשר e היא האקסצנטריות.
- החוק השני של קפלר (שטחים שווים בזמנים שווים) אומר ש-½r² dθ/dt קבוע.

משוואות מפתח

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

```
dy/dx=(dy/dt)/(dx/dt)
```

שיפוע של עקומה פרמטרית

$$L = \int_a^b \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\, dt$$

```
L=_a^b(x')^2+(y')^2 dt
```

אורך קשת פרמטרי

$$A = \tfrac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2\, d\theta$$

```
A=12_α^β r^2 dθ
```

שטח קוטבי

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos\theta}$$

דוגמאות פתורות שלב אחר שלב

דוגמה 7.1 מצאו את השיפוע של $x = t^2, y = t^3$ ב-$t = 1$.

1. $dx/dt = 2t, dy/dt = 3t^2$.
2. עבור $t = 1$ $dy/dx = 3t^2/(2t) = 3t/2 = 3/2$.

תשובה: $3/2$.

דוגמה 7.2 מצאו את השטח בתוך הקרדיואידה $r = 1 + \cos\theta$.

1. $A = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 + \cos\theta)^2 \, d\theta$.
2. $= \tfrac{1}{2}\int (1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta) \, d\theta = \tfrac{1}{2}(2\pi + 0 + \pi)$.

תשובה: $3\pi/2 \approx 4.71$.

דוגמה 7.3 למסלול כדור הארץ $a = 149.6$ מיליון km ו-$e = 0.0167$. מצאו את המרחקים הקרוב והרחוק ביותר שלו מהשמש.

1. At $\theta = 0$: $r = a(1 - e) = 149.6 \times 0.9833$.
2. At $\theta = \pi$: $r = a(1 + e) = 149.6 \times 1.0167$.

תשובה: כ-147.1 ו-152.1 מיליון km, בהתאמה לפריהליון ולאפהליון שפרסמה NASA.

תרגילים

פתרו כל אחד קודם על נייר, ואז בדקו.

1. מצאו את האורך של $x = \cos t, y = \sin t$ עבור $0 \le t \le 2\pi$.

   (היקף מעגל) $\int \sqrt{(\sin^2 t + \cos^2 t)} \, dt = 2\pi$.

2. מצאו את שטח המעגל $r = 3$.

   $\tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} 9 \, d\theta = 9\pi$.

3. המירו את $r = 2\cos\theta$ לצורה קרטזית.

   נותן $r^2 = 2r\cos\theta$ $x^2 + y^2 = 2x$: מעגל ברדיוס 1 שמרכזו $(1, 0)$, ששטחו π.

4. סלקו את t מ-$x = 2\cos t, y = \sin t$.

$x^2/4 + y^2 = 1$, אליפסה.

תפיסות שגויות נפוצות

מיתוס: $dy/dx = dy/dt \times dx/dt$.

בפועל: חלקו: $(dy/dt)/(dx/dt)$.

מיתוס: שטח קוטבי הוא $\int r\,d\theta$.

בפועל: הוא $\frac{1}{2}\int r^2\,d\theta$, מפרוסות עוגה דקות.

מיתוס: השמש נמצאת במרכז מסלול כדור הארץ.

בפועל: היא נמצאת באחד ממוקדי האליפסה.

כרטיסיות

עקומה פרמטרית

$x = x(t), y = y(t)$.

שיפוע פרמטרי

$(dy/dt)/(dx/dt)$.

קואורדינטות קוטביות

$(r, \theta); x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$.

שטח קוטבי

$\frac{1}{2}\int r^2\,d\theta$.

אקסצנטריות

$e = 0$ מעגל, $0 < e < 1$ אליפסה.

החוק השני של קפלר

שטחים שווים בזמנים שווים.

בוחן לבדיקה עצמית

1. שטח קוטבי משתמש ב...

$\int r\,d\theta$

$\frac{1}{2}\int r^2\,d\theta$

$\int r^2\,d\theta$

$2\pi\int r\,d\theta$

½∫r² dθ. כל פרוסה היא בקירוב גזרה ששטחה ½r² dθ.

