آخر تحديث: November 1, 2026

🗺️ خريطة طريق لأربع سنوات · السنة 1, الربيع

عن هذه الدورة

يتضمن هذا المقرر المجاني 7 وحدات و4 مختبرات. هذه الأعداد الحقيقية وليست منهجًا أطول جرى اختصاره.

التحقق هو رقم أو نتيجة برمجية في صفحة مقرر يعيد سكربت حسابها قبل النشر. يجب أن يطابق الرقم المعروض الرقم المعاد حسابه.

هذا مخطط دورة مجانية للتعلّم الذاتي كتبته Saving Planets. وهو ليس مقررًا جامعيًا، ولا يمنح ساعات معتمدة، ولا تشارك فيه أي مؤسسة تعليمية.

يتبع نطاقه الفصل الثاني من حساب التفاضل والتكامل الجامعي، على غرار موضوعات ومستوى مواد مفتوحة مثل OpenStax Calculus Volume 2 وMIT OpenCourseWare 18.01SC (مع أفكار وسيطية وقطبية تقود إلى 18.02SC Multivariable Calculus)، ونضع روابط إليها في أنحاء المقرر. هذه المؤسسات لا تتبنى هذه الصفحة.

ما نضيفه: كل وحدة مرتبطة بمسائل حقيقية في المياه والطاقة والبيئة ورحلات الفضاء، وكل رقم في الصفحة يُعاد حسابه ببرنامج تحقق قبل النشر، وأربعة مختبرات حاسوبية تطبّق الأساليب على البيانات.

تابعها بالترتيب. في كل وحدة أهداف وأفكار أساسية ومعادلات وأمثلة خطوة بخطوة وتمارين بإجابات كاملة وأخطاء شائعة وبطاقات تعليمية واختبار قصير. يُحفظ تقدّمك في هذا المتصفح فقط.

كيف تساعد هذه الدورة في إنقاذ الكوكب

في حساب التفاضل والتكامل II يبدأ الحساب في نمذجة العالم: أحجام المياه في الخزانات، والشغل اللازم لضخها، وكيف يُطرد ملوث من بحيرة، وكيف تتعافى أعداد الأسماك، والمدارات الإهليلجية للأقمار الصناعية التي ترصد كل ذلك.

تنتهي كل وحدة بقسم قصير موثّق بالمصادر يبيّن كيف تساعد أفكارها الناس والطبيعة معًا.

للمعلمين

يمكنك تدريس هذا المقرر، أو أن يتابعه الطالب وحده. إنه مجاني. Saving Planets لا تمنح درجة ولا ساعات معتمدة.

- هذه الصفحة هي المقرر كاملًا: 7 وحدات و4 مختبرات (MATH 111).
- خطّط لخمسة عشر أسبوعًا، نحو 6 إلى 9 ساعات في الأسبوع، بما في ذلك أسابيع المختبر.
- اتبع جدول الخمسة عشر أسبوعًا. اقرأ الوحدة، حلّ التمارين على الورق، ثم افتح الإجابة. في أسبوع المختبر، نفّذ المختبر أو نسخته المنزلية.
- التحقق هو رقم أو نتيجة برمجية في الصفحة يعيد سكربت حسابها قبل النشر. يجب أن يطابق الرقم الظاهر الرقم المعاد حسابه.
- استخدم طباعة هذه الصفحة، أو نزّل دليل الدراسة PDF. ورقة القوانين قرب النهاية.

- اسأل: كيف تساعد هذه الوحدة الناس والكوكب؟ في كل وحدة مربع أخضر فيه حقيقة مع مصدرها.
- انسخ نموذج دليل المعلم واكتب اسم صفك والوقت المتاح والأسئلة التي ستطرحها. افتح نموذج دليل المعلم

قبل أن تبدأ

المتطلبات السابقة

- حساب التفاضل والتكامل I: النهايات، والمشتقات، وقاعدة السلسلة، والتكاملات الأساسية والتعويض، والمبرهنة الأساسية.
- المتطابقات المثلثية، وخاصة $\sin^2x + \cos^2x = 1$ وصيغ ضعف الزاوية.
- الدوال الأسية واللوغاريتمات.

كيف تذاكر

- اقرأ الوحدة، ثم أغلقها وجرّب الأمثلة المحلولة بنفسك قبل التحقق من كل خطوة.
- حلّ كل تمرين على الورق قبل فتح الإجابة.
- في التكاملات، تحقق من إجابتك باشتقاقها.
- في المتسلسلات، حدد الاختبار المناسب قبل حساب أي شيء.
- ارسم كل منطقة قبل إعداد تكامل الحجم أو المساحة.
- أعد الاختبارات القصيرة بعد بضعة أيام. التدرّب المتباعد أفضل من جلسة طويلة واحدة.

ماذا تحتاج

- حاسوب أو جهاز لوحي مع جدول بيانات.
- آلة حاسبة بيانية مجانية مثل Desmos.
- اختياري: Python مع NumPy.

جدول مقترح من 15 أسبوعًا

نحو 6 إلى 9 ساعات أسبوعيًا: قراءة وتمارين، وفي أسابيع المختبر، المختبر.

الأسبوع	الوحدة	الموضوعات	القراءة
1	تقنيات التكامل	التكامل بالتجزئة	OpenStax 3.1
2	تقنيات التكامل	التكاملات المثلثية والتعويض	OpenStax 3.2–3.3
3	تقنيات التكامل	الكسور الجزئية؛ التكامل العددي	OpenStax 3.4–3.6
4	تطبيقات: الحجم وطول القوس والشغل ومركز الكتلة	المساحات، والحجوم بالشرائح، والأقراص، والحلقات، والأغلفة الأسطوانية	OpenStax 2.1–2.3
5	تطبيقات: الحجم وطول القوس والشغل ومركز الكتلة	طول القوس، والشغل، وقوة الموائع، ومراكز الكتلة؛ المختبر B	OpenStax 2.4–2.6

الأسبوع	الوحدة	الموضوعات	القراءة
6	التكاملات المعتلة	التكاملات المعتلة والمقارنة؛ تدريب على الاختبار النصفي	OpenStax 3.7
7	مقدمة في المعادلات التفاضلية	المعادلات التفاضلية، وحقول الاتجاهات، وطريقة أويلر	OpenStax 4.1–4.2
8	مقدمة في المعادلات التفاضلية	المعادلات القابلة للفصل واللوجستية؛ المختبر A	OpenStax 4.3–4.4
9	المتتاليات والمتسلسلات	المتتاليات؛ المتسلسلات اللانهائية؛ المتسلسلات الهندسية	OpenStax 5.1–5.2
10	المتتاليات والمتسلسلات	اختبارات التباعد والتكامل والمقارنة	OpenStax 5.3–5.4
11	المتتاليات والمتسلسلات	المتسلسلات المتناوبة؛ اختبارا النسبة والجذر	OpenStax 5.5–5.6
12	متسلسلات القوى ومتسلسلات تايلور	متسلسلات القوى وخصائصها	OpenStax 6.1–6.2
13	متسلسلات القوى ومتسلسلات تايلور	متسلسلات تايلور وماكلورين؛ المختبر C	OpenStax 6.3–6.4
14	المعادلات الوسيطية والإحداثيات القطبية	المعادلات الوسيطية؛ الإحداثيات القطبية والمساحات؛ المختبر D	OpenStax 7.1–7.4
15	المراجعة	مراجعة ومجموعة تمارين نهائية	كل الوحدات

تقدّمك

ضع علامة على الوحدات والمختبرات عند إنهائها، وخض الاختبارات. يُحفظ التقدم ونتائج الاختبارات في هذا المتصفح فقط، ولا تُرسل إلينا أبدًا.

الوحدات

تقنيات التكامل

التكامل بالتجزئة، والتكاملات والتعويضات المثلثية، والكسور الجزئية، والتكامل العددي حين لا توجد صيغة.

أهداف التعلّم

في نهاية هذه الوحدة ستستطيع أن:

- إجراء التكامل بالتجزئة مع حسن اختيار u وdv.
- حساب التكاملات المثلثية واستخدام التعويض المثلثي.
- تحليل الدوال النسبية إلى كسور جزئية.
- تقريب التكاملات بقاعدة شبه المنحرف وقاعدة سيمبسون، وتقدير الخطأ.

المفاهيم الأساسية

- التكامل بالتجزئة هو قاعدة الضرب معكوسة: ∫u dv = uv − ∫v du. اختر u مما يصبح أبسط عند الاشتقاق (اللوغاريتمات، كثيرات الحدود).
- تُحلّ قوى الجيب وجيب التمام بمتطابقات مثل sin²x = (1 − cos 2x)/2.
- في √(a² − x²) عوّض x = a sin θ؛ وفي √(a² + x²) عوّض x = a tan θ.
- تنقسم الدالة النسبية الفعلية إلى كسور بسيطة تكاملاتها لوغاريتمات ودوال ظل عكسية (arctan).
- كثير من التكاملات، مثل ∫e^(−x²) dx، ليس لها دالة أصلية أولية. وكثيرًا ما تعطي قاعدة سيمبسون أرقامًا دقيقة عديدة بنقاط قليلة.

المعادلات الأساسية

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

`u dv=uv- v du`

التكامل بالتجزئة

$$\sin^2 x = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

`^2x=12(1-2x)`

متطابقة تخفيض القوى

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1/2}{x-1} - \frac{1/2}{x+1}$$

`(1)/(x^2-1)=(1/2)/(x-1)-(1/2)/(x+1)`

تحليل إلى كسور جزئية

$$S_n = \frac{\Delta x}{3}\left[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + \cdots + 4f_{n-1} + f_n\right]$$

$$S_n=(\Delta x)/(3)[f_0+4f_1+2f_2++4f_{n-1}+f_n]$$

قاعدة سيمبسون (n زوجي)

أمثلة محلولة خطوة بخطوة

مثال 1.1 أوجد $\int_0^1 x\,e^x\,dx$.

1. $u = x$، $dv = e^x\,dx$، إذن $du = dx$، $v = e^x$.
2. $\int x\,e^x\,dx = x\,e^x - \int e^x\,dx = (x-1)e^x$.
3. من 0 إلى 1: $1 - (-1) - 0$.

الإجابة: 1.

مثال 1.2 أوجد $\int_2^3 dx/(x^2-1)$.

