Última actualización: November 1, 2026

🗺️ Ruta de cuatro años · Año 1, Primavera

Sobre este curso

Este curso gratuito tiene 7 unidades y 4 laboratorios. Son los totales reales, no un programa más largo recortado.

Una comprobación es un número o un resultado de código en una página de curso que un script vuelve a calcular antes de publicar. El número impreso y el recalculado tienen que coincidir.

> Este es el esquema de un curso gratuito de autoestudio escrito por Saving Planets. No es un curso universitario, no otorga créditos académicos y ninguna institución participa.
>
> Su alcance sigue el segundo semestre de cálculo universitario, tomando como modelo los temas y la profundidad de materiales abiertos como OpenStax Calculus Volume 2 y MIT OpenCourseWare 18.01SC (con ideas paramétricas y polares que conducen a 18.02SC Multivariable Calculus), a los que enlazamos a lo largo del curso. Esas organizaciones no respaldan esta página.
>
> Lo que aportamos: cada unidad se conecta con problemas reales de agua, energía, ecología y vuelo espacial, cada número de la página se vuelve a calcular con un script de verificación antes de publicarse, y cuatro prácticas de computadora aplican los métodos a datos.
>
> Síguelo en orden. Cada unidad tiene objetivos, ideas clave, ecuaciones, ejemplos paso a paso, práctica con respuestas completas, errores comunes, tarjetas de estudio y un cuestionario. Tu progreso se guarda solo en este navegador.

Cómo ayuda este curso a salvar el planeta

Cálculo II es donde el cálculo empieza a modelar el mundo: el volumen de agua en los embalses, el trabajo para bombearla, cómo un contaminante sale de un lago, cómo se recupera una población de peces y las órbitas elípticas de los satélites que lo observan todo.

Cada unidad termina con una breve sección con fuentes que muestra cómo sus ideas ayudan a las personas y a la naturaleza.

Para docentes

Puedes enseñar este curso o dejar que un estudiante lo haga solo. Es gratis. Saving Planets no pone nota ni da crédito escolar.

- Esta página es el curso completo: 7 unidades y 4 laboratorios (MATH 111).
- Calcula 15 semanas, unas 6 a 9 horas por semana, incluidas las semanas de laboratorio.
- Sigue el calendario de 15 semanas. Lee la unidad, haz la práctica en papel y luego abre la respuesta. En una semana de laboratorio, haz el laboratorio o la versión en casa.
- Una comprobación es un número o un resultado de código en la página que un script vuelve a calcular antes de publicar. El número que ves y el recalculado tienen que coincidir.
- Usa Imprimir esta página, o descarga la guía de estudio en PDF. La hoja de fórmulas está cerca del final.
- Pregunta: ¿cómo ayuda esta unidad a las personas y al planeta? Cada unidad tiene un recuadro verde con un dato y su fuente.
- Copia la plantilla de guía docente y escribe el nombre de tu clase, el tiempo que tienes y las preguntas que harás. Abrir la plantilla de guía docente

Antes de empezar

Requisitos previos

- Cálculo I: límites, derivadas, regla de la cadena, integrales básicas y sustitución, el teorema fundamental.
- Identidades trigonométricas, en especial $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ y las fórmulas del ángulo doble.
- Exponenciales y logaritmos.

Cómo estudiar

- Lee la unidad, ciérrala e intenta los ejemplos resueltos por tu cuenta antes de comprobar cada paso.
- Resuelve cada ejercicio en papel antes de abrir la respuesta.
- En las integrales, comprueba tu respuesta derivándola.
- En las series, decide qué criterio conviene antes de calcular nada.
- Dibuja cada región antes de plantear una integral de volumen o de área.
- Repite los cuestionarios unos días después. La práctica espaciada es mejor que una sesión larga.

Qué necesitas

- Una computadora o tableta con una hoja de cálculo.
- Una calculadora gráfica gratuita como Desmos.
- Opcional: Python con NumPy.

Calendario sugerido de 15 semanas

Unas 6 a 9 horas por semana: lectura, problemas de práctica y, en las semanas de laboratorio, el laboratorio.

Semana	Unidad	Temas	Lectura
1	Técnicas de integración	Integración por partes	OpenStax 3.1
2	Técnicas de integración	Integrales trigonométricas y sustitución	OpenStax 3.2–3.3
3	Técnicas de integración	Fracciones parciales; integración numérica	OpenStax 3.4–3.6
4	Aplicaciones: volumen, longitud de arco, trabajo y centro de masa	Áreas, volúmenes por secciones, discos, arandelas, capas cilíndricas	OpenStax 2.1–2.3
5	Aplicaciones: volumen, longitud de arco, trabajo y centro de masa	Longitud de arco, trabajo, fuerza de un fluido, centros de masa; Práctica B	OpenStax 2.4–2.6
6	Integrales impropias	Integrales impropias y comparación; práctica para el parcial	OpenStax 3.7
7	Introducción a las ecuaciones diferenciales	Ecuaciones diferenciales, campos de direcciones, método de Euler	OpenStax 4.1–4.2
8	Introducción a las ecuaciones diferenciales	Ecuaciones separables y logísticas; Práctica A	OpenStax 4.3–4.4
9	Sucesiones y series	Sucesiones; series infinitas; series geométricas	OpenStax 5.1–5.2
10	Sucesiones y series	Criterios de divergencia, de la integral y de comparación	OpenStax 5.3–5.4
11	Sucesiones y series	Series alternantes; criterios del cociente y de la raíz	OpenStax 5.5–5.6
12	Series de potencias y series de Taylor	Series de potencias y sus propiedades	OpenStax 6.1–6.2
13	Series de potencias y series de Taylor	Series de Taylor y de Maclaurin; Práctica C	OpenStax 6.3–6.4
14	Ecuaciones paramétricas y coordenadas polares	Ecuaciones paramétricas; coordenadas polares y áreas; Práctica D	OpenStax 7.1–7.4
15	Repaso	Repaso y serie de práctica final	Todas las unidades

Tu progreso

Marca las unidades y los laboratorios al terminarlos y haz los cuestionarios. El progreso y las puntuaciones se guardan solo en este navegador y nunca se nos envían.

Unidades

Técnicas de integración

Integración por partes, integrales y sustituciones trigonométricas, fracciones parciales e integración numérica cuando no existe una fórmula.

Objetivos de aprendizaje

Al terminar esta unidad podrás:

- Integrar por partes eligiendo bien u y dv.
- Evaluar integrales trigonométricas y usar sustitución trigonométrica.
- Descomponer funciones racionales en fracciones parciales.
- Aproximar integrales con la regla del trapecio y la regla de Simpson, y estimar el error.

Conceptos clave

- La integración por partes es la regla del producto al revés: ∫u dv = uv − ∫v du. Elige como u lo que se simplifica al derivar (logaritmos, polinomios).
- Las potencias de seno y coseno se resuelven con identidades como sin²x = (1 − cos 2x)/2.
- Para √(a² − x²), sustituye x = a sin θ; para √(a² + x²), x = a tan θ.
- Una función racional propia se separa en fracciones simples cuyas integrales son logaritmos y arcotangentes.
- Muchas integrales, como ∫e^(−x²) dx, no tienen antiderivada elemental. La regla de Simpson suele dar muchas cifras exactas con pocos puntos.

Ecuaciones clave

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

`u dv=uv- v du`

Integración por partes

$$\sin^2 x = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

`^2x=12(1-2x)`

Identidad de reducción de potencias

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1/2}{x - 1} - \frac{1/2}{x + 1}$$

`(1)/(x^2-1)=(1/2)/(x-1)-(1/2)/(x+1)`

Una descomposición en fracciones parciales

$$S_n = \frac{\Delta x}{3}\left[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + \cdots + 4f_{n-1} + f_n\right]$$

`S_n=(Δ x)/(3)[f_0+4f_1+2f_2++4f_n-1+f_n]`

Regla de Simpson (n par)

Ejemplos resueltos paso a paso

Ejemplo 1.1 Calcula $\int_0^1 x\,e^x\,dx$.

1. $u = x$, $dv = e^x\,dx$, así que $du = dx$, $v = e^x$.
2. $\int x\,e^x\,dx = x\,e^x - \int e^x\,dx = (x-1)e^x$.
3. De 0 a 1: $0 - (-1) = 1$.

Respuesta: 1.

Ejemplo 1.2 Calcula $\int_2^3 dx/(x^2-1)$.

1. Fracciones parciales: $\tfrac{1}{2}[1/(x-1) - 1/(x+1)]$.
2. Antiderivada $\tfrac{1}{2}\ln|(x-1)/(x+1)|$.
3. $\tfrac{1}{2}[\ln(2/4) - \ln(1/3)] = \tfrac{1}{2}\ln(3/2)$.

Respuesta: $\tfrac{1}{2}\ln 1.5 \approx 0.2027$.

Ejemplo 1.3 Estima $\int_0^1 e^{(-x^2)}\,dx$ con la regla de Simpson, $n = 4$.