2. x = r cos θ, y = …

r tan θ

r sin θ

θ sin r

r/θ

r sin θ. מקוטבי לקרטזי.

3. עבור מסלול r = p/(1 + e cos θ), e = 0 נותן…

פרבולה

מעגל

קו ישר

היפרבולה

מעגל. r = p קבוע.

4. החוק השני של קפלר אומר ש-r² dθ/dt הוא…

אפס

קבוע

עולה

שווה ל-e

קבוע. שטחים שווים בזמנים שווים.

לנסות שוב את הבוחן

איך זה עוזר להציל את כדור הארץ

כל לוויין לתצפית על כדור הארץ נע במסלול המתואר על ידי משוואת המסלול הקוטבית ביחידה זו. מתכנני משימות בוחרים את צורת המסלול ואת נטייתו כך שהמכשירים יחזרו לאותם מקומות בתאורה דומה, מה שמקל על זיהוי שינויים על הקרקע.

משוואות פרמטריות מתארות את עקבת הקרקע שלוויין משרטט מעל כדור הארץ, והיא קובעת אילו יערות, חופים ומעטות קרח הוא יכול לראות ומתי.

ב־Saving Planets: מדריך מסלולים · Landsat 9

מקורות: גיליון הנתונים של NASA על כדור הארץ (באנגלית) (https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/earthfact.html) · OpenStax Calculus 2, 7.4 Area and Arc Length in Polar Coordinates (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/7-4-area-and-arc-length-in-polar-coordinates)

מקורות לימוד חינמיים

- OpenStax Calculus 2, 7.1 Parametric Equations (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/7-1-parametric-equations): פרק מספר לימוד חינמי.
- OpenStax Calculus 2, 7.3 Polar Coordinates (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/7-3-polar-coordinates): גרפים קוטביים.
- OpenStax Calculus 2, 7.4 Area and Arc Length in Polar Coordinates (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/7-4-area-and-arc-length-in-polar-coordinates): שטח ואורך בקואורדינטות קוטביות.
- PhET: Kepler’s Laws (https://phet.colorado.edu/en/simulations/keplers-laws): מסלולים, שטחים וזמני מחזור.

צפו בהרצאה

Lecture 31: Parametric Equations (https://ocw.mit.edu/courses/18-01-single-variable-calculus-fall-2006/resources/lecture-31-parametric-equations/) (באנגלית)

MIT 18.01 Single Variable Calculus (Fall 2006), MIT OpenCourseWare. רישיון: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · תנאי שימוש (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). הקישור מיועד ללימוד חינמי בלבד; Saving Planets אינו קשור לאוניברסיטה זו ואינו נתמך על ידה.

סיימתי את היחידה הזו

תרגילים

התרגילים האלה נמצאים בתוך כל יחידה. פתרו על הנייר, ואז פתחו את התשובה.

1. טכניקות אינטגרציה
   5 תרגילים
2. יישומים: נפח, אורך קשת, עבודה ומרכז מסה
   4 תרגילים
3. אינטגרלים לא אמיתיים
   5 תרגילים
4. מבוא למשוואות דיפרנציאליות
   4 תרגילים
5. סדרות וטורים
   5 תרגילים

6. טורי חזקות וטורי טיילור

4 תרגילים

7. משוואות פרמטריות וקואורדינטות קוטביות

4 תרגילים

מעבדות מחשב

ארבע מעבדות מחשב קצרות מיישמות את היחידות בגיליון אלקטרוני: שיטת אוילר למודל אוכלוסייה, כלל סימפסון לנפח מאגר, הדיוק של טורי טיילור, והחוק השני של קפלר בקואורדינטות קוטביות.

אלה השיטות הנומריות שמדענים ומהנדסים משתמשים בהן מדי יום. נתוני דוגמה מסומנים ככאלה; כל מעבדה מקשרת למקור שלה.