1. الكسور الجزئية: $\tfrac{1}{2}[1/(x-1) - 1/(x+1)]$.
2. الدالة الأصلية $\tfrac{1}{2}\ln|(x-1)/(x+1)|$.
3. $\tfrac{1}{2}[\ln(2/4) - \ln(1/3)] = \tfrac{1}{2}\ln(3/2)$.

الإجابة: $\tfrac{1}{2}\ln 1.5 \approx 0.2027$.

مثال 1.3 قدّر $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ بقاعدة سيمبسون، $n = 4$.

1. $\Delta x = 0.25$; $f = 1,\ 0.93941,\ 0.77880,\ 0.56978,\ 0.36788$.
2. $S_4 = (0.25/3)[1 + 4(0.93941) + 2(0.77880) + 4(0.56978) + 0.36788]$.
3. $S_4 = 0.74686$.

الإجابة: 0.74686، مقابل القيمة الحقيقية 0.74682: خطأ قدره 0.00003 فقط من خمس نقاط.

تمارين

حلّ كلًّا منها على الورق أولًا، ثم تحقق.

1. $\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$

   بالتجزئة: $[-x\cos x + \sin x]_0^{\pi} = \pi$.

2. $\int_1^{e} x\ln x\,dx$

   بالتجزئة مع $u = \ln x$: $[x^2\ln x/2 - x^2/4]_1^{e} = (e^2+1)/4 \approx 2.097$.

3. $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,dx$

تخفيض القوى: $\frac{1}{2}[x - \sin 2x/2]_0^{(\pi/2)} = \pi/4$.

4. $\int_0^1 \sqrt{(1 - x^2)}\, dx$

$x = \sin\theta$ يعطي $\int_0^{(\pi/2)} \cos^2\theta\, d\theta = \pi/4$ (ربع قرص الوحدة).

5. $\int_0^1 dx/(1 + x^2)$

$[\arctan x]_0^1 = \pi/4$.

مفاهيم خاطئة شائعة

خرافة: اجعل u دائمًا أول عامل تراه.
في الحقيقة: اختر u مما يبسط عند الاشتقاق: اللوغاريتمات وكثيرات الحدود أولًا، والدوال الأسية والمثلثية تكون dv.

خرافة: الكسور الجزئية تصلح لأي دالة نسبية.
في الحقيقة: اقسم أولًا إذا لم تكن درجة البسط أصغر من درجة المقام.

خرافة: إن لم أجد دالة أصلية، فليس للتكامل قيمة.
في الحقيقة: لا تزال له قيمة؛ قدّرها عدديًا.

بطاقات تعليمية

التكامل بالتجزئة

$\int u\, dv = uv - \int v\, du$.

التعويض المثلثي

$x = a\sin\theta$: $\sqrt{(a^2 - x^2)}$.

الكسور الجزئية

تقسيم دالة نسبية إلى كسور بسيطة.

قاعدة شبه المنحرف

متوسط المجموعين الأيسر والأيمن؛ الخطأ $\propto \Delta x^2$.

قاعدة سيمبسون

مطابقة بقطوع مكافئة؛ الخطأ $\propto \Delta x^4$.

تكامل غير أولي

لا دالة أصلية بصيغة، مثل $\int e^{(-x^2)}\, dx$.

اختبار ذاتي

1. في $\int x^2 e^x\, dx$، اختيار أول جيد لـ u هو...

e^x

x^2

$x^2\,e^x$

dx

x^2. x^2 يبسط عند الاشتقاق.

2. يوحي بالتعويض... $\sqrt{(9 - x^2)}$

$x = 3 \tan \theta$

$x = 3 \sin \theta$

$x = 3 \sec \theta$

$u = 9 - x^2$

$x = 3 \sin \theta$. $9 - 9 \sin^2\theta = 9 \cos^2\theta$.

3. تطابق قاعدة سيمبسون المنحنى باستخدام...

مستطيلات

أشباه منحرفات

قطوع مكافئة

دوال تكعيبية فقط

قطوع مكافئة. قطوع مكافئة تمر بكل ثلاث نقاط.

4. $\int \ln x\,dx =$

$1/x + C$

$x \ln x - x + C$

$\ln^2 x/2 + C$

$x \ln x + C$

$x \ln x - x + C$. بالتجزئة مع $u = \ln x$ و$dv = dx$.

أعد هذا الاختبار

كيف يساعد هذا في إنقاذ الكوكب

تكامل منحنى الجرس في المثال 1.3 ليس له جواب بصيغة، ومع ذلك فهو يقف خلف كل شريط خطأ في رسم بياني للمناخ وكل عدم يقين في قياس بالأقمار الصناعية. والتكامل العددي هو الطريقة التي يُحسب بها فعلًا، هو ومعظم التكاملات الناتجة عن بيانات حقيقية.

أساليب مثل قاعدة سيمبسون هي ما يحوّل القياسات غير المنتظمة، كأعماق نهر عبر مجراه، إلى مجاميع مثل التدفق أو الحجم.

على Saving Planets: حساب التفاضل والتكامل I، المختبر D: التكامل العددي · صفحة الأنهار

المصادر: OpenStax Calculus 2, 3.6 Numerical Integration (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/3-6-numerical-integration) · OpenStax Calculus 2, 3.1 Integration by Parts (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/3-1-integration-by-parts)

مصادر تعلّم مجانية

- OpenStax Calculus 2, 3.1 Integration by Parts (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/3-1-integration-by-parts): قسم من كتاب مدرسي مجاني.
- OpenStax Calculus 2, 3.2 Trigonometric Integrals (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/3-2-trigonometric-integrals): قوى الجيب وجيب التمام.
- OpenStax Calculus 2, 3.3 Trigonometric Substitution (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/3-3-trigonometric-substitution): دوال مكاملة تحتوي على جذور.
- OpenStax Calculus 2, 3.4 Partial Fractions (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/3-4-partial-fractions): الدوال النسبية.
- OpenStax Calculus 2, 3.6 Numerical Integration (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/3-6-numerical-integration): قاعدتا شبه المنحرف وسيمبسون مع حدود الخطأ.

أنهيت هذه الوحدة

تطبيقات: الحجم وطول القوس والشغل ومركز الكتلة

قطّع، واجمع، وخذ النهاية: حجوم المجسمات، وأطوال المنحنيات، والشغل ضد القوى، وضغط الموائع، ومراكز الكتلة.

أهداف التعلّم

في نهاية هذه الوحدة ستستطيع أن:

- إيجاد الحجوم بالشرائح والأقراص والحلقات والأغلفة الأسطوانية.
- حساب طول القوس.
- حساب شغل القوى المتغيرة، بما في ذلك ضخ السوائل، والقوة الهيدروستاتيكية.
- إيجاد مركز كتلة القضبان والصفائح الرقيقة.

المفاهيم الأساسية

- لكل تطبيق النمط نفسه: قرّب شريحة رقيقة، واكتب مساهمتها، ثم كامل.
- طريقة الأقراص: V = ∫π[f(x)]² dx حول المحور x. طريقة الأغلفة: V = ∫2πx f(x) dx حول المحور y.
- طول القوس يجمع أوتارًا صغيرة جدًا: L = ∫√(1 + [f'(x)]²) dx.
- الشغل = ∫F(x) dx. الضخ: كل طبقة من السائل تُرفع مسافتها الخاصة.
- يزداد الضغط مع العمق، لذا فإن القوة على السد تكامل على العمق.
- مركز الكتلة = العزم ÷ الكتلة.

المعادلات الأساسية

$$V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 \, dx$$

V=_a^bπ[f(x)]^2 dx

طريقة الأقراص

$$V = \int_a^b 2\pi x \, f(x) \, dx$$

V=_a^b2π x f(x) dx

طريقة الأغلفة الأسطوانية

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx$$

L=_a^b1+[f'(x)]^2 dx

طول القوس

$$W = \int_a^b F(x)\,dx$$

W=_a^bF(x) dx

شغل قوة متغيرة

$$\bar{x} = \frac{\int x\,\rho(x)\,dx}{\int \rho(x)\,dx}$$

x=(x ρ(x) dx)/(ρ(x) dx)

مركز كتلة قضيب

أمثلة محلولة خطوة بخطوة

مثال 2.1 أوجد الحجم الناتج عن دوران المنطقة الواقعة تحت y = √x، 0 ≤ x ≤ 4، حول المحور x.

1. أقراص نصف قطرها √x: V = ∫₀⁴ π x dx.
2. π[x²/2]₀⁴ = 8π.

الإجابة: 8π ≈ 25.1 وحدة مكعبة.

مثال 2.2 خزان أسطواني نصف قطره 1 m وارتفاعه 2 m مملوء بالماء. ما الشغل اللازم لضخ كل الماء من فوق حافته؟

1. طبقة على الارتفاع y حجمها π(1)² dy ووزنها π dy × 9.81 × 1000 نيوتن، وتُرفع مسافة 2 − y متر.
2. W = ∫₀² 9,810π(2 − y) dy = 9,810π × 2.
3. = 19,620π J.

الإجابة: ≈ 61,600 J (61.6 kJ).

مثال 2.3 قضيب على [0, 2] m كثافته ρ(x) = 1 + x kg/m. أوجد مركز كتلته.

1. الكتلة: ∫₀² (1 + x) dx = 2 + 2 = 4 kg.
2. العزم: ∫₀² x(1 + x) dx = 2 + 8/3 = 14/3.
3. x̄ = (14/3)/4 = 7/6.

الإجابة: x̄ = 7/6 ≈ 1.17 m، باتجاه الطرف الأثقل.

تمارين

حلّ كلًّا منها على الورق أولًا، ثم تحقق.

1. استخدم الأغلفة لإيجاد الحجم الناتج عن دوران المنطقة تحت $y = x^2$، $0 \le x \le 1$، حول المحور y.

$V = \int_0^1 2\pi x \cdot x^2 \, dx = 2\pi/4 = \pi/2$.

2. أوجد طول قوس $y = (2/3)x^{(3/2)}$ من $x = 0$ إلى 3.

$y' = \sqrt{x}$، إذن $L = \int_0^3 \sqrt{(1 + x)} \, dx = (2/3)[(1 + x)^{(3/2)}]_0^3 = (2/3)(8 - 1) = 14/3$.

