Dernière mise à jour: November 1, 2026

À propos de ce cours

Ce cours gratuit compte 7 unités et 4 travaux pratiques. Ce sont les vrais totaux, pas un programme plus long raccourci.

Un contrôle est un nombre ou un résultat de code sur une page de cours qu'un script recalcule avant publication. Le nombre affiché et le nombre recalculé doivent correspondre.

> Ceci est le plan d'un cours gratuit en autonomie rédigé par Saving Planets. Ce n'est pas un cours universitaire : il ne donne aucun crédit académique et aucun établissement n'y participe.
>
> Son contenu suit le deuxième semestre de calcul différentiel et intégral universitaire, sur le modèle des thèmes et du niveau de ressources ouvertes comme OpenStax Calculus Volume 2 et MIT OpenCourseWare 18.01SC (avec des notions paramétriques et polaires qui mènent à 18.02SC Multivariable Calculus), auxquelles nous renvoyons tout au long du cours. Ces organisations ne cautionnent pas cette page.
>
> Notre apport : chaque unité est reliée à de vrais problèmes d'eau, d'énergie, d'écologie et de vol spatial, chaque nombre de la page est recalculé par un script de vérification avant sa mise en ligne, et quatre travaux pratiques sur ordinateur appliquent les méthodes à des données.
>
> Suivez-le dans l'ordre. Chaque unité comporte des objectifs, des notions clés, des équations, des exemples pas à pas, des exercices corrigés en détail, des erreurs fréquentes, des cartes mémoire et un quiz. Votre progression est enregistrée uniquement dans ce navigateur.

Comment ce cours aide à sauver la planète

L'Analyse II, c'est le moment où le calcul commence à modéliser le monde : le volume d'eau des réservoirs, le travail pour la pomper, la façon dont un polluant est évacué d'un lac, le rétablissement d'une population de poissons, et les orbites elliptiques des satellites qui observent tout cela.

Chaque unité se termine par une courte section sourcée qui montre comment ses idées aident à la fois les gens et la nature.

Pour les enseignants

Vous pouvez enseigner ce cours, ou laisser un élève le faire seul. Il est gratuit. Saving Planets ne donne ni note ni crédit scolaire.

- Cette page est le cours entier : 7 unités et 4 travaux pratiques (MATH 111).
- Prévoyez 15 semaines, environ 6 à 9 heures par semaine, y compris les semaines de travaux pratiques.
- Suivez le calendrier de 15 semaines. Lisez l'unité, faites les exercices sur papier, puis ouvrez la réponse. La semaine d'un TP, faites le TP ou la version à la maison.
- Un contrôle est un nombre ou un résultat de code sur la page qu'un script recalcule avant publication. Le nombre affiché et le nombre recalculé doivent correspondre.
- Utilisez Imprimer cette page, ou téléchargez le guide d'étude PDF. La feuille de formules est vers la fin.
- Demandez : en quoi cette unité aide-t-elle les gens et la planète ? Chaque unité a un encadré vert avec un fait sourcé.
- Copiez le modèle de guide enseignant et écrivez le nom de votre classe, le temps dont vous disposez et les questions que vous poserez. Ouvrir le modèle de guide enseignant

Avant de commencer

Prérequis

- Analyse I : limites, dérivées, règle de dérivation des fonctions composées, intégrales de base et changement de variable, théorème fondamental.
- Identités trigonométriques, en particulier $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ et les formules de l'angle double.
- Exponentielles et logarithmes.

Comment étudier

- Lisez l'unité, puis refermez-la et essayez vous-même les exemples résolus avant de vérifier chaque étape.
- Faites chaque exercice sur papier avant d'ouvrir la réponse.
- Pour les intégrales, vérifiez votre réponse en la dérivant.
- Pour les séries, choisissez le critère adapté avant de calculer quoi que ce soit.
- Esquissez chaque région avant de poser une intégrale de volume ou d'aire.
- Refaites les quiz quelques jours plus tard. La pratique espacée vaut mieux qu'une longue séance.

Ce qu'il vous faut

- Un ordinateur ou une tablette avec un tableur.
- Une calculatrice graphique gratuite comme Desmos.
- Facultatif : Python avec NumPy.

Programme suggéré sur 15 semaines

Environ 6 à 9 heures par semaine : lecture, exercices et, les semaines de TP, le TP.

Semaine	Unité	Thèmes	Lecture
1	Techniques d'intégration	Intégration par parties	OpenStax 3.1
2	Techniques d'intégration	Intégrales trigonométriques et substitution	OpenStax 3.2–3.3
3	Techniques d'intégration	Fractions partielles ; intégration numérique	OpenStax 3.4–3.6
4	Applications : volume, longueur d'arc, travail et centre de masse	Aires, volumes par tranches, disques, anneaux, coquilles cylindriques	OpenStax 2.1–2.3
5	Applications : volume, longueur d'arc, travail et centre de masse	Longueur d'arc, travail, force exercée par un fluide, centres de masse ; TP B	OpenStax 2.4–2.6
6	Intégrales impropres	Intégrales impropres et comparaison ; entraînement au partiel	OpenStax 3.7
7	Introduction aux équations différentielles	Équations différentielles, champs de directions, méthode d'Euler	OpenStax 4.1–4.2
8	Introduction aux équations différentielles	Équations à variables séparables et logistiques ; TP A	OpenStax 4.3–4.4
9	Suites et séries	Suites ; séries infinies ; séries géométriques	OpenStax 5.1–5.2
10	Suites et séries	Critères de divergence, de l'intégrale et de comparaison	OpenStax 5.3–5.4
11	Suites et séries	Séries alternées ; critères de d'Alembert et de Cauchy	OpenStax 5.5–5.6
12	Séries entières et séries de Taylor	Séries entières et leurs propriétés	OpenStax 6.1–6.2
13	Séries entières et séries de Taylor	Séries de Taylor et de Maclaurin ; TP C	OpenStax 6.3–6.4
14	Équations paramétriques et coordonnées polaires	Équations paramétriques ; coordonnées polaires et aires ; TP D	OpenStax 7.1–7.4
15	Révision	Révision et série d'exercices finale	Toutes les unités

Votre progression

Cochez les unités et les TP à mesure que vous les terminez, et faites les quiz. La progression et les scores sont enregistrés uniquement dans ce navigateur et ne nous sont jamais envoyés.

Unités

Techniques d’intégration

Intégration par parties, intégrales trigonométriques et substitutions, fractions partielles, et intégration numérique quand aucune formule n’existe.

Objectifs d’apprentissage

À la fin de cette unité, vous saurez :

- Intégrer par parties en choisissant bien u et dv.
- Calculer des intégrales trigonométriques et utiliser la substitution trigonométrique.
- Décomposer des fractions rationnelles en éléments simples.
- Approcher des intégrales par la méthode des trapèzes et la méthode de Simpson, et estimer l’erreur.

Notions clés

- L’intégration par parties est la règle du produit à l’envers : ∫u dv = uv − ∫v du. Choisissez pour u ce qui se simplifie en dérivant (logarithmes, polynômes).
- Les puissances de sinus et de cosinus se traitent avec des identités comme sin²x = (1 − cos 2x)/2.
- Pour √(a² − x²), posez x = a sin θ ; pour √(a² + x²), x = a tan θ.
- Une fraction rationnelle propre se décompose en éléments simples dont les intégrales sont des logarithmes et des arctangentes.
- Beaucoup d’intégrales, comme ∫e^(−x²) dx, n’ont pas de primitive élémentaire. La méthode de Simpson donne souvent de nombreux chiffres exacts avec peu de points.

Équations clés

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

`u dv=uv- v du`

Intégration par parties

$$\sin^2 x = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

`^2x=12(1-2x)`

Identité de réduction des puissances

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1/2}{x-1} - \frac{1/2}{x+1}$$

`(1)/(x^2-1)=(1/2)/(x-1)-(1/2)/(x+1)`

Une décomposition en éléments simples

$$S_n = \frac{\Delta x}{3}\left[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + \cdots + 4f_{n-1} + f_n\right]$$

S_n=(Δ x)/(3)[f_0+4f_1+2f_2++4f_n-1+f_n]

Méthode de Simpson (n pair)

Exemples résolus pas à pas

Exemple 1.1 Calculez $\int_0^1 x\,e^x\,dx$.

1. $u = x$, $dv = e^x\,dx$, donc $du = dx$, $v = e^x$.
2. $\int x\,e^x\,dx = x\,e^x - \int e^x\,dx = (x-1)e^x$.
3. De 0 à 1 : $0 - (-1) = 1$.

Réponse : 1.

Exemple 1.2 Calculez $\int_2^3 dx/(x^2-1)$.

1. Fractions partielles : $\tfrac{1}{2}[1/(x-1) - 1/(x+1)]$.
2. Primitive $\tfrac{1}{2}\ln|(x-1)/(x+1)|$.
3. $\tfrac{1}{2}[\ln(2/4) - \ln(1/3)] = \tfrac{1}{2}\ln(3/2)$.

Réponse : $\tfrac{1}{2}\ln 1.5 \approx 0.2027$.

Exemple 1.3 Estimez $\int_0^1 e^{\wedge}(-x^2)\,dx$ par la méthode de Simpson, $n = 4$.

