Dernière mise à jour: November 1, 2026

🗺️ Parcours sur quatre ans · Année 2, Automne

À propos de ce cours

Ce cours gratuit compte 8 unités et 4 travaux pratiques. Ce sont les vrais totaux, pas un programme plus long raccourci.

Un contrôle est un nombre ou un résultat de code sur une page de cours qu'un script recalcule avant publication. Le nombre affiché et le nombre recalculé doivent correspondre.

> Ceci est le plan d'un cours gratuit en autonomie rédigé par Saving Planets. Ce n'est pas un cours universitaire : il ne donne aucun crédit académique et aucun établissement n'y participe.
>
> Son contenu suit le troisième semestre d'analyse universitaire, sur le modèle des thèmes et du niveau de ressources libres comme OpenStax Calculus Volume 3 et MIT OpenCourseWare 18.02 Multivariable Calculus, et des programmes de cours comme Stanford Math 51/52 et Georgia Tech MATH 2551. Nous renvoyons à ces ressources gratuites tout au long du cours. Aucune de ces organisations ne cautionne cette page.
>
> Ce que nous ajoutons : chaque unité est reliée à de vrais problèmes de vent, d'océan, de relief, de climat et de satellites avec une source publique citée, chaque nombre de la page est recalculé par un script de vérification avant sa mise en ligne, et quatre TP sur ordinateur appliquent les notions aux champs de vent, aux grilles d'altitude, aux volumes de lacs et aux orbites.
>
> Suivez-le dans l'ordre. Chaque unité comporte des objectifs, des notions clés, des équations, des exemples pas à pas, des exercices corrigés en détail, des erreurs fréquentes, des cartes mémoire et un quiz. Votre progression est enregistrée uniquement dans ce navigateur.

Comment ce cours aide à sauver la planète

La planète est tridimensionnelle et toujours en mouvement. Les vents et les courants océaniques sont des champs de vecteurs, le relief et la température sont des fonctions de deux ou trois variables, la chaleur et les polluants traversent des surfaces sous forme de flux, et les satellites qui mesurent tout cela suivent des trajectoires vectorielles dans l'espace.

Chaque unité se termine par une courte section sourcée qui montre comment ses idées aident à la fois les gens et la nature.

Pour les enseignants

Vous pouvez enseigner ce cours, ou laisser un élève le faire seul. Il est gratuit. Saving Planets ne donne ni note ni crédit scolaire.

- Cette page est le cours entier : 8 unités et 4 travaux pratiques (MATH 210).
- Prévoyez 15 semaines, environ 6 à 9 heures par semaine, y compris les semaines de travaux pratiques.
- Suivez le calendrier de 15 semaines. Lisez l'unité, faites les exercices sur papier, puis ouvrez la réponse. La semaine d'un TP, faites le TP ou la version à la maison.
- Un contrôle est un nombre ou un résultat de code sur la page qu'un script recalcule avant publication. Le nombre affiché et le nombre recalculé doivent correspondre.
- Utilisez Imprimer cette page, ou téléchargez le guide d'étude PDF. La feuille de formules est vers la fin.
- Demandez : en quoi cette unité aide-t-elle les gens et la planète ? Chaque unité a un encadré vert avec un fait sourcé.
- Copiez le modèle de guide enseignant et écrivez le nom de votre classe, le temps dont vous disposez et les questions que vous poserez. Ouvrir le modèle de guide enseignant

Avant de commencer

Prérequis

- Analyse I et II : dérivées, intégrales, changement de variable et intégration par parties, courbes paramétrées et polaires.
- Trigonométrie de base et équations du cercle et de la sphère.
- La physique I aide pour les exemples de travail, de flux et d'orbite, mais n'est pas obligatoire.

Comment étudier

- Faites un dessin en 3D pour chaque problème : les axes, la région, les vecteurs.
- Faites chaque exercice sur papier avant d'ouvrir la réponse.
- Vérifiez les unités et les signes : un flux, un travail ou une circulation doit avoir un sens physique.
- Pour les intégrales multiples, esquissez la région et écrivez les bornes avant d'intégrer quoi que ce soit.
- Utilisez un grapheur 3D (Desmos 3D ou GeoGebra 3D) pour voir les surfaces et les champs.
- Refaites les quiz quelques jours plus tard. La pratique espacée vaut mieux qu'une longue séance.

Ce qu'il vous faut

- Un ordinateur ou une tablette avec un tableur.
- Un grapheur 3D gratuit comme Desmos 3D ou GeoGebra 3D.
- Facultatif : Python avec NumPy (gratuit dans Google Colab).

Programme suggéré sur 15 semaines

Environ 6 à 9 heures par semaine : lecture, exercices et, les semaines de TP, le TP.

Semaine	Unité	Thèmes	Lecture
1	Vecteurs et géométrie de l’espace	Coordonnées 3D, vecteurs, produit scalaire	OpenStax 2.1–2.3
2	Vecteurs et géométrie de l’espace	Produit vectoriel, droites et plans	OpenStax 2.4–2.5
3	Fonctions vectorielles et mouvement dans l’espace	Fonctions vectorielles, mouvement dans l’espace, courbure ; TP D	OpenStax 3.1–3.4
4	Dérivées partielles	Fonctions de plusieurs variables, limites, dérivées partielles	OpenStax 4.1–4.3
5	Dérivées partielles	Plans tangents, approximation linéaire, dérivation des fonctions composées	OpenStax 4.4–4.5
6	Gradients et optimisation	Gradient, dérivées directionnelles, extrema	OpenStax 4.6–4.7
7	Gradients et optimisation	Multiplicateurs de Lagrange ; TP B ; entraînement au partiel	OpenStax 4.8
8	Intégrales doubles	Intégrales doubles sur des rectangles et des régions quelconques	OpenStax 5.1–5.2
9	Intégrales doubles	Intégrales doubles en coordonnées polaires ; TP C	OpenStax 5.3
10	Intégrales triples et changement de variables	Intégrales triples ; coordonnées cylindriques et sphériques	OpenStax 5.4–5.5
11	Intégrales triples et changement de variables	Masse et centre de masse ; changement de variables	OpenStax 5.6–5.7
12	Champs de vecteurs, intégrales curvilignes et théorème de Green	Champs de vecteurs, intégrales curvilignes, champs conservatifs, théorème de Green	OpenStax 6.1–6.4
13	Intégrales de surface, théorème de Stokes et théorème de la divergence	Divergence et rotationnel ; intégrales de surface et flux	OpenStax 6.5–6.6
14	Intégrales de surface, théorème de Stokes et théorème de la	Théorèmes de Stokes et de la divergence ; TP A	OpenStax 6.7–6.8

Semaine	Unité	Thèmes	Lecture
	divergence		
15	Révision	Révision et série d’exercices finale	Toutes les unités

Votre progression

Cochez les unités et les TP à mesure que vous les terminez, et faites les quiz. La progression et les scores sont enregistrés uniquement dans ce navigateur et ne nous sont jamais envoyés.

Unités

Vecteurs et géométrie de l’espace

Coordonnées 3D, vecteurs, produits scalaire et vectoriel, et équations de droites et de plans.

Objectifs d’apprentissage

À la fin de cette unité, vous saurez :

- Additionner des vecteurs en 3D, les multiplier par un scalaire et calculer leur norme.
- Utiliser le produit scalaire pour les angles et les projections.
- Utiliser le produit vectoriel pour les normales, les aires et les volumes.
- Écrire des équations de droites et de plans, et calculer des distances.

Notions clés

- Un vecteur a une norme et une direction ; en composantes, v = ⟨v_1, v_2, v_3⟩ et |v| = √(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2).
- Le produit scalaire a · b = |a||b| cos θ mesure à quel point deux vecteurs pointent dans le même sens. Il est nul exactement quand ils sont perpendiculaires.
- Le produit vectoriel a × b est perpendiculaire aux deux, et sa norme est égale à l’aire du parallélogramme qu’ils engendrent.
- Un plan est déterminé par un point et un vecteur normal n : n · (r − r_0) = 0. Une droite est un point plus les multiples d’une direction : r = r_0 + t v.

Équations clés

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos\theta$$

a· b=| a|| b|θ

Produit scalaire et angle

$$\operatorname{proj}_{\mathbf{b}} \mathbf{a} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}\mathbf{b}$$

_ b a=(a· b)/(| b|^2) b

Projection

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin\theta$$

| a× b|=| a|| b|θ

Norme du produit vectoriel = aire du parallélogramme

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

`a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0`

Plan de normale ⟨a, b, c⟩

$$D = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

`D=|ax_1+by_1+cz_1-d|^2+b^2+c^2`

Distance d'un point au plan ax + by + cz = d

Exemples résolus pas à pas

Exemple 1.1 Pour a = ⟨1, 2, 2⟩ et b = ⟨2, −1, 2⟩, calculez |a|, a · b et l'angle entre eux.

1. |a| = √(1 + 4 + 4) = 3, et |b| = 3 aussi.
2. a · b = 2 − 2 + 4 = 4.
3. cos θ = 4/9, donc θ = arccos(0.444).

Réponse : |a| = 3, a · b = 4, θ ≈ 63.6°.

Exemple 1.2 Calculez a × b pour les mêmes vecteurs et l'aire du parallélogramme qu'ils engendrent.

1. a × b = ⟨2·2 − 2·(−1), 2·2 − 1·2, 1·(−1) − 2·2⟩.
2. = ⟨6, 2, −5⟩. Vérification : son produit scalaire avec a et avec b vaut 0.
3. Aire = |⟨6, 2, −5⟩| = √65.

Réponse : ⟨6, 2, −5⟩ ; aire √65 ≈ 8.06.

Exemple 1.3 Un vent de 10 m/s souffle à 30° de l'axe du rotor d'une éolienne. Quelle fraction de la puissance face au vent l'éolienne reçoit-elle, si la puissance croît comme le cube de la vitesse du vent le long de son axe ?

1. Composante le long de l'axe : 10 cos 30° = 8.66 m/s (un produit scalaire avec le vecteur unitaire de l'axe).
2. Rapport de puissance = $(\cos 30°)^3$.

Réponse : Environ 0.65 : un désalignement de 30° fait perdre à peu près un tiers de la puissance, c'est pourquoi les éoliennes s'orientent face au vent.

Exercices

Faites chacun d’abord sur papier, puis vérifiez.

1. Trouvez le plan passant par (1, 0, 0), (0, 2, 0) et (0, 0, 3).

   Forme avec intercepts $x/1 + y/2 + z/3 = 1$, c’est-à-dire $6x + 3y + 2z = 6$.