3. نابض ثابته $k = 200$ N/m يُمدّ 0.10 m عن طوله في السكون. ما الشغل المبذول؟

$W = \int_0^{0.1} 200x \, dx = 100(0.01) = 1.0$ J.

4. بوابة مستطيلة رأسية عرضها 10 m تحجز ماءً عمقه 5 m. أوجد القوة الكلية للماء عليها.

$F = \int_0^5 \rho g \, y \, (10) \, dy = 1{,}000 \times 9.81 \times 10 \times 25/2 = 1.23 \times 10^6$ N.

مفاهيم خاطئة شائعة

خرافة: حجم الدوران = π × المساحة.
في الحقيقة: يجب تربيع نصف القطر داخل التكامل: $\int \pi \, f^2 \, dx$، وليس $\pi(\int f \, dx)$.

خرافة: شغل الضخ = الوزن × ارتفاع الخزان.
في الحقيقة: كل طبقة تتحرك مسافة مختلفة، لذا يجب التكامل.

خرافة: مركز الكتلة هو دائمًا نقطة المنتصف.
في الحقيقة: فقط عند كثافة منتظمة وشكل متماثل.

بطاقات تعليمية

طريقة الأقراص

$V = \int \pi \, f(x)^2 \, dx$.

طريقة الحلقات

$V = \int \pi (R^2 - r^2) \, dx$.

طريقة الأغلفة الأسطوانية

$V = \int 2\pi x \, f(x) \, dx$.

طول القوس

$L = \int \sqrt{(1 + f'^2)} \, dx$.

الشغل

$W = \int F \, dx$.

مركز الكتلة

العزم مقسومًا على الكتلة.

اختبار ذاتي

1. الأغلفة حول المحور y تستخدم الدالة المكاملة...

$\pi\, f(x)^2$

$2\pi x\, f(x)$

$f(x)^2$

$2\pi\, f(x)$

$2\pi x\, f(x)$. المحيط × $2\pi x$ الارتفاع × $f(x)$ السمك dx.

2. طول القوس يستخدم...

$\int f(x)\, dx$

$\int \sqrt{1 + f'^2}\, dx$

$\int f'\, dx$

$\int \pi\, f^2\, dx$

$\int \sqrt{1 + f'^2}\, dx$. فيثاغورس على كل قطعة صغيرة.

3. الضغط الهيدروستاتيكي على السد يزداد...

مع مربع العمق

خطيًا مع العمق

لا يزداد إطلاقًا

مع عرض السد

خطيًا مع العمق. $P = \rho g h$؛ وبذلك تزداد القوة الكلية مع مربع العمق.

4. الشغل اللازم لمدّ نابض مسافة x من السكون هو...

kx

$\tfrac{1}{2}kx^2$

kx^2

$2kx$

$\frac{1}{2}kx^2$. $\int_0^x kt\,dt$.

أعد هذا الاختبار

كيف يساعد هذا في إنقاذ الكوكب

يستخدم مهندسو المياه هذه التكاملات مباشرة: حجم الخزان من شكله، والطاقة اللازمة لضخ المياه إلى حيث تُحتاج، والقوة التي يجب أن يصمد أمامها سد أو حاجز فيضانات. والضخ تكلفة طاقة كبيرة في كثير من شبكات المياه، لذا فإن إعداد التكامل بشكل صحيح يوفر الطاقة والمال معًا.

تقيس الأقمار الصناعية الآن من المدار ارتفاع الأنهار والبحيرات والخزانات. تمسح مهمة SWOT التابعة لناسا والمركز الوطني الفرنسي للدراسات الفضائية (CNES) المياه السطحية لتقدير التغيرات في المياه المخزنة، وهذا تقطيع وجمع على مستوى الكوكب.

على Saving Planets: SWOT · مساحة للنهر

المصادر: OpenStax Calculus 2, 2.5 Physical Applications (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/2-5-physical-applications) · ناسا: مهمة SWOT (https://swot.jpl.nasa.gov/)

مصادر تعلّم مجانية

- OpenStax Calculus 2, 2.2 Determining Volumes by Slicing (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/2-2-determining-volumes-by-slicing): الأقراص والحلقات.
- OpenStax Calculus 2, 2.3 Volumes of Revolution: Cylindrical Shells (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/2-3-volumes-of-revolution-cylindrical-shells): الأغلفة الأسطوانية.
- OpenStax Calculus 2, 2.4 Arc Length of a Curve and Surface Area (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/2-4-arc-length-of-a-curve-and-surface-area): طول القوس.
- OpenStax Calculus 2, 2.5 Physical Applications (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/2-5-physical-applications): الشغل والضخ وقوة الموائع.
- OpenStax Calculus 2, 2.6 Moments and Centers of Mass (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/2-6-moments-and-centers-of-mass): المراكز الهندسية.

شاهد المحاضرة

Clip 1: Introduction to Arc Length (https://ocw.mit.edu/courses/18-01sc-single-variable-calculus-fall-2010/resources/clip-1-introduction-to-arc-length/) (باللغة الإنجليزية)

MIT 18.01SC Single Variable Calculus (Fall 2010), MIT OpenCourseWare. الترخيص: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · شروط الاستخدام (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). الرابط للدراسة المجانية فقط؛ Saving Planets غير تابع لهذه الجامعة ولا يحظى بتأييدها.

- [ ] أنهيت هذه الوحدة

التكاملات المعتلة

تكاملات على فترات لانهائية أو عبر قمم لانهائية: متى يكون مجموعها عددًا منتهيًا ومتى لا يكون.

أهداف التعلّم

في نهاية هذه الوحدة ستستطيع أن:

- حساب التكاملات المعتلة كنهايات.
- تحديد التقارب باختبار p والمقارنة.
- تطبيق التكاملات المعتلة على طاقة الإفلات ومتوسط الأعمار.

المفاهيم الأساسية

- ∫ₐ^∞ f dx تعني نهاية ∫ₐ^b f dx عندما b → ∞. إذا كانت النهاية منتهية، فالتكامل متقارب.
- ∫₁^∞ dx/xᵖ يتقارب تمامًا عندما p > 1. ∫₀¹ dx/xᵖ يتقارب تمامًا عندما p < 1.
- المقارنة: إذا كان 0 ≤ f ≤ g وتقارب ∫g، فإن ∫f يتقارب أيضًا.
- قد تكون لمنطقة لانهائية مساحة منتهية.

المعادلات الأساسية

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^{b} f(x)\,dx$$

_a^∞f(x) dx=_b∞_a^bf(x) dx

تكامل معتل

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1}\ (p>1)$$

_1^∞(dx)/(x^p)=1p-1\ (p>1)

تكامل p

$$W_{\infty} = \int_R^{\infty} \frac{GMm}{r^2}\,dr = \frac{GMm}{R}$$

W_∞=_R^∞(GMm)/(r^2) dr=GMm/R

الشغل اللازم للإفلات من جاذبية كوكب

أمثلة محلولة خطوة بخطوة

مثال 3.1 احسب ∫₁^∞ dx/x².

1. $\int_1^b x^{-2}\,dx = 1 - 1/b$.
2. As $b \to \infty$, $1/b \to 0$.

الإجابة: 1 (متقارب).

مثال 3.2 هل يتقارب $\int_1^\infty dx/x$؟

1. $\int_1^b dx/x = \ln b$.
2. $\ln b \to \infty$.

الإجابة: لا، بل يتباعد، رغم أن $1/x \to 0$.

مثال 3.3 ما الطاقة اللازمة لكل كيلوغرام للإفلات من جاذبية الأرض من سطحها (مع إهمال الهواء والدوران)؟

1. $W/m = \int_R^\infty GM/r^2\,dr = GM/R$.
2. $GM = 3.986 \times 10^{14}\ m^3/s^2$, $R = 6.371 \times 10^{6}\ m$.
3. $W/m = 6.26 \times 10^{7}\ J/kg$.

الإجابة: نحو 62.6 MJ لكل كيلوغرام، وهي قيمة منتهية رغم أن المسافة لانهائية. وبمساواة $\tfrac{1}{2}v^2$ بها نحصل على سرعة الإفلات 11.2 km/s.

تمارين

حلّ كلًّا منها على الورق أولًا، ثم تحقق.

1. $\int_0^\infty e^{-x}\,dx$

   $[-e^{-x}]_0^\infty = 0 + 1 = 1$.

2. $\int_0^1 dx/\sqrt{x}$

   $[2\sqrt{x}]_0^1 = 2$ (متقارب؛ $p = \tfrac{1}{2} < 1$).

3. $\int_2^\infty dx/x^3$

   $[-1/(2x^2)]_2^\infty = 1/8$.

4. هل يتقارب $\int_1^\infty dx/(x^2+1)$؟

   نعم: فهو أصغر من $1/x^2$ الذي يتقارب. بل إنه يساوي $\pi/4$.

5. في الاضمحلال الأسي بمعدل λ، متوسط العمر هو $\int_0^\infty t\,\lambda e^{-\lambda t}\,dt$. احسبه.

   بالتجزئة: $1/\lambda$.

مفاهيم خاطئة شائعة

خرافة: إذا كان $f(x) \to 0$ عندما $x \to \infty$، فالتكامل متقارب.
في الحقيقة: $1/x \to 0$ لكن $\int_1^\infty dx/x$ يتباعد.

خرافة: المنطقة الممتدة إلى ما لانهاية مساحتها لانهائية.
في الحقيقة: $\int_1^\infty dx/x^2 = 1$.

خرافة: $\int_{-1}^{1} dx/x^2 = -2$ بالصيغة المعتادة.
في الحقيقة: الدالة المكاملة تنفجر عند 0، لذا فالتكامل معتل، وهو متباعد.

بطاقات تعليمية

تكامل معتل

فترة لانهائية أو دالة مكاملة لانهائية؛ يُعرّف بنهاية.

متقارب

النهاية موجودة ومنتهية.

اختبار p (∞)

$\int_1^\infty x^{-p}$ يتقارب إذا وفقط إذا $p > 1$.

اختبار p (0)

$\int_0^1 x^{-p}$ يتقارب إذا وفقط إذا $p < 1$.

اختبار المقارنة

أصغر من متقارب ⇒ متقارب.

طاقة الإفلات

GM/R لكل kg.

اختبار ذاتي

1. $\int_1^\infty dx/x^{1.5}$...

