עודכן לאחרונה: November 1, 2026

🗺️ מפת דרכים לארבע שנים · שנה 2, סתיו

על הקורס

לקורס החינמי הזה יש 8 יחידות ו-4 מעבדות. אלה המספרים האמיתיים, לא תוכנית ארוכה יותר שקוצרה.

בדיקה היא מספר או תוצאת קוד בעמוד קורס שסקריפט מחשב מחדש לפני הפרסום. המספר המודפס והמספר שחושב מחדש חייבים להתאים.

זהו מתווה של קורס חינמי ללימוד עצמי שנכתב על ידי Saving Planets. הוא אינו קורס אוניברסיטאי, אינו מעניק נקודות זכות אקדמיות, ואף מוסד לימודים אינו מעורב בו.

ההיקף תואם את הסמסטר השלישי של חשבון אינפיניטסימלי באקדמיה, בהשראת הנושאים והעומק של חומרים פתוחים כמו OpenStax Calculus Volume 3 ו-MIT OpenCourseWare 18.02 Multivariable Calculus, ושל סילבוסים של קורסים כמו Stanford Math 51/52 ו-Georgia Tech MATH 2551. אנו מקשרים לחומרים החינמיים לאורך כל הקורס. אף אחד מהארגונים האלה אינו תומך בדף זה.

מה אנחנו מוסיפים: כל יחידה מתחברת לבעיות אמיתיות של רוח, אוקיינוס, פני שטח, אקלים ולווייינים עם מקור ציבורי מצוטט, כל מספר בדף מחושב מחדש בסקריפט בדיקה לפני פרסומו, וארבע מעבדות מחשב מיישמות את הרעיונות על שדות רוח, רשתות גובה, נפחי אגמים ומסלולים.

עברו עליו לפי הסדר. בכל יחידה יש מטרות, רעיונות מרכזיים, משוואות, דוגמאות צעד אחר צעד, תרגול עם תשובות מלאות, טעויות נפוצות, כרטיסיות ובוחן. ההתקדמות שלכם נשמרת רק בדפדפן הזה.

איך הקורס הזה עוזר להציל את כדור הארץ

כדור הארץ תלת-ממדי ונמצא בתנועה מתמדת. רוחות וזרמי אוקיינוס הם שדות וקטוריים, פני השטח והטמפרטורה הם פונקציות של שניים או שלושה משתנים, חום ומזהמים חוצים משטחים כשטף, והלווייינים שמודדים את כל זה נעים במסלולים וקטוריים במרחב.

כל יחידה מסתיימת בקטע קצר עם מקורות שמראה איך הרעיונות שלה עוזרים גם לאנשים וגם לטבע.

למורים

אפשר ללמד את הקורס הזה, או לתת לתלמיד לעבור אותו לבד. הוא חינם. Saving Planets לא נותנת ציון ולא נקודות זכות.

- העמוד הזה הוא כל הקורס: 8 יחידות ו-4 מעבדות (MATH 210).
- תכננו 15 שבועות, בערך 6 עד 9 שעות בשבוע, כולל שבועות המעבדה.

- עקבו אחרי לוח 15 השבועות. קראו את היחידה, פתרו על הנייר, ואז פתחו את התשובה. בשבוע מעבדה עשו את המעבדה או את הגרסה הביתית.
- בדיקה היא מספר או תוצאת קוד בעמוד שסקריפט מחשב מחדש לפני הפרסום. המספר שרואים והמספר שחושב מחדש חייבים להתאים.
- השתמשו בהדפסת העמוד, או הורידו את מדריך הלימוד ב-PDF. דף הנוסחאות נמצא לקראת הסוף.
- שאלו: איך היחידה הזו עוזרת לאנשים ולכוכב? בכל יחידה יש תיבה ירוקה עם עובדה ומקור.
- העתיקו את תבנית המדריך למורה וכתבו את שם הכיתה, הזמן שיש לכם, והשאלות שתשאלו. פתיחת תבנית המדריך למורה

לפני שמתחילים

ידע מוקדם

- חשבון אינפיניטסימלי I ו-II: נגזרות, אינטגרלים, הצבה ואינטגרציה בחלקים, עקומות פרמטריות וקוטביות.
- טריגונומטריה בסיסית ומשוואות המעגל והספירה.
- פיזיקה I עוזרת בדוגמאות של עבודה, שטף ומסלולים, אבל אינה חובה.

איך ללמוד

- ציירו תמונה ב-3D לכל בעיה: הצירים, התחום, הווקטורים.
- פתרו כל תרגיל על הנייר לפני שאתם פותחים את התשובה.
- בדקו יחידות וסימנים: לשטף, לעבודה או לסירקולציה צריך להיות היגיון פיזיקלי.
- באינטגרלים מרובים, שרטטו את התחום וכתבו את הגבולות לפני שמבצעים אינטגרציה כלשהי.
- השתמשו בכלי שרטוט 3D (Desmos 3D או GeoGebra 3D) כדי לראות משטחים ושדות.
- עשו שוב את הבחנים כעבור כמה ימים. תרגול מרווח עדיף על מפגש ארוך אחד.

מה צריך

- מחשב או טאבלט עם גיליון אלקטרוני.
- כלי שרטוט 3D חינמי כמו Desmos 3D או GeoGebra 3D.
- רשות: פייתון עם NumPy (בחינם ב-Google Colab).

לוח זמנים מוצע ל־15 שבועות

כ־6 עד 9 שעות בשבוע: קריאה, תרגילים, ובשבועות המעבדה גם המעבדה.

שבוע	יחידה	נושאים	קריאה
1	וקטורים וגאומטריה של המרחב	קואורדינטות 3D, וקטורים, מכפלה סקלרית	OpenStax 2.1–2.3
2	וקטורים וגאומטריה של המרחב	מכפלה וקטורית, ישרים ומישורים	OpenStax 2.4–2.5

שבוע	יחידה	נושאים	קריאה
3	פונקציות וקטוריות ותנועה במרחב	פונקציות וקטוריות, תנועה במרחב, עקמומיות; מעבדה D	OpenStax 3.1–3.4
4	נגזרות חלקיות	פונקציות של כמה משתנים, גבולות, נגזרות חלקיות	OpenStax 4.1–4.3
5	נגזרות חלקיות	מישורים משיקים, קירוב לינארי, כלל השרשרת	OpenStax 4.4–4.5
6	גרדיאנטים ואופטימיזציה	גרדיאנט, נגזרות כיווניות, קיצון	OpenStax 4.6–4.7
7	גרדיאנטים ואופטימיזציה	כופלי לגרנז׳, מעבדה B; תרגול לבוחן אמצע	OpenStax 4.8
8	אינטגרלים כפולים	אינטגרלים כפולים על מלבנים ועל תחומים כלליים	OpenStax 5.1–5.2
9	אינטגרלים כפולים	אינטגרלים כפולים בקואורדינטות קוטביות; מעבדה C	OpenStax 5.3
10	אינטגרלים משולשים והחלפת משתנים	אינטגרלים משולשים; קואורדינטות גליליות וכדוריות	OpenStax 5.4–5.5
11	אינטגרלים משולשים והחלפת משתנים	מסה ומרכז מסה; החלפת משתנים	OpenStax 5.6–5.7
12	שדות וקטוריים, אינטגרלים קוויים ומשפט גרין	שדות וקטוריים, אינטגרלים קוויים, שדות משמרים, משפט גרין	OpenStax 6.1–6.4
13	אינטגרלים משטחיים, משפט סטוקס ומשפט הדיברגנץ	דיברגנץ ורוטור; אינטגרלים משטחיים ושטף	OpenStax 6.5–6.6
14	אינטגרלים משטחיים, משפט סטוקס ומשפט הדיברגנץ	משפטי סטוקס והדיברגנץ; מעבדה A	OpenStax 6.7–6.8
15	חזרה	חזרה וסדרת תרגול מסכמת	כל היחידות

ההתקדמות שלכם

סמנו יחידות ומעבדות כשאתם מסיימים אותן, ועשו את הבחנים. ההתקדמות והציונים נשמרים רק בדפדפן הזה ולעולם לא נשלחים אלינו.

יחידות

וקטורים וגאומטריה של המרחב

קואורדינטות 3D, וקטורים, המכפלות הסקלרית והווקטורית, ומשוואות של ישרים ומישורים.

מטרות הלמידה

בסוף היחידה הזו תוכלו:

- חברו וקטורים ב-3D, הכפילו אותם בסקלר ומצאו את אורכם.
- השתמשו במכפלה הסקלרית לזוויות ולהטלות.
- השתמשו במכפלה הווקטורית לנורמלים, לשטחים ולנפחים.
- כתבו משוואות של ישרים ומישורים ומצאו מרחקים.

מושגי מפתח

- לווקטור יש גודל וכיוון; ברכיבים, $v = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ ו-$|v| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$.
- המכפלה הסקלרית $a \cdot b = |a||b| \cos\theta$ מודדת עד כמה שני וקטורים מצביעים לאותו כיוון. היא אפס בדיוק כשהם מאונכים.
- המכפלה הווקטורית $a \times b$ מאונכת לשניהם, ואורכה שווה לשטח המקבילית שהם פורשים.
- מישור נקבע על ידי נקודה ווקטור נורמל n: $n \cdot (r - r_0) = 0$. ישר הוא נקודה ועוד כפולות של כיוון: $r = r_0 + t\,v$.

משוואות מפתח

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos\theta$$

```
a· b=| a|| b|θ
```

מכפלה סקלרית וזווית

$$\text{proj}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}\mathbf{b}$$

```
_ b a=( a· b)/(| b|^2) b
```

הטלה

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin\theta$$

```
| a× b|=| a|| b|θ
```

אורך המכפלה הווקטורית = שטח המקבילית

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

```
a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0
```

מישור עם נורמל ⟨a, b, c⟩

$$D = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

D=|ax_1+by_1+cz_1-d|^2+b^2+c^2

המרחק מנקודה למישור ax + by + cz = d

דוגמאות פתורות שלב אחר שלב

דוגמה 1.1 עבור a = ⟨1, 2, 2⟩ ו-b = ⟨2, −1, 2⟩, מצאו את |a|, את a · b ואת הזווית ביניהם.

1. |a| = √(1 + 4 + 4) = 3, וגם |b| = 3.
2. a · b = 2 − 2 + 4 = 4.
3. cos θ = 4/9, ולכן θ = arccos(0.444).

תשובה: |a| = 3, a · b = 4, θ ≈ 63.6°.

דוגמה 1.2 מצאו את a × b עבור אותם וקטורים ואת שטח המקבילית שהם פורשים.

1. a × b = ⟨2·2 − (−1)·1, 1·2 − 2·2, 2·(−1) − 2·2⟩ = ⟨6, 2, −5⟩.
2. בדיקה: המכפלה הסקלרית שלו עם a ועם b היא 0.
3. שטח = |⟨6, 2, −5⟩| = √65.

תשובה: ⟨6, 2, −5⟩; שטח √65 ≈ 8.06.

דוגמה 1.3 רוח של 10 m/s נושבת בזווית 30° לציר הרוטור של טורבינת רוח. איזה חלק מההספק החזיתי הטורבינה מקבלת, אם ההספק גדל עם החזקה השלישית של מהירות הרוח לאורך צירה?

1. הרכיב לאורך הציר: 10 cos 30° = 8.66 m/s (מכפלה סקלרית עם וקטור היחידה של הציר).
2. יחס ההספקים = (cos 30°)³ = .

