Ultimo aggiornamento: November 1, 2026

🗺️ Percorso di quattro anni · Anno 2, Autunno

Informazioni sul corso

Questo corso gratuito ha 8 unità e 4 laboratori. Sono i totali reali, non un programma più lungo accorciato.

Un controllo è un numero o un risultato di codice in una pagina del corso che uno script ricalcola prima della pubblicazione. Il numero stampato e quello ricalcolato devono coincidere.

> Questo è lo schema di un corso gratuito di autoapprendimento scritto da Saving Planets. Non è un corso universitario, non dà crediti accademici e nessuna scuola è coinvolta.
>
> Il programma segue il terzo semestre di analisi universitaria, sul modello degli argomenti e della profondità di materiali aperti come OpenStax Calculus Volume 3 e MIT OpenCourseWare 18.02 Multivariable Calculus, e dei programmi di corsi come Stanford Math 51/52 e Georgia Tech MATH 2551. Rimandiamo ai materiali gratuiti in tutto il corso. Nessuna di queste organizzazioni approva questa pagina.
>
> Cosa aggiungiamo: ogni unità si collega a problemi reali di vento, oceano, terreno, clima e satelliti con una fonte pubblica citata, ogni numero della pagina viene ricalcolato da uno script di verifica prima della pubblicazione, e quattro laboratori al computer applicano le idee a campi di vento, griglie di quota, volumi di laghi e orbite.
>
> Seguilo in ordine. Ogni unità ha obiettivi, idee chiave, equazioni, esempi passo per passo, esercizi con soluzioni complete, errori comuni, flashcard e un quiz. I tuoi progressi sono salvati solo in questo browser.

Come questo corso aiuta a salvare il pianeta

Il pianeta è tridimensionale e sempre in movimento. Venti e correnti oceaniche sono campi vettoriali, terreno e temperatura sono funzioni di due o tre variabili, calore e inquinanti attraversano le superfici come flusso, e i satelliti che misurano tutto questo seguono traiettorie vettoriali nello spazio.

Ogni unità si chiude con una breve sezione con fonti che mostra come le sue idee aiutano persone e natura.

Per gli insegnanti

Puoi insegnare questo corso, oppure lasciare che uno studente lo faccia da solo. È gratis. Saving Planets non dà un voto né crediti scolastici.

- Questa pagina è l'intero corso: 8 unità e 4 laboratori (MATH 210).
- Prevedi 15 settimane, circa 6–9 ore a settimana, comprese le settimane di laboratorio.
- Segui il calendario di 15 settimane. Leggi l'unità, fai la pratica su carta, poi apri la risposta. Nella settimana di laboratorio, fai il laboratorio o la versione a casa.
- Un controllo è un numero o un risultato di codice nella pagina che uno script ricalcola prima della pubblicazione. Il numero che vedi e quello ricalcolato devono coincidere.
- Usa Stampa questa pagina, oppure scarica la guida di studio PDF. Il formulario è verso la fine.
- Chiedi: in che modo questa unità aiuta le persone e il pianeta? Ogni unità ha un riquadro verde con un fatto e la sua fonte.
- Copia il modello di guida per insegnanti e scrivi il nome della classe, il tempo che hai e le domande che farai. Apri il modello di guida per insegnanti

Prima di iniziare

Prerequisiti

- Analisi I e II: derivate, integrali, sostituzione e integrazione per parti, curve parametriche e polari.
- Trigonometria di base ed equazioni della circonferenza e della sfera.
- Fisica I aiuta per gli esempi su lavoro, flusso e orbite, ma non è obbligatoria.

Come studiare

- Fai un disegno in 3D per ogni problema: gli assi, la regione, i vettori.
- Svolgi ogni esercizio su carta prima di aprire la risposta.
- Controlla unità e segni: un flusso, un lavoro o una circolazione devono avere senso fisico.
- Per gli integrali multipli, disegna la regione e scrivi gli estremi prima di integrare qualsiasi cosa.
- Usa un grafico 3D (Desmos 3D o GeoGebra 3D) per vedere superfici e campi.
- Rifai i quiz qualche giorno dopo. La pratica distribuita batte una lunga sessione unica.

Che cosa ti serve

- Un computer o un tablet con un foglio di calcolo.
- Un programma di grafici 3D gratuito come Desmos 3D o GeoGebra 3D.
- Facoltativo: Python con NumPy (gratis in Google Colab).

Programma suggerito di 15 settimane

Circa 6-9 ore a settimana: lettura, esercizi e, nelle settimane di laboratorio, il laboratorio.

Settimana	Unità	Argomenti	Lettura
1	Vettori e geometria dello spazio	Coordinate 3D, vettori, prodotto scalare	OpenStax 2.1–2.3
2	Vettori e geometria dello spazio	Prodotto vettoriale, rette e piani	OpenStax 2.4–2.5
3	Funzioni vettoriali e moto nello spazio	Funzioni vettoriali, moto nello spazio, curvatura; laboratorio D	OpenStax 3.1–3.4
4	Derivate parziali	Funzioni di più variabili, limiti, derivate parziali	OpenStax 4.1–4.3
5	Derivate parziali	Piani tangenti, approssimazione lineare, regola della catena	OpenStax 4.4–4.5
6	Gradienti e ottimizzazione	Gradiente, derivate direzionali, estremi	OpenStax 4.6–4.7
7	Gradienti e ottimizzazione	Moltiplicatori di Lagrange; laboratorio B; esercitazione per il compito intermedio	OpenStax 4.8
8	Integrali doppi	Integrali doppi su rettangoli e regioni generali	OpenStax 5.1–5.2
9	Integrali doppi	Integrali doppi in coordinate polari; laboratorio C	OpenStax 5.3
10	Integrali tripli e cambio di variabili	Integrali tripli; coordinate cilindriche e sferiche	OpenStax 5.4–5.5
11	Integrali tripli e cambio di variabili	Massa e centro di massa; cambio di variabili	OpenStax 5.6–5.7
12	Campi vettoriali, integrali di linea e teorema di Green	Campi vettoriali, integrali di linea, campi conservativi, teorema di Green	OpenStax 6.1–6.4
13	Integrali di superficie, teorema di Stokes e teorema della divergenza	Divergenza e rotore; integrali di superficie e flusso	OpenStax 6.5–6.6
14	Integrali di superficie, teorema di Stokes e teorema della divergenza	Teoremi di Stokes e della divergenza; laboratorio A	OpenStax 6.7–6.8

Settimana	Unità	Argomenti	Lettura
15	Ripasso	Ripasso ed esercitazione finale	Tutte le unità

I tuoi progressi

Spunta unità e laboratori man mano che li finisci, e fai i quiz. Progressi e punteggi sono salvati solo in questo browser e non ci vengono mai inviati.

Unità

Vettori e geometria dello spazio

Coordinate 3D, vettori, prodotti scalare e vettoriale, ed equazioni di rette e piani.

Obiettivi di apprendimento

Alla fine di questa unità saprai:

- Sommare vettori in 3D, moltiplicarli per uno scalare e trovarne la lunghezza.
- Usare il prodotto scalare per angoli e proiezioni.
- Usare il prodotto vettoriale per normali, aree e volumi.
- Scrivere equazioni di rette e piani e trovare distanze.

Concetti chiave

- Un vettore ha modulo e direzione; in componenti, v = ⟨v_1, v_2, v_3⟩ e |v| = √(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2).
- Il prodotto scalare a · b = |a||b| cos θ misura quanto due vettori puntano nello stesso verso. È zero esattamente quando sono perpendicolari.
- Il prodotto vettoriale a × b è perpendicolare a entrambi, con lunghezza pari all'area del parallelogramma che generano.
- Un piano è fissato da un punto e da un vettore normale n: n · (r − r_0) = 0. Una retta è un punto più i multipli di una direzione: r = r_0 + t v.

Equazioni chiave

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos\theta$$

a· b=| a|| b|θ

Prodotto scalare e angolo

$$\text{proj}_{\mathbf{b}}\, \mathbf{a} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}\mathbf{b}$$

_ b a=(a· b)/(| b|^2) b

Proiezione

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin\theta$$

| a× b|=| a|| b|θ

Lunghezza del prodotto vettoriale = area del parallelogramma

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

`a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0`

Piano con normale ⟨a, b, c⟩

$$D = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

`D=|ax_1+by_1+cz_1-d|^2+b^2+c^2`

Distanza di un punto dal piano ax + by + cz = d

Esempi svolti passo passo

Esempio 1.1 Per a = ⟨1, 2, 2⟩ e b = ⟨2, −1, 2⟩, trova |a|, a · b e l'angolo tra loro.

1. |a| = √(1 + 4 + 4) = 3, e anche |b| = 3.
2. a · b = 2 − 2 + 4 = 4.
3. cos θ = 4/9, quindi θ = arccos(0.444).

Risposta: |a| = 3, a · b = 4, θ ≈ 63.6°.

Esempio 1.2 Trova a × b per gli stessi vettori e l'area del parallelogramma che generano.

1. a × b = ⟨2·2 − 2·(−1), 2·2 − 1·2, 1·(−1) − 2·2⟩.
2. = ⟨6, 2, −5⟩. Verifica: il prodotto scalare con a e con b è 0.
3. Area = |⟨6, 2, −5⟩| = √65.

Risposta: ⟨6, 2, −5⟩; area √65 ≈ 8.06.

Esempio 1.3 Un vento di 10 m/s soffia a 30° rispetto all'asse del rotore di una turbina eolica. Quale frazione della potenza frontale riceve la turbina, se la potenza cresce con il cubo della velocità del vento lungo il suo asse?

1. Componente lungo l'asse: 10 cos 30° = 8.66 m/s (un prodotto scalare con il versore dell'asse).
2. Rapporto di potenza = $(\cos 30°)^3$.

Risposta: Circa 0.65: un disallineamento di 30° perde circa un terzo della potenza, ed è per questo che le turbine ruotano per affrontare il vento.

Esercizi

Svolgi ciascuno prima su carta, poi controlla.

1. Trova il piano passante per (1, 0, 0), (0, 2, 0) e (0, 0, 3).

   Forma segmentaria $x/1 + y/2 + z/3 = 1$, cioè $6x + 3y + 2z = 6$.