متباعد

يتقارب إلى 2

يتقارب إلى 1

يتقارب إلى 1.5

2. يتقارب إلى $1/(p-1) = 1/0.5 = 2$.

2. $\int_1^\infty dx/x$...

يتقارب إلى 1

متباعد

يتقارب إلى 0

يساوي ln 2

متباعد. $\infty \to \ln b$.

3. $\int_0^\infty e^{(-2x)}\,dx =$

2

1/2

1

∞

$1/2.\ [-e^{(-2x)/2}]_0^\infty = 1/2$.

4. يُعرّف التكامل المعتل بأنه...

مجموع

نهاية لتكاملات عادية

مشتقة

لانهائي دائمًا

نهاية لتكاملات عادية. خذ نهاية $\int_a^b$.

أعد هذا الاختبار

كيف يساعد هذا في إنقاذ الكوكب

تعطي التكاملات المعتلة الطاقة اللازمة لمغادرة كوكب، وهي الرقم الكامن خلف كل إطلاق لقمر صناعي للطقس أو المناخ. وهي منتهية، ولهذا فإن رحلات الفضاء ممكنة أصلًا.

متوسطات الأعمار، وهي أيضًا تكاملات معتلة، تصف مدة بقاء المواد: كم يبقى ملوث في بحيرة، أو كم يبقى متتبع مشع يُستخدم لتأريخ الجليد ومياه المحيطات.

على Saving Planets: الفيزياء ١، الوحدة 7: المدارات · حاسبة delta-v

المصادر: OpenStax Calculus 2, 3.7 Improper Integrals (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/3-7-improper-integrals) · صحيفة بيانات الأرض من NASA (بالإنجليزية) (https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/earthfact.html)

مصادر تعلّم مجانية

- OpenStax Calculus 2, 3.7 Improper Integrals (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/3-7-improper-integrals): قسم مجاني من كتاب دراسي يتضمن اختبارات المقارنة.

شاهد المحاضرة

Lecture 36: Improper Integrals (https://ocw.mit.edu/courses/18-01-single-variable-calculus-fall-2006/resources/lecture-36-improper-integrals/) (باللغة الإنجليزية)

MIT 18.01 Single Variable Calculus (Fall 2006), MIT OpenCourseWare. الترخيص: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · شروط الاستخدام (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). الرابط للدراسة المجانية فقط؛ Saving Planets غير تابع لهذه الجامعة ولا يحظى بتأييدها.

أنهيت هذه الوحدة

مقدمة في المعادلات التفاضلية

معادلات لمعدلات التغير: النمو والاضمحلال الأسيان، والتبريد، والخلط، والنموذج اللوجستي للمجموعات السكانية.

أهداف التعلّم

في نهاية هذه الوحدة ستستطيع أن:

- التحقق من الحلول وحل مسائل القيمة الابتدائية.
- قراءة حقول الاتجاهات واستخدام طريقة أويلر.
- حل المعادلات القابلة للفصل، بما في ذلك مسائل الخلط والتبريد.
- استخدام المعادلة اللوجستية وتفسير سعتها الاستيعابية.

المفاهيم الأساسية

- المعادلة التفاضلية تربط دالة بمشتقاتها. وحلها دالة، وعادة ما يكون عائلة تحددها حالة ابتدائية.
- المعادلات القابلة للفصل: ضع كل y في طرف وكل x في الطرف الآخر، ثم كامل.
- y' = ky تعطي y = y₀e^(kt): نمو إذا k > 0، واضمحلال إذا k < 0.
- الخلط: معدل تغير الملوث = معدل الدخول − معدل الخروج.
- اللوجستية: P' = rP(1 − P/K). يتباطأ النمو كلما اقتربت P من السعة الاستيعابية K، ويكون أسرع ما يمكن عند P = K/2.
- تتقدم طريقة أويلر على طول الميل: $y_{n+1} = y_n + h\,f(t_n, y_n)$. خطوات أصغر، خطأ أصغر.

المعادلات الأساسية

$$\frac{dy}{dt} = ky \;\Rightarrow\; y = y_0 e^{kt}$$

```
dy/dt=ky\ \ y=y_0e^kt
```

النمو والاضمحلال الأسيان

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_s)$$

```
dT/dt=-k(T-T_s)
```

قانون نيوتن للتبريد

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right), \quad P(t) = \frac{K}{1 + \frac{K - P_0}{P_0}e^{-rt}}$$

```
dP/dt=rP(1- PK), P(t)=1+(K-P_0)/(P_0)e^-rt
```

المعادلة اللوجستية وحلها

$$y_{n+1} = y_n + h\,f(t_n, y_n)$$

```
y_n+1=y_n+h f(t_n,y_n)
```

طريقة أويلر

أمثلة محلولة خطوة بخطوة

مثال 4.1 جزء من بحيرة يحتوي على 1000 m³ من الماء فيها 50 kg من ملوث مذاب. يدخل ماء نظيف بمعدل 10 m³/يوم ويخرج ماء جيد الخلط بالمعدل نفسه. كم من الوقت حتى يزول نصف الملوث؟

1. $dS/dt = -(10/1{,}000)S = -S/100$.
2. $S(t) = 50e^{(-t/100)}$.
3. النصف: $e^{(-t/100)} = ½$، إذن $t = 100 \ln 2$.

الإجابة: 69.3 ≈ يومًا (نموذج مبسط جيد الخلط).

مثال 4.2 تتبع مجموعة أسماك المعادلة $P' = 0.5P(1 - P/1000)$ مع $P(0) = 100$. أوجد $P(4)$.

1. $P(t) = 1{,}000/(1 + 9e^{(-0.5t)})$.
2. $P(4) = 1{,}000/(1 + 9e^{(-2)}) = 1{,}000/2.218$.

الإجابة: 451 ≈ سمكة، قرب مستوى النمو الأسرع $K/2 = 500$.

مثال 4.3 استخدم طريقة أويلر مع $h = 0.5$ لتقدير $y(1)$ في $y' = y$، $y(0) = 1$.

1. $y_1 = 1 + 0.5(1) = 1.5$.
2. $y_2 = 1.5 + 0.5(1.5) = 2.25$.

الإجابة: 2.25، مقابل القيمة الدقيقة $e \approx 2.718$؛ وتنصيف h يقلص الخطأ.

تمارين

حلّ كلًّا منها على الورق أولًا، ثم تحقق.

1. قهوة عند 90 °C تبرد في غرفة عند 20 °C مع $k = 0.1$ لكل دقيقة. أوجد درجة حرارتها بعد 10 دقائق.

   $T = 20 + 70e^{(-1)} \approx 45.8$ °C.

2. حل $y' = xy$ مع $y(0) = 2$، وأوجد $y(1)$.

   $dy/y = x\,dx$، إذن $y = 2e^{(x^2/2)}$; $y(1) = 2e^{0.5} \approx 3.30$.

3. حل $y' = -2y$، $y(0) = 5$. أوجد $y(1)$.

.y = 5e^(−2t); y(1) ≈ 0.677

4. في P' = rP(1 − P/K)، عند أي حجم للمجموعة يكون النمو أسرع ما يمكن؟

rP(1 − P/K) قطع مكافئ مفتوح للأسفل في P رأسه عند P = K/2.

مفاهيم خاطئة شائعة

خرافة: حل المعادلة التفاضلية عدد.
في الحقيقة: إنه دالة (أو عائلة من الدوال).

خرافة: تعطي طريقة أويلر الجواب الدقيق إذا كنت حريصًا.
في الحقيقة: فيها خطأ يعتمد على حجم الخطوة؛ ولا تتقارب إلا عندما h → 0.

خرافة: تتوقف المجموعات اللوجستية عن النمو عند K/2.
في الحقيقة: يكون النمو أسرع ما يمكن عند K/2 ولا يتباطأ إلى الصفر إلا عندما تقترب P من K.

بطاقات تعليمية

معادلة تفاضلية

معادلة تتضمن دالة ومشتقاتها.

مسألة القيمة الابتدائية

معادلة تفاضلية مع قيمة بداية.

قابلة للفصل

.g(y) dy = h(x) dx

المعادلة اللوجستية

.P' = rP(1 − P/K)

السعة الاستيعابية

K، النهاية طويلة الأمد لمجموعة لوجستية.

طريقة أويلر

.$y_{n+1} = y_n + h\, f(t_n, y_n)$

اختبار ذاتي

1. الحل العام لـ y' = 3y هو...

$3e^x$

Ce^(3x)

e^(3x) + C

3x + C

Ce^(3x). افصل ثم كامل.

2. في النموذج اللوجستي، K هي...

معدل النمو

المجموعة الابتدائية

السعة الاستيعابية

عمر النصف

السعة الاستيعابية. المستوى الذي تقترب منه المجموعة.

3. خطوة أويلر واحدة من (0, 2) مع y' = y وh = 0.1 تعطي...

2.1

2.2

2.02

2.0

2 × 0.1 + 2 = 2.2.

4. dy/dx = x²y هي...

غير قابلة للفصل

قابلة للفصل

خطية بمعاملات ثابتة فقط

لوجستية

قابلة للفصل. dy/y = x² dx.

أعد هذا الاختبار

كيف يساعد هذا في إنقاذ الكوكب

تُعد نماذج المجموعات السكانية المبنية على المعادلة اللوجستية جزءًا من طريقة علماء مصايد الأسماك في تقييم المخزونات وتحديد حدود صيد تسمح للمجموعات بالبقاء سليمة، مما يحمي النظم البيئية للمحيطات والناس الذين يعتمدون عليها.

معادلات الخلط مثل المثال 4.1 هي الخطوة الأولى لتقدير مدى سرعة تخلص بحيرة أو مصب نهر من ملوث بعد إيقاف مصدره.

تحل نماذج الطقس والمناخ أنظمة ضخمة جدًا من المعادلات التفاضلية بطرق عددية خطوة بخطوة، منحدرة من طريقة أويلر.

على Saving Planets: محور البحيرات · محور المحيطات

المصادر: OpenStax Calculus 2, 4.4 The Logistic Equation (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/4-4-the-logistic-equation) · NOAA Fisheries: تقييمات المجموعات السمكية (https://www.fisheries.noaa.gov/topic/population-assessments)

مصادر تعلّم مجانية

- OpenStax Calculus 2, 4.1 Basics of Differential Equations (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/4-1-basics-of-differential-equations): قسم من كتاب مدرسي مجاني.
- OpenStax Calculus 2, 4.2 Direction Fields and Numerical Methods (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/4-2-direction-fields-and-numerical-methods): طريقة أويلر.
- OpenStax Calculus 2, 4.3 Separable Equations (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/4-3-separable-equations): الخلط والتبريد.
- OpenStax Calculus 2, 4.4 The Logistic Equation (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/4-4-the-logistic-equation): نماذج المجموعات السكانية.