תשובה: בערך 0.65: סטייה של 30° מאבדת בערך שליש מההספק, ולכן טורבינות מסתובבות מול הרוח.

תרגילים

פתרו כל אחד קודם על נייר, ואז בדקו.

1. מצאו את המישור העובר דרך (1, 0, 0), (0, 2, 0) ו-(0, 0, 3).

   צורת החיתוכים x/1 + y/2 + z/3 = 1, כלומר 6x + 3y + 2z = 6.

2. מצאו את המרחק מהראשית למישור הזה.

$0.857 \approx 6/7 = (4 + 9 + 36)/\sqrt{}/|-6|$.

3. מצאו את ההטלה של $\langle 3, 4, 0 \rangle$ על $\langle 1, 0, 0 \rangle$.

$\langle 3, 0, 0 \rangle$.

4. מצאו את נפח המקבילון הנפרש על ידי $\langle 1, 0, 0 \rangle$, $\langle 0, 2, 0 \rangle$ ו-$\langle 1, 1, 3 \rangle$.

$|a \cdot (b \times c)| = \det = 1\cdot(2\cdot 3 - 0\cdot 1) = 6$.

5. האם $\langle 1, 2, 3 \rangle$ ו-$\langle -1, 0, 3 \rangle$ מאונכים?

המכפלה הסקלרית $-1 + 0 + 3 = 0$, ולכן כן.

תפיסות שגויות נפוצות

מיתוס: $a \times b = b \times a$.

בפועל: המכפלה הווקטורית אנטי-קומוטטיבית: $b \times a = -(a \times b)$.

מיתוס: המכפלה הסקלרית של שני וקטורים היא וקטור.

בפועל: היא סקלר (מספר).

מיתוס: משוואת מישור אומרת לכם את כיוונו.

בפועל: המקדמים שלה נותנים את הנורמל, המאונך למישור.

כרטיסיות

מכפלה סקלרית

$a \cdot b = |a||b| \cos\theta$; אפס כשהם מאונכים.

מכפלה וקטורית

מאונכת לשניהם; אורך = שטח המקבילית.

הטלה

$(a \cdot b/|b|^2)\, b$.

מכפלה משולשת

$|a \cdot (b \times c)|$ = נפח המקבילון.

מישור

$n \cdot (r - r_0) = 0$.

ישר

$r = r_0 + t\, v$.

בוחן לבדיקה עצמית

1. אם $a \cdot b = 0$ (ושניהם שונים מאפס), הווקטורים…

מקבילים

מאונכים

שווים

מנוגדים

מאונכים. $\cos\theta = 0$, ולכן $\theta = 90°$.

2. האורך של $a \times b$ שווה ל…

הזווית ביניהם

שטח המקבילית

$a \cdot b$

$|a| + |b|$

שטח המקבילית. $|a||b| \sin\theta|$.

3. הנורמל ל-$2x - y + 5z = 7$ הוא…

$\langle 2, -1, 5 \rangle$

$\langle 7, 0, 0 \rangle$

$\langle 2, 1, 5 \rangle$

$\langle 1, 1, 1 \rangle$

$\langle 2, -1, 5 \rangle$. קראו את המקדמים.

4. $|\langle 2, 3, 6 \rangle| =$

11

7

$\sqrt{11}$

49

7. √(4 + 9 + 36) = √49

לנסות שוב את הבוחן

איך זה עוזר להציל את כדור הארץ

רוח היא וקטור, וטורבינות מסובבות את הרוטור מולה כי ההספק תלוי בחזקה השלישית של הרכיב לאורך ציר הרוטור, מכפלה סקלרית בתחפושת.

אותו חשבון אומר ללוח סולארי כמה אור שמש הוא קולט: החלק המועיל הוא המכפלה הסקלרית של כיוון אור השמש עם וקטור הנורמל של הלוח.

ב־Saving Planets: פיזיקה I, יחידה 3: אנרגיית רוח

מקורות: משרד האנרגיה האמריקאי: איך פועלות טורבינות רוח? (באנגלית) (https://www.energy.gov/eere/wind/how-do-wind-turbines-work) · OpenStax Calculus 3, 2.3 The Dot Product (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/2-3-the-dot-product)

מקורות לימוד חינמיים

- OpenStax Calculus 3, 2.3 The Dot Product (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/2-3-the-dot-product): זוויות והטלות.
- OpenStax Calculus 3, 2.4 The Cross Product (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/2-4-the-cross-product): נורמלים, שטחים ומומנט.
- OpenStax Calculus 3, 2.5 Equations of Lines and Planes in Space https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/2-5-equa(tions-of-lines-and-planes-in-space): ישרים, מישורים ומרחקים.

צפו בהרצאה

Session 79 Clip: Vector Fields in Space https://ocw.mit.edu/courses/18-02sc-multivariable-calculus-fall-2010/resources/clip-vector-fields-i/n-space) (באנגלית)

MIT 18.02SC Multivariable Calculus (Fall 2010), MIT OpenCourseWare. רישיון: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · תנאי שימוש (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use). הקישור מיועד ללימוד חינמי בלבד; Saving Planets אינו קשור לאוניברסיטה זו ואינו נתמך על ידה.

סיימתי את היחידה הזו

פונקציות וקטוריות ותנועה במרחב

עקומות במרחב כפונקציות וקטוריות: מהירות, תאוצה, אורך קשת, עקמומיות ותנועת לווויינים.

מטרות הלמידה

בסוף היחידה הזו תוכלו:

- גזרו ובצעו אינטגרציה של פונקציות וקטוריות.
- מצאו מהירות וקטורית, גודל מהירות ותאוצה לאורך מסלול.
- חשבו אורך קשת ועקמומיות.
- נתחו מסלולים מעגליים בעזרת חשבון וקטורי.

מושגי מפתח

- עקומה במרחב היא r(t) = ⟨x(t), y(t), z(t)⟩; גוזרים רכיב אחר רכיב.
- המהירות v = r′(t) משיקה למסלול; גודל המהירות הוא |v|; התאוצה היא a = v′.
- אורך קשת הוא האינטגרל של גודל המהירות: L = ∫|r′(t)| dt.
- בתנועה מעגלית קצובה גודל המהירות קבוע, אבל התאוצה מצביעה אל המרכז בגודל v²/r.

משוואות מפתח

$$\mathbf{v} = \mathbf{r}'(t),\ \mathbf{a} = \mathbf{r}''(t)$$

```
v= r'(t),\ a= r''(t)
```

מהירות ותאוצה

$$L = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)|\,dt$$

```
L=_a^b| r'(t)| dt
```

אורך קשת

$$\kappa = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}'|^3}$$

```
=(| r'× r''|)/(| r'|^3)
```

עקמומיות

$$v = \sqrt{GM/r},\ T = 2\pi r/v$$

```
v=/r,\ T=2π r/v
```

דוגמאות פתורות שלב אחר שלב

דוגמה 2.1 מצאו את האורך של סיבוב אחד של הסליל $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \sin t, t \rangle$, $0 \le t \le 2\pi$.

1. $\mathbf{r}' = \langle -\sin t, \cos t, 1 \rangle$, גודל מהירות $\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$.
2. $L = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\, dt = 2\pi\sqrt{2}$.

תשובה: $2\pi\sqrt{2} \approx 8.89$.

דוגמה 2.2 Landsat 9 מקיף את כדור הארץ בגובה 705 km (רדיוס ממוצע 6371 km). בהתייחס למסלול כמעגל, מצאו את מהירותו, תאוצתו וזמן המחזור שלו.

1. $r = 7{,}076\ \text{km} = 7.076 \times 10^6\ \text{m}$; $GM = 3.986 \times 10^{14}\ \text{m}^3/\text{s}^2$.
2. $v = \sqrt{GM/r} = 7{,}505\ \text{m/s}$.
3. $a = v^2/r = 7.96\ \text{m/s}^2$, בכיוון מרכז כדור הארץ.
4. $T = 2\pi r/v = 5{,}924\ \text{s}$.

תשובה: בערך 7.5 km/s ו-98.7 דקות להקפה, בהתאמה לזמן המחזור של 99 דקות שמציינת נאס"א.

דוגמה 2.3 מצאו את העקמומיות של מעגל ברדיוס 2, $\mathbf{r}(t) = \langle 2\cos t, 2\sin t, 0 \rangle$.

1. $\mathbf{r}' = \langle -2\sin t, 2\cos t, 0 \rangle$, $|\mathbf{r}'| = 2$.
2. $\mathbf{r}'' = \langle -2\cos t, -2\sin t, 0 \rangle$; $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = \langle 0, 0, 4 \rangle$.
3. $\kappa = 4/2^3$.

תשובה: $\kappa = 1/2$: העקמומיות של מעגל היא 1/רדיוס.

תרגילים

פתרו כל אחד קודם על נייר, ואז בדקו.

1. לקליע $\mathbf{r}(t) = \langle 20t,\ 20t - 4.9t^2 \rangle$ m. מצאו את מהירותו ואת גודל מהירותו ב-$t = 1$ s.

   $\mathbf{v} = \langle 20,\ 20 - 9.8t \rangle = \langle 20,\ 10.2 \rangle$; גודל מהירות ≈ 22.45 m/s $\sqrt{400 + 104.04}$.

2. מצאו את התאוצה של $\mathbf{r}(t) = \langle t^2,\ 3t,\ e^t \rangle$.

   $\langle 2,\ 0,\ e^t \rangle$.

3. מצאו את האורך של $\mathbf{r}(t) = \langle 3t,\ 4t,\ 0 \rangle$ עבור $0 \le t \le 2$.

גודל מהירות 5, ולכן L = 10.

4. לוויין מקיף בגובה 35786 km. מצאו את זמן המחזור שלו.

r = 42157 km; T = 2π√(r³/GM) ≈ 86160 s ≈ 23.93 h: יממה כוכבית אחת, ולכן הוא גאוסטציונרי.

תפיסות שגויות נפוצות

מיתוס: גודל מהירות קבוע פירושו תאוצה אפס.

בפועל: פנייה היא תאוצה: לוויין במסלול מעגלי מאיץ לעבר כדור הארץ כל הזמן.

מיתוס: אורך קשת הוא |r(b) − r(a)|.

בפועל: זה המרחק בקו ישר; אורך קשת הוא אינטגרל של גודל המהירות לאורך המסלול.

מיתוס: לוויינים גבוהים יותר נעים מהר יותר.

בפועל: v = √(GM/r) קטנה עם המרחק; מסלולים גבוהים יותר איטיים וארוכים יותר.

כרטיסיות

פונקציה וקטורית

r(t) = ⟨x(t), y(t), z(t)⟩.

מהירות

r′(t), משיק למסלול.

המהירות

|r′(t)|.

אורך קשת

∫|r′| dt.

עקמומיות

|r′ × r″|/|r′|³.

מסלול מעגלי

v = √(GM/r).

בוחן לבדיקה עצמית

1. מהירות היא…

r(t)

r′(t)

|r(t)|

∫r dt

r′(t). הנגזרת של המיקום.

2. אורך קשת הוא אינטגרל של…

המיקום

גודל המהירות

התאוצה

העקמומיות

גודל המהירות. L = ∫|r′| dt.

3. העקמומיות של מעגל ברדיוס 5 היא…

5

1/5

25

0

1/5. κ = 1/R.

4. הכפלת הרדיוס של מסלול מעגלי משנה את מהירותו פי…

2

1/√2

1/2

2√

v. 1/√2 ∝ 1/√r.