1. $\Delta x = 0.25$; $f = 1, 0.93941, 0.77880, 0.56978, 0.36788$.
2. $S_4 = (0.25/3)[1 + 4(0.93941) + 2(0.77880) + 4(0.56978) + 0.36788]$.
3. $S_4 = 0.74686$.

Réponse : 0.74686, contre la valeur exacte 0.74682 : une erreur de seulement 0.00003 avec cinq points.

Exercices

Faites chacun d’abord sur papier, puis vérifiez.

1. $\int_0^{\wedge}\pi\, x \sin x\,dx$

Par parties : $[-x \cos x + \sin x]_0^{\pi} = \pi$.

2. $\int_1^e x \ln x \, dx$

   Par parties avec $u = \ln x$: $[x^2 \ln x/2 - x^2/4]_1^e = (e^2 + 1)/4 \approx 2.097$.

3. $\int_0^{(\pi/2)} \sin^2 x \, dx$

   Réduction des puissances : $\frac{1}{2}[x - \sin 2x/2]_0^{(\pi/2)} = \pi/4$.

4. $\int_0^1 \sqrt{(1 - x^2)} \, dx$

   $x = \sin \theta$ donne $\int_0^{(\pi/2)} \cos^2\theta \, d\theta = \pi/4$ (un quart du disque unité).

5. $\int_0^1 dx/(1 + x^2)$

   $[\arctan x]_0^1 = \pi/4$.

Idées reçues fréquentes

Idée reçue : Prenez toujours pour u le premier facteur que vous voyez.

En réalité : Choisissez pour u ce qui se simplifie en dérivant : logarithmes et polynômes d'abord, exponentielles et fonctions trigonométriques en dv.

Idée reçue : La décomposition en éléments simples fonctionne pour toute fraction rationnelle.

En réalité : Divisez d'abord si le degré du numérateur n'est pas inférieur à celui du dénominateur.

Idée reçue : Si je ne trouve pas de primitive, l'intégrale n'a pas de valeur.

En réalité : Elle a quand même une valeur ; estimez-la numériquement.

Cartes mémoire

Intégration par parties

$\int u \, dv = uv - \int v \, du$.

Substitution trigonométrique

$\sqrt{(a^2 - x^2)}$: $x = a \sin \theta$.

Fractions partielles

Décomposer une fraction rationnelle en éléments simples.

Méthode des trapèzes

Moyenne des sommes à gauche et à droite ; erreur $\propto \Delta x^2$.

Méthode de Simpson

Ajustement parabolique ; erreur $\propto \Delta x^4$.

Intégrale non élémentaire

Pas de primitive exprimable par une formule, p. ex. ∫e^(−x²) dx.

Quiz d’autocontrôle

1. Pour $\int x^2 e^x\,dx$, un bon premier choix de u est…

- e^x
- x^2
- $x^2 e^x$
- dx

x^2. x^2 se simplifie en dérivant.

2. $\sqrt{(9 - x^2)}$ suggère la substitution…

- $x = 3 \tan \theta$
- $x = 3 \sin \theta$
- $x = 3 \sec \theta$
- $u = 9 - x^2$

$x = 3 \sin \theta$. $9 - 9 \sin^2\theta = 9 \cos^2\theta$.

3. La méthode de Simpson ajuste la courbe avec…

- des rectangles
- des trapèzes
- des paraboles
- uniquement des cubiques

des paraboles. Des paraboles passant par chaque groupe de trois points.

4. $\int \ln x\,dx =$

$1/x + C$

$x \ln x - x + C$

$\ln^2 x/2 + C$

$x \ln x + C$

$x \ln x - x + C$. Par parties avec $u = \ln x$, $dv = dx$.

Refaire ce quiz

Comment cela aide à sauver la planète

L'intégrale de la courbe en cloche de l'exemple 1.3 n'a pas de solution sous forme de formule, et pourtant elle se cache derrière chaque barre d'erreur d'un graphique climatique et chaque incertitude d'une mesure satellitaire. L'intégration numérique est la façon dont on la calcule réellement, elle et la plupart des intégrales issues de données réelles.

Des méthodes comme celle de Simpson permettent de transformer des mesures irrégulières, comme les profondeurs d'une rivière à travers un chenal, en totaux comme un débit ou un volume.

Sur Saving Planets : Analyse I, TP D : intégration numérique · Page Rivières

Sources : OpenStax Calculus 2, 3.6 Numerical Integration (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/3-6-numerical-integration) · OpenStax Calculus 2, 3.1 Integration by Parts (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/3-1-integration-by-parts)

Ressources d'apprentissage gratuites

- OpenStax Calculus 2, 3.1 Integration by Parts (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/3-1-integration-by-parts): Section de manuel gratuite.
- OpenStax Calculus 2, 3.2 Trigonometric Integrals (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/3-2-trigonometric-integrals): Puissances de sinus et de cosinus.
- OpenStax Calculus 2, 3.3 Trigonometric Substitution (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/3-3-trigonometric-substitution): Intégrandes avec radicaux.
- OpenStax Calculus 2, 3.4 Partial Fractions (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/3-4-partial-fractions): Fractions rationnelles.
- OpenStax Calculus 2, 3.6 Numerical Integration (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/3-6-numerical-integration): Méthodes des trapèzes et de Simpson avec majorations de l'erreur.

☐ **J'ai terminé cette unité**

Applications : volume, longueur d’arc, travail et centre de masse

Découper, additionner, passer à la limite : volumes de solides, longueurs de courbes, travail contre des forces, pression des fluides et centres de masse.

Objectifs d’apprentissage

À la fin de cette unité, vous saurez :

- Calculer des volumes par tranches, disques, anneaux et coquilles cylindriques.
- Calculer une longueur d’arc.
- Calculer le travail de forces variables, y compris le pompage de liquides, et la force hydrostatique.
- Trouver le centre de masse de tiges et de plaques minces.

Notions clés

- Chaque application suit le même schéma : approcher une tranche fine, écrire sa contribution, intégrer.
- Méthode des disques : V = ∫π[f(x)]² dx autour de l’axe des x. Méthode des coquilles : V = ∫2πx f(x) dx autour de l’axe des y.
- La longueur d’arc additionne de minuscules hypoténuses : L = ∫√(1 + [f'(x)]²) dx.
- Travail = ∫F(x) dx. Pompage : chaque couche de liquide est soulevée sur sa propre distance.
- La pression augmente avec la profondeur, donc la force exercée sur un barrage est une intégrale sur la profondeur.
- Centre de masse = moment ÷ masse.

Équations clés

$$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2\,dx$$

```
V=_a^bπ[f(x)]^2 dx
```

Méthode des disques

$$V = \int_a^b 2\pi x\, f(x)\,dx$$

```
V=_a^b2π x f(x) dx
```

Méthode des coquilles cylindriques

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

`L=_a^b1+[f'(x)]^2 dx`

Longueur d’arc

$$W = \int_a^b F(x)\, dx$$

`W=_a^bF(x) dx`

Travail d’une force variable

$$\bar{x} = \frac{\int x\, \rho(x)\, dx}{\int \rho(x)\, dx}$$

`x=( x ρ(x) dx)/(ρ(x) dx)`

Centre de masse d’une tige

Exemples résolus pas à pas

Exemple 2.1 Trouvez le volume obtenu en faisant tourner autour de l’axe des x la région sous y = √x, 0 ≤ x ≤ 4.

1. Disques de rayon √x : V = $\int_0^4 \pi\, x\, dx$.
2. $\pi[x^2/2]_0^4 = 8\pi$.

Réponse : 8π ≈ 25.1 unités cubes.

Exemple 2.2 Un réservoir cylindrique de rayon 1 m et de hauteur 2 m est plein d’eau. Quel travail faut-il pour pomper toute l’eau par le haut ?

1. Une couche à la hauteur y a un volume $\pi(1)^2\, dy$ et un poids de 1000 × 9.81 × π dy newtons, et elle est soulevée de 2 − y mètres.
2. W = $\int_0^2 9{,}810\pi(2 - y)\, dy = 9{,}810\pi \times 2$.
3. = 19,620π J.

Réponse : ≈ 61,600 J (61.6 kJ).

Exemple 2.3 Une tige sur [0, 2] m a une masse linéique $\rho(x) = 1 + x$ kg/m. Trouvez son centre de masse.

1. Masse : $\int_0^2 (1 + x)\,dx = 2 + 2 = 4$ kg.
2. Moment : $\int_0^2 x(1 + x)\,dx = 2 + 8/3 = 14/3$.
3. $\bar{x} = (14/3)/4 = 7/6$.

Réponse : $\bar{x} = 7/6 \approx 1.17$ m, du côté de l'extrémité la plus lourde.

Exercices

Faites chacun d'abord sur papier, puis vérifiez.

1. Utilisez les coquilles cylindriques pour trouver le volume obtenu en faisant tourner autour de l'axe des y la région sous $y = x^2$, $0 \le x \le 1$.

   $V = \int_0^1 2\pi x \cdot x^2\,dx = 2\pi/4 = \pi/2$.

2. Trouvez la longueur d'arc de $y = (2/3)x^{(3/2)}$ de $x = 0$ à 3.

   $y' = \sqrt{x}$, donc $L = \int_0^3 \sqrt{(1 + x)}\,dx = (2/3)[(1 + x)^{(3/2)}]_0^3 = (2/3)(8 - 1) = 14/3$.

3. Un ressort de $k = 200$ N/m est étiré de 0.10 m depuis sa longueur au repos. Quel travail est fourni ?

   $W = \int_0^{0.1} 200x\,dx = 100(0.01) = 1.0$ J.