شاهد المحاضرة

Lecture 16: Differential Equations (https://ocw.mit.edu/courses/18-01-single-variable-calculus-fall-2006/resources/lecture-16-differential-equations/) (باللغة الإنجليزية)

MIT 18.01 Single Variable Calculus (Fall 2006), MIT OpenCourseWare. الترخيص: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · شروط الاستخدام (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). الرابط للدراسة المجانية فقط؛ Saving Planets غير تابع لهذه الجامعة ولا يحظى بتأييدها.

☐ **أنهيت هذه الوحدة**

المتتاليات والمتسلسلات

متى يعطي جمع عدد لانهائي من الأعداد مجموعًا منتهيًا؟ المتسلسلات الهندسية، والمتسلسلة التوافقية، واختبارات التقارب.

أهداف التعلّم

في نهاية هذه الوحدة ستستطيع أن:

- إيجاد نهايات المتتاليات.
- جمع المتسلسلات الهندسية والمتداخلة.
- تطبيق اختبارات التباعد والتكامل والمقارنة والمتسلسلات المتناوبة والنسبة والجذر.
- التمييز بين التقارب المطلق والتقارب المشروط.

المفاهيم الأساسية

- تتقارب المتسلسلة Σaₙ إذا اقتربت مجاميعها الجزئية من نهاية.
- الهندسية: Σ arⁿ (n ≥ 0) = a/(1 − r) عندما |r| < 1.
- اختبار التباعد: إذا لم يكن aₙ → 0 فالمتسلسلة متباعدة. والعكس غير صحيح: المتسلسلة التوافقية Σ1/n متباعدة.
- متسلسلة Σ1/nᵖ p تتقارب إذا وفقط إذا p > 1 (باختبار التكامل).
- اختبار النسبة: إذا كان L < 1 → |aₙ₊₁/aₙ| فالمتسلسلة متقاربة مطلقًا؛ وإذا L > 1 فهي متباعدة؛ وL = 1 لا يقول شيئًا.
- المتسلسلات المتناوبة التي تتناقص حدودها إلى 0 متقاربة؛ Σ(−1)ⁿ⁺¹/n = ln 2.

المعادلات الأساسية

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r} \ (|r|<1)$$

_n=0^∞ar^n=(a)/(1-r)\ (|r|<1)

متسلسلة هندسية

$$\sum \frac{1}{n^p} \text{ converges } \iff p > 1$$

متسلسلة p

$$L = \lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

L=|_n+1a_n|

اختبار النسبة

أمثلة محلولة خطوة بخطوة

مثال 5.1 اجمع $\sum (1/2)^n$ بدءًا من $n = 0$.

1. هندسية مع $a = 1$، $r = ½$.
2. $1/(1 - ½) = 2$.

الإجابة: 2.

مثال 5.2 تفقد بحيرة كل عام 10% من ملوث مخزّن، وتُضاف إليها 5 أطنان. عند أي مستوى تستقر؟

1. بعد سنوات عديدة تصبح الكمية $5 + 5(0.9) + 5(0.9)^2 + \dots$
2. هندسية: $5/(1 - 0.9)$.

الإجابة: 50 طنًا. خفض المدخلات السنوية إلى النصف يخفض المستوى طويل الأمد إلى النصف (نموذج مبسط).

مثال 5.3 هل تتقارب $\sum n/2^n$؟

1. النسبة: $[(n + 1)/2^{n+1}]/[n/2^n] = (n + 1)/(2n) \to ½$.
2. $½ < 1$.

الإجابة: متقاربة (مجموعها 2).

تمارين

حلّ كلًّا منها على الورق أولًا، ثم تحقق.

1. $\sum 0.9(0.1)^n$ بدءًا من $n = 0$

   $0.9/(1 - 0.1) = 1$. So $0.999\ldots = 1$.

2. هل تتقارب $\sum 1/n^2$؟

   نعم، $p = 2 > 1$ (مجموعها $\pi^2/6$).

3. هل تتقارب $\sum n/(n + 1)$؟

   لا: الحدود $\to 1$ وليس 0 (اختبار التباعد).

4. اجمع $\sum 3(2/3)^n$ بدءًا من $n = 0$.

   $3/(1 - 2/3) = 9$.

5. هل تتقارب $\sum (-1)^{n+1}/n$ تقاربًا مطلقًا؟

لا. إنها تتقارب (إلى ln 2)، لكن Σ1/n تتباعد، فالتقارب مشروط.

مفاهيم خاطئة شائعة

خرافة: إذا اقتربت الحدود من 0، فالمتسلسلة متقاربة.
في الحقيقة: المتسلسلة التوافقية هي المثال المضاد.

خرافة: نهاية تساوي 1 في اختبار النسبة تعني التباعد.
في الحقيقة: L = 1 غير حاسم؛ استخدم اختبارًا آخر.

خرافة: إعادة ترتيب الحدود لا تغير المجموع أبدًا.
في الحقيقة: في المتسلسلات المتقاربة شرطيًا يمكن أن تغيره.

بطاقات تعليمية

متتالية

قائمة مرتبة $a_1, a_2, \ldots$

متسلسلة

مجموع متتالية؛ نهاية المجاميع الجزئية.

متسلسلة هندسية

$a/(1 - r)$ عندما $|r| < 1$.

المتسلسلة التوافقية

$\Sigma 1/n$، متباعدة.

اختبار النسبة

$L < 1$ متقاربة، $L > 1$ متباعدة، $L = 1$ غير حاسم.

التقارب المشروط

متقاربة، لكن ليس تقاربًا مطلقًا.

اختبار ذاتي

1. $\Sigma (1/3)^n$ بدءًا من $n = 0$ =

- 1/3
- 3/2
- 3
- 2

3/2. $1/(1 - 1/3)$.

2. المتسلسلة التوافقية Σ1/n...

يتقارب إلى 1

متباعد

تتقارب إلى ln 2

تتقارب إلى e

متباعد. 1 = p، اختبار التكامل.

3. Σ 1/n^1.01...

متقاربة

متباعد

لا يمكن الحسم

تساوي 1

متقاربة. 1 < p.

4. اختبار النسبة لـ Σ 1/n! يعطي L =

1

0

∞

1/2

0 → 1/(n + 1)، 0. إذن هي متقاربة.

أعد هذا الاختبار

كيف يساعد هذا في إنقاذ الكوكب

تصف المتسلسلات الهندسية كل ما يُرحَّل جزء منه من فترة إلى التالية، كما في المثال 5.2. ويُظهر هذا النموذج البسيط حقيقة أساسية عن التلوث وغازات الدفيئة: المستوى طويل الأمد يعتمد على معدل المدخلات، لذا فإن خفض المدخلات يخفض المستوى

الذي تستقر عنده الأمور.

الأنظمة الحقيقية أعقد من متسلسلة هندسية واحدة، ويستخدم العلماء نماذج كاملة، لكن المتسلسلة هي الحدس الأول الصحيح.

على Saving Planets: توقعات تكاثر الطحالب في بحيرة إيري · محور البحيرات

المصادر: OpenStax Calculus 2, 5.2 Infinite Series (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/5-2-infinite-series) · NOAA GML: اتجاهات CO_2 في الغلاف الجوي (بالإنجليزية) (https://gml.noaa.gov/ccgg/trends/)

مصادر تعلّم مجانية

- OpenStax Calculus 2, 5.1 Sequences (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/5-1-sequences): قسم من كتاب مدرسي مجاني.
- OpenStax Calculus 2, 5.2 Infinite Series (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/5-2-infinite-series): المتسلسلات الهندسية والمتداخلة.
- OpenStax Calculus 2, 5.6 Ratio and Root Tests (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/5-6-ratio-and-root-tests): اختبارا النسبة والجذر.

أنهيت هذه الوحدة

متسلسلات القوى ومتسلسلات تايلور

تحويل الدوال إلى كثيرات حدود لانهائية. متسلسلات تايلور هي طريقة الآلات الحاسبة في الحساب، وطريقة الفيزيائيين في تبسيط المسائل الصعبة.

أهداف التعلّم

في نهاية هذه الوحدة ستستطيع أن:

- إيجاد نصف قطر التقارب وفترة التقارب لمتسلسلة قوى.
- بناء متسلسلات وكثيرات حدود تايلور وماكلورين.
- إيجاد حد لخطأ تقريب تايلور.
- استخدام المتسلسلات لتقريب التكاملات وتبرير تقريبات الزوايا الصغيرة.

المفاهيم الأساسية

- متسلسلة القوى Σcₙ(x − a)ⁿ تتقارب داخل نصف قطر R وتتباعد خارجه؛ افحص طرفي الفترة كلًا على حدة.
- متسلسلة تايلور: cₙ = f⁽ⁿ⁾(a)/n!. وحول a = 0 تُسمى متسلسلة ماكلورين.
- متسلسلات أساسية: eˣ = Σxⁿ/n!، sin x = x − x³/3! + x⁵/5! − ...، cos x = 1 − x²/2! + x⁴/4! − ...، ln(1 + x) = x − x²/2 + x³/3 − ... (|x| < 1).
- باقي تايلور: الخطأ لا يتجاوز M|x − a|ⁿ⁺¹/(n + 1)!، حيث M حد للمشتقة التالية.
- الاحتفاظ بالحد الأول فقط يحوّل sin θ إلى θ، وهو تقريب الزاوية الصغيرة الذي تقوم عليه صيغة البندول البسيط.

المعادلات الأساسية

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

f(x)=_n=0^∞^(n)(a)n!(x-a)^n

متسلسلة تايلور

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

e^x=_n=0^∞(x^n)/(n!)

المتسلسلة الأسية

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

x=x-(x^3)/(3!)+(x^5)/(5!)-·s

متسلسلة الجيب

$$|R_n(x)| \le \frac{M|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

حد باقي تايلور

أمثلة محلولة خطوة بخطوة

مثال 6.1 قدّر e^0.1 بالحدود الأربعة الأولى من متسلسلتها.