2. Trova la distanza dell'origine da quel piano.

   $|-6|/\sqrt{(36 + 9 + 4)} = 6/7 \approx 0.857$.

3. Trova la proiezione di $\langle 3, 4, 0\rangle$ su $\langle 1, 0, 0\rangle$.

   $\langle 3, 0, 0\rangle$.

4. Trova il volume del parallelepipedo generato da $\langle 1, 0, 0\rangle$, $\langle 0, 2, 0\rangle$ e $\langle 1, 1, 3\rangle$.

   $|a \cdot (b \times c)| = \det = 1\cdot(2\cdot 3 - 0\cdot 1) = 6$.

5. $\langle 1, 2, 3\rangle$ e $\langle 3, 0, -1\rangle$ sono perpendicolari?

   Prodotto scalare $3 + 0 - 3 = 0$, quindi sì.

Errori concettuali comuni

Mito: $a \times b = b \times a$.
In realtà: Il prodotto vettoriale è anticommutativo: $b \times a = -(a \times b)$.

Mito: Il prodotto scalare di due vettori è un vettore.
In realtà: È uno scalare (un numero).

Mito: L'equazione di un piano ne indica la direzione.
In realtà: I suoi coefficienti danno la normale, che è perpendicolare al piano.

Flashcard

Prodotto scalare

$a \cdot b = |a||b| \cos\theta$; zero quando sono perpendicolari.

Prodotto vettoriale

Perpendicolare a entrambi; lunghezza = area del parallelogramma.

Proiezione

$(a \cdot b/|b|^2)\, b$.

Prodotto misto

$|a \cdot (b \times c)|$ = volume del parallelepipedo.

Piano

Retta

$n \cdot (r - r_0) = 0$. $r = r_0 + t\,v$.

Quiz di autoverifica

1. Se $a \cdot b = 0$ (entrambi non nulli), i vettori sono…

paralleli

perpendicolari

uguali

opposti

perpendicolari. $\cos\theta = 0$, quindi $\theta = 90°$.

2. La lunghezza di $a \times b$ è uguale a…

l’angolo tra loro

l’area del parallelogramma

$a \cdot b$

$|a| + |b|$

l’area del parallelogramma. $|a||b| \sin\theta$.

3. La normale a $2x - y + 5z = 7$ è…

$\langle 2, -1, 5 \rangle$

$\langle 7, 0, 0 \rangle$

$\langle 2, 1, 5 \rangle$

$\langle 1, 1, 1 \rangle$

$\langle 2, -1, 5 \rangle$. Leggi i coefficienti.

4. $|\langle 2, 3, 6 \rangle| =$

11

7

√11

49

7. √(4 + 9 + 36) = √49.

Rifai questo quiz

Come questo aiuta a salvare il pianeta

Il vento è un vettore, e le turbine orientano il rotore verso di esso perché la potenza dipende dal cubo della componente lungo l'asse del rotore, un prodotto scalare sotto mentite spoglie.

Lo stesso calcolo dice a un pannello solare quanta luce raccoglie: la parte utile è il prodotto scalare della direzione della luce solare con il vettore normale del pannello.

Su Saving Planets: Fisica I, unità 3: energia eolica

Fonti: DOE degli Stati Uniti: come funzionano le turbine eoliche? (in inglese) (https://www.energy.gov/eere/wind/how-do-wind-turbines-work) · OpenStax Calculus 3, 2.3 The Dot Product (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/2-3-the-dot-product)

Risorse di apprendimento gratuite

- OpenStax Calculus 3, 2.3 The Dot Product (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/2-3-the-dot-product): Angoli e proiezioni.
- OpenStax Calculus 3, 2.4 The Cross Product (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/2-4-the-cross-product): Normali, aree e momento torcente.
- OpenStax Calculus 3, 2.5 Equations of Lines and Planes in Space (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/2-5-equations-of-lines-and-planes-in-space): Rette, piani e distanze.

Guarda la lezione

Session 79 Clip: Vector Fields in Space (https://ocw.mit.edu/courses/18-02sc-multivariable-calculus-fall-2010/resources/clip-vector-fields-in-space/) (in inglese)

MIT 18.02SC Multivariable Calculus (Fall 2010), MIT OpenCourseWare. Licenza: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Condizioni d'uso (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Link fornito solo per lo studio gratuito; Saving Planets non è affiliato a questa università né approvato da essa.

☐ **Ho finito questa unità**

Funzioni vettoriali e moto nello spazio

Curve nello spazio come funzioni vettoriali: velocità, accelerazione, lunghezza d’arco, curvatura e moto dei satelliti.

Obiettivi di apprendimento

Alla fine di questa unità saprai:

- Derivare e integrare funzioni vettoriali.
- Trovare velocità, modulo della velocità e accelerazione lungo una traiettoria.
- Calcolare lunghezza d’arco e curvatura.
- Analizzare orbite circolari con il calcolo vettoriale.

Concetti chiave

- Una curva nello spazio è r(t) = ⟨x(t), y(t), z(t)⟩; si deriva componente per componente.
- La velocità v = r'(t) è tangente alla traiettoria; il suo modulo è |v|; l’accelerazione è a = v'.
- La lunghezza d’arco è l’integrale del modulo della velocità: L = ∫|r'(t)| dt.
- Nel moto circolare uniforme il modulo della velocità è costante, ma l’accelerazione punta verso il centro con modulo v²/r.

Equazioni chiave

$$\mathbf{v} = \mathbf{r}'(t),\ \mathbf{a} = \mathbf{r}''(t)$$

```
v= r'(t),\ a= r''(t)
```

Velocità e accelerazione

$$L = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)|\,dt$$

```
L=_a^b| r'(t)| dt
```

Lunghezza d’arco

$$\kappa = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}'|^3}$$

```
=(| r'× r''|)/(| r'|^3)
```

Curvatura

$$v = \sqrt{GM/r},\ T = 2\pi r/v$$

v=/r,\ T=2π r/v

Velocità e periodo di un'orbita circolare

Esempi svolti passo passo

Esempio 2.1 Trova la lunghezza di un giro dell'elica r(t) = ⟨cos t, sin t, t⟩, 0 ≤ t ≤ 2π.

1. r' = ⟨−sin t, cos t, 1⟩, modulo della velocità √(sin²t + cos²t + 1) = √2.
2. L = ∫₀^(2π) √2 dt = 2π√2.

Risposta: 2π√2 ≈ 8.89.

Esempio 2.2 Landsat 9 orbita a 705 km sopra la Terra (raggio medio 6371 km). Trattando l'orbita come un cerchio, trova velocità, accelerazione e periodo.

1. r = 7,076 km = 7.076 × 10⁶ m; GM = 3.986 × 10¹⁴ m³/s².
2. v = √(GM/r) = 7,505 m/s.
3. a = v²/r = 7.96 m/s², diretta verso il centro della Terra.
4. T = 2πr/v = 5,924 s.

Risposta: Circa 7.5 km/s e 98.7 minuti per orbita, in accordo con il periodo di 99 minuti indicato dalla NASA.

Esempio 2.3 Trova la curvatura di una circonferenza di raggio 2, r(t) = ⟨2 cos t, 2 sin t, 0⟩.

1. r' = ⟨−2 sin t, 2 cos t, 0⟩, |r'| = 2.
2. r'' = ⟨−2 cos t, −2 sin t, 0⟩; r' × r'' = ⟨0, 0, 4⟩.
3. κ = 4/2³.

Risposta: κ = 1/2: la curvatura di una circonferenza è 1/raggio.

Esercizi

Svolgi ciascuno prima su carta, poi controlla.

1. Un proiettile ha r(t) = ⟨20t, 20t − 4.9t²⟩ m. Trova velocità e modulo della velocità a t = 1 s.

   v = ⟨20, 20 − 9.8t⟩ = ⟨20, 10.2⟩; modulo √(400 + 104.04) ≈ 22.45 m/s.

2. Trova l'accelerazione di r(t) = ⟨t², 3t, eᵗ⟩.

$\langle 2, 0, e^t \rangle$.

3. Trova la lunghezza di $r(t) = \langle 3t, 4t, 0 \rangle$ per $0 \le t \le 2$.

   Modulo della velocità 5, quindi $L = 10$.

4. Un satellite orbita a 35786 km di quota. Trova il suo periodo.

   $r = 42157$ km; $T = 2\pi\sqrt{(r^3/GM)} \approx 86160$ s ≈ 23.93 h: un giorno siderale, quindi è geostazionario.

Errori concettuali comuni

Mito: Modulo della velocità costante significa accelerazione nulla.

In realtà: Curvare è accelerare: un satellite in orbita circolare accelera verso la Terra in ogni istante.

Mito: La lunghezza d'arco è $|r(b) - r(a)|$.

In realtà: Quella è la distanza in linea retta; la lunghezza d'arco integra il modulo della velocità lungo il percorso.

Mito: I satelliti più alti si muovono più velocemente.

In realtà: $v = \sqrt{(GM/r)}$ diminuisce con la distanza; le orbite più alte sono più lente e più lunghe.

Flashcard

Funzione vettoriale

$r(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$.

Velocità

$r'(t)$, tangente alla traiettoria.

La velocità

$|r'(t)|$.

Lunghezza d'arco

$\int |r'| \, dt$.

Curvatura

$|r' \times r''|/|r'|^3$.

Orbita circolare

$v = \sqrt{(GM/r)}$.

Quiz di autoverifica

1. La velocità è...

$r(t)$

r'(t)

|r(t)|

∫r dt

r'(t). La derivata della posizione.

2. La lunghezza d’arco integra...

posizione

il modulo della velocità

accelerazione

la curvatura

il modulo della velocità. $L = \int |r'| \, dt$.

3. La curvatura di una circonferenza di raggio 5 è...

5

1/5

25

0

1/5. $\kappa = 1/R$.

4. Raddoppiare il raggio di un’orbita circolare cambia la velocità di un fattore...

2

$1/\sqrt{2}$

1/2

$\sqrt{2}$

$1/\sqrt{2}$. $v \propto 1/\sqrt{r}$.

Rifai questo quiz

Come questo aiuta a salvare il pianeta

I satelliti di osservazione della Terra come Landsat 9 seguono traiettorie vettoriali scelte proprio con queste formule. La sua orbita quasi polare ed eliosincrona a 705 km gli permette di riprendere lo stesso luogo ogni 16 giorni più o meno alla stessa ora locale, così i cambiamenti di foreste, ghiacciai e città risaltano.