4. Une vanne rectangulaire verticale de 10 m de large retient une eau de 5 m de profondeur. Trouvez la force totale exercée par l'eau.

   $F = \int_0^5 \rho g\, y\, (10)\,dy = 1{,}000 \times 9.81 \times 10 \times 25/2 = 1.23 \times 10^6$ N.

Idées reçues fréquentes

Idée reçue : Volume de révolution = π × aire.

En réalité : Il faut élever le rayon au carré dans l'intégrale : $\int \pi f^2\,dx$, et non $\pi(\int f\,dx)$.

Idée reçue : Le travail de pompage vaut poids × hauteur du réservoir.

En réalité : Chaque couche se déplace d'une distance différente, il faut donc intégrer.

Idée reçue : Le centre de masse est toujours le milieu.

En réalité : Seulement pour une densité uniforme et une forme symétrique.

Cartes mémoire

Méthode des disques

$V = \int \pi\, f(x)^2\, dx$.

Méthode des anneaux

$V = \int \pi(R^2 - r^2)\, dx$.

Méthode des coquilles cylindriques

$V = \int 2\pi x\, f(x)\, dx$.

Longueur d'arc

$L = \int \sqrt{(1 + f'^2)}\, dx$.

Travail

$W = \int F\, dx$.

Centre de masse

Le moment divisé par la masse.

Quiz d'autocontrôle

1. Les coquilles autour de l'axe des y utilisent l'intégrande…

$\pi\, f(x)^2$

$2\pi x\, f(x)$

$f(x)^2$

$2\pi\, f(x)$

$2\pi x\, f(x)$. Circonférence $2\pi x$ × hauteur $f(x)$ × épaisseur dx.

2. La longueur d'arc utilise…

$\int f(x)\, dx$

$\int \sqrt{(1 + f'^2)}\, dx$

$\int f'\, dx$

$\int \pi\, f^2\, dx$

$\int \sqrt{(1 + f'^2)}\, dx$. Pythagore sur chaque petit morceau.

3. La pression hydrostatique sur un barrage augmente…

avec le carré de la profondeur

linéairement avec la profondeur

pas du tout

avec la largeur du barrage

linéairement avec la profondeur. P = ρgh ; la force totale augmente alors avec le carré de la profondeur.

4. Le travail pour étirer un ressort de x depuis le repos vaut…

kx

$\frac{1}{2}kx^2$

kx^2

2kx

$\frac{1}{2}kx^2$. $\int_0^x kt\,dt$.

Refaire ce quiz

Comment cela aide à sauver la planète

Les ingénieurs de l'eau utilisent directement ces intégrales : le volume d'un réservoir d'après sa forme, l'énergie pour pomper l'eau là où on en a besoin, et la force qu'un barrage ou une digue doit retenir. Le pompage représente un coût énergétique important dans de nombreux réseaux d'eau, donc bien poser l'intégrale économise à la fois de l'énergie et de l'argent.

Des satellites mesurent désormais depuis l'orbite la hauteur des rivières, des lacs et des réservoirs. La mission SWOT de la NASA et du CNES cartographie les eaux de surface afin d'estimer les variations des volumes stockés : du découpage-et-addition à l'échelle planétaire.

Sur Saving Planets : SWOT · De la place pour la rivière

Sources : OpenStax Calculus 2, 2.5 Physical Applications (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/2-5-physical-applications) · NASA : mission SWOT (https://swot.jpl.nasa.gov/)

Ressources d'apprentissage gratuites

- OpenStax Calculus 2, 2.2 Determining Volumes by Slicing (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/2-2-determining-volumes-by-slicing): Disques et anneaux.
- OpenStax Calculus 2, 2.3 Volumes of Revolution: Cylindrical Shells (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/2-3-volumes-of-revolution-cylindrical-shells): Coquilles cylindriques.
- OpenStax Calculus 2, 2.4 Arc Length of a Curve and Surface Area (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/2-4-arc-length-of-a-curve-and-surface-area): Longueur d'arc.
- OpenStax Calculus 2, 2.5 Physical Applications (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/2-5-physical-applications): Travail, pompage et force exercée par un fluide.
- OpenStax Calculus 2, 2.6 Moments and Centers of Mass (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/2-6-moments-and-centers-of-mass): Centroïdes.

Regarder le cours magistral

Clip 1: Introduction to Arc Length (https://ocw.mit.edu/courses/18-01sc-single-variable-calculus-fall-2010/resources/clip-1-introduction-to-arc-length/) (en anglais)

MIT 18.01SC Single Variable Calculus (Fall 2010), MIT OpenCourseWare. Licence : CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Conditions d'utilisation (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Lien fourni uniquement pour l'étude gratuite ; Saving Planets n'est ni affilié à cette université ni soutenu par elle.

☐ **J'ai terminé cette unité**

Intégrales impropres

Intégrales sur des intervalles infinis ou à travers des pics infinis : quand leur somme est un nombre fini, et quand elle ne l'est pas.

Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette unité, vous saurez :

- Calculer des intégrales impropres comme des limites.
- Déterminer la convergence avec le critère de Riemann et la comparaison.
- Appliquer les intégrales impropres à l'énergie de libération et aux durées de vie moyennes.

Notions clés

- ∫ₐ^∞ f dx désigne la limite de ∫ₐᵇ f dx quand b → ∞. Si la limite est finie, l'intégrale converge.
- ∫₁^∞ dx/xᵖ converge exactement quand p > 1. ∫₀¹ dx/xᵖ converge exactement quand p < 1.
- Comparaison : si 0 ≤ f ≤ g et si ∫g converge, alors ∫f converge aussi.
- Une région infinie peut avoir une aire finie.

Équations clés

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^{b} f(x)\,dx$$

`_a^∞f(x) dx=_b∞_a^bf(x) dx`

Intégrale impropre

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1}\ (p>1)$$

`_1^∞(dx)/(x^p)=1p-1\ (p>1)`

Intégrale de Riemann (p)

$$W_{\infty} = \int_R^{\infty} \frac{GMm}{r^2}\,dr = \frac{GMm}{R}$$

`W_∞=_R^∞(GMm)/(r^2) dr=GMm/R`

Travail pour échapper à la gravité d'une planète

Exemples résolus pas à pas

Exemple 3.1 Calculez $\int_1^\infty dx/x^2$.

1. $\int_1^b x^{-2}\,dx = 1 - 1/b$.
2. As $b \to \infty$, $1/b \to 0$.

Réponse : 1 (converge).

Exemple 3.2 $\int_1^\infty dx/x$ converge-t-elle ?

1. $\int_1^b dx/x = \ln b$.
2. $\ln b \to \infty$.

Réponse : Non, elle diverge, même si $1/x \to 0$.

Exemple 3.3 Quelle énergie par kilogramme faut-il pour échapper à la gravité terrestre depuis la surface (sans tenir compte de l'air ni de la rotation) ?

1. $W/m = \int_R^\infty GM/r^2\,dr = GM/R$.
2. $GM = 3.986 \times 10^{14}\ m^3/s^2$, $R = 6.371 \times 10^6$ m.
3. $W/m = 6.26 \times 10^7$ J/kg.

Réponse : Environ 62.6 MJ par kilogramme, une valeur finie alors que la distance est infinie. En posant $\tfrac{1}{2}v^2$ égal à cette valeur, on obtient la vitesse de libération de 11.2 km/s.

Exercices

Faites chacun d'abord sur papier, puis vérifiez.

1. $\int_0^\infty e^{-x}\,dx$

   $[-e^{-x}]_0^\infty = 0 + 1 = 1$.

2. $\int_0^1 dx/\sqrt{x}$

   $[2\sqrt{x}]_0^1 = 2$ (converge ; $p = \tfrac{1}{2} < 1$).

3. $\int_2^\infty dx/x^3$

   $[-1/(2x^2)]_2^\infty = 1/8$.

4. $\int_1^\infty dx/(x^2 + 1)$ converge-t-elle ?

   Oui : elle est inférieure à $1/x^2$, qui converge. En fait, elle vaut $\pi/4$.

5. Pour une décroissance exponentielle de taux λ, la durée de vie moyenne est $\int_0^{\infty} t\,\lambda e^{-\lambda t}\,dt$. Calculez-la.

   Par parties : $1/\lambda$.

Idées reçues fréquentes

Idée reçue : Si $f(x) \to 0$ quand $x \to \infty$, l'intégrale converge.

En réalité : $1/x \to 0$ mais $\int_1^{\infty} dx/x$ diverge.

Idée reçue : Une région infiniment longue a une aire infinie.

En réalité : $\int_1^{\infty} dx/x^2 = 1$.

Idée reçue : $\int_{-1}^{1} dx/x^2 = -2$ avec la formule habituelle.

En réalité : L'intégrande tend vers l'infini en 0, donc l'intégrale est impropre, et elle diverge.

Cartes mémoire

Intégrale impropre

Intervalle infini ou intégrande infinie ; définie par une limite.

Converge

La limite existe et est finie.

Critère de Riemann (∞)

$\int_1^{\infty} x^{-p}$ converge ssi $p > 1$.

Critère de Riemann (0)

$\int_0^{1} x^{-p}$ converge ssi $p < 1$.

Critère de comparaison

Plus petite qu'une intégrale convergente ⇒ converge.