מקור בטיחות: OpenStax Calculus Volume 2 (ספר לימוד חינמי) (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/1-introduction)

מעבדה A: שיטת אוילר לאוכלוסיית דגים מתאוששת

שבוע 8

מטרה: לפתור את המשוואה הלוגיסטית נומרית ולהשוות לפתרון המדויק.

$$P_{n+1} = P_n + h\,r P_n\left(1 - \frac{P_n}{K}\right)$$

```
P_n+1=P_n+h  rP_n(1-(P_n)/(K))
```

שיטת אוילר למשוואה הלוגיסטית

מהלך הניסוי

1. קבעו $r = 0.5$, $K = 1000$, $P_0 = 100$ ו-$h = 1$ בגיליון אלקטרוני.
2. מלאו כלפי מטה את צעדי אוילר עד $t = 4$.
3. הוסיפו עמודה עם הפתרון המדויק והשגיאה.
4. חזרו עם $h = 0.5$ ו-$h = 0.25$; איך משתנה השגיאה?

טבלת נתונים

t	P לפי אוילר (h = 1)
0	100
1	145.0
2	207.0
3	289.1
4	391.9

ערכים מחושבים מהמודל (לא דיג אמיתי). המדויק $P(4) = 450.9$.

חישוב לדוגמה

1. $P_1 = 100 + 0.5 \times 100 \times 0.9 = 145.0$.
2. $P_2 = 145 + 0.5 \times 145 \times 0.855 = 207.0$.
3. כאן אוילר מעריך בחסר (391.9 לעומת 450.9) כי העקומה מתעקלת כלפי מעלה בתחילת הגדילה; חציית h חוצה בערך את השגיאה.

בטיחות

- אין, מעבר לשימוש רגיל במחשב.

חלופה ביתית או וירטואלית

- גיליון אלקטרוני מספיק.

OpenStax Calculus 2, 4.2 Direction Fields and Numerical Methods (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/4-2-direction-fields-and-numerical-methods)

הקשר לכדור הארץ: מודלים נומריים של אוכלוסיות תומכים בניהול דיג. NOAA Fisheries: הערכות אוכלוסייה (https://www.fisheries.noaa.gov/topic/population-assessments)

- [ ] **השלמתי את המעבדה הזו (רטובה או וירטואלית)**

מעבדה B: נפח מאגר בכלל סימפסון

שבוע 5

מטרה: להעריך נפח של מאגר ממדידות של שטח הפנים בעומקים שונים.

$$V = \int_0^H A(h)\,dh \approx \frac{\Delta h}{3}[A_0 + 4A_1 + 2A_2 + 4A_3 + A_4]$$

`V=_0^HA(h) dh≈Δ h3[A_0+4A_1+2A_2+4A_3+A_4]`

נפח כאינטגרל של שטח החתך

מהלך הניסוי

1. הזינו את שטחי הדוגמה ב-0, 2, 4, 6 ו-8 m מעל הקרקעית.
2. החילו את כלל סימפסון עם Δh = 2 m.
3. השוו לכלל הטרפז.

טבלת נתונים

גובה h (m)	שטח פנים A (km²)
0	0.0
2	1.2
4	2.6
6	4.0
8	5.6

ערכי דוגמה לתרגול, לא מאגר אמיתי.

חישוב לדוגמה

1. סימפסון: (2/3)[0 + 4(1.2) + 2(2.6) + 4(4.0) + 5.6] = (2/3)(31.6) = 21.07 km²·m.
2. 1 km²·m = 10⁶ m³, ולכן V ≈ 2.11 × 10⁷ m³ (21 מיליון מטרים מעוקבים).
3. טרפז: 2[0/2 + 1.2 + 2.6 + 4.0 + 5.6/2] = 21.2 km²·m, קרוב לסימפסון.

בטיחות

- אין, מעבר לשימוש רגיל במחשב.

חלופה ביתית או וירטואלית

- גיליון אלקטרוני מספיק.