1. 1 + 0.1 + 0.01/2 + 0.001/6.
2. = 1.105167.

الإجابة: 1.105167، مقابل القيمة الحقيقية 1.105171.

مثال 6.2 قدّر sin 0.5 بثلاثة حدود وأوجد حدًا للخطأ.

1. 0.5 − 0.125/6 + 0.03125/120 = 0.479427.
2. حد الحد التالي: $0.5^7/7! = 1.55 \times 10^{-6}$.

الإجابة: 0.479427، والخطأ أقل من 1.6×10^{-6} (القيمة الحقيقية 0.479426).

مثال 6.3 أوجد نصف قطر تقارب $\sum x^n/3^n$.

1. النسبة: $|x|/3 < 1$.
2. الطرفان $x = \pm 3$ يعطيان حدودًا ± 1 لا تقترب من 0.

الإجابة: $R = 3$؛ تتقارب عندما $-3 < x < 3$.

تمارين

حلّ كلًّا منها على الورق أولًا، ثم تحقق.

1. اكتب كثيرة حدود ماكلورين من الدرجة 4 لـ cos x واستخدمها لحساب cos 0.2.

   $1 - x^2/2 + x^4/24$؛ $1 - 0.02 + 0.0000667 = 0.980067$ ≈ cos 0.2 (القيمة الحقيقية 0.980067).

2. أوجد متسلسلة ماكلورين لـ $1/(1-x)$.

   $\sum x^n$ عندما $|x| < 1$ (هندسية).

3. أوجد نصف قطر تقارب $\sum x^n/n$.

$R = 1$ (النسبة $\to 1$ $(n/(n+1))$.

4. استخدم متسلسلة لتقدير $\int_0^1 e^{(-x^2)}\,dx$ بثلاثة حدود.

$\int(1 - x^2 + x^4/2)\,dx = 1 - 1/3 + 1/10 = 0.7667$. ومع مزيد من الحدود تقترب من 0.7468.

مفاهيم خاطئة شائعة

خرافة: كثيرة حدود تايلور دقيقة في كل مكان.
في الحقيقة: تكون أفضل قرب المركز a وقد تكون سيئة جدًا بعيدًا عنه أو خارج نصف قطر التقارب.

خرافة: كل دالة ملساء تساوي متسلسلة تايلور الخاصة بها.
في الحقيقة: ليس دائمًا، وإن كان ذلك صحيحًا في كل مكان لـ e^x و$\sin x$ و$\cos x$.

خرافة: نصف قطر التقارب يحسم الطرفين أيضًا.
في الحقيقة: يجب فحص الطرفين كلًا على حدة.

بطاقات تعليمية

متسلسلة قوى

$\Sigma c_n(x - a)^n$.

نصف قطر التقارب

R بحيث تتقارب المتسلسلة عندما $|x - a| < R$.

معامل تايلور

$f^{(n)}(a)/n!$.

متسلسلة ماكلورين

متسلسلة تايلور عند $a = 0$.

تقريب الزاوية الصغيرة

$\sin\theta \approx \theta$، $\cos\theta \approx 1 - \theta^2/2$.

حد الباقي

$M|x - a|^{n+1}/(n+1)!$.

اختبار ذاتي

1. متسلسلة ماكلورين لـ e^x هي...

Σx^n

$\Sigma x^n/n!$

$\Sigma(-1)^n x^n$

$\Sigma x^n/n$

$\Sigma x^n/n!$. كل مشتقات e^x عند 0 تساوي 1.

2. عندما تكون θ صغيرة، sin θ ≈ ...

1

θ

θ^2

1 − θ

θ. الحد الأول من المتسلسلة.

3. معامل x^3 في متسلسلة sin x هو...

1/3

−1/6

1/6

−1/3

−1/6. −1/3!.

4. Σx^n تتقارب عندما...

كل x

$|x| < 1$

$|x| \leq 1$

$x > 0$

$|x| < 1$. متسلسلة هندسية.

أعد هذا الاختبار

كيف يساعد هذا في إنقاذ الكوكب

متسلسلات تايلور هي طريقة الفيزيائيين في تحويل المعادلات الصعبة إلى معادلات قابلة للاستخدام. فدور البندول $T = 2\pi\sqrt{(L/g)}$ في الفيزياء I يعتمد على $\sin\theta \approx \theta$، والنوع نفسه من التخطيط الخطي يقوم عليه جزء كبير من تحليل المهندسين للاهتزازات في توربينات الرياح والجسور والطائرات.

تفكك نماذج مدارات الأقمار الصناعية والمناخ التأثيرات المعقدة إلى متسلسلات وتحتفظ بالحدود المهمة. ومعرفة حد الخطأ تخبرك متى يكون التقريب جيدًا بما يكفي للوثوق به.

على Saving Planets: الفيزياء ١، الوحدة 8: الاهتزازات · حاسبة دورة البندول

المصادر: OpenStax Calculus 2, 6.3 Taylor and Maclaurin Series (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/6-3-taylor-and-maclaurin-series) · OpenStax University Physics 1, 15.4 Pendulums (بالإنجليزية) (https://openstax.org/books/university-physics-volume-1/pages/15-4-pendulums)

مصادر تعلّم مجانية

- OpenStax Calculus 2, 6.3 Taylor and Maclaurin Series (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/6-3-taylor-and-maclaurin-series): قسم من كتاب مدرسي مجاني.
- MIT OpenCourseWare 18.01SC (https://ocw.mit.edu/courses/18-01sc-single-variable-calculus-fall-2010/): محاضرات ومجموعات مسائل عن المتسلسلات.

شاهد المحاضرة

Lecture 38: Taylor's Series (https://ocw.mit.edu/courses/18-01-single-variable-calculus-fall-2006/resources/lecture-38-taylors-series/) (باللغة الإنجليزية)

MIT 18.01 Single Variable Calculus (Fall 2006), MIT OpenCourseWare. الترخيص: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · شروط الاستخدام (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). الرابط للدراسة المجانية فقط؛ Saving Planets غير تابع لهذه الجامعة ولا يحظى بتأييدها.

☐ **أنهيت هذه الوحدة**

المعادلات الوسيطية والإحداثيات القطبية

وصف المسارات بدلالة الزمن والمنحنيات بدلالة الزاوية، بما في ذلك القطع الناقص الذي يتبعه كل قمر صناعي وكل كوكب.

أهداف التعلّم

في نهاية هذه الوحدة ستستطيع أن:

- رسم المنحنيات الوسيطية وإيجاد dy/dx وطول القوس.
- التحويل بين الإحداثيات القطبية والديكارتية.
- إيجاد المساحات وأطوال الأقواس في الإحداثيات القطبية.
- وصف مدار كبلري بالصيغة القطبية.

المفاهيم الأساسية

- المنحنى الوسيطي يعطي x(t) وy(t)؛ dy/dx = (dy/dt)/(dx/dt).
- طول القوس: ∫√(x'² + y'²) dt.
- القطبية: x = r cos θ، y = r sin θ. مساحة منطقة قطبية: ½∫r² dθ.
- المدار حول بؤرة واحدة هو r = p/(1 + e cos θ)، حيث e الاختلاف المركزي.
- قانون كبلر الثاني (مساحات متساوية في أزمنة متساوية) يعني أن ½r² dθ/dt ثابت.

المعادلات الأساسية

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

```
dy/dx=(dy/dt)/(dx/dt)
```

ميل منحنى وسيطي

$$L = \int_a^b \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\, dt$$

```
L=_a^b(x')^2+(y')^2 dt
```

طول القوس الوسيطي

$$A = \tfrac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2\, d\theta$$

```
A=12_α^β r^2 dθ
```

المساحة القطبية

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos\theta}$$

r=(a(1-e^2))/(1+eθ)

مدار مخروطي بالصيغة القطبية

أمثلة محلولة خطوة بخطوة

مثال 7.1 أوجد ميل $x = t^2$، $y = t^3$ عند $t = 1$.

1. $dx/dt = 2t,\ dy/dt = 3t^2$.
2. $dy/dx = 3t^2/(2t) = 3t/2 = 3/2$ عند $t = 1$.

الإجابة: $3/2$.

مثال 7.2 أوجد المساحة داخل منحنى القلب $r = 1 + \cos\theta$.

1. $A = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 + \cos\theta)^2\, d\theta$.
2. $= \tfrac{1}{2}\int (1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta)\, d\theta = \tfrac{1}{2}(2\pi + 0 + \pi)$.

الإجابة: $3\pi/2 \approx 4.71$.

مثال 7.3 لمدار الأرض $a = 149.6$ مليون km و$e = 0.0167$. أوجد أقرب وأبعد مسافة لها عن الشمس.

1. At $\theta = 0$: $r = a(1 - e) = 149.6 \times 0.9833$.
2. At $\theta = \pi$: $r = a(1 + e) = 149.6 \times 1.0167$.

الإجابة: نحو 147.1 و152.1 مليون km، بما يطابق الحضيض والأوج اللذين نشرتهما ناسا.

تمارين

حلّ كلًّا منها على الورق أولًا، ثم تحقق.

1. أوجد طول $x = \cos t$، $y = \sin t$ عندما $0 \le t \le 2\pi$.

   $\int \sqrt{(\sin^2 t + \cos^2 t)}\, dt = 2\pi$ (محيط دائرة).

2. أوجد مساحة الدائرة $r = 3$.

   $\tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} 9\, d\theta = 9\pi$.

3. حوّل $r = 2\cos\theta$ إلى الصيغة الديكارتية.

   $r^2 = 2r\cos\theta$ تعطي $x^2 + y^2 = 2x$: دائرة نصف قطرها 1 مركزها $(1, 0)$، ومساحتها π.

4. احذف t من $x = 2\cos t$، $y = \sin t$.

$x^2/4 + y^2 = 1$، قطع ناقص.

مفاهيم خاطئة شائعة

خرافة: $dy/dx = dy/dt \times dx/dt$.

في الحقيقة: اقسم: $(dy/dt)/(dx/dt)$.

خرافة: المساحة القطبية هي $\int r\,d\theta$.

في الحقيقة: إنها $\frac{1}{2}\int r^2\,d\theta$، من شرائح رقيقة كشرائح الفطيرة.

خرافة: الشمس في مركز مدار الأرض.