Énergie de libération

GM/R par kg.

Quiz d'autocontrôle

1. $\int_1^{\infty} dx/x^{1.5}$...

diverge

converge vers 2

converge vers 1

converge vers 1.5

converge vers 2. 1/(p − 1) = 1/0.5 = 2.

2. $\int_1^{\infty} dx/x$...

converge vers 1

diverge

converge vers 0

vaut ln 2

diverge. ln b → ∞.

3. $\int_0^{\infty} e^{(-2x)}\, dx$ =

2

1/2

1

∞

1/2. $[-e^{(-2x)}/2]_0^{\infty}$ = 1/2.

4. Une intégrale impropre est définie comme...

une somme

une limite d'intégrales propres

une dérivée

toujours infinie

une limite d'intégrales propres. Prendre la limite de $\int_a^b$.

Refaire ce quiz

Comment cela aide à sauver la planète

Les intégrales impropres donnent l'énergie nécessaire pour quitter une planète, le chiffre derrière chaque lancement de satellite météo ou climatique. Elle est finie, et c'est pour cela que le vol spatial est possible.

Les durées de vie moyennes, elles aussi des intégrales impropres, décrivent combien de temps des substances persistent : combien de temps un polluant reste dans un lac, ou combien de temps subsiste un traceur radioactif utilisé pour dater la glace et l'eau océanique.

Sur Saving Planets : Physique I, unité 7 : orbites · Calculateur de delta-v

Sources : OpenStax Calculus 2, 3.7 Improper Integrals (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/3-7-improper-integrals) · Fiche NASA sur la Terre (en anglais) (https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/earthfact.html)

Ressources d'apprentissage gratuites

- OpenStax Calculus 2, 3.7 Improper Integrals (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/3-7-improper-integrals): Section de manuel gratuite avec critères de comparaison.

Regarder le cours magistral

Lecture 36: Improper Integrals (https://ocw.mit.edu/courses/18-01-single-variable-calculus-fall-2006/resources/lecture-36-improper-integrals/) (en anglais)

MIT 18.01 Single Variable Calculus (Fall 2006), MIT OpenCourseWare. Licence : CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Conditions d'utilisation (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Lien fourni uniquement pour l'étude gratuite ; Saving Planets n'est ni affilié à cette université ni soutenu par elle.

☐ **J'ai terminé cette unité**

Introduction aux équations différentielles

Des équations pour les taux de variation : croissance et décroissance exponentielles, refroidissement, mélange, et modèle logistique des populations.

Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette unité, vous saurez :

- Vérifier des solutions et résoudre des problèmes de Cauchy (valeur initiale).
- Lire des champs de directions et utiliser la méthode d'Euler.
- Résoudre des équations à variables séparables, y compris des problèmes de mélange et de refroidissement.
- Utiliser l'équation logistique et interpréter sa capacité de charge.

Notions clés

- Une équation différentielle relie une fonction à ses dérivées. Sa solution est une fonction, généralement une famille fixée par une condition initiale.
- Équations à variables séparables : mettez tous les y d'un côté et tous les x de l'autre, puis intégrez.
- y' = ky donne $y = y_0 e^{(kt)}$: croissance si $k > 0$, décroissance si $k < 0$.
- Mélange : taux de variation d'un polluant = débit entrant − débit sortant.
- Logistique : $P' = rP(1 - P/K)$. La croissance ralentit quand P approche de la capacité de charge K ; elle est la plus rapide pour $P = K/2$.
- La méthode d'Euler avance le long de la pente : $y_{n+1} = y_n + h\, f(t_n, y_n)$. Pas plus petits, erreur plus petite.

Équations clés

$$\frac{dy}{dt} = ky \;\Rightarrow\; y = y_0 e^{kt}$$

`dy/dt=ky\ \ y=y_0e^kt`

Croissance et décroissance exponentielles

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_s)$$

`dT/dt=-k(T-T_s)`

Loi de refroidissement de Newton

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right), \quad P(t) = \frac{K}{1 + \frac{K - P_0}{P_0} e^{-rt}}$$

```
dP/dt=rP(1- PK), P(t)=1+(K-P_0)/(P_0)e^-rt
```

Équation logistique et sa solution

$$y_{n+1} = y_n + h\, f(t_n, y_n)$$

```
y_n+1=y_n+h f(t_n,y_n)
```

Méthode d’Euler

Exemples résolus pas à pas

Exemple 4.1 Une partie d’un lac contient 1000 m³ d’eau avec 50 kg d’un polluant dissous. De l’eau propre entre à 10 m³/jour et l’eau bien mélangée sort au même débit. Combien de temps faut-il pour que la moitié du polluant ait disparu ?

1. dS/dt = −(10/1,000)S = −S/100.
2. S(t) = 50e^(−t/100).
3. Moitié : e^(−t/100) = ½, donc t = 100 ln 2.

Réponse : ≈ 69.3 jours (modèle simplifié, parfaitement mélangé).

Exemple 4.2 Un stock de poissons suit P' = 0.5P(1 − P/1000) avec P(0) = 100. Trouvez P(4).

1. P(t) = 1,000/(1 + 9e^(−0.5t)).
2. P(4) = 1,000/(1 + 9e^(−2)) = 1,000/2.218.

Réponse : ≈ 451 poissons, proche du niveau de croissance la plus rapide K/2 = 500.

Exemple 4.3 Utilisez la méthode d’Euler avec h = 0.5 pour estimer y(1) pour y' = y, y(0) = 1.

1. y_1 = 1 + 0.5(1) = 1.5.
2. y_2 = 1.5 + 0.5(1.5) = 2.25.

Réponse : 2.25, contre la valeur exacte e ≈ 2.718 ; diviser h par deux réduit l’erreur.

Exercices

Faites chacun d’abord sur papier, puis vérifiez.

1. Un café à 90 °C refroidit dans une pièce à 20 °C avec k = 0.1 par minute. Trouvez sa température au bout de 10 minutes.

T = 20 + 70e^(−1) ≈ 45.8 °C.

2. Résolvez y' = xy avec y(0) = 2, et trouvez y(1).

   dy/y = x dx, donc y = 2e^(x²/2); y(1) = 2e^0.5 ≈ 3.30.

3. Résolvez y' = −2y, y(0) = 5. Trouvez y(1).

   y = 5e^(−2t); y(1) ≈ 0.677.

4. Pour P' = rP(1 − P/K), pour quelle population la croissance est-elle la plus rapide ?

   rP(1 − P/K) est une parabole tournée vers le bas en P, dont le sommet est en P = K/2.

Idées reçues fréquentes

Idée reçue : La solution d'une équation différentielle est un nombre.
En réalité : C'est une fonction (ou une famille de fonctions).

Idée reçue : La méthode d'Euler donne la réponse exacte si l'on est soigneux.
En réalité : Elle a une erreur liée au pas ; elle ne converge que quand h → 0.

Idée reçue : Les populations logistiques cessent de croître à K/2.
En réalité : La croissance est la plus rapide à K/2 et ne s'annule que lorsque P approche de K.

Cartes mémoire

Équation différentielle

Une équation faisant intervenir une fonction et ses dérivées.

Problème de Cauchy (valeur initiale)

Une ED plus une valeur de départ.

À variables séparables

g(y) dy = h(x) dx.

Équation logistique

P' = rP(1 − P/K).

Capacité de charge

K, la limite à long terme d'une population logistique.

Méthode d'Euler

$y_{n+1} = y_n + h\, f(t_n, y_n)$.

Quiz d'autocontrôle

1. La solution générale de y' = 3y est…

$3e^x$

Ce^(3x)

e^(3x) + C

3x + C

Ce^(3x). Séparer et intégrer.

2. Dans le modèle logistique, K est…

le taux de croissance

la population initiale

la capacité de charge

la demi-vie

la capacité de charge. Le niveau dont la population s’approche.

3. Un pas d’Euler depuis (0, 2) avec y' = y et h = 0.1 donne…

2.1

2.2

2.02

2.0

2.2. 2 + 0.1 × 2.

4. dy/dx = x^2y est…

non séparable

à variables séparables

linéaire à coefficients constants uniquement

logistique

à variables séparables. $dy/y = x^2\,dx$.

Refaire ce quiz

Comment cela aide à sauver la planète

Les modèles de population fondés sur l'équation logistique font partie des outils avec lesquels les scientifiques halieutiques évaluent les stocks et fixent des limites de capture qui permettent aux populations de rester en bonne santé, ce qui protège les écosystèmes marins et les personnes qui en dépendent.

Les équations de mélange comme celle de l'exemple 4.1 sont la première étape pour estimer à quelle vitesse un lac ou un estuaire évacue un polluant une fois la source arrêtée.

Les modèles météorologiques et climatiques résolvent de très grands systèmes d'équations différentielles avec des méthodes numériques pas à pas, descendantes de la méthode d'Euler.

Sur Saving Planets : Pôle Lacs · Pôle Océans

Sources : OpenStax Calculus 2, 4.4 The Logistic Equation (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/4-4-the-logistic-equation) · NOAA Fisheries : évaluations des populations (https://www.fisheries.noaa.gov/topic/population-assessments)

Ressources d'apprentissage gratuites

- OpenStax Calculus 2, 4.1 Basics of Differential Equations (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/4-1-basics-of-differential-equations): Section de manuel gratuite.
- OpenStax Calculus 2, 4.2 Direction Fields and Numerical Methods (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/4-2-direction-fields-and-numerical-methods): Méthode d'Euler.
- OpenStax Calculus 2, 4.3 Separable Equations (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/4-3-separable-equations): Mélange et refroidissement.
- OpenStax Calculus 2, 4.4 The Logistic Equation (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/4-4-the-logistic-equation): Modèles de population.