NASA: משימת SWOT (https://swot.jpl.nasa.gov/)

הקשר לכדור הארץ: לווייני מים עיליים כמו SWOT עוזרים להעריך שינויים במים האגורים באגמים ובמאגרים.

- [ ] **השלמתי את המעבדה הזו (רטובה או וירטואלית)**

מעבדה C: כמה טוב פולינום טיילור?

שבוע 13

מטרה: להשוות פולינומי טיילור של sin x לערך האמיתי ולחסם השארית.

$$P_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

```
P_5(x)=x-(x^3)/(6)+(x^5)/(120)
```

פולינום מקלורן ממעלה 5 של sin x

מהלך הניסוי

1. בנו טבלה של sin x, $P_1 = x$, P_3 ו-P_5 עבור x מ-0 עד π בצעדים של 0.25.
2. שרטטו את השגיאות.
3. מצאו היכן קירוב הזווית הקטנה sin x ≈ x שוגה ב-1%.

טבלת נתונים

x	sin x	$P_5(x)$
0.5	0.479426	0.479427
1.0	0.841471	0.841667
2.0	0.909297	0.933333

ערכים מחושבים.

חישוב לדוגמה

1. ב-P_5, x = 0.5 שוגה בכ-10^{-6}; ב-x = 2 ב-0.024. הדיוק יורד מהר ככל שמתרחקים מ-0.
2. sin x ≈ x נמצא בטווח של 1% עד בערך x = 0.24 rad (14°), ולכן נוסחת המטוטלת משמשת לתנודות קטנות.

בטיחות

- אין, מעבר לשימוש רגיל במחשב.

חלופה ביתית או וירטואלית

- מחווני Desmos עובדים היטב.

PhET: Pendulum Lab (https://phet.colorado.edu/en/simulations/pendulum-lab)

הקשר לכדור הארץ: ידיעת השגיאה של קירוב היא הדרך שבה מהנדסים מחליטים באיזה מודל מפושט לבטוח.

- [ ] השלמתי את המעבדה הזו (רטובה או וירטואלית)

מעבדה D: החוק השני של קפלר בקואורדינטות קוטביות

שבוע 14

מטרה: להראות נומרית שמסלול אליפטי סורק שטח מהר יותר לכל זווית ליד המוקד, אבל בקצב קבוע בזמן.

$$A(\theta_1,\theta_2)=\tfrac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} r(\theta)^2\,d\theta, \quad r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$$

```
A(θ_1,θ_2)=12_θ_1^θ_2r(θ)^2 dθ, r=(a(1-e^2))/(1+eθ)
```

השטח שסורק מסלול

מהלך הניסוי

1. השתמשו ב-a = 1 ו-e = 0.5.
2. חשבו בכלל סימפסון את השטח הנסרק מ-θ = 0 עד 0.5 ומ-θ = π − 0.25 עד π + 0.25 (אותו רוחב של 0.5 rad).
3. הסבירו מדוע זוויות שוות אינן נותנות שטחים שווים, ולכן לוקחות זמנים שונים.

טבלת נתונים

Arc	שטח נסרק
θ = 0 עד 0.5 (ליד השמש)	0.0643
θ = π ± 0.25 (הצד הרחוק)	0.5513

ערכים מחושבים עבור a = 1, e = 0.5.

חישוב לדוגמה

1. ליד השמש r ≈ 0.5, בצד הרחוק r ≈ 1.5: השטח ∝ r², ולכן הקשת הרחוקה סורקת שטח גדול פי 8.6 בערך ÷ 0.5513) (0.0643.
2. מכיוון שהשטח גדל בקצב קבוע בזמן, כוכב הלכת לוקח זמן ארוך פי 8.6 בערך לחצות את 0.5 rad הרחוקים: הוא נע הכי לאט באפהליון.

בטיחות

- אין, מעבר לשימוש רגיל במחשב.

חלופה ביתית או וירטואלית

- מספיק גיליון אלקטרוני או Desmos.