Su Saving Planets: Landsat 9 · Analisi II, unità 7: orbite polari

Fonti: NASA: Landsat 9 quick facts (https://landsat.gsfc.nasa.gov/satellites/landsat-9/) · Scheda NASA sulla Terra (in inglese) (https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/earthfact.html)

Risorse di apprendimento gratuite

- OpenStax Calculus 3, 3.2 Calculus of Vector-Valued Functions (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/3-2-calculus-of-vector-valued-functions): Derivate e integrali.
- OpenStax Calculus 3, 3.4 Motion in Space (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/3-4-motion-in-space): Velocità, accelerazione e leggi di Keplero.

Guarda la lezione

Session 79 Clip: Vector Fields in Space (https://ocw.mit.edu/courses/18-02sc-multivariable-calculus-fall-2010/resources/clip-vector-fields-in-space/) (in inglese)

MIT 18.02SC Multivariable Calculus (Fall 2010), MIT OpenCourseWare. Licenza: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Condizioni d'uso (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Link fornito solo per lo studio gratuito; Saving Planets non è affiliato a questa università né approvato da essa.

☐ **Ho finito questa unità**

Derivate parziali

Funzioni di più variabili: curve di livello, derivate parziali, piani tangenti, approssimazione lineare e regola della catena in più variabili.

Obiettivi di apprendimento

Alla fine di questa unità saprai:

- Leggere curve di livello e mappe isoipse.
- Calcolare derivate parziali e interpretarle come tassi.
- Trovare piani tangenti e usare l'approssimazione lineare.
- Applicare la regola della catena in più variabili.

Concetti chiave

- Una funzione z = f(x, y) è una superficie; le sue curve di livello f = c formano una mappa a curve di livello.
- ∂f/∂x è il tasso di variazione in x con y fissato.
- Vicino a un punto, una superficie regolare somiglia al suo piano tangente: $\Delta f \approx f_x \Delta x + f_y \Delta y$.
- Regola della catena: se x e y dipendono da t, $df/dt = f_x\, dx/dt + f_y\, dy/dt$.

Equazioni chiave

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$$

`f_x=( f)/( x)`

Derivata parziale

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

`z-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)`

Piano tangente

$$\frac{df}{dt} = f_x \frac{dx}{dt} + f_y \frac{dy}{dt}$$

`df/dt=f_xdx/dt+f_ydy/dt`

Regola della catena

$$f_{xy} = f_{yx}$$

f_xy=f_yx

Teorema di Schwarz (Clairaut) (f regolare)

Esempi svolti passo passo

Esempio 3.1 Per $f(x, y) = x^2y + y^3$, trova f_x e f_y in (1, 2), e usa il piano tangente per stimare f(1.1, 1.9).

1. $f_x = 2xy = 4$; $f_y = x^2 + 3y^2 = 13$; $f(1, 2) = 10$.
2. $f \approx 10 + 4(0.1) + 13(-0.1) = 9.1$.
3. Valore vero: $1.21 \times 1.9 + 6.859 = 9.158$.

Risposta: Stima 9.1 contro il valore vero 9.158.

Esempio 3.2 Per un gas ideale, $P = nRT/V$. Con n = 1 mol, T = 300 K e V = 0.025 m^3, trova P, $\partial P/\partial T$ e $\partial P/\partial V$.

1. $P = 8.314 \times 300/0.025 = 99{,}768$ Pa.
2. $\partial P/\partial T = nR/V = 332.6$ Pa/K.
3. $\partial P/\partial V = -nRT/V^2 = -P/V = -3.99 \times 10^6$ Pa/m^3.

Risposta: P ≈ 99.8 kPa; scaldare di 1 K la aumenta di circa 333 Pa; espandere la riduce.

Esempio 3.3 Un drone vola con x = 2t, $y = t^2$. La temperatura che misura è $T = 20 + 0.1x - 0.05y$ (°C, km). Trova dT/dt a t = 1.

1. $T_x = 0.1$, $T_y = -0.05$; $dx/dt = 2$, $dy/dt = 2t = 2$.
2. $dT/dt = 0.1(2) - 0.05(2)$.

Risposta: 0.1 °C per unità di tempo.

Esercizi

Svolgi ciascuno prima su carta, poi controlla.

1. Trova f_x e f_y per f = e^(xy).

   $f_x = y\, e^{(xy)}$, $f_y = x\, e^{(xy)}$.

2. Trova f_xy per $f = x^3y^2$.

   $f_x = 3x^2y^2$, $f_{xy} = 6x^2y$ (uguale a f_yx).

3. Trova il piano tangente a $z = x^2 + y^2$ in $(1, 1, 2)$.

   $z = 2 + 2(x - 1) + 2(y - 1)$, i.e. $z = 2x + 2y - 2$.

4. Stima $\sqrt{(3.02^2 + 3.97^2)}$ con l'approssimazione lineare in $(3, 4)$.

   $f = 5$, $f_x = 3/5$, $f_y = 4/5$: $5 + 0.6(0.02) + 0.8(-0.03) = 4.988$ (valore vero 4.9880).

Errori concettuali comuni

Mito: $\partial f/\partial x$ ignora y.

In realtà: Tiene y fissato; y può comunque comparire nella risposta.

Mito: Se esistono entrambe le derivate parziali, f è regolare.

In realtà: Le derivate parziali possono esistere dove f non è nemmeno continua; la differenziabilità richiede di più.

Mito: L'approssimazione lineare va bene ovunque.

In realtà: Solo vicino al punto base.

Flashcard

Derivata parziale

Tasso di variazione in una variabile con le altre fissate.

Curva di livello

$f(x, y) = c$; una linea di livello.

Piano tangente

$z = z_0 + f_x\Delta x + f_y\Delta y$.

Approssimazione lineare

$\Delta f \approx f_x\Delta x + f_y\Delta y$.

Regola della catena

$df/dt = f_x x' + f_y y'$.

Clairaut

$f_{xy} = f_{yx}$ per f regolare.

Quiz di autoverifica

1. Per $f = x^2y$, f_x =

2x

2xy

x^2

x^2y

2xy. Tratta y come una costante.

2. Le curve di livello di $f(x, y) = x^2 + y^2$ sono...

rette

circonferenze

parabole

punti

circonferenze. $x^2 + y^2 = c$.

3. Per f regolare, f_xy e f_yx sono...

opposti

uguali

non correlati

zero

uguali. Teorema di Schwarz (Clairaut).

4. df/dt per f(x(t), y(t)) è...

f_x + f_y

f_xx' + f_yy'

f_xf_y

x'y'

f_xx' + f_yy'. Regola della catena in più variabili.

Rifai questo quiz

Come questo aiuta a salvare il pianeta

Le carte meteorologiche sono mappe a curve di livello di funzioni di due variabili: le isobare sono curve di livello della pressione, le isoterme della temperatura. Le derivate parziali dicono ai previsori quanto rapidamente pressione o temperatura cambiano verso est o verso nord, il che genera i venti.

Su Saving Planets: Analisi I

Fonti: NOAA/NWS JetStream: Wind (https://www.weather.gov/jetstream/wind) · OpenStax Calculus 3, 4.3 Partial Derivatives (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/4-3-partial-derivatives)

Risorse di apprendimento gratuite

- OpenStax Calculus 3, 4.3 Partial Derivatives (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/4-3-partial-derivatives): Sezione di un manuale gratuito.
- OpenStax Calculus 3, 4.4 Tangent Planes and Linear Approximations (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/4-4-tangent-planes-and-linear-approximations): Piani tangenti.
- OpenStax Calculus 3, 4.5 The Chain Rule (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/4-5-the-chain-rule): Regola della catena.

Guarda la lezione

Session 26 Clip: Partial Derivatives (https://ocw.mit.edu/courses/18-02sc-multivariable-calculus-fall-2010/resources/clip-partial-derivatives/) (in inglese)

MIT 18.02SC Multivariable Calculus (Fall 2010), MIT OpenCourseWare. Licenza: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Condizioni d'uso (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Link fornito solo per lo studio gratuito; Saving Planets non è affiliato a questa università né approvato da essa.

☐ **Ho finito questa unità**

Gradienti e ottimizzazione

Il vettore gradiente, le derivate direzionali, i punti critici e il test della derivata seconda, e l'ottimizzazione vincolata con i moltiplicatori di Lagrange.

Obiettivi di apprendimento

Alla fine di questa unità saprai:

- Calcolare il gradiente e le derivate direzionali.
- Spiegare perché il gradiente punta in salita ed è perpendicolare alle curve di livello.
- Classificare i punti critici con il test della derivata seconda.
- Risolvere problemi vincolati con i moltiplicatori di Lagrange.

Concetti chiave

- ∇f = ⟨f_x, f_y⟩ punta nella direzione di crescita più rapida, e la sua lunghezza è quel tasso massimo.
- Il tasso di variazione nella direzione di un versore u è D_u f = ∇f · u.
- Il gradiente è perpendicolare alle curve di livello, quindi l'acqua scende lungo −∇h, attraversando le isoipse.
- In un estremo interno ∇f = 0. Il test D = f_xx f_yy − f_{xy}^2 decide: D > 0 e f_xx > 0 è un minimo; D < 0 è un punto di sella.
- Per ottimizzare f con il vincolo g = c, risolvi ∇f = λ∇g: nel punto migliore la curva di livello di f tocca appena il vincolo.

Equazioni chiave

$$\nabla f = \langle f_x, f_y, f_z \rangle$$

```
f= f_x,f_y,f_z
```

Gradiente

$$D_{\mathbf{u}} f = \nabla f \cdot \mathbf{u}$$

```
D_ uf= f· u
```

Derivata direzionale

$$D = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2$$

```
D=f_xxf_yy-f_xy^2
```

Test della derivata seconda

$$\nabla f = \lambda \nabla g, \quad g = c$$

`f= g, g=c`

Condizione dei moltiplicatori di Lagrange

Esempi svolti passo passo

Esempio 4.1 Una collina ha altezza h(x, y) = 500 − 0.01x² − 0.02y² (metri, x e y in metri). In (100, 50), trova ∇h, la pendenza massima e la pendenza in direzione ⟨3, 4⟩/5.