Regarder le cours magistral

Lecture 16: Differential Equations (https://ocw.mit.edu/courses/18-01-single-variable-calculus-fall-2006/resources/lecture-16-differential-equations/) (en anglais)

MIT 18.01 Single Variable Calculus (Fall 2006), MIT OpenCourseWare. Licence : CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Conditions d'utilisation (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Lien fourni uniquement pour l'étude gratuite ; Saving Planets n'est ni affilié à cette université ni soutenu par elle.

- [ ] **J’ai terminé cette unité**

Suites et séries

Quand l’addition d’une infinité de nombres donne-t-elle un total fini ? Séries géométriques, série harmonique et critères de convergence.

Objectifs d’apprentissage

À la fin de cette unité, vous saurez :

- Trouver les limites de suites.
- Calculer la somme de séries géométriques et télescopiques.
- Appliquer les critères de divergence, de l’intégrale, de comparaison, des séries alternées, de d’Alembert et de Cauchy.
- Distinguer convergence absolue et convergence conditionnelle.

Notions clés

- Une série Σa_n converge si ses sommes partielles tendent vers une limite.
- Géométrique : $\Sigma\, ar^n$ $(n \geq 0) = a/(1 - r)$ quand $|r| < 1$.
- Critère de divergence : si a_n ne tend pas vers 0, la série diverge. La réciproque est fausse : la série harmonique $\Sigma 1/n$ diverge.
- La série de Riemann $\Sigma 1/n^p$ converge ssi $p > 1$ (par le critère de l’intégrale).
- Critère de d’Alembert : si $|a_{n+1}/a_n| \to L < 1$, la série converge absolument ; si $L > 1$, elle diverge ; $L = 1$ ne permet pas de conclure.
- Les séries alternées dont les termes décroissent vers 0 convergent ; $\Sigma(-1)^{n+1}/n = \ln 2$.

Équations clés

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}\ (|r| < 1)$$

_n=0^∞ar^n=(a)/(1-r)\ (|r|<1)

Série géométrique

$$\sum \frac{1}{n^p} \text{ converges } \iff p > 1$$

Série de Riemann

$$L = \lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

L=|_n+1a_n|

Exemples résolus pas à pas

Exemple 5.1 Calculez $\Sigma\ (1/2)^n$ à partir de $n = 0$.

1. Géométrique avec $a = 1$, $r = ½$.
2. $1/(1 - ½) = 2$.

Réponse : 2.

Exemple 5.2 Chaque année, un lac perd 10% d’un polluant stocké, et 5 tonnes y sont ajoutées. À quel niveau se stabilise-t-il ?

1. Après de nombreuses années, la quantité vaut $5 + 5(0.9) + 5(0.9)^2 + \ldots$
2. Géométrique : $5/(1 - 0.9)$.

Réponse : 50 tonnes. Diviser par deux l’apport annuel divise par deux le niveau à long terme (modèle simplifié).

Exemple 5.3 $\Sigma\ n/2^n$ converge-t-elle ?

1. Rapport : $[(n + 1)/2^{n+1}]/[n/2^n] = (n + 1)/(2n) \to ½$.
2. $½ < 1$.

Réponse : Converge (sa somme vaut 2).

Exercices

Faites chacun d’abord sur papier, puis vérifiez.

1. $\Sigma\ 0.9(0.1)^n$ à partir de $n = 0$

   $0.9/(1 - 0.1) = 1$. So $0.999\ldots = 1$.

2. $\Sigma\ 1/n^2$ converge-t-elle ?

   Oui, $p = 2 > 1$ (la somme vaut $\pi^2/6$).

3. $\Sigma\ n/(n + 1)$ converge-t-elle ?

   Non : les termes $\to 1$, et non 0 (critère de divergence).

4. Calculez $\Sigma\, 3(2/3)^n$ à partir de n = 0.

   $3/(1 - 2/3) = 9$.

5. $\Sigma\, (-1)^{n+1}/n$ converge-t-elle absolument ?

   Non. Elle converge (vers ln 2), mais $\Sigma 1/n$ diverge, donc la convergence est conditionnelle.

Idées reçues fréquentes

Idée reçue : Si les termes tendent vers 0, la série converge.
En réalité : La série harmonique est le contre-exemple.

Idée reçue : Une limite égale à 1 dans le critère de d'Alembert signifie divergence.
En réalité : L = 1 ne permet pas de conclure ; utilisez un autre critère.

Idée reçue : Réordonner les termes ne change jamais une somme.
En réalité : Pour les séries semi-convergentes, cela peut la changer.

Cartes mémoire

Suite

Une liste ordonnée a_1, a_2, ...

Série

Somme d'une suite ; limite des sommes partielles.

Série géométrique

$a/(1 - r)$ pour $|r| < 1$.

Série harmonique

$\Sigma 1/n$, diverge.

Critère de d'Alembert

$L < 1$ converge, $L > 1$ diverge, $L = 1$ on ne peut pas conclure.

Convergence conditionnelle

Converge, mais pas absolument.

Quiz d'autocontrôle

1. $\Sigma\, (1/3)^n$ à partir de n = 0 =

1/3

3/2

3

2

3/2. 1/(1 − 1/3).

2. La série harmonique Σ1/n…

converge vers 1

diverge

converge vers ln 2

converge vers e

diverge. p = 1, critère de l’intégrale.

3. Σ 1/n^1.01…

converge

diverge

on ne peut pas trancher

vaut 1

converge. p > 1.

4. Le critère de d’Alembert pour Σ 1/n! donne L =

1

0

∞

1/2

0. 1/(n + 1) → 0, donc elle converge.

Refaire ce quiz

Comment cela aide à sauver la planète

Les séries géométriques décrivent tout ce qui est partiellement reporté d'une période à la suivante, comme dans l'exemple 5.2. Ce modèle simple montre un fait essentiel de la pollution et des gaz à effet de serre : le niveau à long terme dépend du rythme des apports, donc réduire les apports abaisse le niveau d'équilibre.

Les systèmes réels sont plus complexes qu'une seule série géométrique, et les scientifiques utilisent des modèles complets, mais la série donne la bonne première intuition.

Sur Saving Planets : Prévision des proliférations d'algues du lac Érié · Pôle Lacs

Sources : OpenStax Calculus 2, 5.2 Infinite Series (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/5-2-infinite-series) · NOAA GML : tendances du CO_2 atmosphérique (en anglais) (https://gml.noaa.gov/ccgg/trends/)

Ressources d'apprentissage gratuites

- OpenStax Calculus 2, 5.1 Sequences (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/5-1-sequences): Section de manuel gratuite.
- OpenStax Calculus 2, 5.2 Infinite Series (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/5-2-infinite-series): Séries géométriques et télescopiques.
- OpenStax Calculus 2, 5.6 Ratio and Root Tests (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/5-6-ratio-and-root-tests): Critères de d'Alembert et de Cauchy.

☐ **J'ai terminé cette unité**

Séries entières et séries de Taylor

Transformer des fonctions en polynômes infinis. Les séries de Taylor sont la façon dont les calculatrices calculent, et dont les physiciens simplifient les problèmes difficiles.

Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette unité, vous saurez :

- Trouver le rayon et l'intervalle de convergence d'une série entière.
- Construire des séries et des polynômes de Taylor et de Maclaurin.
- Majorer l'erreur d'une approximation de Taylor.
- Utiliser des séries pour approcher des intégrales et pour justifier les approximations des petits angles.

Notions clés

- Une série entière $\Sigma c_n(x-a)^n$ converge à l'intérieur d'un rayon R et diverge à l'extérieur ; vérifiez les bornes séparément.
- Série de Taylor : $c_n = f^{(n)}(a)/n!$. Autour de a = 0, on l'appelle série de Maclaurin.
- Séries clés : $e^x = \Sigma x^n/n!$, $\sin x = x - x^3/3! + x^5/5! - \ldots$, $\cos x = 1 - x^2/2! + x^4/4! - \ldots$, $\ln(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 - \ldots$ ($|x| < 1$).
- Reste de Taylor : l'erreur est au plus $M|x-a|^{n+1}/(n+1)!$, où M majore la dérivée suivante.
- Ne garder que le premier terme transforme $\sin\theta$ en θ : c'est l'approximation des petits angles derrière la formule du pendule simple.

Équations clés

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

`f(x)=_n=0^∞^(n)(a)n!(x-a)^n`

Série de Taylor

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

`e^x=_n=0^∞(x^n)/(n!)`

Série exponentielle

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

x=x-(x^3)/(3!)+(x^5)/(5!)-·s

Série du sinus

$$|R_n(x)| \le \frac{M|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Majoration du reste de Taylor

Exemples résolus pas à pas

Exemple 6.1 Estimez e^0.1 avec les quatre premiers termes de sa série.

1. 1 + 0.1 + 0.01/2 + 0.001/6.
2. = 1.105167.

Réponse : 1.105167, contre la valeur exacte 1.105171.

Exemple 6.2 Estimez sin 0.5 avec trois termes et majorez l'erreur.