לנסות שוב את הבוחן

איך זה עוזר להציל את כדור הארץ

לוויינים לתצפית על כדור הארץ כמו Landsat 9 נעים במסלולים וקטוריים שנבחרו בדיוק בעזרת הנוסחאות האלה. המסלול הכמעט-קוטבי והסינכרוני לשמש שלו בגובה 705 km מאפשר לו לצלם את אותו מקום כל 16 ימים בערך באותה שעה מקומית, כך ששינויים ביערות, בקרחונים ובערים בולטים.

ב־Saving Planets: Landsat 9 · חשבון אינפיניטסימלי II, יחידה 7: מסלולים קוטביים

מקורות: NASA: Landsat 9 quick facts (https://landsat.gsfc.nasa.gov/satellites/landsat-9/) · גיליון הנתונים של NASA על כדור הארץ (באנגלית) (https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/earthfact.html)

מקורות לימוד חינמיים

- OpenStax Calculus 3, 3.2 Calculus of Vector-Valued Functions (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/3-2-calculus-of-vector-valued-functions): נגזרות ואינטגרלים.
- OpenStax Calculus 3, 3.4 Motion in Space (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/3-4-motion-in-space): מהירות, תאוצה וחוקי קפלר.

צפו בהרצאה

Session 79 Clip: Vector Fields in Space (https://ocw.mit.edu/courses/18-02sc-multivariable-calculus-fall-2010/resources/clip-vector-fields-in-space/) (באנגלית)

MIT 18.02SC Multivariable Calculus (Fall 2010), MIT OpenCourseWare. רישיון: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · תנאי שימוש (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). הקישור מיועד ללימוד חינמי בלבד; Saving Planets אינו קשור לאוניברסיטה זו ואינו נתמך על ידה.

☐ **סיימתי את היחידה הזו**

נגזרות חלקיות

פונקציות של כמה משתנים: קווי גובה, נגזרות חלקיות, מישורים משיקים, קירוב לינארי וכלל השרשרת במספר משתנים.

מטרות הלמידה

בסוף היחידה הזו תוכלו:

- קראו קווי גובה ומפות טופוגרפיות.
- חשבו נגזרות חלקיות ופרשו אותן כקצבים.
- מצאו מישורים משיקים והשתמשו בקירוב לינארי.
- יישמו את כלל השרשרת במספר משתנים.

מושגי מפתח

- פונקציה z = f(x, y) היא משטח; קווי הגובה שלה f = c הם מפה טופוגרפית.
- ∂f/∂x הוא קצב השינוי ב-x כש-y קבוע.
- ליד נקודה, משטח חלק נראה כמו המישור המשיק שלו: Δf ≈ f_xΔx + f_yΔy.
- כלל השרשרת: אם x ו-y תלויים ב-t, אז df/dt = f_x dx/dt + f_y dy/dt.

משוואות מפתח

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$$

```
f_x=( f)/( x)
```

נגזרת חלקית

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

```
z-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)
```

מישור משיק

$$\frac{df}{dt} = f_x \frac{dx}{dt} + f_y \frac{dy}{dt}$$

```
df/dt=f_xdx/dt+f_ydy/dt
```

כלל השרשרת

$$f_{xy} = f_{yx}$$

```
f_xy=f_yx
```

משפט קלרו (f חלקה)

דוגמאות פתורות שלב אחר שלב

דוגמה 3.1 עבור $f(x, y) = x^2y + y^3$, מצאו את f_x ואת f_y ב-$(1, 2)$, והשתמשו במישור המשיק כדי להעריך את $f(1.1, 1.9)$.

1. $f(1, 2) = 10$; $f_x = 2xy = 4$; $f_y = x^2 + 3y^2 = 13$.
2. $f \approx 10 + 4(0.1) + 13(-0.1) = 9.1$.
3. ערך אמיתי: $1.1^2 \times 1.9 + 1.9^3 = 9.158$.

תשובה: הערכה 9.1 לעומת הערך האמיתי 9.158.

דוגמה 3.2 לגז אידיאלי, $P = nRT/V$. עם $n = 1$ mol, $T = 300$ K ו-$V = 0.025$ m³, מצאו את $\partial P/\partial T$, $\partial P/\partial V$.

1. $P = 8.314 \times 300/0.025 = 99{,}768$ Pa.
2. $\partial P/\partial T = nR/V = 332.6$ Pa/K.
3. $\partial P/\partial V = -nRT/V^2 = -P/V = -3.99 \times 10^6$ Pa/m³.

תשובה: $P \approx 99.8$ kPa; חימום ב-1 K מעלה אותו בכ-333 Pa; התפשטות מורידה אותו.

דוגמה 3.3 רחפן טס לפי $x = 2t$, $y = t^2$. הטמפרטורה שהוא מודד היא $T = 20 + 0.1x - 0.05y$ (°C, km). מצאו את dT/dt ב-$t = 1$.

1. $T_x = 0.1$, $T_y = -0.05$; $dx/dt = 2$, $dy/dt = 2t = 2$.
2. $dT/dt = 0.1(2) - 0.05(2)$.

תשובה: 0.1 °C ליחידת זמן.

תרגילים

פתרו כל אחד קודם על נייר, ואז בדקו.

1. מצאו את f_x ואת f_y עבור $f = e^{(xy)}$.

   $f_x = y\,e^{(xy)}$, $f_y = x\,e^{(xy)}$.

2. מצאו את f_{xy} עבור $f = x^3y^2$.

   $f_x = 3x^2y^2$, $f_{xy} = 6x^2y$ (זהה ל-f_{yx}).

3. מצאו את המישור המשיק ל-$z = x^2 + y^2$ ב-$(1, 1, 2)$.

   $z = 2 + 2(x - 1) + 2(y - 1)$, i.e. $z = 2x + 2y - 2$.

4. העריכו את $\sqrt{(3.02^2 + 3.97^2)}$ בקירוב לינארי סביב $(3, 4)$.

$f = 5,\ f_x = 3/5,\ f_y = 4/5$: $5 + 0.6(0.02) + 0.8(-0.03) = 4.988$ (ערך אמיתי 4.9880).

תפיסות שגויות נפוצות

מיתוס: $\partial f/\partial x$ מתעלמת מ-y.

בפועל: היא מחזיקה את y קבוע; y עדיין יכול להופיע בתשובה.

מיתוס: אם שתי הנגזרות החלקיות קיימות, f חלקה.

בפועל: נגזרות חלקיות יכולות להתקיים גם היכן ש-f אפילו אינה רציפה; גזירות דורשת יותר.

מיתוס: קירוב לינארי טוב בכל מקום.

בפועל: רק ליד נקודת הבסיס.

כרטיסיות

נגזרת חלקית

קצב שינוי במשתנה אחד כשהאחרים קבועים.

קו גובה

$f(x, y) = c$; קו טופוגרפי.

מישור משיק

$z = z_0 + f_x\Delta x + f_y\Delta y$.

קירוב לינארי

$\Delta f \approx f_x\Delta x + f_y\Delta y$.

כלל השרשרת

$df/dt = f_x x' + f_y y'$.

קלרו

$f_{xy} = f_{yx}$ עבור f חלקה.

בוחן לבדיקה עצמית

1. עבור $f = x^2y$, $f_x =$

- $2x$
- $2xy$
- x^2
- x^2y

$2xy$. התייחסו ל-y כקבוע.

2. קווי הגובה של $f(x, y) = x^2 + y^2$ הם...

ישרים

מעגלים

פרבולות

נקודות

מעגלים. $x^2 + y^2 = c$.

3. עבור f חלקה, f_xy ו-f_yx הן...

מנוגדים

שווים

לא קשורים

אפס

שווים. משפט קלרו.

4. df/dt עבור $f(x(t), y(t))$ היא...

$f_x + f_y$

$f_x x' + f_y y'$

$f_x f_y$

$x'y'$

$f_x x' + f_y y'$. כלל השרשרת במספר משתנים.

לנסות שוב את הבוחן

איך זה עוזר להציל את כדור הארץ

מפות מזג אוויר הן מפות טופוגרפיות של פונקציות בשני משתנים: איזוברים הם קווי גובה של לחץ, ואיזותרמות של טמפרטורה. נגזרות חלקיות אומרות לחזאים כמה מהר הלחץ או הטמפרטורה משתנים מזרחה או צפונה, וזה מה שמניע את הרוחות.

ב־Saving Planets: חשבון אינפיניטסימלי 1

מקורות: NOAA/NWS JetStream: Wind (https://www.weather.gov/jetstream/wind) · OpenStax Calculus 3, 4.3 Partial Derivatives (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/4-3-partial-derivatives)

מקורות לימוד חינמיים

- OpenStax Calculus 3, 4.3 Partial Derivatives (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/4-3-partial-derivatives): פרק מספר לימוד חינמי.
- OpenStax Calculus 3, 4.4 Tangent Planes and Linear Approximations (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/4-4-tangent-planes-and-linear-approximations): מישורים משיקים.
- OpenStax Calculus 3, 4.5 The Chain Rule (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/4-5-the-chain-rule): כלל השרשרת.

צפו בהרצאה

Session 26 Clip: Partial Derivatives (https://ocw.mit.edu/courses/18-02sc-multivariable-calculus-fall-2010/resources/clip-partial-derivatives/) (באנגלית)

MIT 18.02SC Multivariable Calculus (Fall 2010), MIT OpenCourseWare. רישיון: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · תנאי שימוש (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use). הקישור מיועד ללימוד חינמי בלבד; Saving Planets אינו קשור לאוניברסיטה זו ואינו נתמך על ידה.

סיימתי את היחידה הזו

גרדיאנטים ואופטימיזציה

וקטור הגרדיאנט, נגזרות כיווניות, נקודות קריטיות ומבחן הנגזרת השנייה, ואופטימיזציה עם אילוצים בעזרת כופלי לגרנז'.

מטרות הלמידה

בסוף היחידה הזו תוכלו:

- חשבו את הגרדיאנט ונגזרות כיווניות.
- הסבירו למה הגרדיאנט מצביע במעלה ומאונך לקווי הגובה.
- סווגו נקודות קריטיות בעזרת מבחן הנגזרת השנייה.
- פתרו בעיות עם אילוצים בעזרת כופלי לגרנז'.

מושגי מפתח

- ∇f = ⟨f_x, f_y⟩ מצביע בכיוון העלייה המהירה ביותר, ואורכו הוא הקצב המרבי הזה.
- קצב השינוי בכיוון של וקטור יחידה u הוא D_u f = ∇f · u.
- הגרדיאנט מאונך לקווי הגובה, ולכן מים זורמים במורד לאורך −∇h, בניצב לקווי הגובה.
- בנקודת קיצון פנימית ∇f = 0. המבחן D = f_xx f_yy − f_xy² מכריע: D > 0 ו-f_xx > 0 הוא מינימום; D < 0 הוא נקודת אוכף.
- כדי לבצע אופטימיזציה של f בכפוף ל-g = c, פתרו ∇f = λ∇g: בנקודה הטובה ביותר קו הגובה של f רק נוגע באילוץ.

משוואות מפתח

$$\nabla f = \langle f_x, f_y, f_z \rangle$$

f= f_x,f_y,f_z

גרדיאנט

$$D_{\mathbf{u}} f = \nabla f \cdot \mathbf{u}$$

D_ uf= f· u

נגזרת כיוונית

$$D = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2$$

D=f_xxf_yy-f_xy^2

מבחן הנגזרת השנייה

$$\nabla f = \lambda \nabla g, \quad g = c$$

f= g, g=c

תנאי כופל לגרנז'

דוגמאות פתורות שלב אחר שלב

דוגמה 4.1 לגבעה גובה $h(x,y) = 500 - 0.01x^2 - 0.02y^2$ (מטרים, x ו-y במטרים). ב-$(50, 100)$, מצאו את ∇h, את השיפוע התלול ביותר ואת השיפוע בכיוון $\langle 3, 4\rangle/5$.