1. ∇h = ⟨−0.02x, −0.04y⟩ = ⟨−2, −2⟩.
2. Tasso massimo di salita |∇h| = 2√2 = 2.83 m per m.
3. D_u h = ⟨−2, −2⟩ · ⟨0.6, 0.8⟩ = −2.8.

Risposta: Salita massima 2.83 (in salita verso ⟨−1, −1⟩); andando verso ⟨3, 4⟩ si scende di 2.8 m per m. La pioggia scorre lungo −∇h.

Esempio 4.2 Trova e classifica il punto critico di f = x² + xy + y² − 3x.

1. f_x = 2x + y − 3 = 0, f_y = x + 2y = 0 danno x = 2, y = −1.
2. f_xx = 2, f_yy = 2, f_xy = 1: D = 3 > 0, f_xx > 0.
3. f(2, −1) = 4 − 2 + 1 − 6 = −3.

Risposta: Un minimo, f = −3 in (2, −1).

Esempio 4.3 Una lattina deve contenere 1 litro (1000 cm³). Quali raggio e altezza usano meno metallo (cilindro chiuso)?

1. Minimizza A = 2πr² + 2πrh con g = πr²h = 1000.
2. ∇A = λ∇g dà 4πr + 2πh = λ2πrh e 2πr = λπr², quindi λ = 2/r e h = 2r.
3. πr²(2r) = 1000 dà r = (500/π)^(1/3).

Risposta: r ≈ 5.42 cm, h ≈ 10.84 cm (altezza = diametro), area ≈ 554 cm².

Esercizi

Svolgi ciascuno prima su carta, poi controlla.

1. Trova ∇f per f = xyz in (1, 2, 3).

$\langle yz, xz, xy \rangle = \langle 6, 3, 2 \rangle$.

2. Trova $D_u f$ per $f = x^2 + y^2$ in $(1, 1)$ verso $\langle 1, 0 \rangle$.

   $\nabla f = \langle 2, 2 \rangle$; $D_u f = 2$.

3. Classifica il punto critico di $f = x^2 - y^2$.

   In $(0, 0)$: $D = (2)(-2) - 0 = -4 < 0$, un punto di sella.

4. Recinta un rettangolo lungo un fiume rettilineo con 40 m di recinzione (niente recinzione sul lato del fiume). Massimizza l'area.

   Massimizza xy con $x + 2y = 40$: $y = 10$, $x = 20$, area 200 m^2.

5. Massimizza $f = x + y$ sulla circonferenza $x^2 + y^2 = 2$.

   $\langle 1, 1 \rangle = \lambda \langle 2x, 2y \rangle$ dà $x = y = 1$; massimo 2.

Errori concettuali comuni

Mito: Il gradiente punta lungo la curva di livello.

In realtà: È perpendicolare alla curva di livello.

Mito: $\nabla f = 0$ significa un massimo o un minimo.

In realtà: Può essere un punto di sella; usa il test di D.

Mito: λ è solo un trucco da eliminare.

In realtà: λ è il tasso con cui il valore ottimo cambia al variare del vincolo c, utile in economia e ingegneria.

Flashcard

Gradiente

$\langle f_x, f_y, f_z \rangle$; crescita più rapida.

Derivata direzionale

$\nabla f \cdot u$.

Punto critico

$\nabla f = 0$.

Punto di sella

$D < 0$.

Condizione di Lagrange

$\nabla f = \lambda \nabla g$.

Discesa più ripida

Muoversi lungo $-\nabla f$.

Quiz di autoverifica

1. Il gradiente punta...

lungo le curve di livello

nella direzione di crescita più rapida

in discesa

verso l'origine

nella direzione di crescita più rapida. La sua lunghezza è il tasso massimo.

2. D < 0 in un punto critico significa...

minimo

massimo

sella

nessuna conclusione

sella. Curva verso l'alto in un verso e verso il basso nell'altro.

3. I moltiplicatori di Lagrange risolvono...

$\nabla f = 0$

$\nabla f = \lambda \nabla g$

$f = g$

$f' = \lambda$

$\nabla f = \lambda \nabla g$. I gradienti sono paralleli in un ottimo vincolato.

4. D_u f è massima quando u è...

perpendicolare a ∇f

parallelo a ∇f

opposto a ∇f

qualsiasi direzione

parallelo a ∇f. $\nabla f \cdot u = |\nabla f| \cos \theta$.

Rifai questo quiz

Come questo aiuta a salvare il pianeta

L'acqua scende lungo il gradiente del terreno. Mappe di inondazione, spartiacque e modelli di erosione si costruiscono calcolando $-\nabla h$ dai dati di quota, come i modelli altimetrici lidar gratuiti dello USGS 3D Elevation Program.

I moltiplicatori di Lagrange minimizzano il materiale per un volume o una resistenza richiesti. Usare meno materiale per lo stesso compito riduce direttamente estrazione mineraria, energia ed emissioni.

Su Saving Planets: Pagina Fiumi · Disegno tecnico / CAD: alleggerimento

Fonti: USGS 3D Elevation Program (3DEP) (https://www.usgs.gov/3d-elevation-program) · OpenStax Calculus 3, 4.8 Lagrange Multipliers (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/4-8-lagrange-multipliers)

Risorse di apprendimento gratuite

- OpenStax Calculus 3, 4.6 Directional Derivatives and the Gradient (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/4-6-directional-derivatives-and-the-gradient): Gradienti.
- OpenStax Calculus 3, 4.7 Maxima/Minima Problems (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/4-7-maxima-minima-problems): Test della derivata seconda.
- OpenStax Calculus 3, 4.8 Lagrange Multipliers (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/4-8-lagrange-multipliers): Ottimizzazione vincolata.

☐ **Ho finito questa unità**

Integrali doppi

Integrare su regioni del piano: integrali iterati, teorema di Fubini, regioni generali, coordinate polari, area, massa e medie.

Obiettivi di apprendimento

Alla fine di questa unità saprai:

- Calcolare integrali doppi come integrali iterati.
- Impostare gli estremi per regioni generali e invertire l'ordine.
- Passare in coordinate polari con dA = r dr dθ.
- Usare gli integrali doppi per aree, masse, medie e totali su una mappa.

Concetti chiave

- ∬_R f dA somma f per aree minuscole. Su un rettangolo, Fubini dice di integrare una variabile e poi l'altra, in qualsiasi ordine.
- Per una regione generale, gli estremi interni sono curve; disegna la regione per leggerli.
- Le regioni rotonde sono più semplici in coordinate polari, dove l'elemento d'area è r dr dθ (non dr dθ).
- La media di f su R è ∬f dA diviso l'area di R.

Equazioni chiave

$$\iint_R f\,dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$$

```
_Rf dA=_a^b\!_c^df(x,y) dy dx
```

Teorema di Fubini

$$dA = r\,dr\,d\theta$$

```
dA=r dr dθ
```

Elemento d'area in coordinate polari

$$\bar{f} = \frac{1}{\text{Area}(R)} \iint_R f\,dA$$

```
f=1Area(R)_Rf dA
```

Valore medio

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

_-∞^∞e^-x^2dx=π

Integrale di Gauss (tramite coordinate polari)

Esempi svolti passo passo

Esempio 5.1 Calcola ∬_R xy dA su R = [0, 2] × [0, 3].

1. $\int_0^2 x\,dx = 2$ e $\int_0^3 y\,dy = 4.5$.
2. L'integrale si separa: 2 × 4.5.

Risposta: 9.

Esempio 5.2 La pioggia cade su un bacino di 10 km × 5 km con altezza d(x, y) = 20 + 2x mm (x in km, lungo il lato di 10 km). Quanta acqua è caduta?

1. Totale = $\int_0^{10}\int_0^5 (20 + 2x)\,dy\,dx = 5\int_0^{10} (20 + 2x)\,dx$.
2. = 5(200 + 100) = 1,500 mm·km².
3. 1 mm su 1 km² equivale a 1000 m³.

Risposta: 1.5 × 10⁶ m³ (altezza media 30 mm). È così che pluviometri e radar diventano previsioni di portata dei fiumi.

Esempio 5.3 Calcola ∬ e^(−(x² + y²)) dA sul disco unitario, poi su tutto il piano.

1. In polari: $\int_0^{2\pi}\int_0^1 e^{-r^2}\,r\,dr\,d\theta = 2\pi \times \tfrac{1}{2}(1 - e^{-1})$.
2. Sul piano, l'integrale in r arriva a ∞ e dà ½.

Risposta: π(1 − 1/e) ≈ 1.986 sul disco; π sul piano, il che dimostra $\int e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$.

Esercizi

Svolgi ciascuno prima su carta, poi controlla.

1. $\int_0^1\int_0^x x\,dy\,dx$

   $\int_0^1 x^2\,dx = 1/3$.

2. Inverti l'ordine di $\int_0^1\int_y^1 f\,dx\,dy$.

$\int_0^1 \int_0^x f \, dy \, dx$.

3. Trova l'area di un cerchio di raggio a in coordinate polari.

   $\int_0^{(2\pi)} \int_0^a r \, dr \, d\theta = \pi a^2$.

4. Trova il volume sotto $z = 4 - x^2 - y^2$ sopra il disco $x^2 + y^2 \le 4$.

   $\int_0^{(2\pi)} \int_0^2 (4 - r^2) \, r \, dr \, d\theta = 2\pi(8 - 4) = 8\pi \approx 25.1$.

5. Media di $f = x + y$ su $[0, 1] \times [0, 1]$.

   $\iint (x + y) \, dA = 1$, area 1, media 1.

Errori concettuali comuni

Mito: In polari, $dA = dr \, d\theta$.

In realtà: $dA = r \, dr \, d\theta$; dimenticare r è l'errore più comune.

Mito: Gli estremi interni devono essere numeri.

In realtà: Per una regione generale, gli estremi interni sono funzioni della variabile esterna.

Mito: L'ordine non conta mai.

In realtà: Il valore no, ma gli estremi cambiano, e spesso un ordine è molto più semplice.

Flashcard

Integrale doppio

$\iint_R f \, dA$.

Fubini

Iterare in qualsiasi ordine su un rettangolo.