1. 0.5 − 0.125/6 + 0.03125/120 = 0.479427.
2. Majoration par le terme suivant : $0.5^7/7! = 1.55 \times 10^{-6}$.

Réponse : 0.479427, erreur inférieure à 1.6×10^{-6} (valeur exacte 0.479426).

Exemple 6.3 Trouvez le rayon de convergence de $\Sigma\, x^n/3^n$.

1. Rapport : $|x|/3 < 1$.
2. Les bornes $x = \pm 3$ donnent des termes ± 1, qui ne tendent pas vers 0.

Réponse : $R = 3$; elle converge pour $-3 < x < 3$.

Exercices

Faites chacun d'abord sur papier, puis vérifiez.

1. Écrivez le polynôme de Maclaurin de degré 4 de cos x et utilisez-le pour cos 0.2.

   $1 - x^2/2 + x^4/24$; $\cos 0.2 \approx 1 - 0.02 + 0.0000667 = 0.980067$ (valeur exacte 0.980067).

2. Trouvez la série de Maclaurin de 1/(1 − x).

Σx^n pour $|x| < 1$ (géométrique).

3. Trouvez le rayon de convergence de $\Sigma\, x^n/n$.

   $R = 1$ (rapport $n/(n + 1) \to 1$).

4. Utilisez une série pour estimer $\int_0^1 e^{\wedge}(-x^2)\, dx$ avec trois termes.

   $\int(1 - x^2 + x^4/2)\, dx = 1 - 1/3 + 1/10 = 0.7667$. Davantage de termes s'approchent de 0.7468.

Idées reçues fréquentes

Idée reçue : Un polynôme de Taylor est précis partout.

En réalité : Il est meilleur près du centre a et peut être très mauvais loin de celui-ci ou hors du rayon de convergence.

Idée reçue : Toute fonction lisse est égale à sa série de Taylor.

En réalité : Pas toujours, même si c'est vrai partout pour e^x, sin x et cos x.

Idée reçue : Le rayon de convergence décide aussi des bornes.

En réalité : Les bornes doivent être vérifiées séparément.

Cartes mémoire

Série entière

$\Sigma c_n(x - a)^n$.

Rayon de convergence

R tel que la série converge pour $|x - a| < R$.

Coefficient de Taylor

$f^{(n)}(a)/n!$.

Série de Maclaurin

Série de Taylor en $a = 0$.

Approximation des petits angles

$\sin \theta \approx \theta$, $\cos \theta \approx 1 - \theta^2/2$.

Majoration du reste

$M|x - a|^{n+1}/(n + 1)!$.

Quiz d'autocontrôle

1. La série de Maclaurin de e^x est…

Σx^n

$\Sigma x^n/n!$

$\Sigma(-1)^n x^n$

$\Sigma x^n/n$

$\Sigma x^n/n!$. Toutes les dérivées de e^x en 0 valent 1.

2. Pour θ petit, $\sin \theta \approx$...

1

θ

θ^2

$1 - \theta$

θ. Le premier terme de la série.

3. Le coefficient de x^3 dans la série de sin x est...

1/3

−1/6

1/6

−1/3

−1/6. −1/3!.

4. Σx^n converge pour...

tout x

$|x| < 1$

$|x| \leq 1$

$x > 0$

$|x| < 1$. Série géométrique.

Refaire ce quiz

Comment cela aide à sauver la planète

Les séries de Taylor permettent aux physiciens de transformer des équations difficiles en équations utilisables. La période du pendule $T = 2\pi\sqrt{(L/g)}$ en Physique I repose sur $\sin\theta \approx \theta$, et le même type de linéarisation sous-tend une grande partie de l'analyse des vibrations des éoliennes, des ponts et des avions par les ingénieurs.

Les modèles d'orbites de satellites et de climat développent des effets compliqués en séries et gardent les termes qui comptent. Connaître la majoration de l'erreur indique quand une approximation est assez bonne pour qu'on s'y fie.

Sur Saving Planets : Physique I, unité 8 : oscillations · Calculateur de période d'un pendule

Sources : OpenStax Calculus 2, 6.3 Taylor and Maclaurin Series (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/6-3-taylor-and-maclaurin-series) · OpenStax University Physics 1, 15.4 Pendulums (en anglais) (https://openstax.org/books/university-physics-volume-1/pages/15-4-pendulums)

Ressources d'apprentissage gratuites

- OpenStax Calculus 2, 6.3 Taylor and Maclaurin Series (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/6-3-taylor-and-maclaurin-series): Section de manuel gratuite.
- MIT OpenCourseWare 18.01SC (https://ocw.mit.edu/courses/18-01sc-single-variable-calculus-fall-2010/): Cours et séries d'exercices sur les séries.

Regarder le cours magistral

Lecture 38: Taylor's Series (https://ocw.mit.edu/courses/18-01-single-variable-calculus-fall-2006/resources/lecture-38-taylors-series/) (en anglais)

MIT 18.01 Single Variable Calculus (Fall 2006), MIT OpenCourseWare. Licence : CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Conditions d'utilisation (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Lien fourni uniquement pour l'étude gratuite ; Saving Planets n'est ni affilié à cette université ni soutenu par elle.

☐ J'ai terminé cette unité

Équations paramétriques et coordonnées polaires

Décrire des trajectoires en fonction du temps et des courbes en fonction d’un angle, y compris l’ellipse que suivent chaque satellite et chaque planète.

Objectifs d’apprentissage

À la fin de cette unité, vous saurez :

- Tracer des courbes paramétriques, trouver dy/dx et la longueur d’arc.
- Passer des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes et inversement.
- Trouver des aires et des longueurs d’arc en coordonnées polaires.
- Décrire une orbite képlérienne sous forme polaire.

Notions clés

- Une courbe paramétrique donne x(t) et y(t) ; dy/dx = (dy/dt)/(dx/dt).
- Longueur d’arc : ∫√(x'² + y'²) dt.
- Polaires : x = r cos θ, y = r sin θ. Aire d’une région polaire : ½∫r² dθ.
- Une orbite autour d’un foyer s’écrit r = p/(1 + e cos θ), où e est l’excentricité.
- La deuxième loi de Kepler (des aires égales en des temps égaux) revient à dire que ½r² dθ/dt est constant.

Équations clés

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

`dy/dx=(dy/dt)/(dx/dt)`

Pente d’une courbe paramétrique

$$L = \int_a^b \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\, dt$$

`L=_a^b(x')^2+(y')^2 dt`

Longueur d’arc paramétrique

$$A = \tfrac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2\, d\theta$$

`A=12_α^β r^2 dθ`

Aire en polaires

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$$

`r=(a(1-e^2))/(1+eθ)`

Orbite conique sous forme polaire

Exemples résolus pas à pas

Exemple 7.1 Trouvez la pente de x = t², y = t³ en t = 1.

1. dx/dt = 2t, dy/dt = 3t².
2. dy/dx = 3t²/(2t) = 3t/2 = 3/2 en t = 1.

Réponse : 3/2.

Exemple 7.2 Trouvez l'aire à l'intérieur de la cardioïde r = 1 + cos θ.

1. A = ½∫₀^(2π) (1 + cos θ)² dθ.
2. = ½∫(1 + 2cos θ + cos²θ) dθ = ½(2π + 0 + π).

Réponse : 3π/2 ≈ 4.71.

Exemple 7.3 L'orbite terrestre a a = 149.6 millions de km et e = 0.0167. Trouvez ses distances minimale et maximale au Soleil.

1. At θ = 0: r = a(1 − e) = 149.6 × 0.9833.
2. At θ = π: r = a(1 + e) = 149.6 × 1.0167.

Réponse : Environ 147.1 et 152.1 millions de km, en accord avec le périhélie et l'aphélie publiés par la NASA.

Exercices

Faites chacun d'abord sur papier, puis vérifiez.

1. Trouvez la longueur de x = cos t, y = sin t pour 0 ≤ t ≤ 2π.

   ∫√(sin²t + cos²t) dt = 2π (la circonférence d'un cercle).

2. Trouvez l'aire du cercle r = 3.

$\frac{1}{2}\int_0^{(2\pi)} 9\, d\theta = 9\pi$.

3. Convertissez $r = 2\cos\theta$ en forme cartésienne.

   $r^2 = 2r\cos\theta$ donne $x^2 + y^2 = 2x$: un cercle de rayon 1 centré en (1, 0), d'aire π.

4. Éliminez t de $x = 2\cos t$, $y = \sin t$.

   $x^2/4 + y^2 = 1$, une ellipse.

Idées reçues fréquentes

Idée reçue : $dy/dx = dy/dt \times dx/dt$.

En réalité : Diviser : $(dy/dt)/(dx/dt)$.

Idée reçue : L'aire en polaires vaut $\int r\, d\theta$.

En réalité : Elle vaut $\frac{1}{2}\int r^2\, d\theta$, à partir de fines parts de tarte.

Idée reçue : Le Soleil est au centre de l'orbite terrestre.

En réalité : Il est à l'un des foyers de l'ellipse.

Cartes mémoire

Courbe paramétrique

$x = x(t)$, $y = y(t)$.

Pente paramétrique

$(dy/dt)/(dx/dt)$.

Coordonnées polaires

(r, θ) ; $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

Aire en polaires

$\frac{1}{2}\int r^2\, d\theta$.

Excentricité

$e = 0$ cercle, $0 < e < 1$ ellipse.