2. Calculez la distance de l’origine à ce plan.

   $|-6|/\sqrt{(36 + 9 + 4)} = 6/7 \approx 0.857$.

3. Calculez la projection de $\langle 3, 4, 0\rangle$ sur $\langle 1, 0, 0\rangle$.

   $\langle 3, 0, 0\rangle$.

4. Calculez le volume du parallélépipède engendré par $\langle 1, 0, 0\rangle$, $\langle 0, 2, 0\rangle$ et $\langle 1, 1, 3\rangle$.

   $|a \cdot (b \times c)| = \det = 1 \cdot (2 \cdot 3 - 0 \cdot 1) = 6$.

5. $\langle 1, 2, 3\rangle$ et $\langle 3, 0, -1\rangle$ sont-ils perpendiculaires ?

   Produit scalaire $3 + 0 - 3 = 0$, donc oui.

Idées reçues fréquentes

Idée reçue : $a \times b = b \times a$.
En réalité : Le produit vectoriel est anticommutatif : $b \times a = -(a \times b)$.

Idée reçue : Le produit scalaire de deux vecteurs est un vecteur.
En réalité : C’est un scalaire (un nombre).

Idée reçue : L’équation d’un plan donne sa direction.
En réalité : Ses coefficients donnent la normale, qui est perpendiculaire au plan.

Cartes mémoire

Produit scalaire

$a \cdot b = |a||b| \cos \theta$; nul quand ils sont perpendiculaires.

Produit vectoriel

Perpendiculaire aux deux ; norme = aire du parallélogramme.

Projection

$(a \cdot b/|b|^2)\, b$.

Produit mixte

$|a \cdot (b \times c)|$ = volume du parallélépipède.

Plan	Droite
$n \cdot (r - r_0) = 0$.	$r = r_0 + t\,v$.

Quiz d’autocontrôle

1. Si $a \cdot b = 0$ (tous deux non nuls), les vecteurs sont…

parallèles

perpendiculaires

égaux

opposés

perpendiculaires. $\cos\theta = 0$, donc $\theta = 90°$.

2. La norme de $a \times b$ est égale à…

l’angle entre eux

l’aire du parallélogramme

$a \cdot b$

$|a| + |b|$

l’aire du parallélogramme. $|a||b| \sin\theta$.

3. La normale à $2x - y + 5z = 7$ est…

$\langle 2, -1, 5 \rangle$

$\langle 7, 0, 0 \rangle$

$\langle 2, 1, 5 \rangle$

$\langle 1, 1, 1 \rangle$

$\langle 2, -1, 5 \rangle$. Lisez les coefficients.

4. $|\langle 2, 3, 6\rangle| =$

11

7

√11

49

7. $\sqrt{(4 + 9 + 36)} = \sqrt{49}$.

Refaire ce quiz

Comment cela aide à sauver la planète

Le vent est un vecteur, et les éoliennes orientent leur rotor face à lui car la puissance dépend du cube de la composante le long de l'axe du rotor, un produit scalaire déguisé.

Le même calcul indique à un panneau solaire combien de lumière il capte : la partie utile est le produit scalaire de la direction du soleil avec le vecteur normal du panneau.

Sur Saving Planets : Physique I, unité 3 : énergie éolienne

Sources : DOE des États-Unis : comment fonctionnent les éoliennes ? (en anglais) (https://www.energy.gov/eere/wind/how-do-wind-turbines-work) · OpenStax Calculus 3, 2.3 The Dot Product (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/2-3-the-dot-product)

Ressources d'apprentissage gratuites

- OpenStax Calculus 3, 2.3 The Dot Product (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/2-3-the-dot-product): Angles et projections.
- OpenStax Calculus 3, 2.4 The Cross Product (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/2-4-the-cross-product): Normales, aires et moment.
- OpenStax Calculus 3, 2.5 Equations of Lines and Planes in Space (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/2-5-equations-of-lines-and-planes-in-space): Droites, plans et distances.

Regarder le cours magistral

Session 79 Clip: Vector Fields in Space (https://ocw.mit.edu/courses/18-02sc-multivariable-calculus-fall-2010/resources/clip-vector-fields-in-space/) (en anglais)

MIT 18.02SC Multivariable Calculus (Fall 2010), MIT OpenCourseWare. Licence : CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Conditions d'utilisation (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Lien fourni

uniquement pour l’étude gratuite ; Saving Planets n’est ni affilié à cette université ni soutenu par elle.

- [ ] **J’ai terminé cette unité**

Fonctions vectorielles et mouvement dans l’espace

Les courbes de l’espace comme fonctions vectorielles : vitesse, accélération, longueur d’arc, courbure, et mouvement des satellites.

Objectifs d’apprentissage

À la fin de cette unité, vous saurez :

- Dériver et intégrer des fonctions vectorielles.
- Trouver la vitesse, la norme de la vitesse et l’accélération le long d’une trajectoire.
- Calculer une longueur d’arc et une courbure.
- Analyser des orbites circulaires avec le calcul vectoriel.

Notions clés

- Une courbe de l’espace est r(t) = ⟨x(t), y(t), z(t)⟩ ; on dérive composante par composante.
- La vitesse v = r'(t) est tangente à la trajectoire ; sa norme est |v| ; l’accélération est a = v'.
- La longueur d’arc est l’intégrale de la vitesse scalaire : L = ∫|r'(t)| dt.
- Dans un mouvement circulaire uniforme, la vitesse scalaire est constante mais l’accélération pointe vers le centre avec une norme v^2/r.

Équations clés

$$\mathbf{v} = \mathbf{r}'(t),\ \mathbf{a} = \mathbf{r}''(t)$$

```
v= r'(t),\ a= r''(t)
```

Vitesse et accélération

$$L = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)|\,dt$$

```
L=_a^b| r'(t)| dt
```

Longueur d’arc

$$\kappa = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}'|^3}$$

```
=(| r'× r''|)/(| r'|^3)
```

Courbure

$$v = \sqrt{GM/r},\ T = 2\pi r/v$$

$v = \sqrt{GM/r},\ T = 2\pi\sqrt{r^3/GM}$

Vitesse et période d’une orbite circulaire

Exemples résolus pas à pas

Exemple 2.1 Calculez la longueur d’un tour de l’hélice $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \sin t, t \rangle$, $0 \le t \le 2\pi$.

1. $\mathbf{r}' = \langle -\sin t, \cos t, 1 \rangle$, vitesse scalaire $\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$.
2. $L = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\, dt = 2\pi\sqrt{2}$.

Réponse : $2\pi\sqrt{2} \approx 8.89$.

Exemple 2.2 Landsat 9 orbite à 705 km au-dessus de la Terre (rayon moyen 6371 km). En assimilant l’orbite à un cercle, calculez sa vitesse, son accélération et sa période.

1. $r = 7{,}076 \text{ km} = 7.076 \times 10^6 \text{ m}$; $GM = 3.986 \times 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$.
2. $v = \sqrt{GM/r} = 7{,}505 \text{ m/s}$.
3. $a = v^2/r = 7.96 \text{ m/s}^2$, dirigée vers le centre de la Terre.
4. $T = 2\pi r/v = 5{,}924 \text{ s}$.

Réponse : Environ 7.5 km/s et 98.7 minutes par orbite, en accord avec la période de 99 minutes indiquée par la NASA.

Exemple 2.3 Calculez la courbure d’un cercle de rayon 2, $\mathbf{r}(t) = \langle 2\cos t, 2\sin t, 0 \rangle$.

1. $\mathbf{r}' = \langle -2\sin t, 2\cos t, 0 \rangle$, $|\mathbf{r}'| = 2$.
2. $\mathbf{r}'' = \langle -2\cos t, -2\sin t, 0 \rangle$; $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = \langle 0, 0, 4 \rangle$.
3. $\kappa = 4/2^3$.

Réponse : $\kappa = 1/2$: la courbure d’un cercle vaut 1/rayon.

Exercices

Faites chacun d’abord sur papier, puis vérifiez.

1. Un projectile a $\mathbf{r}(t) = \langle 20t, 20t - 4.9t^2 \rangle$ m. Calculez sa vitesse et sa vitesse scalaire à $t = 1$ s.

   $\mathbf{v} = \langle 20, 20 - 9.8t \rangle = \langle 20, 10.2 \rangle$; vitesse scalaire $\sqrt{400 + 104.04} \approx 22.45$ m/s.

2. Calculez l’accélération de $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, 3t, e^t \rangle$.

$\langle 2, 0, e^t \rangle$.

3. Calculez la longueur de $r(t) = \langle 3t, 4t, 0 \rangle$ pour $0 \le t \le 2$.

   Vitesse scalaire 5, donc $L = 10$.

4. Un satellite orbite à 35786 km d'altitude. Calculez sa période.

   $r = 42157$ km ; $T = 2\pi\sqrt{(r^3/GM)} \approx 86160$ s ≈ 23.93 h : un jour sidéral, il est donc géostationnaire.

Idées reçues fréquentes

Idée reçue : Une vitesse scalaire constante signifie une accélération nulle.

En réalité : Tourner, c'est accélérer : un satellite en orbite circulaire accélère en permanence vers la Terre.

Idée reçue : La longueur d'arc vaut $|r(b) - r(a)|$.

En réalité : C'est la distance en ligne droite ; la longueur d'arc intègre la vitesse scalaire le long du chemin.

Idée reçue : Les satellites plus hauts vont plus vite.

En réalité : $v = \sqrt{(GM/r)}$ diminue avec la distance ; les orbites plus hautes sont plus lentes et plus longues.

Cartes mémoire

Fonction vectorielle

$r(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$.

Vitesse

$r'(t)$, tangente à la trajectoire.

La vitesse

$|r'(t)|$.

Longueur d'arc

$\int |r'| \, dt$.

Courbure

$|r' \times r''| / |r'|^3$.

Orbite circulaire

$v = \sqrt{(GM/r)}$.

Quiz d'autocontrôle

1. La vitesse est…

r(t)

r'(t)

|r(t)|

∫r dt

r'(t). La dérivée de la position.

2. La longueur d’arc intègre…

position

la vitesse scalaire

accélération

la courbure

la vitesse scalaire. L = ∫|r'| dt.

3. La courbure d’un cercle de rayon 5 vaut…

5

1/5

25

0

1/5. κ = 1/R.

4. Doubler le rayon d’une orbite circulaire multiplie sa vitesse par un facteur…

2

1/√2

1/2

√2

1/√2. v ∝ 1/√r.