Regione di tipo I

$a \le x \le b$, $g_1(x) \le y \le g_2(x)$.

dA in polari

$r \, dr \, d\theta$.

Valore medio

$\iint f \, dA$ / area.

Integrale di Gauss

$\int e^{(-x^2)} \, dx = \sqrt{\pi}$.

Quiz di autoverifica

1. Elemento d'area in polari:

dr dθ

r dr dθ

r^2 dr dθ

dθ/r

r dr dθ. Un elemento polare misura r dθ per dr.

2. ∬_R 1 dA è uguale a...

0

l'area di R

il perimetro

1

l'area di R. Somma l'area.

3. $\int_0^1 \int_0^2 3\, dy\, dx$ =

3

5

6

2

6. 3 × area 2.

4. Il teorema di Fubini permette di...

saltare gli estremi

integrare una variabile alla volta

derivare

usare sempre le polari

integrare una variabile alla volta. Integrali iterati.

Rifai questo quiz

Come questo aiuta a salvare il pianeta

I totali su una mappa sono integrali doppi: la pioggia su un bacino, il carbonio immagazzinato in una foresta o il raccolto di un campo. Gli idrologi trasformano così le mappe di pioggia in volumi per prevedere le piene e pianificare l'approvvigionamento idrico.

Su Saving Planets: Pagina Fiumi · Dossier deforestazione

Fonti: USGS Water Science School: Precipitation and the water cycle (https://www.usgs.gov/special-topics/water-science-school/science/precipitation-and-water-cycle) · OpenStax Calculus 3, 5.2 Double Integrals over General Regions (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/5-2-double-integrals-over-general-regions)

Risorse di apprendimento gratuite

- OpenStax Calculus 3, 5.1 Double Integrals over Rectangular Regions (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/5-1-double-integrals-over-rectangular-regions): Fubini.
- OpenStax Calculus 3, 5.2 Double Integrals over General Regions (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/5-2-double-integrals-over-general-regions): Regioni generali.
- OpenStax Calculus 3, 5.3 Double Integrals in Polar Coordinates (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/5-3-double-integrals-in-polar-coordinates): Polari.

Guarda la lezione

Session 47 Clip: Definition of Double Integration (https://ocw.mit.edu/courses/18-02sc-multivariable-calculus-fall-2010/resources/clip-definition-of-double-integration/) (in inglese)

MIT 18.02SC Multivariable Calculus (Fall 2010), MIT OpenCourseWare. Licenza: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Condizioni d'uso (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Link fornito solo per lo studio gratuito; Saving Planets non è affiliato a questa università né approvato da essa.

☐ **Ho finito questa unità**

Integrali tripli e cambio di variabili

Integrare su solidi in coordinate cartesiane, cilindriche e sferiche, e lo jacobiano per i cambi di variabili generali.

Obiettivi di apprendimento

Alla fine di questa unità saprai:

- Impostare e calcolare integrali tripli.
- Usare coordinate cilindriche (r dz dr dθ) e sferiche (ρ² sin φ dρ dφ dθ).
- Calcolare lo jacobiano di un cambio di variabili.
- Trovare volumi, masse e centri di massa di solidi.

Concetti chiave

- ∭_E f dV somma f su scatole minuscole; con f = densità dà la massa.
- Le coordinate cilindriche si adattano a tubi, serbatoi e coni: dV = r dz dr dθ.
- Le coordinate sferiche si adattano a sfere e pianeti: dV = ρ² sin φ dρ dφ dθ.
- Ogni sostituzione x = x(u, v) dilata l'area secondo lo jacobiano |∂(x, y)/∂(u, v)|.

Equazioni chiave

$$dV = r\,dz\,dr\,d\theta$$

`dV=r dz dr dθ`

Elemento di volume in cilindriche

$$dV = \rho^2 \sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$$

`dV=ρ^2 dρ d dθ`

Elemento di volume in sferiche

$$J = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = |x_u y_v - x_v y_u|$$

`J=|((x,y))/((u,v))|=|x_uy_v-x_vy_u|`

Jacobiana

$$\iint_R f\,dx\,dy = \iint_S f\,|J|\,du\,dv$$

`_Rf dx dy=_Sf |J| du dv`

Esempi svolti passo passo

Esempio 6.1 Usa le coordinate sferiche per trovare il volume di una sfera piena di raggio R.

1. $V = \int_0\text{^}(2\pi)\int_0\text{^}\pi\int_0^R \rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$.
2. $= (R^3/3)(2)(2\pi)$.

Risposta: $4\pi R^3/3$.

Esempio 6.2 Stima la massa dell'atmosfera terrestre: il peso dell'aria sopra ogni metro quadrato è la pressione al suolo, quindi $M = \iint p/g \, dA$ sulla sfera.

1. L'integrale di superficie di una costante è p/g per l'area $4\pi R^2$.
2. $4\pi(6.371 \times 10^6)^2 = 5.10 \times 10^{14}$ m².
3. $M = 101{,}400 \times 5.10 \times 10^{14} / 9.81$.

Risposta: Circa 5.3×10^{18} kg, vicino ai 5.1×10^{18} kg della NASA (le terre sopra il livello del mare sostengono meno aria).

Esempio 6.3 Trova l'area dell'ellisse $x^2/a^2 + y^2/b^2 \le 1$ con $x = au$, $y = bv$.

1. L'ellisse diventa il disco unitario $u^2 + v^2 \le 1$.
2. $J = ab$.
3. Area = $ab \times \pi$.

Risposta: πab.

Esercizi

Svolgi ciascuno prima su carta, poi controlla.

1. Trova il volume del cono $0 \le z \le 1 - r$ (raggio 1, altezza 1) in coordinate cilindriche.

   $\int_0\text{^}(2\pi)\int_0^1 (1 - r)\, r \, dr \, d\theta = 2\pi(1/2 - 1/3) = \pi/3$.

2. Calcola $\iiint 1 \, dV$ sulla scatola $[0, 1] \times [0, 2] \times [0, 3]$.

   6.

3. Trova lo jacobiano delle coordinate polari.

$x_r y_\theta - x_\theta y_r = \cos\theta\,(r\cos\theta) + r\sin\theta\,(\sin\theta) = r$.

4. Un cilindro di raggio 1 m e altezza 2 m ha densità $1000(1 - z/4)$ kg/m³. Trova la sua massa.

   $\pi \int_0^2 1{,}000(1 - z/4)\,dz = \pi \times 1{,}000 \times 1.5 = 1{,}500\pi \approx 4{,}712$ kg.

Errori concettuali comuni

Mito: In coordinate sferiche $dV = d\rho\,d\varphi\,d\theta$.

In realtà: $dV = \rho^2 \sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$.

Mito: φ va da 0 a 2π.

In realtà: φ (dal polo nord) va da 0 a π; θ va da 0 a 2π.

Mito: Lo jacobiano può essere negativo dentro l'integrale.

In realtà: Usa il suo valore assoluto.

Flashcard

Integrale triplo

$\iiint_E f\,dV$.

Cilindriche

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, z; $dV = r\,dz\,dr\,d\theta$.

Sferiche

$dV = \rho^2 \sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$.

Jacobiana

Fattore di dilatazione di area o volume di una sostituzione.

Massa

$\iiint$ densità dV.

Centro di massa

$\iiint x\,\rho\,dV$ / massa.

Quiz di autoverifica

1. L'elemento di volume in sferiche è...

$d\rho\,d\varphi\,d\theta$

$\rho^2 \sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$

$\rho\,d\rho\,d\theta$

r dz dr dθ

$\rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$. Una scatola sferica di lati $d\rho$, $\rho \, d\varphi$, $\rho \sin\varphi \, d\theta$.

2. Le coordinate cilindriche sono le migliori per…

cubi

tubi e serbatoi

piramidi

piani

tubi e serbatoi. Sezioni circolari.

3. Lo jacobiano di x = 2u, y = 3v è…

5

6

1

2/3

6. 2 × 3.

4. Volume di una sfera piena di raggio 3:

36π

27π

12π

9π

36π. $4\pi(27)/3$.

Rifai questo quiz

Come questo aiuta a salvare il pianeta

Gli scienziati del clima sommano grandezze nel volume dell'oceano e dell'atmosfera proprio con questi integrali. Il contenuto di calore oceanico, il calore immagazzinato nei primi 2000 m del mare, è un integrale triplo della variazione di temperatura per densità e capacità termica, ed è una delle testimonianze più chiare del riscaldamento globale.

Su Saving Planets: Sezione Oceani

Fonti: NOAA NCEI: Global ocean heat content (https://www.ncei.noaa.gov/access/global-ocean-heat-content/) · Scheda NASA sulla Terra (in inglese) (https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/earthfact.html)

Risorse di apprendimento gratuite

- OpenStax Calculus 3, 5.4 Triple Integrals (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/5-4-triple-integrals): Sezione di un manuale gratuito.
- OpenStax Calculus 3, 5.5 Triple Integrals in Cylindrical and Spherical Coordinates (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/5-5-triple-integrals-in-cylindrical-and-spherical-coordinates): Cilindriche e sferiche.
- OpenStax Calculus 3, 5.7 Change of Variables in Multiple Integrals (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/5-7-change-of-variables-in-multiple-integrals): Jacobiani.

Guarda la lezione

Session 53 Clip: Change of Variables (https://ocw.mit.edu/courses/18-02sc-multivariable-calculus-fall-2010/resources/clip-change-of-variables/) (in inglese)

MIT 18.02SC Multivariable Calculus (Fall 2010), MIT OpenCourseWare. Licenza: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Condizioni d'uso (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Link fornito solo per lo studio gratuito; Saving Planets non è affiliato a questa università né approvato da essa.

☐ **Ho finito questa unità**

Campi vettoriali, integrali di linea e teorema di Green

Campi vettoriali come venti e correnti, lavoro e circolazione lungo curve, campi conservativi e potenziali, e il teorema di Green nel piano.

Obiettivi di apprendimento

Alla fine di questa unità saprai:

- Disegnare e interpretare campi vettoriali.
- Calcolare integrali di linea di funzioni scalari e di campi vettoriali (lavoro).
- Verificare se un campo è conservativo e trovarne un potenziale.
- Applicare il teorema di Green alla circolazione e al flusso nel piano.