Deuxième loi de Kepler

Des aires égales en des temps égaux.

Quiz d'autocontrôle

1. L'aire en polaires utilise…

$\int r\, d\theta$

$\frac{1}{2}\int r^2\, d\theta$

$\int r^2\, d\theta$

$2\pi \int r\, d\theta$

$\frac{1}{2}\int r^2\, d\theta$. Chaque tranche est approximativement un secteur d'aire $\frac{1}{2} r^2\, d\theta$.

2. $x = r \cos \theta$, $y = \ldots$

$r \tan \theta$

$r \sin \theta$

$\theta \sin r$

r/θ

$r \sin \theta$. Des polaires aux cartésiennes.

3. Pour une orbite $r = p/(1 + e \cos \theta)$, $e = 0$ donne…

une parabole

un cercle

une droite

une hyperbole

un cercle. $r = p$ est constant.

4. La deuxième loi de Kepler dit que $r^2\, d\theta/dt$ est…

zéro

constant

croissante

égal à e

constant. Des aires égales en des temps égaux.

Refaire ce quiz

Comment cela aide à sauver la planète

Chaque satellite d'observation de la Terre suit une trajectoire décrite par l'équation polaire de l'orbite de cette unité. Les concepteurs de missions choisissent la forme et l'inclinaison de l'orbite pour que les instruments repassent aux mêmes endroits sous un éclairage similaire, ce qui facilite la détection des changements au sol.

Les équations paramétriques décrivent la trace au sol qu'un satellite dessine sur la Terre, ce qui détermine quelles forêts, quelles côtes et quelles calottes glaciaires il peut voir, et quand.

Sur Saving Planets : Guide des orbites · Landsat 9

Sources : Fiche NASA sur la Terre (en anglais) (https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/earthfact.html) · OpenStax Calculus 2, 7.4 Area and Arc Length in Polar Coordinates (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/7-4-area-and-arc-length-in-polar-coordinates)

Ressources d'apprentissage gratuites

- OpenStax Calculus 2, 7.1 Parametric Equations (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/7-1-parametric-equations): Section de manuel gratuite.
- OpenStax Calculus 2, 7.3 Polar Coordinates (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/7-3-polar-coordinates): Graphes polaires.
- OpenStax Calculus 2, 7.4 Area and Arc Length in Polar Coordinates (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/7-4-area-and-arc-length-in-polar-coordinates): Aire et longueur en polaires.
- PhET : Kepler's Laws (https://phet.colorado.edu/en/simulations/keplers-laws): Orbites, aires et périodes.

Regarder le cours magistral

Lecture 31: Parametric Equations (https://ocw.mit.edu/courses/18-01-single-variable-calculus-fall-2006/resources/lecture-31-parametric-equations/) (en anglais)

MIT 18.01 Single Variable Calculus (Fall 2006), MIT OpenCourseWare. Licence : CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Conditions d'utilisation (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Lien fourni uniquement pour l'étude gratuite ; Saving Planets n'est ni affilié à cette université ni soutenu par elle.

☐ **J'ai terminé cette unité**

Exercices

Ces exercices sont dans chaque unité. Faites-les sur papier, puis ouvrez la réponse.

1. Techniques d'intégration
   5 exercices

2. Applications : volume, longueur d’arc, travail et centre de masse
   4 exercices
3. Intégrales impropres
   5 exercices
4. Introduction aux équations différentielles
   4 exercices
5. Suites et séries
   5 exercices
6. Séries entières et séries de Taylor
   4 exercices
7. Équations paramétriques et coordonnées polaires
   4 exercices

Travaux pratiques sur ordinateur

Quatre courts travaux pratiques sur ordinateur appliquent les unités avec un tableur : la méthode d’Euler pour un modèle de population, la méthode de Simpson pour le volume d’un réservoir, la précision des séries de Taylor, et la deuxième loi de Kepler en coordonnées polaires.

Ce sont les méthodes numériques que les scientifiques et les ingénieurs utilisent chaque jour. Les données d’exemple sont signalées comme telles ; chaque TP renvoie à sa source.

Référence de sécurité : OpenStax Calculus Volume 2 (manuel gratuit) (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/1-introduction)

TP A : méthode d’Euler pour un stock de poissons en reconstitution

SEMAINE 8

Objectif : Résoudre numériquement l’équation logistique et comparer avec la solution exacte.

$$P_{n+1} = P_n + h\,r P_n \left(1 - \frac{P_n}{K}\right)$$

```
P_n+1=P_n+h rP_n(1-(P_n)/(K))
```

Méthode d’Euler pour l’équation logistique

Mode opératoire

1. Fixez r = 0.5, K = 1000, P_0 = 100 et h = 1 dans un tableur.
2. Recopiez vers le bas les pas d’Euler jusqu’à t = 4.
3. Ajoutez une colonne avec la solution exacte et l’erreur.
4. Recommencez avec h = 0.5 et h = 0.25 ; comment l’erreur évolue-t-elle ?

Tableau de données

t	P d’Euler (h = 1)
0	100
1	145.0
2	207.0
3	289.1
4	391.9

Valeurs calculées par le modèle (pas une pêcherie réelle). P(4) exact = 450.9.

Exemple de calcul

1. P_1 = 100 + 0.5 × 100 × 0.9 = 145.0.
2. P_2 = 145 + 0.5 × 145 × 0.855 = 207.0.
3. Ici, Euler sous-estime (391.9 contre 450.9) car la courbe s’incurve vers le haut au début de la croissance ; diviser h par deux divise à peu près l’erreur par deux.

> **Sécurité**
>
> - Aucune, au-delà d’un usage normal de l’ordinateur.

Alternative à la maison ou virtuelle

- Un tableur suffit.

OpenStax Calculus 2, 4.2 Direction Fields and Numerical Methods (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/4-2-direction-fields-and-numerical-methods)

Lien avec la planète : Les modèles numériques de population aident à la gestion des pêches.
NOAA Fisheries : évaluations des populations (https://www.fisheries.noaa.gov/topic/population-assessments)

☐ **J’ai terminé ce TP (réel ou virtuel)**

TP B : volume d’un réservoir par la méthode de Simpson

SEMAINE 5

Objectif : Estimer le volume d’un réservoir à partir de mesures de la surface à différentes profondeurs.

$$V = \int_0^H A(h)\,dh \approx \frac{\Delta h}{3}[A_0 + 4A_1 + 2A_2 + 4A_3 + A_4]$$

V=_0^HA(h) dh≈Δ h3[A_0+4A_1+2A_2+4A_3+A_4]

Le volume comme intégrale de l’aire de la section

Mode opératoire

1. Saisissez les aires d’exemple à 0, 2, 4, 6 et 8 m au-dessus du fond.
2. Appliquez la méthode de Simpson avec Δh = 2 m.
3. Comparez avec la méthode des trapèzes.

Tableau de données

Hauteur h (m)	Surface A (km²)
0	0.0
2	1.2
4	2.6
6	4.0
8	5.6

Valeurs d’exemple pour s’entraîner, pas un réservoir réel.

Exemple de calcul

1. Simpson : (2/3)[0 + 4(1.2) + 2(2.6) + 4(4.0) + 5.6] = (2/3)(31.6) = 21.07 km²·m.
2. 1 km²·m = 10^6 m³, donc V ≈ 2.11 × 10^7 m³ (21 millions de mètres cubes).
3. Trapèzes : 2[0/2 + 1.2 + 2.6 + 4.0 + 5.6/2] = 21.2 km²·m, proche de Simpson.

> **Sécurité**
>
> - Aucune, au-delà d’un usage normal de l’ordinateur.

Alternative à la maison ou virtuelle

- Un tableur suffit.

NASA : mission SWOT (https://swot.jpl.nasa.gov/)

Lien avec la planète : Les satellites dédiés aux eaux de surface, comme SWOT, aident à estimer les variations de l'eau stockée dans les lacs et les réservoirs.

☐ **J'ai terminé ce TP (réel ou virtuel)**

TP C : quelle est la qualité d'un polynôme de Taylor ?

SEMAINE 13

Objectif : Comparer les polynômes de Taylor de sin x avec la valeur exacte et avec la majoration du reste.

$$P_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

```
P_5(x)=x-(x^3)/(6)+(x^5)/(120)
```

Polynôme de Maclaurin de degré 5 de sin x

Mode opératoire

1. Tabulez sin x, $P_1 = x$, P_3 et P_5 pour x de 0 à π par pas de 0.25.
2. Tracez les erreurs.
3. Trouvez à partir d'où l'approximation des petits angles sin x ≈ x est fausse de 1%.

Tableau de données

x	sin x	$P_5(x)$
0.5	0.479426	0.479427
1.0	0.841471	0.841667
2.0	0.909297	0.933333

Valeurs calculées.

Exemple de calcul

1. En x = 0.5, P_5 se trompe d'environ 10^{-6} ; en x = 2, de 0.024. La précision chute vite quand on s'éloigne de 0.
2. sin x ≈ x reste à moins de 1% jusqu'à environ x = 0.24 rad (14°), c'est pourquoi la formule du pendule s'utilise pour de petites oscillations.

> **Sécurité**
>
> - Aucune, au-delà d'un usage normal de l'ordinateur.

Alternative à la maison ou virtuelle

- Les curseurs de Desmos fonctionnent bien.