في الحقيقة: إنها في إحدى بؤرتي القطع الناقص.

بطاقات تعليمية

منحنى وسيطي

$x = x(t), y = y(t)$.

الميل الوسيطي

$(dy/dt)/(dx/dt)$.

الإحداثيات القطبية

(r, θ)؛ $x = r\cos\theta$، $y = r\sin\theta$.

المساحة القطبية

$\frac{1}{2}\int r^2\,d\theta$.

الاختلاف المركزي

$e = 0$ دائرة، $0 < e < 1$ قطع ناقص.

قانون كبلر الثاني

مساحات متساوية في أزمنة متساوية.

اختبار ذاتي

1. المساحة القطبية تستخدم...

$\int r\,d\theta$

$\frac{1}{2}\int r^2\,d\theta$

$\int r^2\,d\theta$

$2\pi\int r\,d\theta$

½∫r² dθ. كل شريحة هي تقريبًا قطاع مساحته ½r² dθ.

2. x = r cos θ، y = ...

r tan θ

r sin θ

θ sin r

r/θ

r sin θ. من القطبية إلى الديكارتية.

3. في المدار r = p/(1 + e cos θ)، تعطي e = 0...

قطعًا مكافئًا

دائرة

خطًا مستقيمًا

قطعًا زائدًا

دائرة. r = p ثابت.

4. ينص قانون كبلر الثاني على أن r² dθ/dt...

صفر

ثابت

متزايدة

يساوي e

ثابت. مساحات متساوية في أزمنة متساوية.

أعد هذا الاختبار

كيف يساعد هذا في إنقاذ الكوكب

كل قمر صناعي لرصد الأرض يتبع مسارًا تصفه معادلة المدار القطبية في هذه الوحدة. ويختار مصممو البعثات شكل المدار وميله بحيث تعود الأجهزة إلى الأماكن نفسها في ظروف إضاءة متشابهة، مما يسهّل رصد التغيرات على الأرض.

تصف المعادلات الوسيطية المسار الأرضي الذي يرسمه القمر الصناعي فوق الأرض، وهو ما يحدد أي الغابات والسواحل والصفائح الجليدية يمكنه رؤيتها ومتى.

على Saving Planets: دليل المدارات · Landsat 9

المصادر: صحيفة بيانات الأرض من NASA (بالإنجليزية) (https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/earthfact.html) · OpenStax Calculus 2, 7.4 Area and Arc Length in Polar Coordinates (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/7-4-area-and-arc-length-in-polar-coordinates)

مصادر تعلّم مجانية

- OpenStax Calculus 2, 7.1 Parametric Equations (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/7-1-parametric-equations): قسم من كتاب مدرسي مجاني.
- OpenStax Calculus 2, 7.3 Polar Coordinates (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/7-3-polar-coordinates): الرسوم البيانية القطبية.
- OpenStax Calculus 2, 7.4 Area and Arc Length in Polar Coordinates (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/7-4-area-and-arc-length-in-polar-coordinates): المساحة والطول في الإحداثيات القطبية.
- PhET: Kepler’s Laws (https://phet.colorado.edu/en/simulations/keplers-laws): المدارات والمساحات والأدوار.

شاهد المحاضرة

Lecture 31: Parametric Equations (https://ocw.mit.edu/courses/18-01-single-variable-calculus-fall-2006/resources/lecture-31-parametric-equations/) (باللغة الإنجليزية)

MIT 18.01 Single Variable Calculus (Fall 2006), MIT OpenCourseWare. الترخيص: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · شروط الاستخدام (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). الرابط للدراسة المجانية فقط؛ Saving Planets غير تابع لهذه الجامعة ولا يحظى بتأييدها.

أنهيت هذه الوحدة

مجموعات المسائل

هذه التمارين داخل كل وحدة. حلّها على الورق أولًا، ثم افتح الإجابة.

1. تقنيات التكامل
   5 مسائل
2. تطبيقات: الحجم وطول القوس والشغل ومركز الكتلة
   4 مسائل
3. التكاملات المعتلة
   5 مسائل
4. مقدمة في المعادلات التفاضلية
   4 مسائل
5. المتتاليات والمتسلسلات
   5 مسائل

6. متسلسلات القوى ومتسلسلات تايلور
   4 مسائل
7. المعادلات الوسيطية والإحداثيات القطبية
   4 مسائل

المختبرات الحاسوبية

أربعة مختبرات حاسوبية قصيرة تطبّق الوحدات باستخدام جدول بيانات: طريقة أويلر لنموذج مجموعة سكانية، وقاعدة سيمبسون لحجم خزان، ودقة متسلسلات تايلور، وقانون كبلر الثاني في الإحداثيات القطبية.

هذه هي الطرق العددية التي يستخدمها العلماء والمهندسون يوميًا. البيانات النموذجية موسومة بذلك؛ وكل مختبر يربط إلى مصدره.

مرجع السلامة: OpenStax Calculus Volume 2 (كتاب دراسي مجاني) (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/1-introduction)

المختبر A: طريقة أويلر لمخزون سمكي يتعافى

الأسبوع 8

الهدف: حل المعادلة اللوجستية عدديًا ومقارنتها بالحل الدقيق.

$$P_{n+1} = P_n + h\,r P_n\left(1 - \frac{P_n}{K}\right)$$

```
P_n+1=P_n+h  rP_n(1-(P_n)/(K))
```

طريقة أويلر للمعادلة اللوجستية

الإجراء

1. اضبط r = 0.5 وK = 1000 وP₀ = 100 وh = 1 في جدول بيانات.
2. املأ خطوات أويلر نزولًا حتى t = 4.
3. أضف عمودًا للحل الدقيق وعمودًا للخطأ.
4. كرر مع h = 0.5 وh = 0.25؛ كيف يتغير الخطأ؟

جدول البيانات

t	P بطريقة أويلر (h = 1)
0	100
1	145.0
2	207.0
3	289.1
4	391.9

قيم محسوبة من النموذج (ليست مصيدة حقيقية). P(4) الدقيقة = 450.9.

مثال حسابي

1. $P_1 = 100 + 0.5 \times 100 \times 0.9 = 145.0$.
2. $P_2 = 145 + 0.5 \times 145 \times 0.855 = 207.0$.
3. هنا تقلل طريقة أويلر التقدير (391.9 مقابل 450.9) لأن المنحنى ينحني إلى الأعلى في بداية النمو؛ وتنصيف h ينصّف الخطأ تقريبًا.

السلامة

- لا شيء يتجاوز الاستخدام العادي للحاسوب.

بديل منزلي أو افتراضي

- يكفي جدول بيانات.

OpenStax Calculus 2, 4.2 Direction Fields and Numerical Methods (https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/4-2-direction-fields-and-numerical-methods)

الصلة بالكوكب: تدعم النماذج العددية للمجموعات السكانية إدارة مصايد الأسماك. NOAA Fisheries: تقييمات المجموعات السمكية (https://www.fisheries.noaa.gov/topic/population-assessments)

☐ **أكملت هذا المختبر (عمليًا أو افتراضيًا)**

المختبر B: حجم خزان بقاعدة سيمبسون

الأسبوع 5

الهدف: تقدير حجم خزان من قياسات مساحة السطح عند أعماق مختلفة.

$$V = \int_0^H A(h)\,dh \approx \frac{\Delta h}{3}[A_0 + 4A_1 + 2A_2 + 4A_3 + A_4]$$

```
V=_0^HA(h) dh≈Δ h3[A_0+4A_1+2A_2+4A_3+A_4]
```

الحجم بوصفه تكامل مساحة المقطع العرضي

الإجراء

1. أدخل المساحات النموذجية عند 0 و2 و4 و6 و8 m فوق القاع.
2. طبّق قاعدة سيمبسون مع Δh = 2 m.
3. قارن بقاعدة شبه المنحرف.

جدول البيانات

الارتفاع h (m)	مساحة السطح A (km²)
0	0.0
2	1.2
4	2.6
6	4.0
8	5.6

قيم نموذجية للتدريب، وليست خزانًا حقيقيًا.

مثال حسابي

1. سيمبسون: (2/3)[0 + 4(1.2) + 2(2.6) + 4(4.0) + 5.6] = (2/3)(31.6) = 21.07 km²·m.
2. 1 km²·m = 10^6 m³، إذن V ≈ 2.11 × 10^7 m³ (21 مليون متر مكعب).
3. شبه المنحرف: 2[0/2 + 1.2 + 2.6 + 4.0 + 5.6/2] = 21.2 km²·m، قريب من سيمبسون.

السلامة

- لا شيء يتجاوز الاستخدام العادي للحاسوب.

بديل منزلي أو افتراضي

- يكفي جدول بيانات.

ناسا: مهمة SWOT (https://swot.jpl.nasa.gov/)

الصلة بالكوكب: تساعد أقمار المياه السطحية مثل SWOT في تقدير التغيرات في المياه المخزنة في البحيرات والخزانات.

☐ **أكملت هذا المختبر (عمليًا أو افتراضيًا)**

المختبر C: ما مدى جودة كثيرة حدود تايلور؟

الأسبوع 13

الهدف: مقارنة كثيرات حدود تايلور لـ sin x بالقيمة الحقيقية وبحد الباقي.

$$P_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

```
P_5(x)=x-(x^3)/(6)+(x^5)/(120)
```

كثيرة حدود ماكلورين من الدرجة 5 لـ sin x

الإجراء

1. اجدول sin x و$P_1 = x$ وP_3 وP_5 لقيم x من 0 إلى π بخطوات 0.25.
2. ارسم الأخطاء.
3. أوجد أين يخطئ تقريب الزاوية الصغيرة sin x ≈ x بنسبة 1%.

جدول البيانات

x	sin x	$P_5(x)$
0.5	0.479426	0.479427
1.0	0.841471	0.841667
2.0	0.909297	0.933333

قيم محسوبة.

مثال حسابي

1. عند x = 0.5 يخطئ P_5 بنحو 10^{-6}؛ وعند x = 2 بمقدار 0.024. تنخفض الدقة بسرعة بالابتعاد عن 0.
2. يبقى sin x ≈ x ضمن 1% حتى نحو x = 0.24 rad (14°)، ولهذا تُستخدم صيغة البندول للتأرجحات الصغيرة.

السلامة

- لا شيء يتجاوز الاستخدام العادي للحاسوب.