Refaire ce quiz

Comment cela aide à sauver la planète

Les satellites d'observation de la Terre comme Landsat 9 suivent des trajectoires vectorielles choisies avec exactement ces formules. Son orbite quasi polaire et héliosynchrone à 705 km lui permet de photographier le même endroit tous les 16 jours à peu près à la même heure locale, ce qui fait ressortir les changements des forêts, des glaciers et des villes.

Sur Saving Planets : Landsat 9 · Analyse II, unité 7 : orbites polaires

Sources : NASA: Landsat 9 quick facts (https://landsat.gsfc.nasa.gov/satellites/landsat-9/) · Fiche NASA sur la Terre (en anglais) (https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/earthfact.html)

Ressources d'apprentissage gratuites

- OpenStax Calculus 3, 3.2 Calculus of Vector-Valued Functions (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/3-2-calculus-of-vector-valued-functions): Dérivées et intégrales.
- OpenStax Calculus 3, 3.4 Motion in Space (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/3-4-motion-in-space): Vitesse, accélération et lois de Kepler.

Regarder le cours magistral

Session 79 Clip: Vector Fields in Space (https://ocw.mit.edu/courses/18-02sc-multivariable-calculus-fall-2010/resources/clip-vector-fields-in-space/) (en anglais)

MIT 18.02SC Multivariable Calculus (Fall 2010), MIT OpenCourseWare. Licence : CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Conditions d'utilisation (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Lien fourni uniquement pour l'étude gratuite ; Saving Planets n'est ni affilié à cette université ni soutenu par elle.

☐ **J'ai terminé cette unité**

Dérivées partielles

Fonctions de plusieurs variables : lignes de niveau, dérivées partielles, plans tangents, approximation linéaire et dérivation des fonctions composées à plusieurs variables.

Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette unité, vous saurez :

- Lire des lignes de niveau et des cartes en courbes de niveau.
- Calculer des dérivées partielles et les interpréter comme des taux.
- Trouver des plans tangents et utiliser l'approximation linéaire.
- Appliquer la règle de dérivation des fonctions composées à plusieurs variables.

Notions clés

- Une fonction z = f(x, y) est une surface ; ses lignes de niveau f = c forment une carte en courbes de niveau.
- ∂f/∂x est le taux de variation en x quand y est fixé.
- Près d'un point, une surface lisse ressemble à son plan tangent : $\Delta f \approx f_x \Delta x + f_y \Delta y$.
- Règle de la chaîne : si x et y dépendent de t, $df/dt = f_x\, dx/dt + f_y\, dy/dt$.

Équations clés

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$$

`f_x=( f)/( x)`

Dérivée partielle

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

`z-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)`

Plan tangent

$$\frac{df}{dt} = f_x \frac{dx}{dt} + f_y \frac{dy}{dt}$$

`df/dt=f_xdx/dt+f_ydy/dt`

Dérivation en chaîne

$$f_{xy} = f_{yx}$$

f_xy=f_yx

Théorème de Schwarz (Clairaut) (f régulière)

Exemples résolus pas à pas

Exemple 3.1 Pour $f(x, y) = x^2y + y^3$, calculez f_x et f_y en (1, 2), et utilisez le plan tangent pour estimer f(1.1, 1.9).

1. $f_x = 2xy = 4$; $f_y = x^2 + 3y^2 = 13$; $f(1, 2) = 10$.
2. $f \approx 10 + 4(0.1) + 13(-0.1) = 9.1$.
3. Valeur exacte : $1.21 \times 1.9 + 6.859 = 9.158$.

Réponse : Estimation 9.1 contre la valeur exacte 9.158.

Exemple 3.2 Pour un gaz parfait, $P = nRT/V$. Avec n = 1 mol, T = 300 K et V = 0.025 m^3, calculez P, $\partial P/\partial T$ et $\partial P/\partial V$.

1. $P = 8.314 \times 300/0.025 = 99{,}768$ Pa.
2. $\partial P/\partial T = nR/V = 332.6$ Pa/K.
3. $\partial P/\partial V = -nRT/V^2 = -P/V = -3.99 \times 10^6$ Pa/m^3.

Réponse : P ≈ 99.8 kPa ; un réchauffement de 1 K l'augmente d'environ 333 Pa ; une détente la diminue.

Exemple 3.3 Un drone vole selon $x = 2t$, $y = t^2$. La température qu'il mesure est $T = 20 + 0.1x - 0.05y$ (°C, km). Calculez dT/dt à t = 1.

1. $T_x = 0.1$, $T_y = -0.05$; $dx/dt = 2$, $dy/dt = 2t = 2$.
2. $dT/dt = 0.1(2) - 0.05(2)$.

Réponse : 0.1 °C par unité de temps.

Exercices

Faites chacun d'abord sur papier, puis vérifiez.

1. Calculez f_x et f_y pour f = e^(xy).

   $f_x = y\, e^{(xy)}$, $f_y = x\, e^{(xy)}$.

2. Calculez f_xy pour $f = x^3y^2$.

$f_x = 3x^2y^2$, $f_{xy} = 6x^2y$ (égal à f_{yx}).

3. Trouvez le plan tangent à $z = x^2 + y^2$ en (1, 1, 2).

   $z = 2 + 2(x - 1) + 2(y - 1)$, i.e. $z = 2x + 2y - 2$.

4. Estimez $\sqrt{(3.02^2 + 3.97^2)}$ par approximation linéaire en (3, 4).

   $f = 5$, $f_x = 3/5$, $f_y = 4/5$: $5 + 0.6(0.02) + 0.8(-0.03) = 4.988$ (valeur exacte 4.9880).

Idées reçues fréquentes

Idée reçue : $\partial f/\partial x$ ignore y.

En réalité : Elle fixe y ; y peut quand même apparaître dans la réponse.

Idée reçue : Si les deux dérivées partielles existent, f est régulière.

En réalité : Les dérivées partielles peuvent exister là où f n'est même pas continue ; la différentiabilité exige davantage.

Idée reçue : L'approximation linéaire est bonne partout.

En réalité : Seulement près du point de base.

Cartes mémoire

Dérivée partielle

Taux de variation selon une variable, les autres étant fixées.

Ligne de niveau

$f(x, y) = c$; une courbe de niveau.

Plan tangent

$z = z_0 + f_x\Delta x + f_y\Delta y$.

Approximation linéaire

$\Delta f \approx f_x\Delta x + f_y\Delta y$.

Dérivation en chaîne

$df/dt = f_x x' + f_y y'$.

Clairaut

$f_{xy} = f_{yx}$ pour f régulière.

Quiz d'autocontrôle

1. Pour $f = x^2y$, $f_x =$

2x

2xy

x^2

x^2y

2xy. Traitez y comme une constante.

2. Les lignes de niveau de $f(x, y) = x^2 + y^2$ sont…

des droites

des cercles

des paraboles

des points

des cercles. $x^2 + y^2 = c$.

3. Pour f régulière, f_xy et f_yx sont…

opposés

égaux

sans rapport

zéro

égaux. Théorème de Schwarz (Clairaut).

4. df/dt pour f(x(t), y(t)) vaut…

f_x + f_y

f_xx' + f_yy'

f_xf_y

x'y'

$f_x x' + f_y y'$. Règle de la chaîne à plusieurs variables.

Refaire ce quiz

Comment cela aide à sauver la planète

Les cartes météo sont des cartes en courbes de niveau de fonctions de deux variables : les isobares sont des lignes de niveau de la pression, les isothermes celles de la température. Les dérivées partielles indiquent aux prévisionnistes à quelle vitesse la pression ou la température varie vers l'est ou vers le nord, ce qui entraîne les vents.

Sur Saving Planets : Analyse I

Sources : NOAA/NWS JetStream: Wind (https://www.weather.gov/jetstream/wind) · OpenStax Calculus 3, 4.3 Partial Derivatives (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/4-3-partial-derivatives)

Ressources d'apprentissage gratuites

- OpenStax Calculus 3, 4.3 Partial Derivatives (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/4-3-partial-derivatives): Section de manuel gratuite.
- OpenStax Calculus 3, 4.4 Tangent Planes and Linear Approximations (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/4-4-tangent-planes-and-linear-approximations): Plans tangents.
- OpenStax Calculus 3, 4.5 The Chain Rule (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/4-5-the-chain-rule): Règle de la chaîne.

Regarder le cours magistral

Session 26 Clip: Partial Derivatives (https://ocw.mit.edu/courses/18-02sc-multivariable-calculus-fall-2010/resources/clip-partial-derivatives/) (en anglais)

MIT 18.02SC Multivariable Calculus (Fall 2010), MIT OpenCourseWare. Licence : CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Conditions d'utilisation (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Lien fourni uniquement pour l'étude gratuite ; Saving Planets n'est ni affilié à cette université ni soutenu par elle.

☐ **J'ai terminé cette unité**

Gradients et optimisation

Le vecteur gradient, les dérivées directionnelles, les points critiques et le test de la dérivée seconde, et l'optimisation sous contrainte avec les multiplicateurs de Lagrange.

Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette unité, vous saurez :

- Calculer le gradient et les dérivées directionnelles.
- Expliquer pourquoi le gradient pointe vers le haut de la pente et est perpendiculaire aux lignes de niveau.
- Classer les points critiques avec le test de la dérivée seconde.
- Résoudre des problèmes sous contrainte avec les multiplicateurs de Lagrange.

Notions clés

- ∇f = ⟨f_x, f_y⟩ pointe dans la direction de croissance la plus rapide, et sa norme est ce taux maximal.
- Le taux de variation dans la direction d'un vecteur unitaire u est D_u f = ∇f · u.
- Le gradient est perpendiculaire aux lignes de niveau, donc l'eau descend selon −∇h, en coupant les courbes de niveau.
- En un extremum intérieur, ∇f = 0. Le test D = f_xx f_yy − f_{xy}^2 tranche : D > 0 et f_xx > 0 donne un minimum ; D < 0 un point selle.
- Pour optimiser f sous la contrainte g = c, résolvez ∇f = λ∇g : au meilleur point, la ligne de niveau de f touche tout juste la contrainte.

Équations clés

$$\nabla f = \langle f_x, f_y, f_z \rangle$$

```
f= f_x,f_y,f_z
```

Gradient

$$D_{\mathbf{u}} f = \nabla f \cdot \mathbf{u}$$

```
D_ uf= f· u
```

Dérivée directionnelle

$$D = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2$$

```
D=f_xxf_yy-f_xy^2
```

Test de la dérivée seconde

$$\nabla f = \lambda \nabla g, \quad g = c$$

`f= g, g=c`

Condition des multiplicateurs de Lagrange

Exemples résolus pas à pas

Exemple 4.1 Une colline a pour hauteur h(x, y) = 500 − 0.01x² − 0.02y² (mètres, x et y en mètres). En (100, 50), calculez ∇h, la pente maximale et la pente en direction de ⟨3, 4⟩/5.