Concetti chiave

- Un campo vettoriale assegna un vettore a ogni punto, come una mappa di venti o correnti.
- Il lavoro lungo un cammino è ∫_C F · dr; per un circuito chiuso si chiama circolazione.
- Un campo conservativo è un gradiente, F = ∇φ; il suo lavoro dipende solo dagli estremi, e ha circolazione nulla.
- Teorema di Green: la circolazione lungo una curva chiusa è uguale all'integrale del rotore (Q_x − P_y) sulla regione interna.

Equazioni chiave

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$$

```
_C F· d r=_a^b F( r(t))· r'(t) dt
```

Integrale di linea (lavoro)

$$\int_C \nabla\varphi \cdot d\mathbf{r} = \varphi(B) - \varphi(A)$$

```
_C· d r=(B)-(A)
```

Teorema fondamentale degli integrali di linea

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D (Q_x - P_y)\,dA$$

```
_CP dx+Q dy=_D(Q_x-P_y) dA
```

Teorema di Green

$$\text{Area} = \tfrac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx$$

```
Area=12_Cx dy-y dx
```

Area dal bordo

Esempi svolti passo passo

Esempio 7.1 F = ⟨y, x⟩. Trova il lavoro da (0, 0) a (2, 3) lungo qualsiasi cammino.

1. P_y = 1 = Q_x, quindi F è conservativo.
2. φ = xy ha ∇φ = ⟨y, x⟩.
3. Lavoro = φ(2, 3) − φ(0, 0).

Risposta: 6, su ogni cammino.

Esempio 7.2 Una corrente a vortice F = ⟨−y, x⟩ gira attorno all'origine. Trova la sua circolazione lungo la circonferenza unitaria direttamente e con il teorema di Green.

1. r = ⟨cos t, sin t⟩, F · r' = sin²t + cos²t = 1, quindi ∮ = 2π.
2. Green: Q_x − P_y = 1 − (−1) = 2; ∬2 dA = 2 × π.

Risposta: 2π ≈ 6.28 in entrambi i modi.

Esempio 7.3 Usa ½∮(x dy − y dx) per trovare l'area interna a x = 3 cos t, y = 2 sin t.

1. x dy − y dx = (3 cos t)(2 cos t) + (2 sin t)(3 sin t) = 6 dt.
2. ½ ∫₀^(2π) 6 dt.

Risposta: 6π ≈ 18.85 (πab con a = 3, b = 2).

Esercizi

Svolgi ciascuno prima su carta, poi controlla.

1. F = ⟨2xy, x² + 1⟩ è conservativo? Trova φ.

   P_y = 2x = Q_x; φ = x²y + y.

2. Trova ∫_C F · dr per F = ⟨x, y⟩ lungo y = x² da (0, 0) a (1, 1).

Conservativo, $\varphi = (x^2 + y^2)/2$: lavoro 1.

3. Trova $\oint(x^2\,dx + xy\,dy)$ lungo il quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$, in senso antiorario.

   Green: $\iint y\,dA = 1/2$.

4. Trova la circolazione di $F = \langle -y, x\rangle$ lungo una circonferenza di raggio 3.

   $2 \times \text{area} = 18\pi \approx 56.5$.

Errori concettuali comuni

Mito: Ogni campo a rotore nullo è conservativo.
In realtà: Vero solo su regioni semplicemente connesse (senza buchi).

Mito: Il lavoro lungo un cammino chiuso è sempre zero.
In realtà: Solo per i campi conservativi; un vortice circola.

Mito: Il teorema di Green vale con qualsiasi orientazione.
In realtà: Presuppone il verso antiorario; quello orario cambia il segno.

Flashcard

Campo vettoriale

Un vettore in ogni punto.

Integrale di linea

$\int F \cdot dr$, lavoro lungo una curva.

Circolazione

Integrale di linea lungo una curva chiusa.

Conservativo

$F = \nabla\varphi$; indipendente dal cammino.

Potenziale

φ con $\nabla\varphi = F$.

Teorema di Green

$\oint P\,dx + Q\,dy = \iint(Q_x - P_y)\,dA$.

Quiz di autoverifica

1. F = ∇φ significa che F è...

rotazionale

conservativo

zero

costante

conservativo. Un campo gradiente.

2. Lavoro di un campo conservativo lungo un circuito chiuso:

2π

0

la sua area

non definito

0. φ(A) − φ(A).

3. Il teorema di Green collega un integrale di linea a...

una derivata

un integrale doppio

un integrale triplo

una serie

un integrale doppio. Bordo ↔ interno.

4. Q_x − P_y per F = ⟨−y, x⟩ è...

0

1

2

−2

2. 1 − (−1).

Rifai questo quiz

Come questo aiuta a salvare il pianeta

I vortici oceanici (gyre) sono enormi sistemi di correnti rotanti: ce ne sono cinque principali, e ognuno raccoglie i detriti galleggianti verso il centro, formando le isole di plastica. La circolazione di un campo di correnti è un integrale di linea, e il teorema di Green la lega alla rotazione (rotore) all'interno.

Venti e correnti su mappe come earth.nullschool.net, che mostra dati pubblici di previsione della NOAA, sono campi vettoriali che puoi leggere con questa unità.

Su Saving Planets: Sezione Oceani

Fonti: NOAA Marine Debris Program: Garbage patches (https://marinedebris.noaa.gov/discover-marine-debris/garbage-patches) · NOAA Ocean Service: Ocean currents tutorial (gyres) (https://oceanservice.noaa.gov/education/tutorial_currents/04currents4.html) · earth.nullschool.net: live global wind and ocean-current map (from NOAA GFS and other public data) (https://earth.nullschool.net/)

Risorse di apprendimento gratuite

- OpenStax Calculus 3, 6.1 Vector Fields (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/6-1-vector-fields): Campi.
- OpenStax Calculus 3, 6.2 Line Integrals (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/6-2-line-integrals): Lavoro e circolazione.
- OpenStax Calculus 3, 6.3 Conservative Vector Fields (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/6-3-conservative-vector-fields): Potenziali.
- OpenStax Calculus 3, 6.4 Green's Theorem (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/6-4-greens-theorem): Teorema di Green.

Guarda la lezione

Session 56 Clip: Vector Fields (https://ocw.mit.edu/courses/18-02sc-multivariable-calculus-fall-2010/resources/clip-vector-fields/) (in inglese)

MIT 18.02SC Multivariable Calculus (Fall 2010), MIT OpenCourseWare. Licenza: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Condizioni d'uso (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Link fornito solo per lo studio gratuito; Saving Planets non è affiliato a questa università né approvato da essa.

☐ **Ho finito questa unità**

Integrali di superficie, teorema di Stokes e teorema della divergenza

Divergenza e rotore, superfici parametrizzate, flusso attraverso una superficie, e i due grandi teoremi che legano bordo e interno in 3D.

Obiettivi di apprendimento

Alla fine di questa unità saprai:

- Calcolare divergenza e rotore e interpretarli come intensità della sorgente e rotazione.
- Parametrizzare superfici e calcolare area di superficie e flusso.
- Applicare il teorema di Stokes.
- Applicare il teorema della divergenza (Gauss) al flusso netto uscente.

Concetti chiave

- div F = ∇ · F misura il flusso uscente per unità di volume; rot F = ∇ × F misura la rotazione.
- Il flusso ∬_S F · n dS è quanto del campo attraversa una superficie per unità di tempo.
- Stokes: la circolazione lungo il bordo di una superficie è uguale al flusso di rot F attraverso la superficie.
- Teorema della divergenza: il flusso netto uscente da una superficie chiusa è uguale alla divergenza totale all'interno.

Equazioni chiave

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = P_x + Q_y + R_z$$

· F=P_x+Q_y+R_z

Divergenza

$$\nabla \times \mathbf{F} = \langle R_y - Q_z,\ P_z - R_x,\ Q_x - P_y \rangle$$

× F= R_y-Q_z,\ P_z-R_x,\ Q_x-P_y

Rotore

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS$$

_ S F· d r=_S(× F)· n dS

Teorema di Stokes

$$\oiint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_E \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV$$

```
_S F· n dS=_E· F dV
```

Teorema della divergenza

Esempi svolti passo passo

Esempio 8.1 Trova il flusso uscente di F = ⟨x, y, z⟩ attraverso la sfera di raggio R.

1. div F = 3.
2. Teorema della divergenza: 3 × (4πR³/3).
3. Verifica diretta: sulla sfera F · n = R, quindi il flusso è R × 4πR².

Risposta: 4πR³ in entrambi i modi.

Esempio 8.2 Sulla Terra (raggio 6371 km) arriva luce solare di 1361 W/m². Quale potenza totale intercetta la Terra, e qual è la media per metro quadrato della sua superficie?

1. Il flusso attraverso il disco d'ombra della Terra è 1361 × πR² = 1.735 × 10¹⁷ W.
2. Distribuito su tutta la sfera (area 4πR²) è 1361/4.

Risposta: 1.74 × 10¹⁷ W, ovvero 340 W/m² in media, il valore in cima al diagramma del bilancio energetico della NASA.

Esempio 8.3 Verifica il teorema di Stokes per F = ⟨−y, x, 0⟩ sulla metà superiore della sfera unitaria.

1. rot F = ⟨0, 0, 2⟩.
2. Il flusso del rotore attraverso l'emisfero è uguale a quello attraverso il disco unitario piatto (stesso bordo): 2 × π.
3. La circolazione lungo il bordo è 2π (unità 7).

Risposta: 2π in entrambi i modi.

Esercizi

Svolgi ciascuno prima su carta, poi controlla.

1. Trova div e rot di F = ⟨x², yz, xy⟩.

div = 2x + z; rot = ⟨x − y, −y, 0⟩.

2. Flusso di F = ⟨0, 0, 5⟩ verso l'alto attraverso il quadrato unitario nel piano z = 1.

   5 × 1 = 5.

3. Usa il teorema della divergenza: flusso di F = ⟨x, y, z⟩ uscente dal cubo unitario $[0, 1]^3$.

   div = 3; flusso 3.

4. Trova l'area di una sfera di raggio 2 integrando dS = 4 sin φ dφ dθ.

   4 × 2 × 2π = 16π ≈ 50.3.