1. $\Delta x = 0.25$; $f = 1,\ 0.93941,\ 0.77880,\ 0.56978,\ 0.36788$.
2. $S_4 = (0.25/3)[1 + 4(0.93941) + 2(0.77880) + 4(0.56978) + 0.36788]$.
3. $S_4 = 0.74686$.

Respuesta: 0.74686, frente al valor real 0.74682: un error de solo 0.00003 con cinco puntos.

Problemas de práctica

Resuelve cada uno primero en papel y luego comprueba.

1. $\int_0^{\pi} x \sin x\,dx$

   Por partes: $[-x\cos x + \sin x]_0^{\pi} = \pi$.

2. $\int_1^{e} x \ln x\,dx$

Por partes con u = ln x: $[x^2 \ln x/2 - x^2/4]_1^e = (e^2 + 1)/4 \approx 2.097$.

3. $\int_0^{(\pi/2)} \sin^2 x\, dx$

   Reducción de potencias: $\frac{1}{2}[x - \sin 2x/2]_0^{(\pi/2)} = \pi/4$.

4. $\int_0^1 \sqrt{(1 - x^2)}\, dx$

   $x = \sin\theta$ da $\int_0^{(\pi/2)} \cos^2\theta\, d\theta = \pi/4$ (un cuarto del disco unitario).

5. $\int_0^1 dx/(1 + x^2)$

   $[\arctan x]_0^1 = \pi/4$.

Ideas erróneas comunes

Mito: Toma siempre como u el primer factor que veas.

En realidad: Elige como u lo que se simplifica al derivar: primero logaritmos y polinomios; exponenciales y funciones trigonométricas como dv.

Mito: Las fracciones parciales funcionan con cualquier función racional.

En realidad: Divide primero si el grado del numerador no es menor que el del denominador.

Mito: Si no encuentro una antiderivada, la integral no tiene valor.

En realidad: Sigue teniendo un valor; estímalo numéricamente.

Tarjetas de estudio

Integración por partes

$\int u\, dv = uv - \int v\, du$.

Sustitución trigonométrica

$\sqrt{(a^2 - x^2)}$: $x = a \sin\theta$.

Fracciones parciales

Separar una función racional en fracciones simples.

Regla del trapecio

Promedio de las sumas por la izquierda y por la derecha; error $\propto \Delta x^2$.

Regla de Simpson

Ajuste parabólico; error $\propto \Delta x^4$.

Integral no elemental

Sin antiderivada expresable por fórmula, p. ej. $\int e^{(-x^2)}\, dx$.

Cuestionario de autoevaluación

1. Para $\int x^2 e^x \, dx$, una buena primera elección de u es…

e^x

x^2

$x^2 e^x$

dx

x^2. x^2 se simplifica al derivar.

2. $\sqrt{(9 - x^2)}$ sugiere la sustitución…

$x = 3 \tan \theta$

$x = 3 \sin \theta$

$x = 3 \sec \theta$

$u = 9 - x^2$

$x = 3 \sin \theta$. $9 - 9 \sin^2\theta = 9 \cos^2\theta$.

3. La regla de Simpson ajusta la curva con…

rectángulos

trapecios

parábolas

solo cúbicas

parábolas. Parábolas que pasan por cada grupo de tres puntos.

4. $\int \ln x \, dx =$

$1/x + C$

$x \ln x - x + C$

$\ln^2 x/2 + C$

$x \ln x + C$

$x \ln x - x + C$. Por partes con $u = \ln x$, $dv = dx$.

Repetir este cuestionario

Cómo ayuda esto a salvar el planeta

La integral de la curva de campana del ejemplo 1.3 no tiene respuesta en forma de fórmula y, sin embargo, está detrás de cada barra de error de un gráfico climático y de cada incertidumbre de una medición satelital. La integración numérica es la forma en que se calcula realmente, ella y la mayoría de las integrales que salen de datos reales.

Métodos como la regla de Simpson permiten convertir mediciones irregulares, como las profundidades de un río a lo ancho de un cauce, en totales como el caudal o el volumen.

En Saving Planets: Cálculo I, Práctica D: integración numérica · Página de Ríos

Fuentes: OpenStax Calculus 2, 3.6 Numerical Integration (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/3-6-numerical-integration) · OpenStax Calculus 2, 3.1 Integration by Parts (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/3-1-integration-by-parts)

Recursos de aprendizaje gratuitos

- OpenStax Calculus 2, 3.1 Integration by Parts (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/3-1-integration-by-parts): Sección de libro de texto gratuita.
- OpenStax Calculus 2, 3.2 Trigonometric Integrals (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/3-2-trigonometric-integrals): Potencias de seno y coseno.
- OpenStax Calculus 2, 3.3 Trigonometric Substitution (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/3-3-trigonometric-substitution): Integrandos con radicales.
- OpenStax Calculus 2, 3.4 Partial Fractions (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/3-4-partial-fractions): Funciones racionales.
- OpenStax Calculus 2, 3.6 Numerical Integration (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/3-6-numerical-integration): Reglas del trapecio y de Simpson con cotas de error.

☐ **Terminé esta unidad**

Aplicaciones: volumen, longitud de arco, trabajo y centro de masa

Cortar, sumar y tomar el límite: volúmenes de sólidos, longitudes de curvas, trabajo contra fuerzas, presión de fluidos y centros de masa.

Objetivos de aprendizaje

Al terminar esta unidad podrás:

- Hallar volúmenes por secciones, discos, arandelas y capas cilíndricas.
- Calcular la longitud de arco.
- Calcular el trabajo de fuerzas variables, incluido el bombeo de líquidos, y la fuerza hidrostática.
- Hallar el centro de masa de varillas y placas delgadas.

Conceptos clave

- Toda aplicación sigue el mismo patrón: aproximar una sección delgada, escribir su contribución, integrar.
- Método de discos: V = ∫π[f(x)]² dx alrededor del eje x. Método de capas: V = ∫2πx f(x) dx alrededor del eje y.
- La longitud de arco suma hipotenusas diminutas: L = ∫√(1 + [f'(x)]²) dx.
- Trabajo = ∫F(x) dx. Bombeo: cada capa de líquido se eleva su propia distancia.
- La presión aumenta con la profundidad, así que la fuerza sobre una presa es una integral sobre la profundidad.
- Centro de masa = momento ÷ masa.

Ecuaciones clave

$$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2\,dx$$

`V=_a^bπ[f(x)]^2 dx`

Método de discos

$$V = \int_a^b 2\pi x\, f(x)\,dx$$

`V=_a^b2π x f(x) dx`

Método de capas cilíndricas

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

`L=_a^b1+[f'(x)]^2 dx`

Longitud de arco

$$W = \int_a^b F(x)\, dx$$

`W=_a^bF(x) dx`

Trabajo de una fuerza variable

$$\bar{x} = \frac{\int x\, \rho(x)\, dx}{\int \rho(x)\, dx}$$

`x=( x ρ(x) dx)/(ρ(x) dx)`

Centro de masa de una varilla

Ejemplos resueltos paso a paso

Ejemplo 2.1 Halla el volumen que se obtiene al girar alrededor del eje x la región bajo y = √x, 0 ≤ x ≤ 4.

1. Discos de radio √x: V = $\int_0^4 \pi\, x\, dx$.
2. $\pi[x^2/2]_0^4 = 8\pi$.

Respuesta: 8π ≈ 25.1 unidades cúbicas.

Ejemplo 2.2 Un tanque cilíndrico de 1 m de radio y 2 m de altura está lleno de agua. ¿Cuánto trabajo cuesta bombear toda el agua por encima del borde?

1. Una capa a la altura y tiene un volumen $\pi(1)^2\, dy$ y un peso de 1000 × 9.81 × π dy newtons, y se eleva 2 − y metros.
2. W = $\int_0^2 9{,}810\pi(2 - y)\, dy = 9{,}810\pi \times 2$.
3. = 19,620π J.

Respuesta: ≈ 61,600 J (61.6 kJ).

Ejemplo 2.3 Una varilla en [0, 2] m tiene densidad ρ(x) = 1 + x kg/m. Halla su centro de masa.

1. Masa: $\int_0^2 (1 + x)\,dx = 2 + 2 = 4$ kg.
2. Momento: $\int_0^2 x(1 + x)\,dx = 2 + 8/3 = 14/3$.
3. $\bar{x} = (14/3)/4 = 7/6$.

Respuesta: $\bar{x} = 7/6 \approx 1.17$ m, hacia el extremo más pesado.

Problemas de práctica

Resuelve cada uno primero en papel y luego comprueba.

1. Usa capas cilíndricas para hallar el volumen que se obtiene al girar alrededor del eje y la región bajo $y = x^2$, $0 \le x \le 1$.

   $V = \int_0^1 2\pi x \cdot x^2\,dx = 2\pi/4 = \pi/2$.

2. Halla la longitud de arco de y = (2/3)x^(3/2) desde x = 0 hasta 3.

   $y' = \sqrt{x}$, así que $L = \int_0^3 \sqrt{(1 + x)}\,dx = (2/3)[(1 + x)^{(3/2)}]_0^3 = (2/3)(8 - 1) = 14/3$.