1. ∇h = ⟨−0.02x, −0.04y⟩ = ⟨−2, −2⟩.
2. Taux de montée maximal |∇h| = 2√2 = 2.83 m par m.
3. D_u h = ⟨−2, −2⟩ · ⟨0.6, 0.8⟩ = −2.8.

Réponse : Montée maximale 2.83 (vers le haut en direction de ⟨−1, −1⟩) ; en allant vers ⟨3, 4⟩, on descend de 2.8 m par m. La pluie ruisselle selon −∇h.

Exemple 4.2 Trouvez et classez le point critique de f = x² + xy + y² − 3x.

1. f_x = 2x + y − 3 = 0, f_y = x + 2y = 0 donnent x = 2, y = −1.
2. f_xx = 2, f_yy = 2, f_xy = 1: D = 3 > 0, f_xx > 0.
3. f(2, −1) = 4 − 2 + 1 − 6 = −3.

Réponse : Un minimum, f = −3 en (2, −1).

Exemple 4.3 Une boîte de conserve doit contenir 1 litre (1000 cm³). Quels rayon et hauteur utilisent le moins de métal (cylindre fermé) ?

1. Minimisez A = 2πr² + 2πrh avec g = πr²h = 1000.
2. ∇A = λ∇g donne 4πr + 2πh = λ2πrh et 2πr = λπr², donc λ = 2/r et h = 2r.
3. πr²(2r) = 1000 donne r = (500/π)^(1/3).

Réponse : r ≈ 5.42 cm, h ≈ 10.84 cm (hauteur = diamètre), aire ≈ 554 cm².

Exercices

Faites chacun d'abord sur papier, puis vérifiez.

1. Calculez ∇f pour f = xyz en (1, 2, 3).

$\langle yz, xz, xy \rangle = \langle 6, 3, 2 \rangle$.

2. Calculez $D_u f$ pour $f = x^2 + y^2$ en $(1, 1)$ dans la direction $\langle 1, 0 \rangle$.

   $\nabla f = \langle 2, 2 \rangle$; $D_u f = 2$.

3. Classez le point critique de $f = x^2 - y^2$.

   En $(0, 0)$: $D = (2)(-2) - 0 = -4 < 0$, un point selle.

4. Clôturez un rectangle le long d'une rivière rectiligne avec 40 m de clôture (pas de clôture côté rivière). Maximisez l'aire.

   Maximisez xy avec $x + 2y = 40$: $y = 10$, $x = 20$, aire 200 m².

5. Maximisez $f = x + y$ sur le cercle $x^2 + y^2 = 2$.

   $\langle 1, 1 \rangle = \lambda \langle 2x, 2y \rangle$ donne $x = y = 1$; maximum 2.

Idées reçues fréquentes

Idée reçue : Le gradient est dirigé le long de la ligne de niveau.

En réalité : Il est perpendiculaire à la ligne de niveau.

Idée reçue : $\nabla f = 0$ signifie un maximum ou un minimum.

En réalité : Ce peut être un point selle ; utilisez le test de D.

Idée reçue : λ n'est qu'une astuce à éliminer.

En réalité : λ est le taux de variation de la valeur optimale quand la contrainte c varie, ce qui est utile en économie et en ingénierie.

Cartes mémoire

Gradient

$\langle f_x, f_y, f_z \rangle$; croissance la plus rapide.

Dérivée directionnelle

$\nabla f \cdot u$.

Point critique

$\nabla f = 0$.

Point selle

$D < 0$.

Condition de Lagrange

$\nabla f = \lambda \nabla g$.

Plus forte descente

Se déplacer selon $-\nabla f$.

Quiz d’autocontrôle

1. Le gradient pointe…

le long des lignes de niveau

dans la direction de croissance la plus rapide

vers le bas

vers l’origine

dans la direction de croissance la plus rapide. Sa norme est le taux maximal.

2. D < 0 en un point critique signifie…

minimum

maximal

un col

aucune conclusion

un col. Courbé vers le haut dans un sens, vers le bas dans l’autre.

3. Les multiplicateurs de Lagrange résolvent…

$\nabla f = 0$

$\nabla f = \lambda \nabla g$

$f = g$

$f' = \lambda$

$\nabla f = \lambda \nabla g$. Les gradients sont parallèles en un optimum sous contrainte.

4. $D_u f$ est maximal quand u est…

perpendiculaire à ∇f

parallèle à ∇f

opposé à ∇f

dans n’importe quelle direction

parallèle à ∇f. $\nabla f \cdot u = |\nabla f| \cos \theta$.

Refaire ce quiz

Comment cela aide à sauver la planète

L’eau descend selon le gradient du relief. Les cartes d’inondation, les limites de bassins versants et les modèles d’érosion sont construits en calculant $-\nabla h$ à partir de données d’altitude, comme les modèles d’élévation lidar gratuits du USGS 3D Elevation Program.

Les multiplicateurs de Lagrange minimisent la matière nécessaire pour un volume ou une résistance imposés. Utiliser moins de matière pour la même tâche réduit directement l’extraction minière, l’énergie et les émissions.

Sur Saving Planets : Page Rivières · Dessin technique / CAO : allègement

Sources : USGS 3D Elevation Program (3DEP) (https://www.usgs.gov/3d-elevation-program) · OpenStax Calculus 3, 4.8 Lagrange Multipliers (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/4-8-lagrange-multipliers)

Ressources d’apprentissage gratuites

- OpenStax Calculus 3, 4.6 Directional Derivatives and the Gradient (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/4-6-directional-derivatives-and-the-gradient): Gradients.
- OpenStax Calculus 3, 4.7 Maxima/Minima Problems (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/4-7-maxima-minima-problems): Test de la dérivée seconde.
- OpenStax Calculus 3, 4.8 Lagrange Multipliers (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/4-8-lagrange-multipliers): Optimisation sous contrainte.

☐ **J’ai terminé cette unité**

Intégrales doubles

Intégrer sur des régions du plan : intégrales itérées, théorème de Fubini, régions quelconques, coordonnées polaires, aire, masse et moyennes.

Objectifs d’apprentissage

À la fin de cette unité, vous saurez :

- Calculer des intégrales doubles comme intégrales itérées.
- Poser les bornes pour des régions quelconques et inverser l’ordre d’intégration.
- Passer en coordonnées polaires avec dA = r dr dθ.
- Utiliser les intégrales doubles pour les aires, masses, moyennes et totaux sur une carte.

Notions clés

- ∬_R f dA additionne f fois de minuscules aires. Sur un rectangle, Fubini dit qu’on intègre une variable puis l’autre, dans n’importe quel ordre.
- Pour une région quelconque, les bornes intérieures sont des courbes ; esquissez la région pour les lire.
- Les régions arrondies sont plus simples en coordonnées polaires, où l’élément d’aire est r dr dθ (et non dr dθ).
- La moyenne de f sur R est ∬f dA divisé par l’aire de R.

Équations clés

$$\iint_R f\,dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$$

```
_Rf dA=_a^b\!_c^df(x,y) dy dx
```

Théorème de Fubini

$$dA = r\,dr\,d\theta$$

```
dA=r dr dθ
```

Élément d’aire en polaires

$$\bar{f} = \frac{1}{\text{Area}(R)} \iint_R f\,dA$$

```
f=1Area(R)_Rf dA
```

Valeur moyenne

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

_-∞^∞e^-x^2dx=π

Intégrale de Gauss (par les coordonnées polaires)

Exemples résolus pas à pas

Exemple 5.1 Calculez ∬_R xy dA sur R = [0, 2] × [0, 3].

1. $\int_0^2 x\,dx = 2$ et $\int_0^3 y\,dy = 4.5$.
2. L'intégrale se sépare : 2 × 4.5.

Réponse : 9.

Exemple 5.2 La pluie tombe sur un bassin versant de 10 km × 5 km avec une hauteur d(x, y) = 20 + 2x mm (x en km, le long du côté de 10 km). Quelle quantité d'eau est tombée ?

1. Total = $\int_0^{10}\int_0^5 (20 + 2x)\,dy\,dx = 5\int_0^{10} (20 + 2x)\,dx$.
2. = 5(200 + 100) = 1,500 mm·km².
3. 1 mm sur 1 km² représente 1000 m³.

Réponse : 1.5 × 10⁶ m³ (hauteur moyenne 30 mm). C'est ainsi que pluviomètres et radars deviennent des prévisions de débit des rivières.

Exemple 5.3 Calculez ∬ e^(−(x² + y²)) dA sur le disque unité, puis sur tout le plan.

1. En polaires : $\int_0^{2\pi}\int_0^1 e^{-r^2}\,r\,dr\,d\theta = 2\pi \times \tfrac{1}{2}(1 - e^{-1})$.
2. Sur le plan, l'intégrale en r va jusqu'à ∞ et donne ½.

Réponse : π(1 − 1/e) ≈ 1.986 sur le disque ; π sur le plan, ce qui prouve ∫e^(−x²) dx = √π.

Exercices

Faites chacun d'abord sur papier, puis vérifiez.

1. $\int_0^1\int_0^x x\,dy\,dx$

   $\int_0^1 x^2\,dx = 1/3$.

2. Inversez l'ordre de $\int_0^1\int_y^1 f\,dx\,dy$.

$\int_0^1 \int_0^x f \, dy \, dx$.

3. Calculez l'aire d'un disque de rayon a en coordonnées polaires.

   $\int_0^{2\pi} \int_0^a r \, dr \, d\theta = \pi a^2$.

4. Calculez le volume sous $z = 4 - x^2 - y^2$ au-dessus du disque $x^2 + y^2 \leq 4$.

   $\int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - r^2) \, r \, dr \, d\theta = 2\pi(8 - 4) = 8\pi \approx 25.1$.

5. Moyenne de $f = x + y$ sur $[0, 1] \times [0, 1]$.

   $\iint (x + y) \, dA = 1$, aire 1, moyenne 1.

Idées reçues fréquentes

Idée reçue : En polaires, $dA = dr \, d\theta$.

En réalité : $dA = r \, dr \, d\theta$; oublier r est l'erreur la plus fréquente.

Idée reçue : Les bornes intérieures doivent être des nombres.

En réalité : Pour une région quelconque, les bornes intérieures sont des fonctions de la variable extérieure.