1. $\nabla h = \langle -0.02x, -0.04y\rangle = \langle -2, -2\rangle$.
2. קצב העלייה התלול ביותר $|\nabla h| = 2\sqrt{2} = 2.83$ m למטר.
3. $D_u h = \langle -2, -2\rangle \cdot \langle 0.6, 0.8\rangle = -2.8$.

תשובה: עלייה תלולה ביותר 2.83 (במעלה לכיוון $\langle -1, -1\rangle$); בכיוון $\langle 3, 4\rangle$ יורדים 2.8 m לכל m. הגשם זורם לאורך $-\nabla h$.

דוגמה 4.2 מצאו וסווגו את הנקודה הקריטית של $f = x^2 + xy + y^2 - 3x$.

1. $f_x = 2x + y - 3 = 0$, $f_y = x + 2y = 0$ נותנים $x = 2, y = -1$.
2. $f_{xx} = 2$, $f_{yy} = 2$, $f_{xy} = 1$: $D = 3 > 0$, $f_{xx} > 0$.
3. $f(2, -1) = 4 - 2 + 1 - 6 = -3$.

תשובה: מינימום, $f = -3$ ב-$(2, -1)$.

דוגמה 4.3 פחית צריכה להכיל 1 ליטר ($1000\ \text{cm}^3$). איזה רדיוס וגובה דורשים הכי מעט מתכת (גליל סגור)?

1. מזערו $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ בכפוף ל-$g = \pi r^2 h = 1000$.
2. $\nabla A = \lambda \nabla g$ נותן $4\pi r + 2\pi h = \lambda 2\pi rh$, ולכן $\lambda = 2/r$ ו-$h = 2r$.
3. $\pi r^2 (2r) = 1000$ נותן $r = (500/\pi)^{(1/3)}$.

תשובה: $r \approx 5.42$ cm, $h \approx 10.84$ cm (גובה = קוטר), שטח $\approx 554\ \text{cm}^2$.

תרגילים

פתרו כל אחד קודם על נייר, ואז בדקו.

1. מצאו את ∇f עבור $f = xyz$ ב-$(1, 2, 3)$.

   $\langle yz, xz, xy\rangle = \langle 6, 3, 2\rangle$.

2. מצאו את $D_u f$ עבור $f = x^2 + y^2$ ב-$(1, 1)$ בכיוון $\langle 1, 0\rangle$.

   $\nabla f = \langle 2, 2\rangle$; $D_u f = 2$.

3. סווגו את הנקודה הקריטית של $f = x^2 - y^2$.

   $D = (2)(-2) - 0 = -4 < 0$ ב-$(0, 0)$, נקודת אוכף.

4. גדרו מלבן לאורך נהר ישר עם 40 m גדר (בלי גדר בצד הנהר). הגדילו את השטח ככל האפשר.

מקסמו xy בכפוף ל-$x + 2y = 40$: $x = 20$, $y = 10$, שטח $200\ \text{m}^2$.

5. מקסמו $f = x + y$ על המעגל $x^2 + y^2 = 2$.

$\nabla f = \lambda\langle 2x, 2y\rangle$ נותן $x = y = 1$; מקסימום 2.

תפיסות שגויות נפוצות

מיתוס: הגרדיאנט מצביע לאורך קו הגובה.

בפועל: הוא מאונך לקו הגובה.

מיתוס: $\nabla f = 0$ פירושו מקסימום או מינימום.

בפועל: זו יכולה להיות נקודת אוכף; השתמשו במבחן D.

מיתוס: λ הוא רק טריק שצריך לבטל.

בפועל: λ הוא הקצב שבו הערך האופטימלי משתנה כשהאילוץ c משתנה, וזה שימושי בכלכלה ובהנדסה.

כרטיסיות

גרדיאנט

$\langle f_x, f_y, f_z\rangle$; העלייה המהירה ביותר.

נגזרת כיוונית

$\nabla f \cdot u$.

נקודה קריטית

$\nabla f = 0$.

נקודת אוכף

$D < 0$.

תנאי לגרנז'

$\nabla f = \lambda \nabla g$.

הירידה התלולה ביותר

נעו לאורך $-\nabla f$.

בוחן לבדיקה עצמית

1. הגרדיאנט מצביע...

לאורך קווי הגובה

בכיוון העלייה המהירה ביותר

במורד

לעבר הראשית

בכיוון העלייה המהירה ביותר. אורכו הוא הקצב המרבי.

2. $D < 0$ בנקודה קריטית פירושו…

מינימום

מקסימלי

אוכף

אין מסקנה

אוכף. מתעקם כלפי מעלה בכיוון אחד וכלפי מטה בכיוון אחר.

3. כופלי לגרנז' פותרים…

$\nabla f = 0$

$\nabla f = \lambda \nabla g$

$f = g$

$f' = \lambda$

$\nabla f = \lambda \nabla g$. הגרדיאנטים מקבילים באופטימום עם אילוץ.

4. $D_u f$ מרבית כאשר u…

מאונך ל-∇f

מקביל ל-∇f

מנוגד ל-∇f

בכל כיוון

מקביל ל-∇f. $D_u f = \nabla f \cdot u = |\nabla f| \cos\theta$.

לנסות שוב את הבוחן

איך זה עוזר להציל את כדור הארץ

מים זורמים במורד הגרדיאנט של פני השטח. מפות הצפה, גבולות אגני ניקוז ומודלי סחף נבנים בחישוב −∇h מנתוני גובה, כמו מודלי הגובה החינמיים מבוססי הלידאר של USGS 3D Elevation Program.

כופלי לגרנז׳ ממזערים חומר עבור נפח או חוזק נדרשים. שימוש בפחות חומר לאותה משימה הוא חיסכון ישיר בכרייה, באנרגיה ובפליטות.

ב־Saving Planets: דף הנהרות · שרטוט הנדסי CAD /: הפחתת משקל

מקורות: USGS 3D Elevation Program (3DEP) (https://www.usgs.gov/3d-elevation-program) · OpenStax Calculus 3, 4.8 Lagrange Multipliers (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/4-8-lagrange-multipliers)

מקורות לימוד חינמיים

- OpenStax Calculus 3, 4.6 Directional Derivatives and the Gradient (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/4-6-directional-derivatives-and-the-gradient): גרדיאנטים.
- OpenStax Calculus 3, 4.7 Maxima/Minima Problems (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/4-7-maxima-minima-problems): מבחן הנגזרת השנייה.
- OpenStax Calculus 3, 4.8 Lagrange Multipliers (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/4-8-lagrange-multipliers): אופטימיזציה עם אילוצים.

סיימתי את היחידה הזו

אינטגרלים כפולים

אינטגרציה על תחומים במישור: אינטגרלים נשנים, משפט פוביני, תחומים כלליים, קואורדינטות קוטביות, שטח, מסה וממוצעים.

מטרות הלמידה

בסוף היחידה הזו תוכלו:

- חשבו אינטגרלים כפולים כאינטגרלים נשנים.
- קבעו גבולות לתחומים כלליים והפכו את סדר האינטגרציה.
- עברו לקואורדינטות קוטביות עם dA = r dr dθ.
- השתמשו באינטגרלים כפולים לשטח, מסה, ממוצעים וסכומים על פני מפה.

מושגי מפתח

- ∬_R f dA מסכם את f כפול שטחים זעירים. על מלבן, פוביני אומר לבצע אינטגרציה במשתנה אחד ואז בשני, בכל סדר.
- בתחום כללי, הגבולות הפנימיים הם עקומות; שרטטו את התחום כדי לקרוא אותם.
- תחומים עגולים קלים יותר בקואורדינטות קוטביות, שבהן אלמנט השטח הוא r dr dθ (לא dr dθ).
- הממוצע של f על R הוא ∬ f dA חלקי השטח של R.

משוואות מפתח

$$\iint_R f\,dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$$

```
_Rf dA=_a^b\!_c^df(x,y) dy dx
```

משפט פוביני

$$dA = r\,dr\,d\theta$$

```
dA=r dr dθ
```

אלמנט שטח קוטבי

$$\bar{f} = \frac{1}{\text{Area}(R)} \iint_R f\,dA$$

```
f=1Area(R)_Rf dA
```

ערך ממוצע

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

דוגמאות פתורות שלב אחר שלב

דוגמה 5.1 חשבו את $\iint_R xy\,dA$ על $R = [0, 3] \times [0, 2]$.

1. $\int_0^2 x\,dx = 2$ ו-$\int_0^3 y\,dy = 4.5$.
2. האינטגרל מתפרק: 4.5×2.

תשובה: 9.

דוגמה 5.2 גשם יורד על אגן ניקוז של $5\ \text{km} \times 10\ \text{km}$ בעומק $d(x, y) = 20 + 2x$ mm (x בק״מ, לאורך הצלע של 10 km). כמה מים ירדו?

1. סך הכול $= \int_0^{10}\int_0^{5} (20 + 2x)\,dy\,dx = 5\int_0^{10} (20 + 2x)\,dx$.
2. $= 5(200 + 100) = 1{,}500\ \text{mm}\cdot\text{km}^2$.
3. 1 mm על $1\ \text{km}^2$ הם $1000\ \text{m}^3$.

תשובה: $1.5 \times 10^6\ \text{m}^3$ (עומק ממוצע 30 mm). כך מדי גשם ומכ״ם הופכים לתחזיות ספיקה של נהרות.

דוגמה 5.3 חשבו את $\iint e^{-(x^2 + y^2)}\,dA$ על עיגול היחידה, ואחר כך על כל המישור.

1. קוטבי: $\int_0^{2\pi}\int_0^1 e^{-r^2}\, r\,dr\,d\theta = 2\pi \times \tfrac{1}{2}(1 - e^{-1})$.
2. על המישור, האינטגרל ב-r מגיע עד ∞ ונותן $\tfrac{1}{2}$.

תשובה: $\pi(1 - 1/e) \approx 1.986$ על העיגול; π על המישור, וזה מוכיח ש-$\int e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$.

תרגילים

פתרו כל אחד קודם על נייר, ואז בדקו.

1. $\int_0^1\int_0^{x} x\,dy\,dx$

   $\int_0^1 x^2\,dx = 1/3$.

2. הפכו את סדר האינטגרציה של $\int_0^1\int_{y}^1 f\,dx\,dy$.

   $\int_0^1\int_0^{x} f\,dy\,dx$.

3. מצאו את שטח העיגול ברדיוס a בקואורדינטות קוטביות.

$\int_0^{2\pi}\int_0^a r\,dr\,d\theta = \pi a^2$.

4. מצאו את הנפח מתחת ל-$z = 4 - x^2 - y^2$ מעל העיגול $x^2 + y^2 \le 4$.

$\int_0^{2\pi}\int_0^2 (4 - r^2)\,r\,dr\,d\theta = 2\pi(8 - 4) = 8\pi \approx 25.1$.

5. הממוצע של $f = x + y$ על $[0, 1] \times [0, 1]$.

$\iint (x + y)\,dA = 1$, שטח 1, ממוצע 1.

תפיסות שגויות נפוצות

מיתוס: בקוטביות, $dA = dr\,d\theta$.