3. Un resorte con k = 200 N/m se estira 0.10 m desde su longitud en reposo. ¿Cuánto trabajo se realiza?

   $W = \int_0^{0.1} 200x\,dx = 100(0.01) = 1.0$ J.

4. Una compuerta rectangular vertical de 10 m de ancho contiene agua de 5 m de profundidad. Halla la fuerza total del agua sobre ella.

   $F = \int_0^5 \rho g\, y\, (10)\,dy = 1{,}000 \times 9.81 \times 10 \times 25/2 = 1.23 \times 10^6$ N.

Ideas erróneas comunes

Mito: Volumen de revolución = π × área.

En realidad: Hay que elevar el radio al cuadrado dentro de la integral: $\int \pi f^2\,dx$, no $\pi(\int f\,dx)$.

Mito: El trabajo de bombeo es peso × altura del tanque.

En realidad: Cada capa se mueve una distancia diferente, así que hay que integrar.

Mito: El centro de masa es siempre el punto medio.

En realidad: Solo con densidad uniforme y forma simétrica.

Tarjetas de estudio

Método de discos

Método de arandelas

$V = \int \pi\, f(x)^2\, dx$.

$V = \int \pi(R^2 - r^2)\, dx$.

Método de capas cilíndricas

$V = \int 2\pi x\, f(x)\, dx$.

Longitud de arco

$L = \int \sqrt{(1 + f'^2)}\, dx$.

Trabajo

$W = \int F\, dx$.

Centro de masa

Momento dividido entre masa.

Cuestionario de autoevaluación

1. Las capas alrededor del eje y usan el integrando...

$\pi\, f(x)^2$

$2\pi x\, f(x)$

$f(x)^2$

$2\pi\, f(x)$

$2\pi x\, f(x)$. Circunferencia $2\pi x$ × altura $f(x)$ × grosor dx.

2. La longitud de arco usa...

$\int f(x)\, dx$

$\int \sqrt{(1 + f'^2)}\, dx$

$\int f'\, dx$

$\int \pi\, f^2\, dx$

$\int \sqrt{(1 + f'^2)}\, dx$. Pitágoras en cada trocito.

3. La presión hidrostática sobre una presa crece...

con el cuadrado de la profundidad

linealmente con la profundidad

nada

con el ancho de la presa

linealmente con la profundidad. P = ρgh; la fuerza total crece entonces con el cuadrado de la profundidad.

4. El trabajo para estirar un resorte una distancia x desde el reposo es...

kx

$\frac{1}{2}kx^2$

kx^2

2kx

$\frac{1}{2}kx^2$. $\int_0^x kt\,dt$.

Repetir este cuestionario

Cómo ayuda esto a salvar el planeta

Los ingenieros hidráulicos usan estas integrales directamente: el volumen de un embalse a partir de su forma, la energía para bombear el agua adonde se necesita y la fuerza que debe contener una presa o una barrera contra inundaciones. El bombeo es un costo energético importante en muchos sistemas de agua, así que plantear bien la integral ahorra energía y dinero.

Hoy los satélites miden desde la órbita la altura de ríos, lagos y embalses. La misión SWOT de la NASA y el CNES estudia las aguas superficiales para estimar los cambios en el agua almacenada: cortar y sumar a escala planetaria.

En Saving Planets: SWOT · Espacio para el río

Fuentes: OpenStax Calculus 2, 2.5 Physical Applications (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/2-5-physical-applications) · NASA: misión SWOT (https://swot.jpl.nasa.gov/)

Recursos de aprendizaje gratuitos

- OpenStax Calculus 2, 2.2 Determining Volumes by Slicing (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/2-2-determining-volumes-by-slicing): Discos y arandelas.
- OpenStax Calculus 2, 2.3 Volumes of Revolution: Cylindrical Shells (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/2-3-volumes-of-revolution-cylindrical-shells): Capas cilíndricas.

- OpenStax Calculus 2, 2.4 Arc Length of a Curve and Surface Area (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/2-4-arc-length-of-a-curve-and-surface-area): Longitud de arco.
- OpenStax Calculus 2, 2.5 Physical Applications (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/2-5-physical-applications): Trabajo, bombeo y fuerza de fluidos.
- OpenStax Calculus 2, 2.6 Moments and Centers of Mass (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/2-6-moments-and-centers-of-mass): Centroides.

Ver la clase

Clip 1: Introduction to Arc Length (https://ocw.mit.edu/courses/18-01sc-single-variable-calculus-fall-2010/resources/clip-1-introduction-to-arc-length/) (en inglés)

MIT 18.01SC Single Variable Calculus (Fall 2010), MIT OpenCourseWare. Licencia: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Condiciones de uso (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Enlace solo para estudio gratuito; Saving Planets no está afiliado a esta universidad ni cuenta con su respaldo.

☐ **Terminé esta unidad**

Integrales impropias

Integrales sobre intervalos infinitos o a través de picos infinitos: cuándo suman un número finito y cuándo no.

Objetivos de aprendizaje

Al terminar esta unidad podrás:

- Evaluar integrales impropias como límites.
- Decidir la convergencia con el criterio p y la comparación.
- Aplicar integrales impropias a la energía de escape y a las vidas medias.

Conceptos clave

- ∫a^∞ f dx significa el límite de ∫aᵇ f dx cuando b → ∞. Si el límite es finito, la integral converge.
- ∫₁^∞ dx/xᵖ converge exactamente cuando p > 1. ∫₀¹ dx/xᵖ converge exactamente cuando p < 1.
- Comparación: si 0 ≤ f ≤ g y ∫g converge, también converge ∫f.
- Una región infinita puede tener área finita.

Ecuaciones clave

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^{b} f(x)\,dx$$

`_a^∞f(x) dx=_b∞_a^bf(x) dx`

Integral impropia

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1}\ (p>1)$$

`_1^∞(dx)/(x^p)=1p-1\ (p>1)`

Integral p

$$W_{\infty} = \int_R^{\infty} \frac{GMm}{r^2}\,dr = \frac{GMm}{R}$$

`W_∞=_R^∞(GMm)/(r^2) dr=GMm/R`

Trabajo para escapar de la gravedad de un planeta

Ejemplos resueltos paso a paso

Ejemplo 3.1 Evalúa $\int_1^\infty dx/x^2$.

1. $\int_1^b x^{-2}\,dx = 1 - 1/b$.
2. As $b \to \infty$, $1/b \to 0$.

Respuesta: 1 (converge).

Ejemplo 3.2 ¿Converge $\int_1^\infty dx/x$?

1. $\int_1^b dx/x = \ln b$.
2. $\ln b \to \infty$.

Respuesta: No, diverge, aunque $1/x \to 0$.

Ejemplo 3.3 ¿Cuánta energía por kilogramo hace falta para escapar de la gravedad terrestre desde la superficie (sin contar el aire ni la rotación)?

1. $W/m = \int_R^\infty GM/r^2\,dr = GM/R$.
2. $GM = 3.986 \times 10^{14}\ m^3/s^2$, $R = 6.371 \times 10^6$ m.
3. $W/m = 6.26 \times 10^7$ J/kg.

Respuesta: Unos 62.6 MJ por kilogramo, una cantidad finita aunque la distancia sea infinita. Igualando $\tfrac{1}{2}v^2$ a ese valor se obtiene la velocidad de escape de 11.2 km/s.

Problemas de práctica

Resuelve cada uno primero en papel y luego comprueba.

1. $\int_0^\infty e^{-x}\,dx$

   $[-e^{-x}]_0^\infty = 0 + 1 = 1$.

2. $\int_0^1 dx/\sqrt{x}$

   $[2\sqrt{x}]_0^1 = 2$ (converge; $p = \tfrac{1}{2} < 1$).

3. $\int_2^\infty dx/x^3$

   $[-1/(2x^2)]_2^\infty = 1/8$.

4. ¿Converge $\int_1^\infty dx/(x^2 + 1)$?

   Sí: es menor que $1/x^2$, que converge. De hecho, vale $\pi/4$.

5. Para un decaimiento exponencial con tasa λ, la vida media es $\int_0^{\infty} t\,\lambda e^{-\lambda t}\,dt$. Evalúala.

   Por partes: $1/\lambda$.

Ideas erróneas comunes

Mito: Si $f(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$, la integral converge.

En realidad: $1/x \to 0$ pero $\int_1^{\infty} dx/x$ diverge.

Mito: Una región infinitamente larga tiene área infinita.

En realidad: $\int_1^{\infty} dx/x^2 = 1$.

Mito: $\int_{-1}^{1} dx/x^2 = -2$ con la fórmula habitual.

En realidad: El integrando se dispara en 0, así que la integral es impropia, y diverge.

Tarjetas de estudio

Integral impropia

Intervalo infinito o integrando infinito; se define mediante un límite.

Converge

El límite existe y es finito.

Criterio p (∞)

$\int_1^{\infty} x^{-p}$ converge si y solo si $p > 1$.

Criterio p (0)

$\int_0^{1} x^{-p}$ converge si y solo si $p < 1$.

Criterio de comparación

Menor que una convergente ⇒ converge.

Energía de escape

GM/R por kg.