Idée reçue : L'ordre n'a jamais d'importance.

En réalité : La valeur n'en dépend pas, mais les bornes changent, et un ordre est souvent bien plus simple.

Cartes mémoire

Intégrale double

$\iint_R f \, dA$.

Fubini

Itérer dans n'importe quel ordre sur un rectangle.

Région de type I

$a \leq x \leq b$, $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$.

dA en polaires

$r \, dr \, d\theta$.

Valeur moyenne

$\iint f \, dA$ / aire.

Intégrale de Gauss

$\int e^{-x^2} \, dx = \sqrt{\pi}$.

Quiz d’autocontrôle

1. Élément d’aire en polaires :

dr dθ

r dr dθ

r^2 dr dθ

dθ/r

r dr dθ. Un morceau polaire mesure r dθ sur dr.

2. $\iint_R 1\, dA$ est égal à…

0

l’aire de R

le périmètre

1

l’aire de R. Additionne l’aire.

3. $\int_0^1 \int_0^2 3\, dy\, dx$ =

3

5

6

2

6. 3 × aire 2.

4. Le théorème de Fubini permet de…

se passer des bornes

intégrer une variable à la fois

dériver

toujours utiliser les polaires

intégrer une variable à la fois. Intégrales itérées.

Refaire ce quiz

Comment cela aide à sauver la planète

Les totaux sur une carte sont des intégrales doubles : la pluie sur un bassin versant, le carbone stocké dans une forêt ou la récolte d'un champ. Les hydrologues transforment ainsi les cartes de précipitations en volumes pour prévoir les crues et planifier l'approvisionnement en eau.

Sur Saving Planets : Page Rivières · Dossier déforestation

Sources : USGS Water Science School: Precipitation and the water cycle (https://www.usgs.gov/special-topics/water-science-school/science/precipitation-and-water-cycle) · OpenStax Calculus 3, 5.2 Double Integrals over General Regions (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/5-2-double-integrals-over-general-regions)

Ressources d'apprentissage gratuites

- OpenStax Calculus 3, 5.1 Double Integrals over Rectangular Regions (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/5-1-double-integrals-over-rectangular-regions): Fubini.
- OpenStax Calculus 3, 5.2 Double Integrals over General Regions (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/5-2-double-integrals-over-general-regions): Régions quelconques.
- OpenStax Calculus 3, 5.3 Double Integrals in Polar Coordinates (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/5-3-double-integrals-in-polar-coordinates): Polaires.

Regarder le cours magistral

Session 47 Clip: Definition of Double Integration (https://ocw.mit.edu/courses/18-02sc-multivariable-calculus-fall-2010/resources/clip-definition-of-double-integration/) (en anglais)

MIT 18.02SC Multivariable Calculus (Fall 2010), MIT OpenCourseWare. Licence : CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Conditions d'utilisation (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Lien fourni uniquement pour l'étude gratuite ; Saving Planets n'est ni affilié à cette université ni soutenu par elle.

☐ **J'ai terminé cette unité**

Intégrales triples et changement de variables

Intégrer sur des solides en coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques, et le jacobien pour les changements de variables généraux.

Objectifs d’apprentissage

À la fin de cette unité, vous saurez :

- Poser et calculer des intégrales triples.
- Utiliser les coordonnées cylindriques (r dz dr dθ) et sphériques (ρ² sin φ dρ dφ dθ).
- Calculer le jacobien d’un changement de variables.
- Calculer volumes, masses et centres de masse de solides.

Notions clés

- ∭_E f dV additionne f sur de minuscules pavés ; avec f = masse volumique, on obtient la masse.
- Les coordonnées cylindriques conviennent aux tuyaux, réservoirs et cônes : dV = r dz dr dθ.
- Les coordonnées sphériques conviennent aux boules et aux planètes : dV = ρ² sin φ dρ dφ dθ.
- Toute substitution x = x(u, v) dilate l’aire selon le jacobien |∂(x, y)/∂(u, v)|.

Équations clés

$$dV = r\,dz\,dr\,d\theta$$

```
dV=r dz dr dθ
```

Élément de volume en cylindriques

$$dV = \rho^2 \sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$$

```
dV=ρ^2 dρ d dθ
```

Élément de volume en sphériques

$$J = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = |x_u y_v - x_v y_u|$$

```
J=|((x,y))/((u,v))|=|x_uy_v-x_vy_u|
```

Jacobienne

$$\iint_R f\,dx\,dy = \iint_S f\,|J|\,du\,dv$$

```
_Rf dx dy=_Sf |J| du dv
```

Exemples résolus pas à pas

Exemple 6.1 Utilisez les coordonnées sphériques pour calculer le volume d'une boule de rayon R.

1. $V = \int_0^{(2\pi)} \int_0^{\pi} \int_0^R \rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$.
2. $= (R^3/3)(2)(2\pi)$.

Réponse : $4\pi R^3/3$.

Exemple 6.2 Estimez la masse de l'atmosphère terrestre : le poids de l'air au-dessus de chaque mètre carré est la pression au sol, donc $M = \iint p/g \, dA$ sur la sphère.

1. L'intégrale de surface d'une constante vaut p/g fois l'aire $4\pi R^2$.
2. $4\pi(6.371 \times 10^6)^2 = 5.10 \times 10^{14}$ m².
3. $M = 101{,}400 \times 5.10 \times 10^{14} / 9.81$.

Réponse : Environ 5.3×10^{18} kg, proche des 5.1×10^{18} kg de la NASA (les terres au-dessus du niveau de la mer supportent moins d'air).

Exemple 6.3 Calculez l'aire de l'ellipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 \le 1$ avec $x = au$, $y = bv$.

1. L'ellipse devient le disque unité $u^2 + v^2 \le 1$.
2. $J = ab$.
3. Aire $= ab \times \pi$.

Réponse : πab.

Exercices

Faites chacun d'abord sur papier, puis vérifiez.

1. Calculez le volume du cône $0 \le z \le 1 - r$ (rayon 1, hauteur 1) en coordonnées cylindriques.

   $\int_0^{(2\pi)} \int_0^1 (1 - r)\, r \, dr \, d\theta = 2\pi(1/2 - 1/3) = \pi/3$.

2. Calculez $\iiint 1 \, dV$ sur le pavé $[0, 1] \times [0, 2] \times [0, 3]$.

   6.

3. Calculez le jacobien des coordonnées polaires.

$x_r y_\theta - x_\theta y_r = \cos\theta\,(r\cos\theta) + r\sin\theta\,(\sin\theta) = r$.

4. Un cylindre de rayon 1 m et de hauteur 2 m a une masse volumique $1000(1 - z/4)$ kg/m³. Calculez sa masse.

   $\pi \int_0^2 1{,}000(1 - z/4)\,dz = \pi \times 1{,}000 \times 1.5 = 1{,}500\pi \approx 4{,}712$ kg.

Idées reçues fréquentes

Idée reçue : En coordonnées sphériques, $dV = d\rho\, d\varphi\, d\theta$.

En réalité : $dV = \rho^2 \sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$.

Idée reçue : φ va de 0 à 2π.

En réalité : φ (mesuré depuis le pôle Nord) va de 0 à π ; θ va de 0 à 2π.

Idée reçue : Le jacobien peut être négatif dans l'intégrale.

En réalité : Utilisez sa valeur absolue.

Cartes mémoire

Intégrale triple

$\iiint_E f\,dV$.

Cylindriques

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, z ; $dV = r\,dz\,dr\,d\theta$.

Sphériques

$dV = \rho^2 \sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$.

Jacobienne

Facteur de dilatation d'aire ou de volume d'une substitution.

Masse

$\iiint$ masse volumique dV.

Centre de masse

$\iiint x\,\rho\,dV$ / masse.

Quiz d'autocontrôle

1. L'élément de volume en sphériques est…

$d\rho\, d\varphi\, d\theta$

$\rho^2 \sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$

ρ dρ dθ

r dz dr dθ

$\rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$. Un pavé sphérique de côtés dρ, ρ dφ, ρ sin φ dθ.

2. Les coordonnées cylindriques sont idéales pour…

les cubes

les tuyaux et les réservoirs

les pyramides

les plans

les tuyaux et les réservoirs. Sections circulaires.

3. Le jacobien de x = 2u, y = 3v vaut…

5

6

1

2/3

6. 2 × 3.

4. Volume d’une boule de rayon 3 :

36π

27π

12π

9π

36π. 4π(27)/3.

Refaire ce quiz

Comment cela aide à sauver la planète

Les climatologues additionnent des grandeurs dans le volume de l'océan et de l'atmosphère avec exactement ces intégrales. Le contenu thermique de l'océan, la chaleur stockée dans les 2000 premiers mètres de la mer, est une intégrale triple de la variation de température multipliée par la masse volumique et la capacité thermique, et c'est l'un des indicateurs les plus nets du réchauffement climatique.

Sur Saving Planets : Pôle Océans

Sources : NOAA NCEI: Global ocean heat content (https://www.ncei.noaa.gov/access/global-ocean-heat-content/) · Fiche NASA sur la Terre (en anglais) (https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/earthfact.html)

Ressources d'apprentissage gratuites

- OpenStax Calculus 3, 5.4 Triple Integrals (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/5-4-triple-integrals): Section de manuel gratuite.
- OpenStax Calculus 3, 5.5 Triple Integrals in Cylindrical and Spherical Coordinates (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/5-5-triple-integrals-in-cylindrical-and-spherical-coordinates): Cylindriques et sphériques.
- OpenStax Calculus 3, 5.7 Change of Variables in Multiple Integrals (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/5-7-change-of-variables-in-multiple-integrals): Jacobiens.

Regarder le cours magistral

Session 53 Clip: Change of Variables (https://ocw.mit.edu/courses/18-02sc-multivariable-calculus-fall-2010/resources/clip-change-of-variables/) (en anglais)

MIT 18.02SC Multivariable Calculus (Fall 2010), MIT OpenCourseWare. Licence : CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Conditions d'utilisation (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Lien fourni uniquement pour l'étude gratuite ; Saving Planets n'est ni affilié à cette université ni soutenu par elle.

☐ **J'ai terminé cette unité**

Champs de vecteurs, intégrales curvilignes et théorème de Green

Les champs de vecteurs comme les vents et les courants, le travail et la circulation le long de courbes, les champs conservatifs et les potentiels, et le théorème de Green dans le plan.

Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette unité, vous saurez :

- Esquisser et interpréter des champs de vecteurs.
- Calculer des intégrales curvilignes de fonctions scalaires et de champs de vecteurs (travail).
- Tester si un champ est conservatif et trouver un potentiel.
- Appliquer le théorème de Green à la circulation et au flux dans le plan.

Notions clés

- Un champ de vecteurs associe un vecteur à chaque point, comme une carte de vents ou de courants.
- Le travail le long d'un chemin est ∫_C F · dr ; pour une boucle fermée, on l'appelle circulation.
- Un champ conservatif est un gradient, F = ∇φ ; son travail ne dépend que des extrémités, et sa circulation est nulle.
- Théorème de Green : la circulation le long d'une courbe fermée est égale à l'intégrale du rotationnel (Q_x − P_y) sur la région intérieure.

Équations clés

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$$

```
_C F· d r=_a^b F( r(t))· r'(t) dt
```

Intégrale curviligne (travail)

$$\int_C \nabla\varphi \cdot d\mathbf{r} = \varphi(B) - \varphi(A)$$

```
_C· d r=(B)-(A)
```

Théorème fondamental des intégrales curvilignes

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D (Q_x - P_y)\,dA$$

```
_CP dx+Q dy=_D(Q_x-P_y) dA
```

Théorème de Green

$$\text{Area} = \tfrac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx$$

`Area=12_Cx dy-y dx`

Aire à partir du bord

Exemples résolus pas à pas

Exemple 7.1 F = ⟨y, x⟩. Calculez le travail de (0, 0) à (2, 3) le long de n'importe quel chemin.

1. P_y = 1 = Q_x, donc F est conservatif.
2. φ = xy vérifie ∇φ = ⟨y, x⟩.
3. Travail = φ(2, 3) − φ(0, 0).

Réponse : 6, sur tout chemin.

Exemple 7.2 Un courant en forme de gyre F = ⟨−y, x⟩ tourne autour de l'origine. Calculez sa circulation le long du cercle unité directement puis par le théorème de Green.

1. r = ⟨cos t, sin t⟩, F · r' = sin²t + cos²t = 1, donc ∮ = 2π.
2. Green : Q_x − P_y = 1 − (−1) = 2 ; ∬2 dA = 2 × π.

Réponse : 2π ≈ 6.28 dans les deux cas.

Exemple 7.3 Utilisez ½∮(x dy − y dx) pour calculer l'aire intérieure à x = 3 cos t, y = 2 sin t.

1. x dy − y dx = (3 cos t)(2 cos t) + (2 sin t)(3 sin t) = 6 dt.
2. ½ ∫₀^(2π) 6 dt.

Réponse : 6π ≈ 18.85 (πab avec a = 3, b = 2).

Exercices

Faites chacun d'abord sur papier, puis vérifiez.

1. F = ⟨2xy, x² + 1⟩ est-il conservatif ? Trouvez φ.

   P_y = 2x = Q_x; φ = x²y + y.

2. Calculez $\int_C F \cdot dr$ pour $F = \langle x, y \rangle$ le long de $y = x^2$ de $(0, 0)$ à $(1, 1)$.

   Conservatif, $\varphi = (x^2 + y^2)/2$: travail 1.

3. Calculez $\oint (x^2\,dx + xy\,dy)$ le long du carré $[0, 1] \times [0, 1]$, dans le sens trigonométrique.

   Green : $\iint y\,dA = 1/2$.

4. Calculez la circulation de $F = \langle -y, x \rangle$ le long d'un cercle de rayon 3.

   2 × aire = $18\pi \approx 56.5$.

Idées reçues fréquentes

Idée reçue : Tout champ de rotationnel nul est conservatif.
En réalité : Vrai seulement sur des régions simplement connexes (sans trous).

Idée reçue : Le travail le long d'un chemin fermé est toujours nul.
En réalité : Seulement pour les champs conservatifs ; une gyre circule.

Idée reçue : Le théorème de Green fonctionne quelle que soit l'orientation.
En réalité : Il suppose le sens trigonométrique ; le sens horaire change le signe.

Cartes mémoire

Champ de vecteurs

Un vecteur en chaque point.

Intégrale curviligne

$\int F \cdot dr$, travail le long d'une courbe.

Circulation

Intégrale curviligne le long d'une courbe fermée.

Conservatif

$F = \nabla\varphi$; indépendant du chemin.

Potentiel

φ tel que $\nabla\varphi = F$.

Théorème de Green

$\oint P\,dx + Q\,dy = \iint (Q_x - P_y)\,dA$.

Quiz d'autocontrôle

1. $F = \nabla\varphi$ signifie que F est…

rotationnel

conservatif

zéro

constant

conservatif. Un champ de gradient.

2. Travail d'un champ conservatif le long d'une boucle fermée :

2π

0

de son aire

non définie

0. $\varphi(A) - \varphi(A)$.

3. Le théorème de Green relie une intégrale curviligne à…

une dérivée

une intégrale double

une intégrale triple

une série

une intégrale double. Bord ↔ intérieur.

4. Q_x − P_y pour F = ⟨−y, x⟩ vaut…

0

1

2

−2

2. 1 − (−1).

Refaire ce quiz

Comment cela aide à sauver la planète

Les gyres océaniques sont d'immenses systèmes de courants tournants : il y en a cinq principales, et chacune rassemble les débris flottants vers son centre, formant les « continents de plastique ». La circulation d'un champ de courants est une intégrale curviligne, et le théorème de Green la relie à la rotation (rotationnel) à l'intérieur.

Les vents et les courants sur des cartes comme earth.nullschool.net, qui affiche des données de prévision publiques de la NOAA, sont des champs de vecteurs que vous pouvez lire grâce à cette unité.

Sur Saving Planets : Pôle Océans

Sources : NOAA Marine Debris Program: Garbage patches (https://marinedebris.noaa.gov/discover-marine-debris/garbage-patches) · NOAA Ocean Service: Ocean currents tutorial (gyres) (https://oceanservice.noaa.gov/education/tutorial_currents/04currents4.html) · earth.nullschool.net: live global wind and ocean-current map (from NOAA GFS and other public data) (https://earth.nullschool.net/)

Ressources d'apprentissage gratuites

- OpenStax Calculus 3, 6.1 Vector Fields (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/6-1-vector-fields): Champs.
- OpenStax Calculus 3, 6.2 Line Integrals (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/6-2-line-integrals): Travail et circulation.
- OpenStax Calculus 3, 6.3 Conservative Vector Fields (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/6-3-conservative-vector-fields): Potentiels.
- OpenStax Calculus 3, 6.4 Green's Theorem (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/6-4-greens-theorem): Théorème de Green.

Regarder le cours magistral

Session 56 Clip: Vector Fields (https://ocw.mit.edu/courses/18-02sc-multivariable-calculus-fall-2010/resources/clip-vector-fields/) (en anglais)

MIT 18.02SC Multivariable Calculus (Fall 2010), MIT OpenCourseWare. Licence : CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Conditions d'utilisation (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Lien fourni uniquement pour l'étude gratuite ; Saving Planets n'est ni affilié à cette université ni soutenu par elle.

☐ **J'ai terminé cette unité**

Intégrales de surface, théorème de Stokes et théorème de la divergence

Divergence et rotationnel, surfaces paramétrées, flux à travers une surface, et les deux grands théorèmes qui relient le bord à l'intérieur en 3D.

Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette unité, vous saurez :

- Calculer la divergence et le rotationnel et les interpréter comme intensité de source et rotation.
- Paramétrer des surfaces et calculer aire de surface et flux.
- Appliquer le théorème de Stokes.
- Appliquer le théorème de la divergence (Gauss) au flux sortant net.

Notions clés

- div F = ∇ · F mesure le débit sortant par unité de volume ; rot F = ∇ × F mesure la rotation.
- Le flux ∬_S F · n dS est la quantité du champ qui traverse une surface par unité de temps.
- Stokes : la circulation le long du bord d'une surface est égale au flux de rot F à travers la surface.
- Théorème de la divergence : le flux sortant net à travers une surface fermée est égal à la divergence totale à l'intérieur.

Équations clés

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = P_x + Q_y + R_z$$

· F=P_x+Q_y+R_z

Divergence

$$\nabla \times \mathbf{F} = \langle R_y - Q_z,\ P_z - R_x,\ Q_x - P_y \rangle$$

× F= R_y-Q_z,\ P_z-R_x,\ Q_x-P_y

Rotationnel

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS$$

_ S F· d r=_S(× F)· n dS

Théorème de Stokes

$$\oiint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_E \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV$$

_S F· n dS=_E· F dV

Théorème de la divergence

Exemples résolus pas à pas

Exemple 8.1 Calculez le flux sortant de F = ⟨x, y, z⟩ à travers la sphère de rayon R.

1. div F = 3.
2. Théorème de la divergence : 3 × (4πR³/3).
3. Vérification directe : sur la sphère F · n = R, donc le flux vaut R × 4πR².

Réponse : 4πR³ dans les deux cas.

Exemple 8.2 Un rayonnement solaire de 1361 W/m² frappe la Terre (rayon 6371 km). Quelle puissance totale la Terre intercepte-t-elle, et quelle est la moyenne par mètre carré de sa surface ?

1. Le flux à travers le disque d'ombre de la Terre vaut 1361 × πR² = 1.735 × 10¹⁷ W.
2. Réparti sur toute la sphère (aire 4πR²), cela donne 1361/4.

Réponse : 1.74 × 10¹⁷ W, soit 340 W/m² en moyenne, le chiffre en haut du diagramme du bilan énergétique de la NASA.

Exemple 8.3 Vérifiez le théorème de Stokes pour F = ⟨−y, x, 0⟩ sur la moitié supérieure de la sphère unité.

1. rot F = ⟨0, 0, 2⟩.
2. Le flux du rotationnel à travers l'hémisphère est égal à celui à travers le disque unité plat (même bord) : 2 × π.
3. La circulation le long du bord vaut 2π (unité 7).

Réponse : 2π dans les deux cas.

Exercices

Faites chacun d'abord sur papier, puis vérifiez.

1. Calculez div et rot de F = ⟨x², yz, xy⟩.

div = $2x + z$; rot = $\langle x - y, -y, 0 \rangle$.

2. Flux de $F = \langle 0, 0, 5 \rangle$ vers le haut à travers le carré unité du plan $z = 1$.

   $5 \times 1 = 5$.

3. Utilisez le théorème de la divergence : flux de $F = \langle x, y, z \rangle$ sortant du cube unité $[0, 1]^3$.

   div = 3 ; flux 3.

4. Calculez l'aire d'une sphère de rayon 2 en intégrant $dS = 4 \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta$.