5. Il rotore di un campo gradiente può essere non nullo?

   No: ∇ × ∇φ = 0 per φ regolare.

Errori concettuali comuni

Mito: Il flusso è la stessa cosa della circolazione.
In realtà: Il flusso attraversa una superficie; la circolazione corre lungo una curva.

Mito: A divergenza nulla significa che niente si muove.
In realtà: Significa nessuna sorgente netta: quello che entra, esce.

Mito: Il teorema della divergenza vale per superfici aperte.
In realtà: Richiede una superficie chiusa; Stokes tratta le superfici con bordo.

Flashcard

Divergenza

∇ · F; intensità della sorgente.

Rotore

∇ × F; rotazione.

Flusso

∬F · n dS.

Teorema di Stokes

Circolazione sul bordo = flusso del rotore.

Teorema della divergenza

Flusso uscente = ∭ div F dV.

Superficie chiusa

Racchiude un solido; senza bordo.

Quiz di autoverifica

1. div ⟨x, y, z⟩ =

0

1

3

x + y + z

3. 1 + 1 + 1.

2. Il teorema di Stokes collega la circolazione sul bordo al...

flusso di F

flusso di rot F

div F

volume

flusso di rot F. $\iint (\nabla \times F) \cdot n \, dS$.

3. Il teorema della divergenza richiede...

una superficie chiusa

una curva

una regione piana

un campo conservativo

una superficie chiusa. Racchiude un solido.

4. La luce solare media per metro quadrato alla sommità dell'atmosfera terrestre è circa...

1,361 W/m^2

680 W/m^2

340 W/m²

100 W/m²

340 W/m². Area del disco πR^2 su area della sfera $4\pi R^2$: un quarto.

Rifai questo quiz

Come questo aiuta a salvare il pianeta

Il clima della Terra è un bilancio di flussi: la luce solare attraversa la sommità dell'atmosfera a circa 340 W/m² in media, e la Terra deve rimandare la stessa energia nello spazio. Quando i gas serra intrappolano parte del calore uscente, lo squilibrio è un flusso netto verso il pianeta, immagazzinato soprattutto nell'oceano.

Il trasporto degli inquinanti è la stessa matematica: il teorema della divergenza dice che l'inquinante che esce da un lago o da un bacino d'aria attraverso il suo bordo è uguale a quanto rilasciano le sorgenti interne, meno quanto viene rimosso.

Su Saving Planets: Sezione Osservazione della Terra

Fonti: NASA Earth Observatory: Climate and Earth's Energy Budget (https://earthobservatory.nasa.gov/features/EnergyBalance) · Scheda NASA sulla Terra (in inglese) (https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/earthfact.html)

Risorse di apprendimento gratuite

- OpenStax Calculus 3, 6.5 Divergence and Curl (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/6-5-divergence-and-curl): Divergenza e rotore.
- OpenStax Calculus 3, 6.6 Surface Integrals (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/6-6-surface-integrals): Flusso.
- OpenStax Calculus 3, 6.7 Stokes' Theorem (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/6-7-stokes-theorem): Stokes.
- OpenStax Calculus 3, 6.8 The Divergence Theorem (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/6-8-the-divergence-theorem): Gauss.

Guarda la lezione

Session 95 Clip: Stokes' Theorem and Surface Independence (https://ocw.mit.edu/courses/18-02sc-multivariable-calculus-fall-2010/resources/clip-stokes-theorem-and-surface-independence/) (in inglese)

MIT 18.02SC Multivariable Calculus (Fall 2010), MIT OpenCourseWare. Licenza: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Condizioni d'uso (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Link fornito solo per lo studio gratuito; Saving Planets non è affiliato a questa università né approvato da essa.

☐ **Ho finito questa unità**

Esercizi

Questi esercizi stanno dentro ogni unità. Falli su carta, poi apri la risposta.

1. Vettori e geometria dello spazio
   5 esercizi
2. Funzioni vettoriali e moto nello spazio
   4 esercizi
3. Derivate parziali
   4 esercizi
4. Gradienti e ottimizzazione
   5 esercizi
5. Integrali doppi
   5 esercizi
6. Integrali tripli e cambio di variabili
   4 esercizi
7. Campi vettoriali, integrali di linea e teorema di Green
   4 esercizi
8. Integrali di superficie, teorema di Stokes e teorema della divergenza
   5 esercizi

Laboratori al computer

Quattro laboratori al computer applicano le unità: divergenza e rotore di un campo di vento da dati di stazioni, pendenza e direzione di deflusso dell'acqua da una griglia di quota, il volume di un lago con un integrale doppio in polari, e un'orbita di satellite fatta avanzare nel tempo.

I dati di esempio sono indicati come tali; ogni laboratorio rimanda alla fonte di dati pubblica da provare dopo.

Riferimento per la sicurezza: OpenStax Calculus Volume 3 (libro di testo gratuito) (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/1-introduction)

Laboratorio A: divergenza e rotore di un campo di vento

SETTIMANA 14

Obiettivo: Stima divergenza e rotore del vento in un punto da quattro stazioni circostanti, e interpretali come aria ascendente e rotazione di una tempesta.

$$\nabla \cdot \mathbf{v} \approx \frac{u_E - u_W}{2\Delta} + \frac{v_N - v_S}{2\Delta}, \quad (\nabla \times \mathbf{v})_z \approx \frac{v_E - v_W}{2\Delta} - \frac{u_N - u_S}{2\Delta}$$

Differenze centrate

Procedimento

1. Inserisci il vento verso est (u) e verso nord (v) nelle stazioni 100 km a est, ovest, nord e sud di un centro (Δ = 100 km = 10^5 m).
2. Calcola la divergenza e il rotore verticale (vorticità).
3. Interpreta i segni, poi ripeti con venti reali letti su earth.nullschool.net o nei dati di previsione della NOAA.

Tabella dei dati

Stazione	u (m/s, est)	v (m/s, nord)
Est	4	8
Ovest	6	−6
Nord	−5	−3
Sud	7	−1

Valori di esempio per esercitarsi, non una vera carta meteorologica.

Calcolo di esempio

1. Divergenza = (4 − 6)/(2 × 10^5) + (−3 − (−1))/(2 × 10^5) = −2 × 10^{-5} s^{-1}: l'aria converge, quindi deve salire, il che favorisce nubi e pioggia.
2. Vorticità = (8 − (−6))/(2 × 10^5) − (−5 − 7)/(2 × 10^5) = 1.3 × 10^{-4} s^{-1}: positiva, antioraria, come una bassa pressione dell'emisfero nord.

> **Sicurezza**
>
> - Nessuna, oltre al normale uso del computer.

Alternativa a casa o virtuale

- Basta un foglio di calcolo.

earth.nullschool.net: live global wind and ocean-current map (from NOAA GFS and other public data) (https://earth.nullschool.net/) · NOAA NCEI: Global Forecast System (GFS) (https://www.ncei.noaa.gov/products/weather-climate-models/global-forecast)

Legame con il pianeta: Convergenza e vorticità sono ciò che i previsori seguono per avvisare di piogge intense e tempeste. NOAA/NWS JetStream: Wind (https://www.weather.gov/jetstream/wind)

- [ ] **Ho completato questo laboratorio (reale o virtuale)**

Laboratorio B: pendenza e deflusso dell’acqua da una griglia di quota

SETTIMANA 7

Obiettivo: Stima il gradiente del terreno da una griglia di quote e trova in che direzione scorre l’acqua piovana.

$$\nabla h \approx \left\langle \frac{h_E - h_W}{2\Delta}, \frac{h_N - h_S}{2\Delta} \right\rangle$$

Gradiente con differenze centrate

Procedimento

1. Usa le quote 100 m a est, ovest, nord e sud di un punto (Δ = 100 m).
2. Calcola ∇h, il suo modulo (pendenza) e l’angolo di pendenza arctan|∇h|.
3. La direzione di deflusso è −∇h. Poi scarica un riquadro altimetrico USGS 3DEP gratuito e ripeti per un pendio vicino a te.

Tabella dei dati

Vicino	Quota (m)
Centro	250
Est	262
Ovest	240
Nord	256
Sud	246

Valori di esempio per esercitarsi.

Calcolo di esempio

1. ∇h ≈ ⟨(262 − 240)/200, (256 − 246)/200⟩ = ⟨0.11, 0.05⟩.
2. |∇h| = 0.121, un angolo di pendenza di circa 6.9°.
3. L’acqua scorre lungo −∇h, verso ovest-sudovest; tracciare queste direzioni su una griglia delinea un bacino idrografico.

> **Sicurezza**
>
> - Nessuna, oltre al normale uso del computer.

Alternativa a casa o virtuale

- Basta un foglio di calcolo; un software GIS è facoltativo.

USGS 3D Elevation Program (3DEP) (https://www.usgs.gov/3d-elevation-program)

Legame con il pianeta: Le direzioni di deflusso dalle griglie di quota sono la base delle mappe di inondazione ed erosione. USGS 3D Elevation Program (3DEP) (https://www.usgs.gov/3d-elevation-program)

- [ ] **Ho completato questo laboratorio (reale o virtuale)**

Laboratorio C: il volume di un lago con un integrale doppio in polari

SETTIMANA 9

Obiettivo: Calcola il volume di un lago a forma di catino in modo esatto e con una somma numerica, e osserva come l'errore si riduce.

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{R} D\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) r \, dr \, d\theta = \frac{\pi R^2 D}{2}$$

```
V=_0^2π\!\!_0^RD(1-(r^2)/(R^2))r dr dθ=(π R^2D)/(2)
```

Lago con bacino paraboloide

Procedimento

1. Prendi R = 1000 m e profondità massima D = 20 m.
2. Calcola il volume esatto.
3. Dividi il lago in n anelli, valuta la profondità al raggio medio di ogni anello e somma profondità × area dell'anello. Prova n = 5 e n = 10.

Tabella dei dati

Metodo	Volume (m³)
Esatta	3.14×10^7
Punto medio, 5 anelli	3.20×10^7
Punto medio, 10 anelli	3.16×10^7

Valori calcolati per un lago modello.

Calcolo di esempio

1. Esatto: $\pi(1000)^2(20)/2 = 3.14 \times 10^7$ m³ (31.4 milioni di metri cubi).
2. La somma a 5 anelli è alta del 2.0 % e quella a 10 anelli dello 0.5 %: raddoppiare n riduce l'errore di circa quattro volte.