PhET: Kepler’s Laws (https://phet.colorado.edu/en/simulations/keplers-laws)

הקשר לכדור הארץ: גאומטריית המסלול קובעת מתי לוויין יכול לראות מקום על כדור הארץ.

☐ **השלמתי את המעבדה הזו (רטובה או וירטואלית)**

מערכי תרגול למבחן

מדדו זמן: כ־10 דקות לבעיה. אחר כך השוו לפתרונות המלאים.

מערך תרגול לאמצע הקורס (יחידות 3–1)

1. מצאו את $\int_0^1 x^2 e^x \, dx$.

1. פעמיים בחלקים: $\int x^2 e^x \, dx = (x^2 - 2x + 2)e^x$.
2. מ-0 עד 1: $e - 2$.

תשובה: $e - 2 \approx 0.718$.

2. מצאו את $\int_0^1 x/(x+1) \, dx$.

1. $x/(x+1) = 1 - 1/(x+1)$.
2. $[x - \ln(x+1)]_0^1 = 1 - \ln 2$.

תשובה: $1 - \ln 2 \approx 0.307$.

3. מצאו את הנפח שמתקבל מסיבוב התחום מתחת ל-$y = x^2$, $0 \le x \le 2$, סביב ציר x.

1. דיסקות: $\int_0^2 \pi \, x^4 \, dx = \pi \times 32/5$.

תשובה: $32\pi/5 \approx 20.1$.

4. חשבו $\int_2^\infty dx/x^3$.

1. $[-1/(2x^2)]_2^\infty = 1/8$.

תשובה: $1/8$.

מערך תרגול מסכם (כל היחידות)

1. פתרו $y' = -2y$, $y(0) = 5$, ומצאו את $y(1)$.

1. $y = 5e^{(-2t)}$.

תשובה: $5e^{(-2)} \approx 0.677$.

2. סכמו $\sum_{n=0}^{\infty} 3(2/3)^n$ החל מ-$n = 0$.

1. הנדסי: $3/(1 - 2/3)$.

תשובה: 9.

3. העריכו את cos 0.2 בעזרת פולינום מקלורן ממעלה 4.

   1. 1 − 0.04/2 + 0.0016/24.

   תשובה: 0.980067.

4. מצאו את השטח בתוך r = 3.

   1. ½∫₀^(2π) 9 dθ.

   תשובה: 9π ≈ 28.3.

5. מצאו את תחום ההתכנסות של Σ xⁿ/3ⁿ.

   1. מנה: |x|/3 < 1; נקודות הקצה מתבדרות.

   תשובה: −3 < x < 3.

6. המזהם במכל ערבוב מקיים S′ = −S/50 עם S(0) = 20 kg. מתי S = 5 kg?

   1. S = 20e^(−t/50); e^(−t/50) = 1/4.
   2. t = 50 ln 4.

   תשובה: יחידות זמן ≈ 69.3.

דף נוסחאות

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\sin^2 x = \tfrac{1}{2}(1-\cos 2x),\ \cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1+\cos 2x)$$

$$S_n = \tfrac{\Delta x}{3}[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + \cdots + f_n]$$

$$V = \int \pi f^2\,dx,\ V = \int 2\pi x f\,dx$$

$$L = \int \sqrt{1 + f'^2}\,dx$$

$$W = \int F\,dx$$

$$\int_1^\infty x^{-p}dx < \infty \iff p > 1$$

$$y' = ky \Rightarrow y = y_0 e^{kt}$$

$$P' = rP(1 - P/K)$$

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$$

$$\sum ar^n = a/(1-r)$$

$$L = \lim |a_{n+1}/a_n|$$

$$e^x = \sum x^n/n!$$

$$\sin x = \sum (-1)^n x^{2n+1}/(2n+1)!$$

$$\cos x = \sum (-1)^n x^{2n}/(2n)!$$

$$dy/dx = (dy/dt)/(dx/dt)$$

$$A = \tfrac{1}{2}\int r^2\,d\theta$$

קבועים

קבוע	ערך
e	2.718281828…
π	3.141592654…
ln 2	0.693147…
האקסצנטריות של מסלול כדור הארץ	0.0167
הציר הראשי למחצה של כדור הארץ	149.6 מיליון km
צפיפות המים	1,000 kg/m³

מקור: גיליון הנתונים של NASA על כדור הארץ (באנגלית) (https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/earthfact.html)

כלי גרפים ונתונים

השתמשו בכלים החינמיים האלה לצד הקורס.