   $4 \times 2 \times 2\pi = 16\pi \approx 50.3$.

5. Le rotationnel d'un champ de gradient peut-il être non nul ?

   Non : $\nabla \times \nabla\varphi = 0$ pour φ régulière.

Idées reçues fréquentes

Idée reçue : Le flux est la même chose que la circulation.
En réalité : Le flux traverse une surface ; la circulation suit une courbe.

Idée reçue : À divergence nulle signifie que rien ne bouge.
En réalité : Cela signifie qu'il n'y a pas de source nette : tout ce qui entre ressort.

Idée reçue : Le théorème de la divergence s'applique aux surfaces ouvertes.
En réalité : Il exige une surface fermée ; Stokes traite les surfaces à bord.

Cartes mémoire

Divergence

$\nabla \cdot F$; intensité de source.

Rotationnel

$\nabla \times F$; rotation.

Flux

$\iint F \cdot n \, dS$.

Théorème de Stokes

Circulation sur le bord = flux du rotationnel.

Théorème de la divergence

Flux sortant = $\iiint$ div $F \, dV$.

Surface fermée

Enferme un solide ; pas de bord.

Quiz d’autocontrôle

1. div ⟨x, y, z⟩ =

0

1

3

x + y + z

3. 1 + 1 + 1.

2. Le théorème de Stokes relie la circulation sur le bord au…

flux de F

flux de rot F

div F

volume

flux de rot F. $\iint (\nabla \times F) \cdot n \, dS$.

3. Le théorème de la divergence exige…

une surface fermée

une courbe

une région plane

un champ conservatif

une surface fermée. Elle enferme un solide.

4. L’ensoleillement moyen par mètre carré au sommet de l’atmosphère terrestre est d’environ…

1,361 W/m²

680 W/m²

340 W/m²

100 W/m²

340 W/m². Aire du disque πR^2 sur aire de la sphère $4\pi R^2$: un quart.

Refaire ce quiz

Comment cela aide à sauver la planète

Le climat de la Terre est un bilan de flux : la lumière du soleil traverse le sommet de l'atmosphère à environ 340 W/m² en moyenne, et la Terre doit renvoyer la même énergie vers l'espace. Quand les gaz à effet de serre piègent une partie de la chaleur sortante, le déséquilibre est un flux net entrant dans la planète, stocké surtout dans l'océan.

Le transport des polluants relève des mêmes mathématiques : le théorème de la divergence dit que le polluant qui quitte un lac ou un bassin atmosphérique par son bord est égal à ce que ses sources intérieures rejettent, moins ce qui est éliminé.

Sur Saving Planets : Pôle Observation de la Terre

Sources : NASA Earth Observatory: Climate and Earth's Energy Budget (https://earthobservatory.nasa.gov/features/EnergyBalance) · Fiche NASA sur la Terre (en anglais) (https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/earthfact.html)

Ressources d'apprentissage gratuites

- OpenStax Calculus 3, 6.5 Divergence and Curl (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/6-5-divergence-and-curl): Divergence et rotationnel.
- OpenStax Calculus 3, 6.6 Surface Integrals (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/6-6-surface-integrals): Flux.
- OpenStax Calculus 3, 6.7 Stokes' Theorem (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/6-7-stokes-theorem): Stokes.
- OpenStax Calculus 3, 6.8 The Divergence Theorem (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/6-8-the-divergence-theorem): Gauss.

Regarder le cours magistral

Session 95 Clip: Stokes' Theorem and Surface Independence (https://ocw.mit.edu/courses/18-02sc-multivariable-calculus-fall-2010/resources/clip-stokes-theorem-and-surface-independence/) (en anglais)

MIT 18.02SC Multivariable Calculus (Fall 2010), MIT OpenCourseWare. Licence : CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Conditions d'utilisation (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Lien fourni uniquement pour l'étude gratuite ; Saving Planets n'est ni affilié à cette université ni soutenu par elle.

☐ **J’ai terminé cette unité**

Exercices

Ces exercices sont dans chaque unité. Faites-les sur papier, puis ouvrez la réponse.

1. Vecteurs et géométrie de l’espace
   5 exercices
2. Fonctions vectorielles et mouvement dans l’espace
   4 exercices
3. Dérivées partielles
   4 exercices
4. Gradients et optimisation
   5 exercices
5. Intégrales doubles
   5 exercices
6. Intégrales triples et changement de variables
   4 exercices
7. Champs de vecteurs, intégrales curvilignes et théorème de Green
   4 exercices
8. Intégrales de surface, théorème de Stokes et théorème de la divergence
   5 exercices

Travaux pratiques sur ordinateur

Quatre TP sur ordinateur appliquent les unités : divergence et rotationnel d’un champ de vent à partir de données de stations, pente et direction d’écoulement de l’eau à partir d’une grille d’altitude, volume d’un lac par une intégrale double en polaires, et une orbite de satellite calculée pas à pas dans le temps.

Les données d’exemple sont signalées comme telles ; chaque TP renvoie à la source de données publique à essayer ensuite.

Référence de sécurité : OpenStax Calculus Volume 3 (manuel gratuit) (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/1-introduction)

TP A : divergence et rotationnel d’un champ de vent

SEMAINE 14

Objectif : Estimez la divergence et le rotationnel du vent en un point à partir de quatre stations voisines, et interprétez-les comme ascendance de l’air et rotation d’une tempête.

$$\nabla \cdot \mathbf{v} \approx \frac{u_E - u_W}{2\Delta} + \frac{v_N - v_S}{2\Delta}, \quad (\nabla \times \mathbf{v})_z \approx \frac{v_E - v_W}{2\Delta} - \frac{u_N - u_S}{2\Delta}$$

Différences centrées

Mode opératoire

1. Saisissez le vent vers l’est (u) et vers le nord (v) aux stations situées à 100 km à l’est, à l’ouest, au nord et au sud d’un centre (Δ = 100 km = 10^5 m).
2. Calculez la divergence et le rotationnel vertical (tourbillon).
3. Interprétez les signes, puis recommencez avec de vrais vents lus sur earth.nullschool.net ou dans les données de prévision de la NOAA.

Tableau de données

Station	u (m/s, est)	v (m/s, nord)
Est	4	8
Ouest	6	−6
Nord	−5	−3
Sud	7	−1

Valeurs d’exemple pour l’entraînement, pas une vraie carte météo.

Exemple de calcul

1. Divergence = (4 − 6)/(2 × 10^5) + (−3 − (−1))/(2 × 10^5) = −2 × 10^{-5} s^{-1} : l’air converge, il doit donc monter, ce qui favorise nuages et pluie.
2. Tourbillon = (8 − (−6))/(2 × 10^5) − (−5 − 7)/(2 × 10^5) = 1.3 × 10^{-4} s^{-1} : positif, sens trigonométrique, comme une dépression de l’hémisphère Nord.

> **Sécurité**
>
> - Aucune, au-delà d’un usage normal de l’ordinateur.

Alternative à la maison ou virtuelle

- Un tableur suffit.

earth.nullschool.net: live global wind and ocean-current map (from NOAA GFS and other public data) (https://earth.nullschool.net/) · NOAA NCEI: Global Forecast System (GFS) (https://www.ncei.noaa.gov/products/weather-climate-models/global-forecast)

Lien avec la planète : Convergence et tourbillon sont ce que suivent les prévisionnistes pour avertir des fortes pluies et des tempêtes. NOAA/NWS JetStream: Wind (https://www.weather.gov/jetstream/wind)

- [ ] **J’ai terminé ce TP (réel ou virtuel)**

TP B : pente et écoulement de l’eau à partir d’une grille d’altitude

SEMAINE 7

Objectif : Estimez le gradient du relief à partir d’une grille d’altitudes et trouvez dans quel sens ruisselle l’eau de pluie.

$$\nabla h \approx \left\langle \frac{h_E - h_W}{2\Delta}, \frac{h_N - h_S}{2\Delta} \right\rangle$$

Gradient par différences centrées

Mode opératoire

1. Utilisez les altitudes à 100 m à l’est, à l’ouest, au nord et au sud d’un point (Δ = 100 m).
2. Calculez ∇h, sa norme (pente) et l’angle de pente arctan|∇h|.
3. La direction d’écoulement est −∇h. Téléchargez ensuite une tuile d’altitude USGS 3DEP gratuite et recommencez pour une colline près de chez vous.

Tableau de données

Voisin	Altitude (m)
Centre	250
Est	262
Ouest	240
Nord	256
Sud	246

Valeurs d’exemple pour l’entraînement.

Exemple de calcul

1. ∇h ≈ ⟨(262 − 240)/200, (256 − 246)/200⟩ = ⟨0.11, 0.05⟩.
2. |∇h| = 0.121, soit un angle de pente d’environ 6.9°.
3. L’eau s’écoule selon −∇h, vers l’ouest-sud-ouest ; tracer ces directions sur une grille dessine un bassin versant.

> **Sécurité**
>
> - Aucune, au-delà d’un usage normal de l’ordinateur.

Alternative à la maison ou virtuelle

- Un tableur suffit ; un logiciel SIG est facultatif.

USGS 3D Elevation Program (3DEP) (https://www.usgs.gov/3d-elevation-program)

Lien avec la planète : Les directions d'écoulement issues des grilles d'altitude sont la base des cartes d'inondation et d'érosion. USGS 3D Elevation Program (3DEP) (https://www.usgs.gov/3d-elevation-program)

- [ ] **J'ai terminé ce TP (réel ou virtuel)**

TP C : volume d’un lac par une intégrale double en polaires

SEMAINE 9

Objectif : Calculez le volume d’un lac en forme de cuvette exactement et par une somme numérique, et observez comment l’erreur diminue.

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{R} D\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) r \, dr \, d\theta = \frac{\pi R^2 D}{2}$$

```
V=_0^2π\!\!_0^RD(1-(r^2)/(R^2))r dr dθ=(π R^2D)/(2)
```

Lac à fond paraboloïde

Mode opératoire

1. Prenez R = 1000 m et une profondeur maximale D = 20 m.
2. Calculez le volume exact.
3. Découpez le lac en n anneaux, évaluez la profondeur au rayon médian de chaque anneau, et additionnez profondeur × aire de l’anneau. Essayez n = 5 et n = 10.

Tableau de données

Méthode	Volume (m³)
Exacte	3.14×10^7
Point milieu, 5 anneaux	3.20×10^7
Point milieu, 10 anneaux	3.16×10^7

Valeurs calculées pour un lac modèle.