Cuestionario de autoevaluación

1. $\int_1^{\infty} dx/x^{1.5}$...

diverge

converge a 2

converge a 1

converge a 1.5

converge a 2. 1/(p − 1) = 1/0.5 = 2.

2. $\int_1^{\infty} dx/x$...

converge a 1

diverge

converge a 0

es igual a ln 2

diverge. ln b → ∞.

3. $\int_0^{\infty} e^{(-2x)}\, dx$ =

2

1/2

1

∞

1/2. $[-e^{(-2x)/2}]_0^{\infty}$ = 1/2.

4. Una integral impropia se define como...

una suma

un límite de integrales propias

una derivada

siempre infinita

un límite de integrales propias. Toma el límite de $\int_a^b$.

Repetir este cuestionario

Cómo ayuda esto a salvar el planeta

Las integrales impropias dan la energía necesaria para salir de un planeta, la cifra detrás de cada lanzamiento de un satélite meteorológico o climático. Es finita, y por eso el vuelo espacial es posible.

Las vidas medias, también integrales impropias, describen cuánto tiempo permanecen las sustancias: cuánto persiste un contaminante en un lago o cuánto dura un trazador radiactivo usado para datar hielo y agua oceánica.

En Saving Planets: Física I, Unidad 7: órbitas · Calculadora de delta-v

Fuentes: OpenStax Calculus 2, 3.7 Improper Integrals (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/3-7-improper-integrals) · Ficha de la NASA sobre la Tierra (en inglés) (https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/earthfact.html)

Recursos de aprendizaje gratuitos

- OpenStax Calculus 2, 3.7 Improper Integrals (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/3-7-improper-integrals): Sección gratuita del libro de texto con criterios de comparación.

Ver la clase

Lecture 36: Improper Integrals (https://ocw.mit.edu/courses/18-01-single-variable-calculus-fall-2006/resources/lecture-36-improper-integrals/) (en inglés)

MIT 18.01 Single Variable Calculus (Fall 2006), MIT OpenCourseWare. Licencia: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Condiciones de uso (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Enlace solo para estudio gratuito; Saving Planets no está afiliado a esta universidad ni cuenta con su respaldo.

☐ **Terminé esta unidad**

Introducción a las ecuaciones diferenciales

Ecuaciones para tasas de cambio: crecimiento y decaimiento exponencial, enfriamiento, mezclas y el modelo logístico de poblaciones.

Objetivos de aprendizaje

Al terminar esta unidad podrás:

- Verificar soluciones y resolver problemas de valor inicial.
- Leer campos de direcciones y usar el método de Euler.
- Resolver ecuaciones separables, incluidos problemas de mezclas y de enfriamiento.
- Usar la ecuación logística e interpretar su capacidad de carga.

Conceptos clave

- Una ecuación diferencial relaciona una función con sus derivadas. Su solución es una función, normalmente una familia fijada por una condición inicial.
- Ecuaciones separables: pon toda la y de un lado y toda la x del otro, y luego integra.
- y' = ky da $y = y_0 e^{kt}$: crecimiento si k > 0, decaimiento si k < 0.
- Mezclas: tasa de cambio de un contaminante = tasa de entrada − tasa de salida.
- Logística: P' = rP(1 − P/K). El crecimiento se frena a medida que P se acerca a la capacidad de carga K; es máximo en P = K/2.
- El método de Euler avanza siguiendo la pendiente: $y_{n+1} = y_n + h\, f(t_n, y_n)$. Pasos más pequeños, error más pequeño.

Ecuaciones clave

$$\frac{dy}{dt} = ky \;\Rightarrow\; y = y_0 e^{kt}$$

`dy/dt=ky\ \ y=y_0e^kt`

Crecimiento y decaimiento exponencial

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_s)$$

`dT/dt=-k(T-T_s)`

Ley de enfriamiento de Newton

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right), \quad P(t) = \frac{K}{1 + \frac{K - P_0}{P_0} e^{-rt}}$$

dP/dt=rP(1- PK), P(t)=1+(K-P_0)/(P_0)e^-rt

Ecuación logística y su solución

$$y_{n+1} = y_n + h\, f(t_n, y_n)$$

y_n+1=y_n+h f(t_n,y_n)

Método de Euler

Ejemplos resueltos paso a paso

Ejemplo 4.1 Una sección de un lago contiene 1000 m³ de agua con 50 kg de un contaminante disuelto. Entra agua limpia a 10 m³/día y sale agua bien mezclada al mismo ritmo. ¿Cuánto tarda en desaparecer la mitad del contaminante?

1. dS/dt = −(10/1,000)S = −S/100.
2. S(t) = 50e^(−t/100).
3. Mitad: e^(−t/100) = ½, así que t = 100 ln 2.

Respuesta: ≈ 69.3 días (un modelo simplificado, perfectamente mezclado).

Ejemplo 4.2 Una población de peces sigue P' = 0.5P(1 − P/1000) con P(0) = 100. Halla P(4).

1. P(t) = 1,000/(1 + 9e^(−0.5t)).
2. P(4) = 1,000/(1 + 9e^(−2)) = 1,000/2.218.

Respuesta: ≈ 451 peces, cerca del nivel de crecimiento más rápido K/2 = 500.

Ejemplo 4.3 Usa el método de Euler con h = 0.5 para estimar y(1) en y' = y, y(0) = 1.

1. y_1 = 1 + 0.5(1) = 1.5.
2. y_2 = 1.5 + 0.5(1.5) = 2.25.

Respuesta: 2.25, frente al valor exacto e ≈ 2.718; reducir h a la mitad achica el error.

Problemas de práctica

Resuelve cada uno primero en papel y luego comprueba.

1. Un café a 90 °C se enfría en una habitación a 20 °C con k = 0.1 por minuto. Halla su temperatura después de 10 minutos.

T = 20 + 70e^(−1) ≈ 45.8 °C.

2. Resuelve y' = xy con y(0) = 2 y halla y(1).

   dy/y = x dx, así que y = 2e^(x²/2); y(1) = 2e^0.5 ≈ 3.30.

3. Resuelve y' = −2y, y(0) = 5. Halla y(1).

   y = 5e^(−2t); y(1) ≈ 0.677.

4. Para P' = rP(1 − P/K), ¿con qué población es más rápido el crecimiento?

   rP(1 − P/K) es una parábola hacia abajo en P con su vértice en P = K/2.

Ideas erróneas comunes

Mito: La solución de una ecuación diferencial es un número.
En realidad: Es una función (o una familia de funciones).

Mito: El método de Euler da la respuesta exacta si tienes cuidado.
En realidad: Tiene un error que depende del paso; solo converge cuando h → 0.

Mito: Las poblaciones logísticas dejan de crecer en K/2.
En realidad: El crecimiento es máximo en K/2 y solo llega a cero cuando P se acerca a K.

Tarjetas de estudio

Ecuación diferencial

Una ecuación que relaciona una función con sus derivadas.

Problema de valor inicial

Una ED más un valor de partida.

Separable

g(y) dy = h(x) dx.

Ecuación logística

P' = rP(1 − P/K).

Capacidad de carga

K, el límite a largo plazo de una población logística.

Método de Euler

$y_{n+1} = y_n + h\, f(t_n, y_n)$.

Cuestionario de autoevaluación

1. La solución general de y' = 3y es...

$3e^x$

Ce^(3x)

e^(3x) + C

3x + C

Ce^(3x). Separa e integra.

2. En el modelo logístico, K es la...

tasa de crecimiento

población inicial

capacidad de carga

vida media

capacidad de carga. El nivel al que se acerca la población.

3. Un paso de Euler desde (0, 2) con y' = y y h = 0.1 da...

2.1

2.2

2.02

2.0

2.2. 2 + 0.1 × 2.

4. dy/dx = x^2y es...

no separable

separable

solo lineal con coeficientes constantes

logística

separable. $dy/y = x^2\,dx$.

Repetir este cuestionario

Cómo ayuda esto a salvar el planeta

Los modelos de población basados en la ecuación logística forman parte de cómo los científicos pesqueros evalúan las poblaciones y fijan límites de captura que les permiten mantenerse sanas, lo que protege los ecosistemas oceánicos y a las personas que dependen de ellos.

Las ecuaciones de mezclas como la del ejemplo 4.1 son el primer paso para estimar con qué rapidez un lago o un estuario elimina un contaminante una vez que se corta la fuente.

Los modelos meteorológicos y climáticos resuelven sistemas enormes de ecuaciones diferenciales con métodos numéricos paso a paso, descendientes del método de Euler.

En Saving Planets: Centro de Lagos · Centro de Océanos

Fuentes: OpenStax Calculus 2, 4.4 The Logistic Equation (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/4-4-the-logistic-equation) · NOAA Fisheries: evaluaciones de poblaciones (https://www.fisheries.noaa.gov/topic/population-assessments)

Recursos de aprendizaje gratuitos

- OpenStax Calculus 2, 4.1 Basics of Differential Equations (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/4-1-basics-of-differential-equations): Sección de libro de texto gratuita.
- OpenStax Calculus 2, 4.2 Direction Fields and Numerical Methods (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/4-2-direction-fields-and-numerical-methods): Método de Euler.
- OpenStax Calculus 2, 4.3 Separable Equations (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/4-3-separable-equations): Mezclas y enfriamiento.
- OpenStax Calculus 2, 4.4 The Logistic Equation (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/4-4-the-logistic-equation): Modelos de población.