- המחשבון הגרפי Desmos (https://www.desmos.com/calculator): לשרטט עקומות פרמטריות וקוטביות, מחוונים ופולינומי טיילור.
- MIT OpenCourseWare 18.01SC (https://ocw.mit.edu/courses/18-01sc-single-variable-calculus-fall-2010/): הרצאות ותרגילים חינמיים של MIT באינטגרציה ובטורים.
- MIT OpenCourseWare 18.02SC (https://ocw.mit.edu/courses/18-02sc-multivariable-calculus-fall-2010/): הקורס הבא: חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי במספר משתנים.

מילון מונחים

אורך קשת
אורך של עקומה, ∫√(1 + f′²) dx.

כושר נשיאה
הגבול לטווח ארוך K של אוכלוסייה לוגיסטית.

מרכז מסה
נקודת שיווי משקל; מומנט חלקי מסה.

התכנסות בתנאי

מתכנס, אבל הערכים המוחלטים מתבדרים.

משוואה דיפרנציאלית

משוואה הכוללת נגזרות של פונקציה לא ידועה.

אקסצנטריות

עד כמה מסלול מתוח.

שיטת אוילר

פתרון נומרי צעד אחר צעד של משוואה דיפרנציאלית.

טור הנדסי

Σar^n.

אינטגרל לא אמיתי

אינטגרל עם גבול אינסופי או אינטגרנד אינסופי.

אינטגרציה בחלקים

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$.

משוואה לוגיסטית

$P' = rP(1 - P/K)$.

טור מקלורן

טור טיילור ב-0.

משוואות פרמטריות

x ו-y נתונים כפונקציות של t.

שברים חלקיים

פירוק פונקציה רציונלית לאיברים פשוטים יותר.

קואורדינטות קוטביות

מיקום הנתון על ידי מרחק r וזווית θ.

טור חזקות

$\Sigma c_n(x - a)^n$.

רדיוס התכנסות

המרחק מהמרכז שבתוכו טור חזקות מתכנס.

משוואה פרידה

משוואה דיפרנציאלית שאפשר לכתוב כ-$g(y)\,dy = h(x)\,dx$.

כלל סימפסון

אינטגרציה נומרית בעזרת פרבולות.

טור טיילור

$\Sigma f^{(n)}(a)(x - a)^n/n!$.

מחוון להערכה עצמית

לא ניתנים ציון או נקודות זכות. השתמשו בזה כדי להעריך בכנות איפה אתם עומדים בכל יחידה.

רמה	איך זה נראה
4 · שליטה מלאה	בוחר בעצמו את הטכניקה או המבחן הנכונים, מנמק ובודק את התוצאות נומרית.
3 · מיומן	פותר את תרגילי האימון עם טעויות מזדמנות.
2 · מתפתח	עוקב אחר דוגמאות פתורות אך מתקשה לבחור שיטה.
1 · מתחיל	מפעיל נוסחאות בלי לבדוק תנאים; צריך לחזור על היחידה.

שקלול מוצע אם רוצים ציון

חלק	משקל
תרגילים	30%
מעבדות מחשב	15%
מערך תרגול לאמצע הקורס	25%
מערך תרגול מסכם	30%

שאפו לרמה 3 ומעלה בכל יחידה לפני שעוברים לקורס הבא.

קורסים קשורים

- חשבון אינפיניטסימלי 1 MATH 110
- מבוא להנדסת אווירונאוטיקה וחלל AERO 101
- כימיה כללית + 1 מעבדה CHEM 110 + CHEM 110L
- כל הקורסים