Exemple de calcul

1. Exact : $\pi(1000)^2(20)/2 = 3.14 \times 10^7$ m³ (31.4 millions de mètres cubes).
2. La somme à 5 anneaux est trop élevée de 2.0 % et celle à 10 anneaux de 0.5 % : doubler n divise l’erreur par environ quatre.

> **Sécurité**
>
> - Aucune, au-delà d’un usage normal de l’ordinateur.

Alternative à la maison ou virtuelle

- Un tableur ou Python.

OpenStax Calculus 3, 5.3 Double Integrals in Polar Coordinates (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/5-3-double-integrals-in-polar-coordinates)

Lien avec la planète : Les volumes des lacs et des réservoirs issus de relevés bathymétriques indiquent aux gestionnaires de l'eau combien ils peuvent stocker et relâcher. NASA : mission SWOT (https://swot.jpl.nasa.gov/)

☐ **J'ai terminé ce TP (réel ou virtuel)**

TP D : calculer pas à pas une orbite de satellite

SEMAINE 3

Objectif : Intégrez numériquement r'' = −GM r/|r|³ pour une orbite de type Landsat et comparez deux méthodes de pas.

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n - \frac{GM\,\mathbf{r}_n}{|\mathbf{r}_n|^3}\Delta t, \quad \mathbf{r}_{n+1} = \mathbf{r}_n + \mathbf{v}_{n+1}\Delta t$$

```
v_n+1= v_n-(GM r_n)/(| r_n|^3)Δ t, r_n+1= r_n+ v_n+1Δ t
```

Euler semi-implicite (symplectique)

Mode opératoire

1. Partez de r = ⟨7076 km, 0⟩ avec v = ⟨0, 7505 m/s⟩ (unité 2).
2. Faites 592 pas avec Δt = 10 s (une période), d'abord avec Euler simple (mise à jour de r avec l'ancienne v), puis avec la version semi-implicite ci-dessus.
3. Comparez le rayon final avec celui de départ.

Tableau de données

Méthode (Δt = 10 s)	Variation du rayon après une orbite
Euler simple	+908 km
Euler semi-implicite	+0.16 km

Valeurs calculées ; GM = 3.986 × 10¹⁴ m³/s².

Exemple de calcul

1. Euler simple part en spirale vers l'extérieur d'environ 908 km par orbite, une prévision inutilisable ; même Δt = 1 s dérive encore d'environ 94 km.
2. La mise à jour semi-implicite change une seule ligne de code et maintient l'orbite à environ 0.16 km près.

> **Sécurité**
>
> - Aucune, au-delà d'un usage normal de l'ordinateur.

Alternative à la maison ou virtuelle

- Un tableur fonctionne ; Python dans Colab est plus simple.

Google Colab (notebooks gratuits) (https://colab.research.google.com/) · NASA: Landsat 9 quick facts (https://landsat.gsfc.nasa.gov/satellites/landsat-9/)

Lien avec la planète : Une propagation d'orbite précise maintient les satellites d'observation de la Terre sur leurs traces répétitives. NASA: Landsat 9 quick facts (https://landsat.gsfc.nasa.gov/satellites/landsat-9/)

- [ ] **J'ai terminé ce TP (réel ou virtuel)**

Séries d'entraînement aux examens

Chronométrez-vous : environ 10 minutes par problème. Comparez ensuite avec les solutions complètes.

Série d'entraînement pour le partiel (unités 1–4)

1. Calculez l'angle entre $\langle 1, 1, 0\rangle$ et $\langle 0, 1, 1\rangle$.

    1. Produit scalaire 1 ; les deux normes valent $\sqrt{2}$.
    2. $\cos\theta = 1/2$.

    Réponse : $60°$.

2. Trouvez le plan passant par $(1, 1, 1)$ de normale $\langle 2, -1, 3\rangle$.

    1. $2(x-1) - (y-1) + 3(z-1) = 0$.

    Réponse : $2x - y + 3z = 4$.

3. Un satellite orbite à un rayon de 6771 km (400 km d'altitude). Calculez sa période.

    1. $T = 2\pi\sqrt{(r^3/GM)}$.

    Réponse : ≈ 5544 s ≈ 92.4 min.

4. Maximisez $f = xy$ sous la contrainte $x + y = 10$.

    1. $\langle y, x\rangle = \lambda\langle 1, 1\rangle$ donne $x = y = 5$.

    Réponse : 25 en $(5, 5)$.

Série d'entraînement finale (toutes les unités)

1. Calculez $\int_0^{(2\pi)}\int_0^3 r\, dr\, d\theta$.

    1. $4.5 \times 2\pi$.

    Réponse : $9\pi \approx 28.3$ (aire d'un disque de rayon 3).

2. Calculez le volume d'une demi-boule de rayon 2 en coordonnées sphériques.

    1. $\int_0^{(2\pi)}\int_0^{(\pi/2)}\int_0^2 \rho^2 \sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta = (8/3)(1)(2\pi)$.

Réponse : 16π/3 ≈ 16.76.

3. Calculez $\oint F \cdot dr$ pour F = ⟨−y, x⟩ le long du carré [0, 2] × [0, 2], dans le sens trigonométrique.

    1. Green : $\iint 2\, dA = 2 \times 4$.

    Réponse : 8.

4. Calculez le flux sortant de F = ⟨2x, 0, 0⟩ à travers la sphère de rayon 1.

    1. div F = 2 ; flux = 2 × 4π/3.

    Réponse : 8π/3 ≈ 8.38.

Fiche de formules

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos\theta$$

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin\theta$$

$$n \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$$

$$L = \int |\mathbf{r}'(t)|\, dt$$

$$\kappa = |\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''| / |\mathbf{r}'|^3$$

$$v = \sqrt{GM/r}$$

$$\Delta f \approx f_x \Delta x + f_y \Delta y$$

$$D_{\mathbf{u}} f = \nabla f \cdot \mathbf{u}$$

$$D = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2$$

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

$$dA = r\, dr\, d\theta$$

$$dV = r\, dz\, dr\, d\theta$$

$$dV = \rho^2 \sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

$$\int_C \nabla\varphi \cdot d\mathbf{r} = \varphi(B) - \varphi(A)$$

$$\oint P\,dx + Q\,dy = \iint (Q_x - P_y)\, dA$$

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS$$

$$\oiint \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV$$

Constantes

Constante	Valeur
GM de la Terre	3.986×10^{14} m^3/s^2
Rayon moyen de la Terre	6,371 km
Éclairement solaire au niveau de la Terre	1,361 W/m^2
Pression moyenne au sol	1,014 mb = 101,400 Pa
Hauteur d'échelle de l'atmosphère	8.5 km
Pesanteur normale	9.81 m/s^2

Source : Fiche NASA sur la Terre (en anglais) (https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/earthfact.html)

Outils de tracé et de données

Utilisez ces outils et données gratuits en parallèle du cours.

- Calculatrice Desmos 3D (https://www.desmos.com/3d): Tracez des surfaces, des vecteurs et des courbes paramétrées en 3D.
- GeoGebra 3D (https://www.geogebra.org/3d): Un autre grapheur 3D gratuit.
- PhET : Vector Addition (https://phet.colorado.edu/en/simulations/vector-addition): Développez votre intuition des composantes et des sommes.
- MIT OpenCourseWare 18.02SC (https://ocw.mit.edu/courses/18-02sc-multivariable-calculus-fall-2010/): Cours, séances d'exercices et problèmes du MIT, gratuits.
- earth.nullschool.net: live global wind and ocean-current map (from NOAA GFS and other public data) (https://earth.nullschool.net/): Voyez de vrais champs de vecteurs de vents et de courants dans le monde entier.
- USGS 3D Elevation Program (3DEP) (https://www.usgs.gov/3d-elevation-program): Données d'altitude gratuites des États-Unis pour les calculs de gradient et de pente.

Glossaire

Circulation
Intégrale curviligne d'un champ le long d'une courbe fermée.

Champ conservatif
Un champ de gradient ; le travail ne dépend pas du chemin.

Produit vectoriel
Vecteur perpendiculaire à deux vecteurs.

Rotationnel
$\nabla \times F$; rotation locale d'un champ.

Courbure

À quel point une courbe se plie ; 1/R pour un cercle.

Dérivée directionnelle
Taux de variation dans une direction donnée, $\nabla f \cdot u$.

Divergence
$\nabla \cdot F$; débit sortant net par unité de volume.

Théorème de la divergence
Le flux sortant à travers une surface fermée est égal à l'intégrale de la divergence à l'intérieur.

Produit scalaire
$a \cdot b = |a||b| \cos \theta$.

Flux
Quantité d'un champ qui traverse une surface.

Gradient
Vecteur des dérivées partielles ; pointe vers le haut de la pente.

Théorème de Green
La circulation le long d'une courbe plane est égale à l'intégrale de $Q_x - P_y$ à l'intérieur.

Jacobienne
Facteur de dilatation d'un changement de variables.

Multiplicateur de Lagrange
λ dans $\nabla f = \lambda \nabla g$ pour l'optimisation sous contrainte.

Ligne de niveau
Courbe sur laquelle $f(x, y)$ est constante.

Intégrale curviligne
Intégrale le long d'une courbe.

Dérivée partielle
Dérivée selon une variable, les autres étant fixées.

Point selle
Point critique qui n'est ni un maximum ni un minimum.

Théorème de Stokes
La circulation sur le bord est égale au flux du rotationnel.

Champ de vecteurs
Association d'un vecteur à chaque point.

Grille d'autoévaluation

Aucune note ni aucun crédit ne sont attribués. Utilisez cette grille pour juger honnêtement où vous en êtes dans chaque unité.

Niveau	À quoi cela ressemble
4 · Maîtrise	Pose spontanément intégrales et champs à partir d'un dessin, choisit de bonnes coordonnées et vérifie ses réponses par une seconde méthode ou un théorème.
3 · Compétent	Résout les exercices d'entraînement avec quelques erreurs occasionnelles.
2 · En progression	Suit les exemples corrigés mais a du mal à poser les bornes ou à choisir les coordonnées.
1 · Débutant	Applique des formules sans dessiner ni vérifier ; doit revoir l'unité.

Pondération suggérée si vous voulez une note

Partie	Poids
Exercices	30%
Travaux pratiques sur ordinateur	15%
Série d'entraînement de mi-parcours	25%
Série d'entraînement finale	30%

Visez le niveau 3 ou mieux dans chaque unité avant de passer au cours suivant.

Cours associés

- Introduction à la programmation ENGR 130
- Équations différentielles MATH 220
- Physique II PHYS 210 + PHYS 210L
- Tous les cours