Ver la clase

Lecture 16: Differential Equations (https://ocw.mit.edu/courses/18-01-single-variable-calculus-fall-2006/resources/lecture-16-differential-equations/) (en inglés)

MIT 18.01 Single Variable Calculus (Fall 2006), MIT OpenCourseWare. Licencia: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Condiciones de uso (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Enlace solo para estudio gratuito; Saving Planets no está afiliado a esta universidad ni cuenta con su respaldo.

- [ ] **Terminé esta unidad**

Sucesiones y series

¿Cuándo da un total finito sumar infinitos números? Series geométricas, la serie armónica y los criterios de convergencia.

Objetivos de aprendizaje

Al terminar esta unidad podrás:

- Hallar límites de sucesiones.
- Sumar series geométricas y telescópicas.
- Aplicar los criterios de divergencia, de la integral, de comparación, de series alternantes, del cociente y de la raíz.
- Distinguir la convergencia absoluta de la condicional.

Conceptos clave

- Una serie Σa_n converge si sus sumas parciales se acercan a un límite.
- Geométrica: $\Sigma\, ar^n$ $(n \geq 0) = a/(1 - r)$ cuando $|r| < 1$.
- Criterio de divergencia: si a_n no $\to 0$, la serie diverge. El recíproco es falso: la serie armónica $\Sigma 1/n$ diverge.
- La serie p $\Sigma 1/n^p$ converge si y solo si $p > 1$ (por el criterio de la integral).
- Criterio del cociente: si $|a_{n+1}/a_n| \to L < 1$ la serie converge absolutamente; si $L > 1$ diverge; $L = 1$ no dice nada.
- Las series alternantes con términos que decrecen a 0 convergen; $\Sigma(-1)^{n+1}/n = \ln 2$.

Ecuaciones clave

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}\ (|r| < 1)$$

_n=0^∞ar^n=(a)/(1-r)\ (|r|<1)

Serie geométrica

$$\sum \frac{1}{n^p} \text{ converges } \iff p > 1$$

Serie p

$$L = \lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

L=|_n+1a_n|

Ejemplos resueltos paso a paso

Ejemplo 5.1 Suma $\Sigma\ (1/2)^n$ desde $n = 0$.

1. Geométrica con $a = 1$, $r = ½$.
2. $1/(1 - ½) = 2$.

Respuesta: 2.

Ejemplo 5.2 Cada año un lago pierde el 10% de un contaminante acumulado y recibe 5 toneladas más. ¿En qué nivel se estabiliza?

1. Tras muchos años la cantidad es $5 + 5(0.9) + 5(0.9)^2 + \ldots$
2. Geométrica: $5/(1 - 0.9)$.

Respuesta: 50 toneladas. Reducir a la mitad el aporte anual reduce a la mitad el nivel a largo plazo (un modelo simplificado).

Ejemplo 5.3 ¿Converge $\Sigma\ n/2^n$?

1. Cociente: $[(n + 1)/2^{n+1}]/[n/2^n] = (n + 1)/(2n) \to ½$.
2. $½ < 1$.

Respuesta: Converge (su suma es 2).

Problemas de práctica

Resuelve cada uno primero en papel y luego comprueba.

1. $\Sigma\ 0.9(0.1)^n$ desde $n = 0$

   $0.9/(1 - 0.1) = 1$. So $0.999\ldots = 1$.

2. ¿Converge $\Sigma\ 1/n^2$?

   Sí, $p = 2 > 1$ (la suma es $\pi^2/6$).

3. ¿Converge $\Sigma\ n/(n + 1)$?

   No: los términos $\to 1$, no 0 (criterio de divergencia).

4. Suma $\Sigma\, 3(2/3)^n$ desde $n = 0$.

   $3/(1 - 2/3) = 9$.

5. ¿Converge absolutamente $\Sigma\, (-1)^{n+1}/n$?

   No. Converge (a $\ln 2$), pero $\Sigma 1/n$ diverge, así que la convergencia es condicional.

Ideas erróneas comunes

Mito: Si los términos tienden a 0, la serie converge.

En realidad: La serie armónica es el contraejemplo.

Mito: Un límite igual a 1 en el criterio del cociente significa divergencia.

En realidad: $L = 1$ no es concluyente; usa otro criterio.

Mito: Reordenar los términos nunca cambia una suma.

En realidad: En las series condicionalmente convergentes, sí puede cambiarla.

Tarjetas de estudio

Sucesión

Una lista ordenada $a_1, a_2, \ldots$

Serie

Suma de una sucesión; límite de las sumas parciales.

Serie geométrica

$a/(1 - r)$ para $|r| < 1$.

Serie armónica

$\Sigma 1/n$, diverge.

Criterio del cociente

$L < 1$ converge, $L > 1$ diverge, $L = 1$ no concluyente.

Convergencia condicional

Converge, pero no absolutamente.

Cuestionario de autoevaluación

1. $\Sigma\, (1/3)^n$ desde $n = 0$ =

1/3

3/2

3

2

3/2. 1/(1 − 1/3).

2. La serie armónica Σ1/n...

converge a 1

diverge

converge a ln 2

converge a e

diverge. p = 1, criterio de la integral.

3. Σ 1/n^1.01...

converge

diverge

no se puede decidir

es igual a 1

converge. p > 1.

4. El criterio del cociente para Σ 1/n! da L =

1

0

∞

1/2

0. 1/(n + 1) → 0, así que converge.

Repetir este cuestionario

Cómo ayuda esto a salvar el planeta

Las series geométricas describen todo lo que se arrastra en parte de un período al siguiente, como en el ejemplo 5.2. Ese modelo sencillo muestra un hecho clave de la contaminación y de los gases de efecto invernadero: el nivel a largo plazo depende del ritmo de aporte, así que reducir los aportes baja el nivel en que todo se estabiliza.

Los sistemas reales son más complejos que una sola serie geométrica, y los científicos usan modelos completos, pero la serie es la intuición inicial correcta.

En Saving Planets: Pronóstico de floraciones de algas del lago Erie · Centro de Lagos

Fuentes: OpenStax Calculus 2, 5.2 Infinite Series (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/5-2-infinite-series) · NOAA GML: tendencias del CO_2 atmosférico (en inglés) (https://gml.noaa.gov/ccgg/trends/)

Recursos de aprendizaje gratuitos

- OpenStax Calculus 2, 5.1 Sequences (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/5-1-sequences): Sección de libro de texto gratuita.
- OpenStax Calculus 2, 5.2 Infinite Series (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/5-2-infinite-series): Series geométricas y telescópicas.
- OpenStax Calculus 2, 5.6 Ratio and Root Tests (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/5-6-ratio-and-root-tests): Criterios del cociente y de la raíz.

☐ **Terminé esta unidad**

Series de potencias y series de Taylor

Convertir funciones en polinomios infinitos. Las series de Taylor son la forma en que calculan las calculadoras y en que los físicos simplifican problemas difíciles.

Objetivos de aprendizaje

Al terminar esta unidad podrás:

- Hallar el radio y el intervalo de convergencia de una serie de potencias.
- Construir series y polinomios de Taylor y de Maclaurin.
- Acotar el error de una aproximación de Taylor.
- Usar series para aproximar integrales y justificar las aproximaciones de ángulo pequeño.

Conceptos clave

- Una serie de potencias $\Sigma c_n(x-a)^n$ converge dentro de un radio R y diverge fuera; revisa los extremos por separado.
- Serie de Taylor: $c_n = f^{(n)}(a)/n!$. Alrededor de a = 0 se llama serie de Maclaurin.
- Series clave: $e^x = \Sigma x^n/n!$, $\sin x = x - x^3/3! + x^5/5! - \ldots$, $\cos x = 1 - x^2/2! + x^4/4! - \ldots$, $\ln(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 - \ldots$ ($|x| < 1$).
- Resto de Taylor: el error es como máximo $M|x-a|^{n+1}/(n+1)!$, donde M acota la siguiente derivada.
- Quedarse solo con el primer término convierte sin θ en θ, la aproximación de ángulo pequeño detrás de la fórmula del péndulo simple.

Ecuaciones clave

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

`f(x)=_n=0^∞^(n)(a)n!(x-a)^n`

Serie de Taylor

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

`e^x=_n=0^∞(x^n)/(n!)`

Serie exponencial

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

`x=x-(x^3)/(3!)+(x^5)/(5!)-·s`

Serie del seno

$$|R_n(x)| \le \frac{M|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Cota del resto de Taylor

Ejemplos resueltos paso a paso

Ejemplo 6.1 Estima e^0.1 con los cuatro primeros términos de su serie.

1. 1 + 0.1 + 0.01/2 + 0.001/6.
2. = 1.105167.

Respuesta: 1.105167, frente al valor real 1.105171.

Ejemplo 6.2 Estima sin 0.5 con tres términos y acota el error.