PhET : Pendulum Lab (https://phet.colorado.edu/en/simulations/pendulum-lab)

Lien avec la planète : Connaître l'erreur d'une approximation, c'est ce qui permet aux ingénieurs de décider à quel modèle simplifié se fier.

☐ **J'ai terminé ce TP (réel ou virtuel)**

TP D : deuxième loi de Kepler en coordonnées polaires

SEMAINE 14

Objectif : Montrer numériquement qu'une orbite elliptique balaie l'aire plus vite par unité d'angle près du foyer, mais à un rythme constant dans le temps.

$$A(\theta_1, \theta_2) = \tfrac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} r(\theta)^2\, d\theta, \quad r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$$

`A(θ_1,θ_2)=12_θ_1^θ_2r(θ)^2 dθ, r=(a(1-e^2))/(1+eθ)`

Aire balayée par une orbite

Mode opératoire

1. Prenez a = 1 et e = 0.5.
2. Calculez l'aire balayée de θ = 0 à 0.5 et de θ = π − 0.25 à π + 0.25 (même largeur de 0.5 rad) par la méthode de Simpson.
3. Expliquez pourquoi des angles égaux ne donnent pas des aires égales, et prennent donc des temps inégaux.

Tableau de données

Arc	Aire balayée
θ = 0 à 0.5 (près du Soleil)	0.0643
θ = π ± 0.25 (côté éloigné)	0.5513

Valeurs calculées pour a = 1, e = 0.5.

Exemple de calcul

1. Près du Soleil r ≈ 0.5, du côté éloigné r ≈ 1.5 : l'aire ∝ r², donc l'arc éloigné balaie environ 8.6 fois plus d'aire (0.5513 ÷ 0.0643).
2. Comme l'aire croît à un rythme constant dans le temps, la planète met environ 8.6 fois plus longtemps à parcourir les 0.5 rad éloignés : elle se déplace le plus lentement à l'aphélie.

> **Sécurité**
>
> - Aucune, au-delà d'un usage normal de l'ordinateur.

Alternative à la maison ou virtuelle

- Un tableur ou Desmos suffit.

PhET : Kepler’s Laws (https://phet.colorado.edu/en/simulations/keplers-laws)

Lien avec la planète : La géométrie de l’orbite détermine quand un satellite peut voir un lieu sur Terre.

☐ **J’ai terminé ce TP (réel ou virtuel)**

Séries d’entraînement aux examens

Chronométrez-vous : environ 10 minutes par problème. Comparez ensuite avec les solutions complètes.

Série d’entraînement de mi-parcours (unités 1–3)

1. Calculez $\int_0^1 x^2 e^x \, dx$.
    1. Deux fois par parties : $\int x^2 e^x \, dx = (x^2 - 2x + 2)e^x$.
    2. De 0 à 1 : $e - 2$.

    Réponse : $e - 2 \approx 0.718$.

2. Calculez $\int_0^1 x/(x + 1) \, dx$.
    1. $x/(x + 1) = 1 - 1/(x + 1)$.
    2. $[x - \ln(x + 1)]_0^1 = 1 - \ln 2$.

    Réponse : $1 - \ln 2 \approx 0.307$.

3. Trouvez le volume obtenu en faisant tourner autour de l’axe des x la région sous $y = x^2$, $0 \le x \le 2$.
    1. Disques : $\int_0^2 \pi x^4 \, dx = \pi \times 32/5$.

    Réponse : $32\pi/5 \approx 20.1$.

4. Calculez $\int_2^\infty dx/x^3$.
    1. $[-1/(2x^2)]_2^\infty = 1/8$.

    Réponse : $1/8$.

Série d’entraînement finale (toutes les unités)

1. Résolvez $y' = -2y$, $y(0) = 5$, et trouvez $y(1)$.
    1. $y = 5e^{(-2t)}$.

    Réponse : $5e^{(-2)} \approx 0.677$.

2. Calculez $\Sigma \, 3(2/3)^n$ à partir de $n = 0$.

1. Géométrique : 3/(1 − 2/3).

Réponse : 9.

3. Estimez cos 0.2 avec le polynôme de Maclaurin de degré 4.

1. 1 − 0.04/2 + 0.0016/24.

Réponse : 0.980067.

4. Trouvez l’aire à l’intérieur de r = 3.

1. ½∫₀^(2π) 9 dθ.

Réponse : 9π ≈ 28.3.

5. Trouvez l’intervalle de convergence de Σ xⁿ/3ⁿ.

1. Rapport : |x|/3 < 1 ; les bornes divergent.

Réponse : −3 < x < 3.

6. Le polluant d’une cuve de mélange suit S' = −S/50 avec S(0) = 20 kg. Quand a-t-on S = 5 kg ?

1. S = 20e^(−t/50) ; e^(−t/50) = 1/4.
2. t = 50 ln 4.

Réponse : ≈ 69.3 unités de temps.

Fiche de formules

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\sin^2 x = \tfrac{1}{2}(1-\cos 2x),\ \cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1+\cos 2x)$$

$$S_n = \tfrac{\Delta x}{3}[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + \cdots + f_n]$$

$$V = \int \pi f^2\,dx,\ V = \int 2\pi x f\,dx$$

$$L = \int \sqrt{1 + f'^2}\,dx$$

$$W = \int F\,dx$$

$$\int_1^\infty x^{-p}dx < \infty \iff p > 1$$

$$y' = ky \Rightarrow y = y_0 e^{kt}$$

$$P' = rP(1 - P/K)$$

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$$

$$\sum ar^n = a/(1-r)$$

$$L = \lim |a_{n+1}/a_n|$$

$$e^x = \sum x^n/n!$$

$$\sin x = \sum (-1)^n x^{2n+1}/(2n+1)!$$

$$\cos x = \sum (-1)^n x^{2n}/(2n)!$$

$$dy/dx = (dy/dt)/(dx/dt)$$

$$A = \tfrac{1}{2}\int r^2\,d\theta$$

Constantes

Constante	Valeur
e	2.718281828…
π	3.141592654…
ln 2	0.693147…
Excentricité de l’orbite terrestre	0.0167
Demi-grand axe de la Terre	149.6 millions de km
Masse volumique de l’eau	1,000 kg/m³

Source : Fiche NASA sur la Terre (en anglais) (https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/earthfact.html)

Outils de tracé et de données

Utilisez ces outils gratuits en parallèle du cours.

- Calculatrice graphique Desmos (en anglais) (https://www.desmos.com/calculator): Tracer des courbes paramétriques et polaires, des curseurs et des polynômes de Taylor.
- MIT OpenCourseWare 18.01SC (https://ocw.mit.edu/courses/18-01sc-single-variable-calculus-fall-2010/): Cours et séries d’exercices gratuits du MIT sur l’intégration et les séries.
- MIT OpenCourseWare 18.02SC (https://ocw.mit.edu/courses/18-02sc-multivariable-calculus-fall-2010/): Le cours suivant : analyse à plusieurs variables.

Glossaire

Longueur d’arc
Longueur d’une courbe, ∫√(1 + f'²) dx.

Capacité de charge

Limite à long terme K d’une population logistique.

Centre de masse
Point d’équilibre ; moment divisé par la masse.

Convergence conditionnelle
Converge, mais la série des valeurs absolues diverge.

Équation différentielle
Équation faisant intervenir les dérivées d’une fonction inconnue.

Excentricité
À quel point une orbite est étirée.

Méthode d’Euler
Résolution numérique pas à pas d’une ED.

Série géométrique
Σar^n.

Intégrale impropre
Intégrale avec une borne ou une intégrande infinie.

Intégration par parties
$\int u\,dv = uv - \int v\,du$.

Équation logistique
$P' = rP(1 - P/K)$.

Série de Maclaurin
Série de Taylor en 0.

Équations paramétriques
x et y donnés en fonction de t.

Fractions partielles
Décomposition d’une fraction rationnelle en termes plus simples.

Coordonnées polaires
Position donnée par une distance r et un angle θ.

Série entière
$\Sigma c_n(x - a)^n$.

Rayon de convergence
Distance au centre à l’intérieur de laquelle une série entière converge.

Équation à variables séparables
ED pouvant s’écrire $g(y)\,dy = h(x)\,dx$.

Méthode de Simpson
Intégration numérique avec des paraboles.

Série de Taylor
$\Sigma f^{(n)}(a)(x - a)^n/n!$.

Grille d’autoévaluation

Aucune note ni aucun crédit ne sont attribués. Utilisez cette grille pour juger honnêtement où vous en êtes dans chaque unité.

Niveau	À quoi cela ressemble
4 · Maîtrise	Choisit de lui-même la bonne technique ou le bon critère, le justifie et vérifie les résultats numériquement.
3 · Compétent	Résout les exercices d’entraînement avec quelques erreurs occasionnelles.
2 · En progression	Suit les exemples corrigés mais a du mal à choisir une méthode.
1 · Débutant	Applique les formules sans vérifier les conditions ; doit revoir l’unité.

Pondération suggérée si vous voulez une note

Partie	Poids
Exercices	30%
Travaux pratiques sur ordinateur	15%
Série d’entraînement de mi-parcours	25%
Série d’entraînement finale	30%

Visez le niveau 3 ou mieux dans chaque unité avant de passer au cours suivant.

Cours associés

- Analyse I MATH 110
- Introduction à l’ingénierie aérospatiale AERO 101
- Chimie générale I + TP CHEM 110 + CHEM 110L
- Tous les cours