בפועל: $dA = r\,dr\,d\theta$; לשכוח את r היא הטעות הנפוצה ביותר.

מיתוס: הגבולות הפנימיים חייבים להיות מספרים.

בפועל: בתחום כללי, הגבולות הפנימיים הם פונקציות של המשתנה החיצוני.

מיתוס: הסדר אף פעם לא משנה.

בפועל: הערך לא משתנה, אבל הגבולות משתנים, ולעיתים קרובות סדר אחד קל בהרבה.

כרטיסיות

אינטגרל כפול

$\iint_R f\,dA$.

פוביני

אינטגרציה נשנית בכל סדר על מלבן.

תחום מסוג I

$a \le x \le b,\ g_1(x) \le y \le g_2(x)$.

dA קוטבי

$r\,dr\,d\theta$.

ערך ממוצע

$\iint_{\text{שטח}} f\,dA\ /$.

האינטגרל של גאוס

$\int e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$.

בוחן לבדיקה עצמית

1. אלמנט שטח קוטבי:

$dr\,d\theta$

$r\,dr\,d\theta$

$r^2\ dr\ d\theta$

$d\theta/r$

$r\ dr\ d\theta$. פיסה קוטבית היא $r\ d\theta$ על dr.

2. $\iint_R 1\ dA$ שווה ל...

0

השטח של R

ההיקף

1

השטח של R. מסכם את השטח.

3. $\int_0^1\int_0^2 3\ dy\ dx =$

3

5

6

2

3 × 2 שטח. 6.

4. משפט פוביני מאפשר...

לוותר על גבולות

לבצע אינטגרציה במשתנה אחד בכל פעם

לגזור

להשתמש תמיד בקוטביות

לבצע אינטגרציה במשתנה אחד בכל פעם. אינטגרלים נשנים.

לנסות שוב את הבוחן

איך זה עוזר להציל את כדור הארץ

סכומים על פני מפה הם אינטגרלים כפולים: גשם על אגן ניקוז, פחמן האגור ביער או יבול שנקצר משדה. כך הידרולוגים הופכים מפות גשם לנפחים כדי לחזות שיטפונות ולתכנן אספקת מים.

ב־Saving Planets: דף הנהרות · מרכז בנושא כריתת יערות

מקורות: USGS Water Science School: Precipitation and the water cycle (https://www.usgs.gov/special-topics/water-science-school/science/precipitation-and-water-cycle) · OpenStax Calculus 3, 5.2 Double Integrals over General Regions (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/5-2-double-integrals-over-general-regions)

מקורות לימוד חינמיים

- OpenStax Calculus 3, 5.1 Double Integrals over Rectangular Regions (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/5-1-double-integrals-over-rectangular-regions): פוביני.
- OpenStax Calculus 3, 5.2 Double Integrals over General Regions (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/5-2-double-integrals-over-general-regions): תחומים כלליים.
- OpenStax Calculus 3, 5.3 Double Integrals in Polar Coordinates (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/5-3-double-integrals-in-polar-coordinates): קוטביות.

צפו בהרצאה

Session 47 Clip: Definition of Double Integration (https://ocw.mit.edu/courses/18-02sc-multivariable-calculus-fall-2010/resources/clip-definition-of-double-integration/) (באנגלית)

MIT 18.02SC Multivariable Calculus (Fall 2010), MIT OpenCourseWare. רישיון: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · תנאי שימוש (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). הקישור מיועד ללימוד חינמי בלבד; Saving Planets אינו קשור לאוניברסיטה זו ואינו נתמך על ידה.

סיימתי את היחידה הזו

אינטגרלים משולשים והחלפת משתנים

אינטגרציה על גופים בקואורדינטות קרטזיות, גליליות וכדוריות, והיעקוביאן להחלפות משתנים כלליות.

מטרות הלמידה

בסוף היחידה הזו תוכלו:

- בנו וחשבו אינטגרלים משולשים.
- השתמשו בקואורדינטות גליליות (r dz dr dθ) וכדוריות (ρ² sin φ dρ dφ dθ).
- חשבו את היעקוביאן של החלפת משתנים.
- מצאו נפחים, מסות ומרכזי מסה של גופים.

מושגי מפתח

- ∭_E f dV מסכם את f על תיבות זעירות; עם f = צפיפות הוא נותן מסה.
- קואורדינטות גליליות מתאימות לצינורות, למכלים ולחרוטים: dV = r dz dr dθ.
- קואורדינטות כדוריות מתאימות לכדורים ולכוכבי לכת: dV = ρ² sin φ dρ dφ dθ.
- כל הצבה x = x(u, v) מותחת את השטח לפי היעקוביאן |∂(x, y)/∂(u, v)|.

משוואות מפתח

$$dV = r\,dz\,dr\,d\theta$$

```
dV=r dz dr dθ
```

אלמנט נפח גלילי

$$dV = \rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$$

```
dV=ρ^2 dρ d dθ
```

אלמנט נפח כדורי

$$J = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = |x_u y_v - x_v y_u|$$

```
J=|((x,y))/((u,v))|=|x_uy_v-x_vy_u|
```

יעקוביאן

$$\iint_R f\,dx\,dy = \iint_S f\,|J|\,du\,dv$$

```
_Rf dx dy=_Sf |J| du dv
```

דוגמאות פתורות שלב אחר שלב

דוגמה 6.1 השתמשו בקואורדינטות כדוריות כדי למצוא את נפח כדור ברדיוס R.

1. $V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} \rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$.
2. $= (R^3/3)(2)(2\pi)$.

תשובה: $4\pi R^3/3$.

דוגמה 6.2 העריכו את מסת האטמוספרה של כדור הארץ: משקל האוויר מעל כל מטר רבוע הוא הלחץ על פני השטח, ולכן $M = \iint p/g \, dA$ על הספירה.

1. האינטגרל המשטחי של קבוע הוא p/g כפול השטח $4\pi R^2$.
2. $4\pi(6.371\times10^{6})^2 = 5.10\times10^{14}\ \text{m}^2$.
3. $M = 101{,}400 / 9.81 \times 5.10\times10^{14}$.

תשובה: בערך 5.3×10^{18} kg, קרוב ל-5.1×10^{18} kg של נאס"א (יבשה מעל פני הים נושאת פחות אוויר).

דוגמה 6.3 מצאו את שטח האליפסה $x^2/a^2 + y^2/b^2 \le 1$ עם $x = au,\ y = bv$.

1. האליפסה הופכת לעיגול היחידה $u^2 + v^2 \le 1$.
2. $J = ab$.
3. שטח $= \pi \times ab$.

תשובה: πab.

תרגילים

פתרו כל אחד קודם על נייר, ואז בדקו.

1. מצאו את נפח החרוט $0 \le z \le 1 - r$ (רדיוס 1, גובה 1) בקואורדינטות גליליות.

   $\int_0^{2\pi}\int_0^{1} (1 - r)\, r \, dr \, d\theta = 2\pi(1/2 - 1/3) = \pi/3$.

2. חשבו את $\iiint 1 \, dV$ על התיבה $[0,3]\times[0,2]\times[0,1]$.

   .6

3. מצאו את היעקוביאן של קואורדינטות קוטביות.

$x_r y_\theta - x_\theta y_r = \cos\theta\,(r\cos\theta) + r\sin\theta\,(\sin\theta) = r$.

4. לגליל ברדיוס 1 m ובגובה 2 m צפיפות $1000(1 - z/4)\ \text{kg/m}^3$. מצאו את מסתו.

$\pi \int_0^2 1{,}000(1 - z/4)\,dz = \pi \times 1{,}000 \times 1.5 = 1{,}500\pi \approx 4{,}712\ \text{kg}$.

תפיסות שגויות נפוצות

מיתוס: בקואורדינטות כדוריות $dV = d\rho\,d\varphi\,d\theta$.

בפועל: $dV = \rho^2 \sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$.

מיתוס: φ נע מ-0 עד 2π.

בפועל: φ (מהקוטב הצפוני) נע מ-0 עד π; θ נע מ-0 עד 2π.

מיתוס: היעקוביאן יכול להיות שלילי בתוך האינטגרל.

בפועל: השתמשו בערכו המוחלט.

כרטיסיות

אינטגרל משולש

$\iiint_E f\,dV$.

גליליות

$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ z;\ dV = r\,dz\,dr\,d\theta$.

כדוריות

$dV = \rho^2 \sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$.

יעקוביאן

גורם המתיחה של שטח או נפח בהצבה.

מסה

$\iiint$ צפיפות dV.

מרכז מסה

$\iiint$ / $\rho\,dV$ מסה.

בוחן לבדיקה עצמית

1. אלמנט הנפח הכדורי הוא…

$d\rho\,d\varphi\,d\theta$

$\rho^2 \sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$

$\rho\,d\rho\,d\theta$

r dz dr dθ

ρ² sin φ dρ dφ dθ. תיבה כדורית עם צלעות dρ, ρ dφ, ρ sin φ dθ.

2. קואורדינטות גליליות מתאימות במיוחד ל...

קוביות

צינורות ומכלים

פירמידות

מישורים

צינורות ומכלים. חתכים מעגליים.

3. היעקוביאן של x = 2u, y = 3v הוא...

5

6

1

2/3

6. 2 × 3.

4. נפח כדור ברדיוס 3:

36π

27π

12π

9π

36π. 4π(27)/3.

לנסות שוב את הבוחן

איך זה עוזר להציל את כדור הארץ

מדעני אקלים מסכמים גדלים על פני נפח האוקיינוס והאטמוספרה בדיוק באינטגרלים האלה. תכולת החום של האוקיינוס, החום האגור ב-2000 m העליונים של הים, היא אינטגרל משולש של שינוי הטמפרטורה כפול הצפיפות וקיבול החום, והיא אחת הרשומות הברורות ביותר של ההתחממות הגלובלית.

ב־Saving Planets: מרכז האוקיינוסים

מקורות: NOAA NCEI: Global ocean heat content (https://www.ncei.noaa.gov/access/global-ocean-heat-content/) · גיליון הנתונים של NASA על כדור הארץ (באנגלית) (https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/earthfact.html)

מקורות לימוד חינמיים

- OpenStax Calculus 3, 5.4 Triple Integrals (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/5-4-triple-integrals): פרק מספר לימוד חינמי.
- OpenStax Calculus 3, 5.5 Triple Integrals in Cylindrical and Spherical Coordinates (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/5-5-triple-integrals-in-cylindrical-and-spherical-coordinates): גליליות וכדוריות.
- OpenStax Calculus 3, 5.7 Change of Variables in Multiple Integrals (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/5-7-change-of-variables-in-multiple-integrals): יעקוביאנים.

צפו בהרצאה

Session 53 Clip: Change of Variables (https://ocw.mit.edu/courses/18-02sc-multivariable-calculus-fall-2010/resources/clip-change-of-variables/) (באנגלית)

MIT 18.02SC Multivariable Calculus (Fall 2010), MIT OpenCourseWare. רישיון: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · תנאי שימוש (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). הקישור מיועד ללימוד חינמי בלבד; Saving Planets אינו קשור לאוניברסיטה זו ואינו נתמך על ידה.

☐ **סיימתי את היחידה הזו**

שדות וקטוריים, אינטגרלים קוויים ומשפט גרין

שדות וקטוריים כמו רוחות וזרמים, עבודה וסירקולציה לאורך עקומות, שדות משמרים ופוטנציאלים, ומשפט גרין במישור.