1. 0.5 − 0.125/6 + 0.03125/120 = 0.479427.
2. Cota del siguiente término: $0.5^7/7! = 1.55 \times 10^{-6}$.

Respuesta: 0.479427, con error menor que 1.6×10^{-6} (valor real 0.479426).

Ejemplo 6.3 Halla el radio de convergencia de $\Sigma\, x^n/3^n$.

1. Cociente: $|x|/3 < 1$.
2. Los extremos $x = \pm 3$ dan términos ± 1, que no $\to 0$.

Respuesta: $R = 3$; converge para $-3 < x < 3$.

Problemas de práctica

Resuelve cada uno primero en papel y luego comprueba.

1. Escribe el polinomio de Maclaurin de grado 4 de cos x y úsalo para cos 0.2.

   $1 - x^2/2 + x^4/24$; $\cos 0.2 \approx 1 - 0.02 + 0.0000667 = 0.980067$ (valor real 0.980067).

2. Halla la serie de Maclaurin de 1/(1 − x).

   Σx^n para $|x| < 1$ (geométrica).

3. Halla el radio de convergencia de $\Sigma\, x^n/n$.

   $R = 1$ (cociente $n/(n+1) \to 1$).

4. Usa una serie para estimar $\int_0^1 e^{\wedge}(-x^2)\, dx$ con tres términos.

   $\int(1 - x^2 + x^4/2)\, dx = 1 - 1/3 + 1/10 = 0.7667$. Con más términos se acerca a 0.7468.

Ideas erróneas comunes

Mito: Un polinomio de Taylor es preciso en todas partes.

En realidad: Es mejor cerca del centro a y puede ser pésimo lejos de él o fuera del radio de convergencia.

Mito: Toda función suave es igual a su serie de Taylor.

En realidad: No siempre, aunque se cumple en todas partes para e^x, sin x y cos x.

Mito: El radio de convergencia también decide los extremos.

En realidad: Los extremos deben revisarse por separado.

Tarjetas de estudio

Serie de potencias

$\Sigma c_n(x - a)^n$.

Radio de convergencia

R tal que la serie converge para $|x - a| < R$.

Coeficiente de Taylor

$f^{(n)}(a)/n!$.

Serie de Maclaurin

Serie de Taylor en a = 0.

Aproximación de ángulo pequeño

$\sin\theta \approx \theta$, $\cos\theta \approx 1 - \theta^2/2$.

Cota del resto

$M|x - a|^{n+1}/(n+1)!$.

Cuestionario de autoevaluación

1. La serie de Maclaurin de e^x es...

Σx^n

$\Sigma x^n/n!$

$\Sigma(-1)^n x^n$

$\Sigma x^n/n$

$\Sigma x^n/n!$. Todas las derivadas de e^x en 0 valen 1.

2. Para θ pequeño, sin $\theta \approx$...

1

θ

θ^2

$1 - \theta$

θ. El primer término de la serie.

3. El coeficiente de x^3 en la serie de sin x es...

1/3

−1/6

1/6

−1/3

−1/6. −1/3!.

4. Σx^n converge para...

todo x

$|x| < 1$

$|x| \leq 1$

$x > 0$

$|x| < 1$. Serie geométrica.

Repetir este cuestionario

Cómo ayuda esto a salvar el planeta

Las series de Taylor permiten a los físicos convertir ecuaciones difíciles en ecuaciones útiles. El período del péndulo $T = 2\pi\sqrt{(L/g)}$ de Física I se basa en $\sin\theta \approx \theta$, y el mismo tipo de linealización está detrás de gran parte del análisis que hacen los ingenieros de las vibraciones en aerogeneradores, puentes y aviones.

Los modelos de órbitas de satélites y del clima desarrollan efectos complicados en series y se quedan con los términos que importan. Conocer la cota del error indica cuándo una aproximación es lo bastante buena como para confiar en ella.

En Saving Planets: Física I, Unidad 8: oscilaciones · Calculadora del período de un péndulo

Fuentes: OpenStax Calculus 2, 6.3 Taylor and Maclaurin Series (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/6-3-taylor-and-maclaurin-series) · OpenStax University Physics 1, 15.4 Pendulums (en inglés) (https://openstax.org/books/university-physics-volume-1/pages/15-4-pendulums)

Recursos de aprendizaje gratuitos

- OpenStax Calculus 2, 6.3 Taylor and Maclaurin Series (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/6-3-taylor-and-maclaurin-series): Sección de libro de texto gratuita.
- MIT OpenCourseWare 18.01SC (https://ocw.mit.edu/courses/18-01sc-single-variable-calculus-fall-2010/): Clases y listas de problemas sobre series.

Ver la clase

Lecture 38: Taylor's Series (https://ocw.mit.edu/courses/18-01-single-variable-calculus-fall-2006/resources/lecture-38-taylors-series/) (en inglés)

MIT 18.01 Single Variable Calculus (Fall 2006), MIT OpenCourseWare. Licencia: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Condiciones de uso (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Enlace solo para estudio gratuito; Saving Planets no está afiliado a esta universidad ni cuenta con su respaldo.

☐ **Terminé esta unidad**

Ecuaciones paramétricas y coordenadas polares

Describir trayectorias en función del tiempo y curvas en función de un ángulo, incluida la elipse que sigue cada satélite y cada planeta.

Objetivos de aprendizaje

Al terminar esta unidad podrás:

- Graficar curvas paramétricas, hallar dy/dx y la longitud de arco.
- Convertir entre coordenadas polares y cartesianas.
- Hallar áreas y longitudes de arco en coordenadas polares.
- Describir una órbita de Kepler en forma polar.

Conceptos clave

- Una curva paramétrica da x(t) e y(t); dy/dx = (dy/dt)/(dx/dt).
- Longitud de arco: ∫√(x'² + y'²) dt.
- Polares: x = r cos θ, y = r sin θ. Área de una región polar: ½∫r² dθ.
- Una órbita alrededor de un foco es r = p/(1 + e cos θ), donde e es la excentricidad.
- La segunda ley de Kepler (áreas iguales en tiempos iguales) equivale a decir que ½r² dθ/dt es constante.

Ecuaciones clave

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

`dy/dx=(dy/dt)/(dx/dt)`

Pendiente de una curva paramétrica

$$L = \int_a^b \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\, dt$$

`L=_a^b(x')^2+(y')^2 dt`

Longitud de arco paramétrica

$$A = \tfrac{1}{2} \int_\alpha^\beta r^2\, d\theta$$

`A=12_α^β r^2 dθ`

Área en polares

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$$

`r=(a(1-e^2))/(1+eθ)`

Órbita cónica en forma polar

Ejemplos resueltos paso a paso

Ejemplo 7.1 Halla la pendiente de x = t², y = t³ en t = 1.

1. dx/dt = 2t, dy/dt = 3t².
2. dy/dx = 3t²/(2t) = 3t/2 = 3/2 en t = 1.

Respuesta: 3/2.

Ejemplo 7.2 Halla el área dentro de la cardioide r = 1 + cos θ.

1. A = ½∫₀^(2π) (1 + cos θ)² dθ.
2. = ½∫(1 + 2cos θ + cos²θ) dθ = ½(2π + 0 + π).

Respuesta: 3π/2 ≈ 4.71.

Ejemplo 7.3 La órbita terrestre tiene a = 149.6 millones de km y e = 0.0167. Halla sus distancias mínima y máxima al Sol.

1. At θ = 0: r = a(1 − e) = 149.6 × 0.9833.
2. At θ = π: r = a(1 + e) = 149.6 × 1.0167.

Respuesta: Unos 147.1 y 152.1 millones de km, que coinciden con el perihelio y el afelio publicados por la NASA.

Problemas de práctica

Resuelve cada uno primero en papel y luego comprueba.

1. Halla la longitud de x = cos t, y = sin t para 0 ≤ t ≤ 2π.

   ∫√(sin²t + cos²t) dt = 2π (la circunferencia de un círculo).

2. Halla el área del círculo r = 3.

$\frac{1}{2}\int_0^{(2\pi)} 9\, d\theta = 9\pi$.

3. Convierte $r = 2\cos\theta$ a forma cartesiana.

   $r^2 = 2r\cos\theta$ da $x^2 + y^2 = 2x$: un círculo de radio 1 centrado en (1, 0), de área π.

4. Elimina t de $x = 2\cos t$, $y = \sin t$.

   $x^2/4 + y^2 = 1$, una elipse.

Ideas erróneas comunes

Mito: $dy/dx = dy/dt \times dx/dt$.

En realidad: Divide: $(dy/dt)/(dx/dt)$.

Mito: El área en polares es $\int r\, d\theta$.

En realidad: Es $\frac{1}{2}\int r^2\, d\theta$, a partir de finas porciones de pastel.

Mito: El Sol está en el centro de la órbita terrestre.

En realidad: Está en uno de los focos de la elipse.

Tarjetas de estudio

Curva paramétrica

$x = x(t)$, $y = y(t)$.

Pendiente paramétrica

$(dy/dt)/(dx/dt)$.

Coordenadas polares

(r, θ); $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

Área en polares

$\frac{1}{2}\int r^2\, d\theta$.

Excentricidad

$e = 0$ círculo, $0 < e < 1$ elipse.