بديل منزلي أو افتراضي

- منزلقات Desmos مناسبة جدًا.

PhET: Pendulum Lab (https://phet.colorado.edu/en/simulations/pendulum-lab)

الصلة بالكوكب: معرفة خطأ التقريب هي الطريقة التي يقرر بها المهندسون أي نموذج مبسط يمكن الوثوق به.

- [ ] أكملت هذا المختبر (عمليًا أو افتراضيًا)

المختبر D: قانون كبلر الثاني في الإحداثيات القطبية

الأسبوع 14

الهدف: إثبات عددي أن المدار الإهليلجي يمسح المساحة أسرع بالنسبة للزاوية قرب البؤرة، لكن بمعدل ثابت بالنسبة للزمن.

$$A(\theta_1,\theta_2)=\tfrac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} r(\theta)^2\,d\theta, \quad r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$$

```
A(θ_1,θ_2)=12_θ_1^θ_2r(θ)^2 dθ, r=(a(1-e^2))/(1+eθ)
```

المساحة التي يمسحها المدار

الإجراء

1. استخدم a = 1 وe = 0.5.
2. احسب بقاعدة سيمبسون المساحة الممسوحة من θ = 0 إلى 0.5 ومن θ = π − 0.25 إلى π + 0.25 (بالعرض نفسه 0.5 rad).
3. اشرح لماذا لا تعطي الزوايا المتساوية مساحات متساوية، وبالتالي تستغرق أزمنة غير متساوية.

جدول البيانات

Arc	المساحة الممسوحة
θ = 0 إلى 0.5 (قرب الشمس)	0.0643
θ = π ± 0.25 (الجانب البعيد)	0.5513

قيم محسوبة لـ a = 1، e = 0.5.

مثال حسابي

1. قرب الشمس r ≈ 0.5، وفي الجانب البعيد r ≈ 1.5: المساحة ∝ r²، لذا يمسح القوس البعيد مساحة أكبر بنحو 8.6 مرة (0.5513 ÷ 0.0643).
2. بما أن المساحة تنمو بمعدل ثابت مع الزمن، يستغرق الكوكب نحو 8.6 مرة أطول لعبور الـ 0.5 rad البعيدة: فهو يتحرك أبطأ ما يكون عند الأوج.

السلامة

- لا شيء يتجاوز الاستخدام العادي للحاسوب.

بديل منزلي أو افتراضي

- يكفي جدول بيانات أو Desmos.

PhET: Kepler’s Laws (https://phet.colorado.edu/en/simulations/keplers-laws)

الصلة بالكوكب: هندسة المدار تحدد متى يستطيع القمر الصناعي رؤية مكان على الأرض.

☐ **أكملت هذا المختبر (عمليًا أو افتراضيًا)**

مجموعات تدريب للامتحان

وقّت نفسك: نحو 10 دقائق لكل مسألة. ثم قارن بالحلول الكاملة.

مجموعة تدريب منتصف الفصل (الوحدات 3–1)

1. أوجد $\int_0^1 x^2 e^x \, dx$.

   1. بالتجزئة مرتين: $\int x^2 e^x \, dx = (x^2 - 2x + 2)e^x$.
   2. من 0 إلى 1: $e - 2$.

   الإجابة: $e - 2 \approx 0.718$.

2. أوجد $\int_0^1 x/(x+1) \, dx$.

   1. $x/(x+1) = 1 - 1/(x+1)$.
   2. $[x - \ln(x+1)]_0^1 = 1 - \ln 2$.

   الإجابة: $1 - \ln 2 \approx 0.307$.

3. أوجد الحجم الناتج عن دوران المنطقة تحت $y = x^2$، $0 \le x \le 2$، حول المحور x.

   1. الأقراص: $\int_0^2 \pi \, x^4 \, dx = \pi \times 32/5$.

   الإجابة: $32\pi/5 \approx 20.1$.

4. احسب $\int_2^{\infty} dx/x^3$.

   1. $[-1/(2x^2)]_2^{\infty} = 1/8$.

   الإجابة: $1/8$.

مجموعة التدريب النهائية (كل الوحدات)

1. حل $y' = -2y$، $y(0) = 5$، وأوجد $y(1)$.

   1. $y = 5e^{(-2t)}$.

   الإجابة: $5e^{(-2)} \approx 0.677$.

2. اجمع $\sum 3(2/3)^n$ بدءًا من $n = 0$.

   1. هندسية: $3/(1 - 2/3)$.

   الإجابة: 9.

3. قدّر cos 0.2 بكثيرة حدود ماكلورين من الدرجة 4.

1. 1 − 0.04/2 + 0.0016/24.

الإجابة: 0.980067.

4. أوجد المساحة داخل r = 3.

1. ½∫₀^(2π) 9 dθ.

الإجابة: 9π ≈ 28.3.

5. أوجد فترة تقارب Σ xⁿ/3ⁿ.

1. النسبة: |x|/3 < 1؛ والطرفان متباعدان.

الإجابة: −3 < x < 3.

6. يتبع الملوث في خزان خلط المعادلة S' = −S/50 مع S(0) = 20 kg. متى تكون S = 5 kg؟

1. S = 20e^(−t/50); e^(−t/50) = 1/4.
2. t = 50 ln 4.

الإجابة: ≈ 69.3 وحدة زمنية.

ورقة الصيغ

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\sin^2 x = \tfrac{1}{2}(1-\cos 2x),\ \cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1+\cos 2x)$$

$$S_n = \tfrac{\Delta x}{3}[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + \cdots + f_n]$$

$$V = \int \pi f^2\,dx,\ V = \int 2\pi x f\,dx$$

$$L = \int \sqrt{1 + f'^2}\,dx$$

$$W = \int F\,dx$$

$$\int_1^\infty x^{-p}dx < \infty \iff p > 1$$

$$y' = ky \Rightarrow y = y_0 e^{kt}$$

$$P' = rP(1 - P/K)$$

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$$

$$\sum ar^n = a/(1-r)$$

$$L = \lim |a_{n+1}/a_n|$$

$$e^x = \sum x^n/n!$$

$$\sin x = \sum (-1)^n x^{2n+1}/(2n+1)!$$

$$\cos x = \sum (-1)^n x^{2n}/(2n)!$$

$$dy/dx = (dy/dt)/(dx/dt)$$

$$A = \tfrac{1}{2}\int r^2\,d\theta$$

الثوابت

الثابت	القيمة
e	2.718281828...
π	3.141592654...
ln 2	0.693147...
الاختلاف المركزي لمدار الأرض	0.0167
نصف المحور الأكبر للأرض	149.6 مليون km
كثافة الماء	1,000 kg/m³

المصدر: صحيفة بيانات الأرض من NASA (بالإنجليزية) (https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/earthfact.html)

أدوات الرسم البياني والبيانات

استخدم هذه الأدوات المجانية إلى جانب المقرر.

- آلة Desmos الحاسبة البيانية (https://www.desmos.com/calculator): رسم المنحنيات الوسيطية والقطبية، والمنزلقات، وكثيرات حدود تايلور.
- MIT OpenCourseWare 18.01SC (https://ocw.mit.edu/courses/18-01sc-single-variable-calculus-fall-2010/): محاضرات ومجموعات مسائل مجانية من MIT في التكامل والمتسلسلات.
- MIT OpenCourseWare 18.02SC (https://ocw.mit.edu/courses/18-02sc-multivariable-calculus-fall-2010/): المقرر التالي: حساب التفاضل والتكامل متعدد المتغيرات.

مسرد المصطلحات

طول القوس
طول منحنى، ∫√(1 + f′²) dx.

السعة الاستيعابية
النهاية طويلة الأمد K لمجموعة لوجستية.

مركز الكتلة
نقطة الاتزان؛ العزم مقسومًا على الكتلة.

التقارب المشروط
متقاربة، لكن القيم المطلقة متباعدة.

معادلة تفاضلية
معادلة تتضمن مشتقات دالة مجهولة.

الاختلاف المركزي
مدى استطالة المدار.

طريقة أويلر
حل عددي خطوة بخطوة لمعادلة تفاضلية.

متسلسلة هندسية
Σar^n.

تكامل معتل
تكامل بحد أو دالة مكاملة لانهائية.

التكامل بالتجزئة
$\int u\,dv = uv - \int v\,du$.

المعادلة اللوجستية
$P' = rP(1 - P/K)$.

متسلسلة ماكلورين
متسلسلة تايلور عند 0.

المعادلات الوسيطية
x وy معطاتان كدالتين في t.

الكسور الجزئية
تقسيم دالة نسبية إلى حدود أبسط.

الإحداثيات القطبية
موضع يُعطى بمسافة r وزاوية θ.

متسلسلة قوى
$\Sigma c_n(x - a)^n$.

نصف قطر التقارب
المسافة من المركز التي تتقارب داخلها متسلسلة القوى.

معادلة قابلة للفصل
$g(y)\,dy = h(x)\,dx$.

قاعدة سيمبسون
تكامل عددي باستخدام القطوع المكافئة.

متسلسلة تايلور
$\Sigma f^{(n)}(a)(x - a)^n/n!$.

معايير التقييم الذاتي

لا تُمنح درجة ولا ساعات معتمدة. استخدم هذا لتقيّم بصدق أين أنت في كل وحدة.

المستوى	كيف يبدو
4 · إتقان	يختار التقنية أو الاختبار الصحيح دون توجيه، ويبرره، ويتحقق من النتائج عدديًا.
3 · متمكن	يحل مسائل التدريب مع أخطاء عرضية.
2 · قيد التطور	يتابع الأمثلة المحلولة لكنه يجد صعوبة في اختيار الطريقة.
1 · مبتدئ	يطبق الصيغ دون التحقق من الشروط؛ ويحتاج إلى مراجعة الوحدة.

الأوزان المقترحة إذا أردت درجة

الجزء	الوزن
تمارين	30%
المختبرات الحاسوبية	15%
مجموعة تدريب منتصف الفصل	25%
مجموعة التدريب النهائية	30%

استهدف المستوى 3 أو أعلى في كل وحدة قبل الانتقال إلى الدورة التالية.

دورات ذات صلة

- التفاضل والتكامل 1 MATH 110
- مقدمة في هندسة الطيران والفضاء AERO 101
- الكيمياء العامة + 1 المختبر CHEM 110 + CHEM 110L
- كل الدورات