מטרות הלמידה

בסוף היחידה הזו תוכלו:

- שרטטו ופרשו שדות וקטוריים.
- חשבו אינטגרלים קוויים של פונקציות סקלריות ושל שדות וקטוריים (עבודה).
- בדקו אם שדה משמר ומצאו פוטנציאל.
- יישמו את משפט גרין לסירקולציה ולשטף במישור.

מושגי מפתח

- שדה וקטורי מצמיד וקטור לכל נקודה, כמו מפת רוחות או זרמים.
- עבודה לאורך מסלול היא ∫_C F · dr; עבור לולאה סגורה היא נקראת סירקולציה.
- שדה משמר הוא גרדיאנט, F = ∇φ; עבודתו תלויה רק בנקודות הקצה, והסירקולציה שלו אפס.
- משפט גרין: הסירקולציה סביב עקומה סגורה שווה לאינטגרל של הרוטור (Q_x − P_y) על התחום הפנימי.

משוואות מפתח

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot \mathbf{r}'(t)\,dt$$

```
_C F· d r=_a^b F( r(t))· r'(t) dt
```

אינטגרל קווי (עבודה)

$$\int_C \nabla\varphi\cdot d\mathbf{r} = \varphi(B)-\varphi(A)$$

```
_C· d r=(B)-(A)
```

המשפט היסודי לאינטגרלים קוויים

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D (Q_x - P_y)\,dA$$

```
_CP dx+Q dy=_D(Q_x-P_y) dA
```

משפט גרין

$$\text{Area} = \tfrac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx$$

דוגמאות פתורות שלב אחר שלב

דוגמה 7.1 ⟨y, x⟩ = F. מצאו את העבודה מ-(0, 0) ל-(2, 3) לאורך כל מסלול.

1. Q_x = 1 = P_y, ולכן F משמר.
2. φ = xy מתקיים ∇φ = ⟨y, x⟩.
3. עבודה = φ(2, 3) − φ(0, 0).

תשובה: 6, בכל מסלול.

דוגמה 7.2 זרם דמוי מערבולת אוקיינית F = ⟨−y, x⟩ מקיף את הראשית. מצאו את הסירקולציה שלו סביב מעגל היחידה ישירות ובעזרת משפט גרין.

1. r = ⟨cos t, sin t⟩, F · r′ = sin²t + cos²t = 1, ולכן ∮ = 2π.
2. גרין: ∬ Q_x − P_y = 1 − (−1) = 2; 2 × π = 2 dA.

תשובה: 2π ≈ 6.28 בשתי הדרכים.

דוגמה 7.3 השתמשו ב-½∮(x dy − y dx) כדי למצוא את השטח בתוך x = 3 cos t, y = 2 sin t.

1. x dy − y dx = (3 cos t)(2 cos t) + (2 sin t)(3 sin t) = 6 dt.
2. ½ ∫₀^(2π) 6 dt.

תשובה: 6π ≈ 18.85 (πab עם a = 3, b = 2).

תרגילים

פתרו כל אחד קודם על נייר, ואז בדקו.

1. האם F = ⟨2xy, x² + 1⟩ משמר? מצאו את φ.

   P_y = 2x = Q_x; φ = x²y + y.

2. מצאו את ∫_C F · dr עבור F = ⟨x, y⟩ לאורך y = x² מ-(0, 0) ל-(1, 1).

   משמר, φ = (x² + y²)/2: עבודה 1.

3. מצאו את ∮(x² dx + xy dy) סביב הריבוע [0, 1] × [0, 1], נגד כיוון השעון.

גרין: $\iint y\,dA = 1/2$.

4. מצאו את הסירקולציה של $F = \langle -y, x\rangle$ סביב מעגל ברדיוס 3.

$= 18\pi \approx 56.5$ שטח × 2.

תפיסות שגויות נפוצות

מיתוס: כל שדה עם רוטור אפס הוא משמר.

בפועל: נכון רק בתחומים פשוטי קשר (בלי חורים).

מיתוס: העבודה לאורך מסלול סגור תמיד אפס.

בפועל: רק עבור שדות משמרים; מערבולת מסתחררת.

מיתוס: משפט גרין עובד בכל כיוון.

בפועל: הוא מניח כיוון נגד השעון; כיוון השעון הופך את הסימן.

כרטיסיות

שדה וקטורי

וקטור בכל נקודה.

אינטגרל קווי

$\int F \cdot dr$, עבודה לאורך עקומה.

סירקולציה

אינטגרל קווי סביב עקומה סגורה.

משמר

$F = \nabla\varphi$; בלתי תלוי במסלול.

פוטנציאל

φ שעבורו $F = \nabla\varphi$.

משפט גרין

$\oint P\,dx + Q\,dy = \iint (Q_x - P_y)\,dA$.

בוחן לבדיקה עצמית

1. $F = \nabla\varphi$ פירושו ש-...

סיבובי

משמר

אפס

קבוע

משמר. שדה גרדיאנט.

2. העבודה של שדה משמר סביב לולאה סגורה:

2π

0

שטחו

לא מוגדר

.0. φ(A) − φ(A)

3. משפט גרין מקשר אינטגרל קווי ל…

נגזרת

אינטגרל כפול

אינטגרל משולש

טור

אינטגרל כפול. שפה ↔ פנים.

4. עבור F = ⟨−y, x⟩ הוא… Q_x − P_y

0

1

2

−2

.2. 1 − (−1)

לנסות שוב את הבוחן

איך זה עוזר להציל את כדור הארץ

מערבולות אוקייניות הן מערכות זרמים מסתובבות עצומות: יש חמש עיקריות, וכל אחת אוספת פסולת צפה לעבר מרכזה ויוצרת את "איי הזבל". הסירקולציה של שדה זרמים היא אינטגרל קווי, ומשפט גרין קושר אותה לסיבוב (הרוטור) שבפנים.

רוחות וזרמים במפות כמו earth.nullschool.net, שמציג נתוני תחזית ציבוריים של NOAA, הם שדות וקטוריים שאפשר לקרוא בעזרת היחידה הזו.

ב־Saving Planets: מרכז האוקיינוסים

מקורות: NOAA · NOAA Marine Debris Program: Garbage patches (https://marinedebris.noaa.gov/discover-marine-debris/garbage-patches) · Ocean Service: Ocean currents tutorial (gyres) (https://oceanservice.noaa.gov/education/tutorial_currents/04currents4.html) · earth.nullschool.net: live global wind and ocean-current map (from NOAA GFS and other public data) (https://earth.nullschool.net/)

מקורות לימוד חינמיים

- OpenStax Calculus 3, 6.1 Vector Fields (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/6-1-vector-fields): שדות.
- OpenStax Calculus 3, 6.2 Line Integrals (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/6-2-line-integrals): עבודה וסירקולציה.
- OpenStax Calculus 3, 6.3 Conservative Vector Fields (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/6-3-conservative-vector-fields): פוטנציאלים.
- OpenStax Calculus 3, 6.4 Green's Theorem (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/6-4-greens-theorem): משפט גרין.

צפו בהרצאה

Session 56 Clip: Vector Fields (https://ocw.mit.edu/courses/18-02sc-multivariable-calculus-fall-2010/resources/clip-vector-fields/) (באנגלית)

MIT 18.02SC Multivariable Calculus (Fall 2010), MIT OpenCourseWare. רישיון: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · תנאי שימוש (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). הקישור מיועד ללימוד חינמי בלבד; Saving Planets אינו קשור לאוניברסיטה זו ואינו נתמך על ידה.

☐ **סיימתי את היחידה הזו**

אינטגרלים משטחיים, משפט סטוקס ומשפט הדיברגנץ

דיברגנץ ורוטור, משטחים פרמטריים, שטף דרך משטח, ושני המשפטים הגדולים שקושרים שפה לפנים ב-3D.

מטרות הלמידה

בסוף היחידה הזו תוכלו:

- חשבו דיברגנץ ורוטור ופרשו אותם כעוצמת מקור וכסיבוב.
- תארו משטחים פרמטרית וחשבו שטח פנים ושטף.
- יישמו את משפט סטוקס.
- יישמו את משפט הדיברגנץ (גאוס) לשטף נטו כלפי חוץ.

מושגי מפתח

- div F = ∇ · F מודד יציאה ליחידת נפח; curl F = ∇ × F מודד סיבוב.
- השטף ∬_S F · n dS הוא כמה מהשדה חוצה משטח ליחידת זמן.
- סטוקס: הסירקולציה סביב שפת משטח שווה לשטף של curl F דרך המשטח.
- משפט הדיברגנץ: השטף נטו כלפי חוץ דרך משטח סגור שווה לדיברגנץ הכולל שבפנים.

משוואות מפתח

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = P_x + Q_y + R_z$$

\nabla \cdot \mathbf{F} = P_x + Q_y + R_z

דיברגנץ

$$\nabla \times \mathbf{F} = \langle R_y - Q_z,\ P_z - R_x,\ Q_x - P_y \rangle$$

\nabla \times \mathbf{F} = \langle R_y - Q_z,\ P_z - R_x,\ Q_x - P_y \rangle

רוטור

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS$$

\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS

משפט סטוקס

$$\oiint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_E \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV$$

\oiint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_E \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV

דוגמאות פתורות שלב אחר שלב

דוגמה 8.1 מצאו את השטף היוצא של $\mathbf{F} = \langle x, y, z \rangle$ דרך ספירה ברדיוס R.

1. $\operatorname{div} \mathbf{F} = 3$.
2. משפט הדיברגנץ: $3 \times (4\pi R^3/3)$.
3. בדיקה ישירה: על הספירה $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = R$, ולכן השטף הוא $R \times 4\pi R^2$.

תשובה: $4\pi R^3$ בשתי הדרכים.

דוגמה 8.2 אור שמש בעוצמה $1361\ \text{W/m}^2$ פוגע בכדור הארץ (רדיוס $6371\ \text{km}$). איזה הספק כולל כדור הארץ קולט, ומהו הממוצע למטר רבוע של פני השטח שלו?

1. השטף דרך דיסקת הצל של כדור הארץ הוא $\pi R^2 \times 1361 = 1.735 \times 10^{17}\ \text{W}$.
2. בפיזור על כל הספירה (שטח $4\pi R^2$) זה $1361/4$.

תשובה: $1.74 \times 10^{17}\ \text{W}$, או $340\ \text{W/m}^2$ בממוצע, המספר שבראש תרשים מאזן האנרגיה של נאס"א.

דוגמה 8.3 אמתו את משפט סטוקס עבור $\mathbf{F} = \langle -y, x, 0 \rangle$ על החצי העליון של ספירת היחידה.

1. $\operatorname{curl} \mathbf{F} = \langle 0, 0, 2 \rangle$.
2. שטף הרוטור דרך חצי הכדור שווה לשטף דרך עיגול היחידה השטוח (אותה שפה): $\pi \times 2$.
3. הסירקולציה על השפה היא 2π (יחידה 7).

תשובה: 2π בשתי הדרכים.

תרגילים

פתרו כל אחד קודם על נייר, ואז בדקו.

1. מצאו div ו-curl של $\mathbf{F} = \langle x^2, yz, xy \rangle$.

   $\operatorname{div} = 2x + z$; $\operatorname{curl} = \langle x - y, -y, 0 \rangle$.

2. השטף של $\mathbf{F} = \langle 0, 0, 5 \rangle$ כלפי מעלה דרך ריבוע היחידה במישור $z = 1$.

   $5 \times 1 = 5$.