> **Sicurezza**
>
> - Nessuna, oltre al normale uso del computer.

Alternativa a casa o virtuale

- Un foglio di calcolo o Python.

OpenStax Calculus 3, 5.3 Double Integrals in Polar Coordinates (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/5-3-double-integrals-in-polar-coordinates)

Legame con il pianeta: I volumi di laghi e serbatoi ricavati da rilievi batimetrici dicono ai gestori idrici quanta acqua possono immagazzinare e rilasciare. NASA: missione SWOT (https://swot.jpl.nasa.gov/)

- [ ] **Ho completato questo laboratorio (reale o virtuale)**

Laboratorio D: far avanzare nel tempo un’orbita di satellite

SETTIMANA 3

Obiettivo: Integra numericamente r'' = −GM r/|r|³ per un’orbita tipo Landsat e confronta due metodi di passo.

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n - \frac{GM\,\mathbf{r}_n}{|\mathbf{r}_n|^3}\Delta t, \quad \mathbf{r}_{n+1} = \mathbf{r}_n + \mathbf{v}_{n+1}\Delta t$$

```
v_n+1= v_n-(GM r_n)/(| r_n|^3)Δ t, r_n+1= r_n+ v_n+1Δ t
```

Eulero semi-implicito (simplettico)

Procedimento

1. Parti da r = ⟨7076 km, 0⟩ con v = ⟨0, 7505 m/s⟩ (unità 2).
2. Fai 592 passi con Δt = 10 s (un periodo), prima con Eulero semplice (aggiorna r con la v vecchia), poi con la versione semi-implicita sopra.
3. Confronta il raggio finale con quello iniziale.

Tabella dei dati

Metodo (Δt = 10 s)	Variazione del raggio dopo un’orbita
Eulero semplice	+908 km
Eulero semi-implicito	+0.16 km

Valori calcolati; GM = 3.986 × 10¹⁴ m³/s².

Calcolo di esempio

1. Eulero semplice si allarga a spirale di circa 908 km per orbita, una previsione inutile; anche Δt = 1 s deriva ancora di circa 94 km.
2. L’aggiornamento semi-implicito cambia una riga di codice e mantiene l’orbita entro circa 0.16 km.

> **Sicurezza**
>
> - Nessuna, oltre al normale uso del computer.

Alternativa a casa o virtuale

- Va bene un foglio di calcolo; Python in Colab è più semplice.

Google Colab (notebook gratuiti) (https://colab.research.google.com/) · NASA: Landsat 9 quick facts (https://landsat.gsfc.nasa.gov/satellites/landsat-9/)

Legame con il pianeta: Una propagazione orbitale accurata mantiene i satelliti di osservazione della Terra sulle loro tracce ripetute. NASA: Landsat 9 quick facts (https://landsat.gsfc.nasa.gov/satellites/landsat-9/)

- [ ] **Ho completato questo laboratorio (reale o virtuale)**

Serie di esercizi per gli esami

Cronometrati: circa 10 minuti per problema. Poi confronta con le soluzioni complete.

Esercizi per l'esame intermedio (unità 1–4)

1. Trova l'angolo tra $\langle 1, 1, 0\rangle$ e $\langle 0, 1, 1\rangle$.

    1. Prodotto scalare 1; entrambe le lunghezze $\sqrt{2}$.
    2. $\cos\theta = 1/2$.

    Risposta: 60°.

2. Trova il piano passante per $(1, 1, 1)$ con normale $\langle 2, -1, 3\rangle$.

    1. $2(x - 1) - (y - 1) + 3(z - 1) = 0$.

    Risposta: $2x - y + 3z = 4$.

3. Un satellite orbita a un raggio di 6771 km (400 km di quota). Trova il suo periodo.

    1. $T = 2\pi\sqrt{(r^3/GM)}$.

    Risposta: ≈ 5544 s ≈ 92.4 min.

4. Massimizza $f = xy$ con il vincolo $x + y = 10$.

    1. $\langle y, x\rangle = \lambda\langle 1, 1\rangle$ dà $x = y = 5$.

    Risposta: 25 in $(5, 5)$.

Serie di esercizi finale (tutte le unità)

1. Calcola $\int_0^{(2\pi)}\int_0^3 r\, dr\, d\theta$.

    1. $4.5 \times 2\pi$.

    Risposta: $9\pi \approx 28.3$ (area di un disco di raggio 3).

2. Trova il volume di una semisfera di raggio 2 con le coordinate sferiche.

    1. $\int_0^{(2\pi)}\int_0^{(\pi/2)}\int_0^2 \rho^2 \sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta = (8/3)(1)(2\pi)$.

Risposta: 16π/3 ≈ 16.76.

3. Trova $\oint F \cdot dr$ per F = ⟨−y, x⟩ lungo il quadrato [0, 2] × [0, 2], in senso antiorario.

    1. Green: $\iint 2\, dA = 2 \times 4$.

    Risposta: 8.

4. Trova il flusso uscente di F = ⟨2x, 0, 0⟩ attraverso la sfera di raggio 1.

    1. div F = 2; flusso = 2 × 4π/3.

    Risposta: 8π/3 ≈ 8.38.

Formulario

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos\theta \qquad |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin\theta$$

$$n \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0 \qquad L = \int |\mathbf{r}'(t)|\, dt$$

$$\kappa = |\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''| / |\mathbf{r}'|^3 \qquad v = \sqrt{GM/r}$$

$$\Delta f \approx f_x \Delta x + f_y \Delta y \qquad D_{\mathbf{u}} f = \nabla f \cdot \mathbf{u}$$

$$D = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 \qquad \nabla f = \lambda \nabla g$$

$$dA = r\, dr\, d\theta \qquad dV = r\, dz\, dr\, d\theta$$

$$dV = \rho^2 \sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta \qquad \int_C \nabla\varphi \cdot d\mathbf{r} = \varphi(B) - \varphi(A)$$

$$\oint P\,dx + Q\,dy = \iint (Q_x - P_y)\, dA \qquad \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS$$

$$\oiint \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV$$

Costanti

Costante	Valore
GM della Terra	3.986×10^{14} m^3/s^2
Raggio medio della Terra	6,371 km
Irraggiamento solare sulla Terra	1,361 W/m^2
Pressione media al suolo	1,014 mb = 101,400 Pa
Altezza di scala atmosferica	8.5 km
Gravità standard	9.81 m/s^2

Fonte: Scheda NASA sulla Terra (in inglese) (https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/earthfact.html)

Strumenti per grafici e dati

Usa questi strumenti e dati gratuiti insieme al corso.

- Calcolatrice Desmos 3D (https://www.desmos.com/3d): Traccia superfici, vettori e curve parametriche in 3D.
- GeoGebra 3D (https://www.geogebra.org/3d): Un altro programma di grafici 3D gratuito.
- PhET: Vector Addition (https://phet.colorado.edu/en/simulations/vector-addition): Sviluppa l'intuizione su componenti e somme.
- MIT OpenCourseWare 18.02SC (https://ocw.mit.edu/courses/18-02sc-multivariable-calculus-fall-2010/): Lezioni, esercitazioni e problemi del MIT, gratuiti.
- earth.nullschool.net: live global wind and ocean-current map (from NOAA GFS and other public data) (https://earth.nullschool.net/): Guarda veri campi vettoriali di venti e correnti in tutto il mondo.
- USGS 3D Elevation Program (3DEP) (https://www.usgs.gov/3d-elevation-program): Dati altimetrici gratuiti degli Stati Uniti per lavorare su gradiente e pendenza.

Glossario

Circolazione
Integrale di linea di un campo lungo una curva chiusa.

Campo conservativo
Un campo gradiente; il lavoro non dipende dal cammino.

Prodotto vettoriale
Vettore perpendicolare a due vettori.

Rotore
$\nabla \times F$; rotazione locale di un campo.

Curvatura
Quanto si piega una curva; 1/R per una circonferenza.

Derivata direzionale
Tasso di variazione in una direzione data, $\nabla f \cdot u$.

Divergenza
$\nabla \cdot F$; flusso netto uscente per unità di volume.

Teorema della divergenza
Il flusso uscente da una superficie chiusa è uguale all'integrale della divergenza all'interno.

Prodotto scalare
$a \cdot b = |a||b| \cos \theta$.

Flusso
Quantità di un campo che attraversa una superficie.

Gradiente
Vettore delle derivate parziali; punta in salita.

Teorema di Green
La circolazione lungo una curva piana è uguale all'integrale di $Q_x - P_y$ all'interno.

Jacobiana
Fattore di dilatazione di un cambio di variabili.

Moltiplicatore di Lagrange
λ in $\nabla f = \lambda \nabla g$ per l'ottimizzazione vincolata.

Curva di livello
Curva su cui $f(x, y)$ è costante.

Integrale di linea
Integrale lungo una curva.

Derivata parziale
Derivata in una variabile con le altre fissate.

Punto di sella
Punto critico che non è né un massimo né un minimo.

Teorema di Stokes
La circolazione sul bordo è uguale al flusso del rotore.

Campo vettoriale
Assegnazione di un vettore a ogni punto.

Griglia di autovalutazione

Non si assegnano voti né crediti. Usala per valutare onestamente a che punto sei in ogni unità.

Livello	Come si presenta
4 · Padronanza	Imposta integrali e campi da un disegno senza aiuto, sceglie buone coordinate e verifica le risposte con un secondo metodo o un teorema.

Livello	Come si presenta
3 · Competente	Risolve gli esercizi con qualche errore occasionale.
2 · In sviluppo	Segue gli esempi svolti ma fatica a impostare gli estremi o a scegliere le coordinate.
1 · Principiante	Applica formule senza disegnare né verificare; deve ripassare l'unità.

Pesi suggeriti se vuoi un punteggio

Parte	Peso
Esercizi	30%
Laboratori al computer	15%
Serie di esercizi di metà corso	25%
Serie di esercizi finale	30%

Punta al livello 3 o superiore in ogni unità prima di passare al corso successivo.

Corsi correlati

- Introduzione alla programmazione ENGR 130
- Equazioni differenziali MATH 220
- Fisica II PHYS 210 + PHYS 210L
- Tutti i corsi