Segunda ley de Kepler

Áreas iguales en tiempos iguales.

Cuestionario de autoevaluación

1. El área en polares usa...

$\int r\, d\theta$

$\frac{1}{2}\int r^2\, d\theta$

$\int r^2\, d\theta$

$2\pi \int r\, d\theta$

$\frac{1}{2}\int r^2\, d\theta$. Cada porción es aproximadamente un sector de área $\frac{1}{2} r^2\, d\theta$.

2. $x = r \cos\theta$, $y = \ldots$

$r \tan\theta$

$r \sin\theta$

$\theta \sin r$

r/θ

$r \sin\theta$. De polares a cartesianas.

3. Para una órbita $r = p/(1 + e\cos\theta)$, $e = 0$ da...

una parábola

un círculo

una recta

una hipérbola

un círculo. $r = p$ es constante.

4. La segunda ley de Kepler dice que $r^2\, d\theta/dt$ es...

cero

constante

creciente

igual a e

constante. Áreas iguales en tiempos iguales.

Repetir este cuestionario

Cómo ayuda esto a salvar el planeta

Cada satélite de observación de la Tierra sigue una trayectoria descrita por la ecuación polar de la órbita de esta unidad. Los diseñadores de misiones eligen la forma y la inclinación de la órbita para que los instrumentos vuelvan a pasar por los mismos lugares con una iluminación parecida, lo que facilita detectar cambios en el terreno.

Las ecuaciones paramétricas describen la traza en tierra que un satélite dibuja sobre la Tierra, lo que decide qué bosques, costas y capas de hielo puede ver y cuándo.

En Saving Planets: Guía de órbitas · Landsat 9

Fuentes: Ficha de la NASA sobre la Tierra (en inglés) (https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/earthfact.html) · OpenStax Calculus 2, 7.4 Area and Arc Length in Polar Coordinates (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/7-4-area-and-arc-length-in-polar-coordinates)

Recursos de aprendizaje gratuitos

- OpenStax Calculus 2, 7.1 Parametric Equations (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/7-1-parametric-equations): Sección de libro de texto gratuita.
- OpenStax Calculus 2, 7.3 Polar Coordinates (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/7-3-polar-coordinates): Gráficas polares.
- OpenStax Calculus 2, 7.4 Area and Arc Length in Polar Coordinates (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/7-4-area-and-arc-length-in-polar-coordinates): Área y longitud en polares.
- PhET: Kepler's Laws (https://phet.colorado.edu/en/simulations/keplers-laws): Órbitas, áreas y períodos.

Ver la clase

Lecture 31: Parametric Equations (https://ocw.mit.edu/courses/18-01-single-variable-calculus-fall-2006/resources/lecture-31-parametric-equations/) (en inglés)

MIT 18.01 Single Variable Calculus (Fall 2006), MIT OpenCourseWare. Licencia: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Condiciones de uso (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Enlace solo para estudio gratuito; Saving Planets no está afiliado a esta universidad ni cuenta con su respaldo.

☐ **Terminé esta unidad**

Problemas

Estos problemas están dentro de cada unidad. Hazlos en papel y luego abre la respuesta.

1. Técnicas de integración
   5 problemas

2. Aplicaciones: volumen, longitud de arco, trabajo y centro de masa
   4 problemas
3. Integrales impropias
   5 problemas
4. Introducción a las ecuaciones diferenciales
   4 problemas
5. Sucesiones y series
   5 problemas
6. Series de potencias y series de Taylor
   4 problemas
7. Ecuaciones paramétricas y coordenadas polares
   4 problemas

Laboratorios de computadora

Cuatro prácticas cortas de computadora aplican las unidades con una hoja de cálculo: el método de Euler para un modelo de población, la regla de Simpson para el volumen de un embalse, la precisión de las series de Taylor y la segunda ley de Kepler en coordenadas polares.

Son los métodos numéricos que científicos e ingenieros usan a diario. Los datos de ejemplo están señalados como tales; cada práctica enlaza a su fuente.

Referencia de seguridad: OpenStax Calculus Volume 2 (libro de texto gratuito) (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/1-introduction)

Práctica A: método de Euler para una población de peces en recuperación

SEMANA 8

Objetivo: Resolver numéricamente la ecuación logística y compararla con la solución exacta.

$$P_{n+1} = P_n + h\,r P_n \left(1 - \frac{P_n}{K}\right)$$

```
P_n+1=P_n+h rP_n(1-(P_n)/(K))
```

Método de Euler para la ecuación logística

Procedimiento

1. Fija r = 0.5, K = 1000, P_0 = 100 y h = 1 en una hoja de cálculo.
2. Copia hacia abajo los pasos de Euler hasta t = 4.
3. Añade una columna con la solución exacta y el error.
4. Repite con h = 0.5 y h = 0.25; ¿cómo cambia el error?

Tabla de datos

t	P de Euler (h = 1)
0	100
1	145.0
2	207.0
3	289.1
4	391.9

Valores calculados por el modelo (no es una pesquería real). P(4) exacto = 450.9.

Cálculo de ejemplo

1. P_1 = 100 + 0.5 × 100 × 0.9 = 145.0.
2. P_2 = 145 + 0.5 × 145 × 0.855 = 207.0.
3. Aquí Euler subestima (391.9 frente a 450.9) porque la curva se curva hacia arriba al principio del crecimiento; reducir h a la mitad reduce el error más o menos a la mitad.

> **Seguridad**
>
> - Ninguna más allá del uso normal de una computadora.

Alternativa en casa o virtual

- Basta con una hoja de cálculo.

OpenStax Calculus 2, 4.2 Direction Fields and Numerical Methods (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/4-2-direction-fields-and-numerical-methods)

Vínculo con el planeta: Los modelos numéricos de población apoyan la gestión pesquera. NOAA Fisheries: evaluaciones de poblaciones (https://www.fisheries.noaa.gov/topic/population-assessments)

- [ ] **Completé este laboratorio (real o virtual)**

Práctica B: volumen de un embalse con la regla de Simpson

SEMANA 5

Objetivo: Estimar el volumen de un embalse a partir de mediciones del área de la superficie a distintas profundidades.

$$V = \int_0^H A(h)\,dh \approx \frac{\Delta h}{3}[A_0 + 4A_1 + 2A_2 + 4A_3 + A_4]$$

V=_0^HA(h) dh≈Δ h3[A_0+4A_1+2A_2+4A_3+A_4]

El volumen como integral del área de la sección transversal

Procedimiento

1. Introduce las áreas de ejemplo a 0, 2, 4, 6 y 8 m sobre el fondo.
2. Aplica la regla de Simpson con Δh = 2 m.
3. Compara con la regla del trapecio.

Tabla de datos

Altura h (m)	Área de la superficie A (km²)
0	0.0
2	1.2
4	2.6
6	4.0
8	5.6

Valores de ejemplo para practicar, no un embalse real.

Cálculo de ejemplo

1. Simpson: (2/3)[0 + 4(1.2) + 2(2.6) + 4(4.0) + 5.6] = (2/3)(31.6) = 21.07 km²·m.
2. 1 km²·m = 10^6 m³, así que V ≈ 2.11 × 10^7 m³ (21 millones de metros cúbicos).
3. Trapecio: 2[0/2 + 1.2 + 2.6 + 4.0 + 5.6/2] = 21.2 km²·m, cerca de Simpson.

> **Seguridad**
>
> - Ninguna más allá del uso normal de una computadora.

Alternativa en casa o virtual

- Basta con una hoja de cálculo.

NASA: misión SWOT (https://swot.jpl.nasa.gov/)

Vínculo con el planeta: Los satélites de aguas superficiales como SWOT ayudan a estimar los cambios del agua almacenada en lagos y embalses.

☐ **Completé este laboratorio (real o virtual)**

Práctica C: ¿qué tan bueno es un polinomio de Taylor?

SEMANA 13

Objetivo: Comparar polinomios de Taylor de sin x con el valor real y con la cota del resto.

$$P_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

```
P_5(x)=x-(x^3)/(6)+(x^5)/(120)
```

Polinomio de Maclaurin de grado 5 de sin x

Procedimiento

1. Tabula sin x, P_1 = x, P_3 y P_5 para x de 0 a π en pasos de 0.25.
2. Grafica los errores.
3. Halla dónde la aproximación de ángulo pequeño sin x ≈ x se desvía un 1%.

Tabla de datos

x	sin x	$P_5(x)$
0.5	0.479426	0.479427
1.0	0.841471	0.841667
2.0	0.909297	0.933333

Valores calculados.

Cálculo de ejemplo

1. En x = 0.5, P_5 se equivoca en unos 10^{-6}; en x = 2, en 0.024. La precisión cae rápido al alejarse de 0.
2. sin x ≈ x está dentro del 1% hasta aproximadamente x = 0.24 rad (14°), por eso la fórmula del péndulo se usa para oscilaciones pequeñas.

> **Seguridad**
>
> - Ninguna más allá del uso normal de una computadora.

Alternativa en casa o virtual

- Los deslizadores de Desmos funcionan bien.