3. השתמשו במשפט הדיברגנץ: השטף של $\mathbf{F} = \langle x, y, z \rangle$ היוצא מקוביית היחידה $[0,1]^3$.

div = 3; שטף 3.

4. מצאו את שטח הפנים של ספירה ברדיוס 2 באינטגרציה של $dS = 4 \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta$.

$4 \times 2 \times 2\pi = 16\pi \approx 50.3$.

5. האם הרוטור של שדה גרדיאנט יכול להיות שונה מאפס?

לא: $\nabla \times \nabla \varphi = 0$ עבור φ חלקה.

תפיסות שגויות נפוצות

מיתוס: שטף זהה לסירקולציה.

בפועל: שטף חוצה משטח; סירקולציה נעה לאורך עקומה.

מיתוס: חסר דיברגנץ פירושו ששום דבר לא זז.

בפועל: פירושו שאין מקור נטו: מה שנכנס, יוצא.

מיתוס: משפט הדיברגנץ עובד על משטחים פתוחים.

בפועל: הוא דורש משטח סגור; סטוקס מטפל במשטחים עם שפה.

כרטיסיות

דיברגנץ

$\nabla \cdot F$; עוצמת מקור.

רוטור

$\nabla \times F$; סיבוב.

שטף

$\iint F \cdot n \, dS$.

משפט סטוקס

סירקולציה על השפה = שטף הרוטור.

משפט הדיברגנץ

שטף יוצא = $\iiint \operatorname{div} F \, dV$.

משטח סגור

סוגר גוף; בלי שפה.

בוחן לבדיקה עצמית

1. $\operatorname{div} \langle x, y, z \rangle =$

0

1

3

x + y + z

.3. 1 + 1 + 1

2. משפט סטוקס מקשר סירקולציה על השפה ל…

השטף של F

השטף של curl F

div F

נפח

השטף של curl F. ∬(∇ × F) n dS ·.

3. משפט הדיברגנץ דורש…

משטח סגור

עקומה

תחום שטוח

שדה משמר

משטח סגור. הוא סוגר גוף.

4. אור השמש הממוצע למטר רבוע בראש האטמוספרה של כדור הארץ הוא בערך…

1,361 W/m²

680 W/m²

340 W/m²

100 W/m²

340 W/m². שטח הדיסקה πR² חלקי שטח הספירה 4πR²: רבע.

לנסות שוב את הבוחן

איך זה עוזר להציל את כדור הארץ

האקלים של כדור הארץ הוא מאזן שטפים: אור השמש חוצה את ראש האטמוספרה בכ-340 W/m² בממוצע, וכדור הארץ חייב להחזיר את אותה אנרגיה לחלל. כשגזי חממה לוכדים חלק מהחום היוצא, חוסר האיזון הוא שטף נטו לתוך כוכב הלכת, שנאגר בעיקר באוקיינוס.

הסעת מזהמים היא אותה מתמטיקה: משפט הדיברגנץ אומר שהמזהם שעוזב אגם או אגן אוויר דרך שפתו שווה למה שהמקורות שבפנים פולטים, פחות מה שמסולק.

ב־Saving Planets: מרכז תצפית כדור הארץ

מקורות: NASA Earth Observatory: Climate and Earth's Energy Budget (https://earthobservatory.nasa.gov/features/EnergyBalance) · גיליון הנתונים של NASA על כדור הארץ (באנגלית) (https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/earthfact.html)

מקורות לימוד חינמיים

- OpenStax Calculus 3, 6.5 Divergence and Curl (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/6-5-divergence-and-curl): דיברגנץ ורוטור.
- OpenStax Calculus 3, 6.6 Surface Integrals (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/6-6-surface-integrals): שטף.
- OpenStax Calculus 3, 6.7 Stokes' Theorem (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/6-7-stokes-theorem): סטוקס.
- OpenStax Calculus 3, 6.8 The Divergence Theorem (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/6-8-the-divergence-theorem): גאוס.

צפו בהרצאה

Session 95 Clip: Stokes' Theorem and Surface Independence (https://ocw.mit.edu/courses/18-02sc-multivariable-calculus-fall-2010/resources/clip-stokes-theorem-and-surface-independence/) (באנגלית)

MIT 18.02SC Multivariable Calculus (Fall 2010), MIT OpenCourseWare. רישיון: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · תנאי שימוש (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). הקישור מיועד ללימוד חינמי בלבד; Saving Planets אינו קשור לאוניברסיטה זו ואינו נתמך על ידה.

סיימתי את היחידה הזו

תרגילים

התרגילים האלה נמצאים בתוך כל יחידה. פתרו על הנייר, ואז פתחו את התשובה.

1. וקטורים וגאומטריה של המרחב
   5 תרגילים
2. פונקציות וקטוריות ותנועה במרחב
   4 תרגילים
3. נגזרות חלקיות

4 תרגילים

4. גרדיאנטים ואופטימיזציה

5 תרגילים

5. אינטגרלים כפולים

5 תרגילים

6. אינטגרלים משולשים והחלפת משתנים

4 תרגילים

7. שדות וקטוריים, אינטגרלים קוויים ומשפט גרין

4 תרגילים

8. אינטגרלים משטחיים, משפט סטוקס ומשפט הדיברגנץ

5 תרגילים

מעבדות מחשב

ארבע מעבדות מחשב מיישמות את היחידות: דיברגנץ ורוטור של שדה רוח מנתוני תחנות, שיפוע וכיוון זרימת מים מרשת גבהים, נפח אגם באינטגרל כפול קוטבי, ומסלול לוויין שמקודם בזמן צעד אחר צעד.

נתוני דוגמה מסומנים ככאלה; כל מעבדה מקשרת למקור הנתונים הציבורי לניסיון הבא.

מקור בטיחות: OpenStax Calculus Volume 3 (ספר לימוד חינמי) (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/1-introduction)

מעבדה A: דיברגנץ ורוטור של שדה רוח

שבוע 14

מטרה: העריכו את הדיברגנץ והרוטור של הרוח בנקודה מארבע תחנות סביבה, ופרשו אותם כאוויר עולה וכסיבוב סערה.

$$\nabla \cdot \mathbf{v} \approx \frac{u_E - u_W}{2\Delta} + \frac{v_N - v_S}{2\Delta}, \quad (\nabla \times \mathbf{v})_z \approx \frac{v_E - v_W}{2\Delta} - \frac{u_N - u_S}{2\Delta}$$

הפרשים מרכזיים

מהלך הניסוי

1. הזינו את הרוח מזרחה (u) וצפונה (v) בתחנות במרחק 100 km מזרחה, מערבה, צפונה ודרומה ממרכז (Δ = 100 km = 10^5 m).
2. חשבו את הדיברגנץ ואת הרוטור האנכי (ערבוליות).
3. פרשו את הסימנים, ואז חזרו עם רוחות אמיתיות שנקראו מ-earth.nullschool.net או מנתוני תחזית של NOAA.

טבלת נתונים

תחנה	u (m/s, מזרחה)	v (m/s, צפונה)
מזרח	4	8
מערב	6	−6
צפון	−5	−3
דרום	7	−1

ערכי דוגמה לתרגול, לא מפת מזג אוויר אמיתית.

חישוב לדוגמה

1. דיברגנץ $\nabla \cdot \mathbf{v} = (4 - 6)/(2 \times 10^5) + (8 - (-3))/(2 \times 10^5) = -2 \times 10^{-5}\ s^{-1}$: האוויר מתכנס, ולכן חייב לעלות, וזה מעודד עננים וגשם.
2. ערבוליות $(\nabla \times \mathbf{v})_z = (7 - (-5))/(2 \times 10^5) - (-6) - 8)/(2 \times 10^5) = 1.3 \times 10^{-4}\ s^{-1}$: חיובית, נגד כיוון השעון, כמו שקע בחצי הכדור הצפוני.

בטיחות

- אין, מעבר לשימוש רגיל במחשב.

חלופה ביתית או וירטואלית

- גיליון אלקטרוני מספיק.

earth.nullschool.net: live global wind and ocean-current map (from NOAA GFS and other public data) (https://earth.nullschool.net/) · NOAA NCEI: Global Forecast System (GFS) (https://www.ncei.noaa.gov/products/weather-climate-models/global-forecast)

הקשר לכדור הארץ: התכנסות וערבוליות הן מה שחזאים עוקבים אחריו כדי להתריע מפני גשם כבד וסערות. NOAA/NWS JetStream: Wind (https://www.weather.gov/jetstream/wind)

- [ ] **השלמתי את המעבדה הזו (רטובה או וירטואלית)**

מעבדה B: שיפוע וזרימת מים מרשת גבהים

שבוע 7

מטרה: העריכו את הגרדיאנט של פני השטח מרשת גבהים ומצאו לאן זורם מי הגשם.

$$\nabla h \approx \left\langle \frac{h_{E} - h_{W}}{2\Delta}, \frac{h_{N} - h_{S}}{2\Delta} \right\rangle$$

גרדיאנט בהפרשים מרכזיים

מהלך הניסוי

1. השתמשו בגבהים 100 m מזרחה, מערבה, צפונה ודרומה מנקודה (Δ = 100 m).
2. חשבו את ∇h, את גודלו (שיפוע) ואת זווית השיפוע |arctan|∇h|.
3. כיוון הזרימה הוא −∇h. אחר כך הורידו אריח גובה חינמי של USGS 3DEP וחזרו על החישוב עבור מדרון קרוב אליכם.

טבלת נתונים

שכן	גובה (m)
מרכז	250
מזרח	262
מערב	240
צפון	256
דרום	246

ערכי דוגמה לתרגול.

חישוב לדוגמה

1. ∇h ≈ ⟨(262 − 240)/200, (256 − 246)/200⟩ = ⟨0.11, 0.05⟩.
2. |∇h| = 0.121, זווית שיפוע של כ-6.9°.
3. המים זורמים לאורך −∇h, למערב-דרום-מערב; שרטוט הכיוונים האלה על רשת מתווה אגן ניקוז.

> **בטיחות**
>
> - אין, מעבר לשימוש רגיל במחשב.

חלופה ביתית או וירטואלית

- גיליון אלקטרוני מספיק; תוכנת GIS היא רשות.

USGS 3D Elevation Program (3DEP) (https://www.usgs.gov/3d-elevation-program)

הקשר לכדור הארץ: כיווני זרימה מרשתות גובה הם הבסיס למפות הצפה וסחף. USGS 3D Elevation Program (3DEP) (https://www.usgs.gov/3d-elevation-program)

☐ **השלמתי את המעבדה הזו (רטובה או וירטואלית)**

מעבדה C: נפח אגם באינטגרל כפול קוטבי

שבוע 9

מטרה: חשבו את נפח אגם בצורת קערה במדויק ובסכום נומרי, וראו איך השגיאה קטנה.

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{R} D\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) r \, dr \, d\theta = \frac{\pi R^2 D}{2}$$

V=_0^2π\!\!_0^RD(1-(r^2)/(R^2))r dr dθ=(π R^2D)/(2)

אגם עם אגן פרבולואידי

מהלך הניסוי

1. קחו R = 1000 m ועומק מרבי D = 20 m.
2. חשבו את הנפח המדויק.
3. חלקו את האגם ל-n טבעות, חשבו את העומק ברדיוס האמצעי של כל טבעת, וסכמו עומק × שטח הטבעת. נסו n = 5 ו-n = 10.