PhET: Pendulum Lab (https://phet.colorado.edu/en/simulations/pendulum-lab)

Vínculo con el planeta: Conocer el error de una aproximación es como los ingenieros deciden en qué modelo simplificado confiar.

- [ ] **Completé este laboratorio (real o virtual)**

Práctica D: segunda ley de Kepler en coordenadas polares

SEMANA 14

Objetivo: Mostrar numéricamente que una órbita elíptica barre área más rápido por ángulo cerca del foco, pero a un ritmo constante en el tiempo.

$$A(\theta_1, \theta_2) = \tfrac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} r(\theta)^2\, d\theta, \quad r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$$

```
A(θ_1,θ_2)=12_θ_1^θ_2r(θ)^2 dθ, r=(a(1-e^2))/(1+eθ)
```

Área barrida por una órbita

Procedimiento

1. Usa a = 1 y e = 0.5.
2. Calcula con la regla de Simpson el área barrida de θ = 0 a 0.5 y de θ = π − 0.25 a π + 0.25 (el mismo ancho de 0.5 rad).
3. Explica por qué ángulos iguales no dan áreas iguales y, por tanto, llevan tiempos distintos.

Tabla de datos

Arc	Área barrida
θ = 0 a 0.5 (cerca del Sol)	0.0643
θ = π ± 0.25 (lado lejano)	0.5513

Valores calculados para a = 1, e = 0.5.

Cálculo de ejemplo

1. Cerca del Sol r ≈ 0.5, en el lado lejano r ≈ 1.5: el área ∝ r², así que el arco lejano barre unas 8.6 veces más área (0.5513 ÷ 0.0643).
2. Como el área crece a ritmo constante en el tiempo, el planeta tarda unas 8.6 veces más en recorrer los 0.5 rad lejanos: se mueve más despacio en el afelio.

> **Seguridad**
>
> - Ninguna más allá del uso normal de una computadora.

Alternativa en casa o virtual

- Basta una hoja de cálculo o Desmos.

PhET: Kepler's Laws (https://phet.colorado.edu/en/simulations/keplers-laws)

Vínculo con el planeta: La geometría de la órbita decide cuándo un satélite puede ver un lugar de la Tierra.

- [ ] **Completé este laboratorio (real o virtual)**

Series de práctica para exámenes

Cronométrate: unos 10 minutos por problema. Luego compara con las soluciones completas.

Serie de práctica de mitad de curso (unidades 1–3)

1. Halla $\int_0^1 x^2 e^x \, dx$.
    1. Dos veces por partes: $\int x^2 e^x \, dx = (x^2 - 2x + 2)e^x$.
    2. De 0 a 1: $e - 2$.

    Respuesta: $e - 2 \approx 0.718$.

2. Halla $\int_0^1 x/(x + 1) \, dx$.
    1. $x/(x + 1) = 1 - 1/(x + 1)$.
    2. $[x - \ln(x + 1)]_0^1 = 1 - \ln 2$.

    Respuesta: $1 - \ln 2 \approx 0.307$.

3. Halla el volumen que se obtiene al girar alrededor del eje x la región bajo $y = x^2$, $0 \le x \le 2$.
    1. Discos: $\int_0^2 \pi x^4 \, dx = \pi \times 32/5$.

    Respuesta: $32\pi/5 \approx 20.1$.

4. Evalúa $\int_2^\infty dx/x^3$.
    1. $[-1/(2x^2)]_2^\infty = 1/8$.

    Respuesta: $1/8$.

Serie de práctica final (todas las unidades)

1. Resuelve $y' = -2y$, $y(0) = 5$, y halla $y(1)$.
    1. $y = 5e^{(-2t)}$.

    Respuesta: $5e^{(-2)} \approx 0.677$.

2. Suma $\Sigma \, 3(2/3)^n$ desde $n = 0$.
    1. Geométrica: $3/(1 - 2/3)$.

Respuesta: 9.

3. Estima cos 0.2 con el polinomio de Maclaurin de grado 4.

    1. 1 − 0.04/2 + 0.0016/24.

    Respuesta: 0.980067.

4. Halla el área dentro de r = 3.

    1. ½∫₀^(2π) 9 dθ.

    Respuesta: 9π ≈ 28.3.

5. Halla el intervalo de convergencia de Σ xⁿ/3ⁿ.

    1. Cociente: |x|/3 < 1; los extremos divergen.

    Respuesta: −3 < x < 3.

6. El contaminante de un tanque de mezcla sigue S' = −S/50 con S(0) = 20 kg. ¿Cuándo es S = 5 kg?

    1. S = 20e^(−t/50); e^(−t/50) = 1/4.
    2. t = 50 ln 4.

    Respuesta: ≈ 69.3 unidades de tiempo.

Hoja de fórmulas

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\sin^2 x = \tfrac{1}{2}(1-\cos 2x),\ \cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1+\cos 2x)$$

$$S_n = \tfrac{\Delta x}{3}[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + \cdots + f_n]$$

$$V = \int \pi f^2\,dx,\ V = \int 2\pi x f\,dx$$

$$L = \int \sqrt{1+f'^2}\,dx$$

$$W = \int F\,dx$$

$$\int_1^\infty x^{-p}dx < \infty \iff p > 1$$

$$y' = ky \Rightarrow y = y_0 e^{kt}$$

$$P' = rP(1-P/K)$$

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$$

$$\sum ar^n = a/(1-r)$$

$$L = \lim |a_{n+1}/a_n|$$

$$e^x = \sum x^n/n!$$

$$\sin x = \sum (-1)^n x^{2n+1}/(2n+1)!$$

$$\cos x = \sum (-1)^n x^{2n}/(2n)!$$

$$dy/dx = (dy/dt)/(dx/dt)$$

$$A = \tfrac{1}{2}\int r^2\,d\theta$$

Constantes

Constante	Valor
e	2.718281828...
π	3.141592654...
ln 2	0.693147...
Excentricidad orbital de la Tierra	0.0167
Semieje mayor de la Tierra	149.6 millones de km
Densidad del agua	1,000 kg/m³

Fuente: Ficha de la NASA sobre la Tierra (en inglés) (https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/earthfact.html)

Herramientas de gráficas y datos

Usa estas herramientas gratuitas junto con el curso.

- Calculadora gráfica Desmos (https://www.desmos.com/calculator): Graficar curvas paramétricas y polares, deslizadores y polinomios de Taylor.
- MIT OpenCourseWare 18.01SC (https://ocw.mit.edu/courses/18-01sc-single-variable-calculus-fall-2010/): Clases y listas de problemas gratuitas del MIT sobre integración y series.
- MIT OpenCourseWare 18.02SC (https://ocw.mit.edu/courses/18-02sc-multivariable-calculus-fall-2010/): El siguiente curso: cálculo multivariable.

Glosario

Longitud de arco
Longitud de una curva, ∫√(1 + f'²) dx.

Capacidad de carga
Límite a largo plazo K de una población logística.

Centro de masa
Punto de equilibrio; momento dividido entre masa.

Convergencia condicional
Converge, pero los valores absolutos divergen.

Ecuación diferencial
Ecuación con derivadas de una función desconocida.

Excentricidad
Cuán alargada es una órbita.

Método de Euler
Solución numérica paso a paso de una ED.

Serie geométrica
Σar^n.

Integral impropia
Integral con un límite o un integrando infinito.

Integración por partes
$\int u\,dv = uv - \int v\,du$.

Ecuación logística
$P' = rP(1 - P/K)$.

Serie de Maclaurin
Serie de Taylor en 0.

Ecuaciones paramétricas
x e y dados como funciones de t.

Fracciones parciales
Separar una función racional en términos más simples.

Coordenadas polares
Posición dada por una distancia r y un ángulo θ.

Serie de potencias
$\Sigma c_n(x - a)^n$.

Radio de convergencia
Distancia al centro dentro de la cual converge una serie de potencias.

Ecuación separable
ED que puede escribirse $g(y)\,dy = h(x)\,dx$.

Regla de Simpson
Integración numérica con parábolas.

Serie de Taylor
$\Sigma f^{(n)}(a)(x - a)^n/n!$.

Rúbrica de autoevaluación

No se otorga nota ni crédito. Úsala para valorar con honestidad dónde estás en cada unidad.

Nivel	Cómo se ve
4 · Dominio	Elige por su cuenta la técnica o el criterio adecuado, lo justifica y comprueba los resultados numéricamente.
3 · Competente	Resuelve los problemas de práctica con algún error ocasional.
2 · En desarrollo	Sigue los ejemplos resueltos pero le cuesta elegir un método.
1 · Inicial	Aplica fórmulas sin comprobar las condiciones; necesita repasar la unidad.

Ponderación sugerida si quieres una nota

Parte	Peso
Problemas de práctica	30%
Laboratorios de computadora	15%
Serie de práctica de mitad de curso	25%
Serie de práctica final	30%

Apunta al nivel 3 o superior en cada unidad antes de pasar al siguiente curso.

Cursos relacionados

- Cálculo I MATH 110
- Introducción a la ingeniería aeroespacial AERO 101
- Química General I + Laboratorio CHEM 110 + CHEM 110L
- Todos los cursos