טבלת נתונים

שיטה	נפח (m³)
מדויקת	3.14×10^{7}
נקודת אמצע, 5 טבעות	3.20×10^{7}
נקודת אמצע, 10 טבעות	3.16×10^{7}

ערכים מחושבים לאגם מודל.

חישוב לדוגמה

1. מדויק: 3.14×10^{7} m³ = π(1000)²(20)/2 (31.4 מיליון מטרים מעוקבים).
2. הסכום עם 5 טבעות גבוה ב-2.0% והסכום עם 10 טבעות גבוה ב-0.5%: הכפלת n מקטינה את השגיאה פי ארבעה בערך.

בטיחות

- אין, מעבר לשימוש רגיל במחשב.

חלופה ביתית או וירטואלית

- גיליון אלקטרוני או פייתון.

OpenStax Calculus 3, 5.3 Double Integrals in Polar Coordinates (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/5-3-double-integrals-in-polar-coordinates)

הקשר לכדור הארץ: נפחי אגמים ומאגרים מסקרי עומק אומרים למנהלי מים כמה הם יכולים לאגור ולשחרר. NASA: משימת SWOT (https://swot.jpl.nasa.gov/)

☐ **השלמתי את המעבדה הזו (רטובה או וירטואלית)**

מעבדה D: קידום מסלול לווין בזמן צעד אחר צעד

שבוע 3

מטרה: בצעו אינטגרציה נומרית של r″ = −GM r/|r|³ למסלול דמוי Landsat והשוו בין שתי שיטות צעד.

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n - \frac{GM\,\mathbf{r}_n}{|\mathbf{r}_n|^3}\Delta t, \quad \mathbf{r}_{n+1} = \mathbf{r}_n + \mathbf{v}_{n+1}\Delta t$$

```
v_n+1= v_n-(GM r_n)/(| r_n|^3)Δ t, r_n+1= r_n+ v_n+1Δ t
```

אוילר חצי-סתום (סימפלקטי)

מהלך הניסוי

1. התחילו ב- r = ⟨7076 km, 0⟩ עם v = ⟨0, 7505 m/s⟩ (יחידה 2).
2. בצעו 592 צעדים עם Δt = 10 s (זמן מחזור אחד), קודם באוילר פשוט (עדכון r עם v הישנה), ואחר כך בגרסה החצי-סתומה שלמעלה.
3. השוו את הרדיוס הסופי לרדיוס ההתחלתי.

טבלת נתונים

שיטה (Δt = 10 s)	שינוי הרדיוס אחרי הקפה אחת
אוילר פשוט	+908 km
אוילר חצי-סתום	+0.16 km

ערכים מחושבים; GM = 3.986 × 10¹⁴ m³/s².

חישוב לדוגמה

1. אוילר פשוט מסתלסל החוצה בכ-908 km בכל הקפה, תחזית חסרת תועלת; גם עם Δt = 1 s עדיין יש סחיפה של כ-94 km.
2. העדכון החצי-סתום משנה שורת קוד אחת ושומר על המסלול בטווח של כ-0.16 km.

בטיחות

- אין, מעבר לשימוש רגיל במחשב.

חלופה ביתית או וירטואלית

- גיליון אלקטרוני מספיק; פייתון ב-Colab קל יותר.

Google Colab (מחברות חינמיות) (https://colab.research.google.com/) · NASA: Landsat 9 quick facts (https://landsat.gsfc.nasa.gov/satellites/landsat-9/)

הקשר לכדור הארץ: חישוב מסלול מדויק שומר על לווייני תצפית על כדור הארץ במסלולי החזרה שלהם. NASA: Landsat 9 quick facts (https://landsat.gsfc.nasa.gov/satellites/landsat-9/)

☐ **השלמתי את המעבדה הזו (רטובה או וירטואלית)**

מערכי תרגול למבחן

מדדו זמן: כ־10 דקות לבעיה. אחר כך השוו לפתרונות המלאים.

תרגול לבחינת אמצע (יחידות 4–1)

1. מצאו את הזווית בין $\langle 1, 1, 0 \rangle$ ל-$\langle 0, 1, 1 \rangle$.

   1. מכפלה סקלרית 1; שני האורכים $\sqrt{2}$.
   2. $\cos\theta = 1/2$.

   תשובה: $60°$.

2. מצאו את המישור דרך $(1, 1, 1)$ עם נורמל $\langle 2, -1, 3 \rangle$.

   1. $2(x-1) - (y-1) + 3(z-1) = 0$.

   תשובה: $2x - y + 3z = 4$.

3. לוויין מקיף ברדיוס $6771\ \text{km}$ (גובה $400\ \text{km}$). מצאו את זמן המחזור שלו.

   1. $T = 2\pi\sqrt{r^3/GM}$.

   תשובה: $\approx 5544\ \text{s} \approx 92.4\ \text{min}$.

4. מקסמו $f = xy$ בכפוף ל-$x + y = 10$.

   1. $\nabla f = \lambda\langle 1, 1\rangle$ נותן $\langle y, x\rangle = \lambda\langle 1, 1\rangle$.

   תשובה: $x = y = 5$ ב-$(5, 5)$.

מערך תרגול מסכם (כל היחידות)

1. חשבו את $\int_0^{2\pi}\int_0^{3} r\, dr\, d\theta$.

   1. $2\pi \times 4.5$.

   תשובה: $9\pi \approx 28.3$ (שטח עיגול ברדיוס 3).

2. מצאו את נפח חצי כדור ברדיוס 2 בקואורדינטות כדוריות.

   1. $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^{2} \rho^2 \sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta = (8/3)(1)(2\pi)$.

   תשובה: $16\pi/3 \approx 16.76$.

3. מצאו את $\oint F \cdot dr$ עבור $F = \langle -y, x\rangle$ סביב הריבוע $[0, 2] \times [0, 2]$, נגד כיוון השעון.

1. גרין: ∬ 4 × 2 = dA 2.

תשובה: 8.

4. מצאו את השטף היוצא של F = ⟨2x, 0, 0⟩ דרך ספירה ברדיוס 1.

1. div F = 2; שטף 4π/3 × 2 =.

תשובה: 8π/3 ≈ 8.38.

דף נוסחאות

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos\theta$$

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin\theta$$

$$n \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$$

$$L = \int |\mathbf{r}'(t)|\, dt$$

$$\kappa = |\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''| / |\mathbf{r}'|^3$$

$$v = \sqrt{GM/r}$$

$$\Delta f \approx f_x \Delta x + f_y \Delta y$$

$$D_{\mathbf{u}} f = \nabla f \cdot \mathbf{u}$$

$$D = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2$$

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

$$dA = r\, dr\, d\theta$$

$$dV = r\, dz\, dr\, d\theta$$

$$dV = \rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$$

$$\int_C \nabla\varphi \cdot d\mathbf{r} = \varphi(B) - \varphi(A)$$

$$\oint P\,dx + Q\,dy = \iint (Q_x - P_y)\, dA$$

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS$$

$$\oiint \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV$$

קבועים

קבוע	ערך
GM של כדור הארץ	3.986 × 10¹⁴ m³/s²
הרדיוס הממוצע של כדור הארץ	6,371 km

קבוע	ערך
קרינת השמש בכדור הארץ	1,361 W/m²
לחץ ממוצע על פני השטח	1,014 mb = 101,400 Pa
גובה סקאלה אטמוספרי	8.5 km
כבידה תקנית	9.81 m/s²

מקור: גיליון הנתונים של NASA על כדור הארץ (באנגלית) (https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/earthfact.html)

כלי גרפים ונתונים

השתמשו בכלים ובנתונים החינמיים האלה לצד הקורס.

- מחשבון Desmos 3D (https://www.desmos.com/3d): שרטטו משטחים, וקטורים ועקומות פרמטריות ב-3D.
- GeoGebra 3D (https://www.geogebra.org/3d): כלי שרטוט 3D חינמי נוסף.
- PhET: Vector Addition (https://phet.colorado.edu/en/simulations/vector-addition): פתחו אינטואיציה לרכיבים ולסכומים.
- MIT OpenCourseWare 18.02SC (https://ocw.mit.edu/courses/18-02sc-multivariable-calculus-fall-2010/): הרצאות, תרגולים ומטלות של MIT בחינם.
- earth.nullschool.net: live global wind and ocean-current map (from NOAA GFS and other public data) (https://earth.nullschool.net/): ראו שדות וקטוריים אמיתיים של רוחות וזרמים בכל העולם.
- USGS 3D Elevation Program (3DEP) (https://www.usgs.gov/3d-elevation-program): נתוני גובה חינמיים של ארה"ב לעבודה על גרדיאנט ושיפוע.

מילון מונחים

סירקולציה
אינטגרל קווי של שדה סביב עקומה סגורה.

שדה משמר
שדה גרדיאנט; העבודה אינה תלויה במסלול.

מכפלה וקטורית
וקטור המאונך לשני וקטורים.

רוטור
$\nabla \times F$; הסיבוב המקומי של שדה.

עקמומיות
עד כמה עקומה מתכופפת; 1/R למעגל.

נגזרת כיוונית
קצב שינוי בכיוון נתון, $\nabla u \cdot f$.

דיברגנץ
$\nabla \cdot F$; יציאה נטו ליחידת נפח.

משפט הדיברגנץ

השטף היוצא דרך משטח סגור שווה לאינטגרל של הדיברגנץ שבפנים.

מכפלה סקלרית

$a \cdot b = |a||b| \cos \theta$.

שטף

כמות השדה שחוצה משטח.

גרדיאנט

וקטור הנגזרות החלקיות; מצביע במעלה.

משפט גרין

הסירקולציה סביב עקומה מישורית שווה לאינטגרל של $Q_x - P_y$ שבפנים.

יעקוביאן

גורם המתיחה של החלפת משתנים.

כופל לגרנז׳

$g\nabla f = \lambda\nabla$ ב-λ לאופטימיזציה עם אילוצים.

קו גובה

עקומה שעליה $f(x, y)$ קבועה.

אינטגרל קווי

אינטגרל לאורך עקומה.

נגזרת חלקית

נגזרת במשתנה אחד כשהאחרים קבועים.

נקודת אוכף

נקודה קריטית שאינה מקסימום ואינה מינימום.

משפט סטוקס

הסירקולציה על השפה שווה לשטף הרוטור.

שדה וקטורי

הצמדת וקטור לכל נקודה.

מחוון להערכה עצמית

לא ניתנים ציון או נקודות זכות. השתמשו בזה כדי להעריך בכנות איפה אתם עומדים בכל יחידה.

רמה	איך זה נראה
4 · שליטה מלאה	בונה אינטגרלים ושדות מתוך שרטוט בלי הכוונה, בוחר קואורדינטות טובות ובודק תשובות בשיטה שנייה או במשפט.
3 · מיומן	פותר את תרגילי האימון עם טעויות מזדמנות.
2 · מתפתח	עוקב אחרי דוגמאות פתורות אבל מתקשה לקבוע גבולות או לבחור קואורדינטות.
1 · מתחיל	מיישם נוסחאות בלי לשרטט או לבדוק; צריך לחזור על היחידה.

שקלול מוצע אם רוצים ציון

חלק	משקל
תרגילים	30%
מעבדות מחשב	15%
מערך תרגול לאמצע הקורס	25%
מערך תרגול מסכם	30%

שאפו לרמה 3 ומעלה בכל יחידה לפני שעוברים לקורס הבא.

קורסים קשורים

- מבוא לתכנות ENGR 130
- משוואות דיפרנציאליות MATH 220
- פיזיקה 2 PHYS 210 + PHYS 210L
- כל הקורסים