Última actualización: November 1, 2026

🗺️ Ruta de cuatro años · Año 2, Otoño

# Sobre este curso

Este curso gratuito tiene 8 unidades y 4 laboratorios. Son los totales reales, no un programa más largo recortado.

Una comprobación es un número o un resultado de código en una página de curso que un script vuelve a calcular antes de publicar. El número impreso y el recalculado tienen que coincidir.

> Este es el esquema de un curso gratuito de autoestudio escrito por Saving Planets. No es un curso universitario, no otorga créditos académicos y ninguna institución participa.
>
> Su alcance sigue el tercer semestre de cálculo universitario, basado en los temas y la profundidad de materiales abiertos como OpenStax Calculus Volume 3 y MIT OpenCourseWare 18.02 Multivariable Calculus, y en los programas de cursos como Stanford Math 51/52 y Georgia Tech MATH 2551. Enlazamos a los materiales gratuitos a lo largo del curso. Ninguna de esas organizaciones respalda esta página.
>
> Lo que añadimos: cada unidad se conecta con problemas reales de viento, océano, terreno, clima y satélites con una fuente pública citada, cada número de la página se vuelve a calcular con un script de verificación antes de publicarse, y cuatro prácticas de computadora aplican las ideas a campos de viento, mallas de elevación, volúmenes de lagos y órbitas.
>
> Síguelo en orden. Cada unidad tiene objetivos, ideas clave, ecuaciones, ejemplos paso a paso, práctica con respuestas completas, errores comunes, tarjetas de estudio y un cuestionario. Tu progreso se guarda solo en este navegador.

## Cómo ayuda este curso a salvar el planeta

El planeta es tridimensional y siempre está en movimiento. Los vientos y las corrientes oceánicas son campos vectoriales, el terreno y la temperatura son funciones de dos o tres variables, el calor y los contaminantes atraviesan superficies como flujo, y los satélites que miden todo esto siguen trayectorias vectoriales en el espacio.

Cada unidad termina con una breve sección con fuentes que muestra cómo sus ideas ayudan a las personas y a la naturaleza.

## Para docentes

Puedes enseñar este curso o dejar que un estudiante lo haga solo. Es gratis. Saving Planets no pone nota ni da crédito escolar.

- Esta página es el curso completo: 8 unidades y 4 laboratorios (MATH 210).
- Calcula 15 semanas, unas 6 a 9 horas por semana, incluidas las semanas de laboratorio.
- Sigue el calendario de 15 semanas. Lee la unidad, haz la práctica en papel y luego abre la respuesta. En una semana de laboratorio, haz el laboratorio o la versión en casa.
- Una comprobación es un número o un resultado de código en la página que un script vuelve a calcular antes de publicar. El número que ves y el recalculado tienen que coincidir.
- Usa Imprimir esta página, o descarga la guía de estudio en PDF. La hoja de fórmulas está cerca del final.
- Pregunta: ¿cómo ayuda esta unidad a las personas y al planeta? Cada unidad tiene un recuadro verde con un dato y su fuente.
- Copia la plantilla de guía docente y escribe el nombre de tu clase, el tiempo que tienes y las preguntas que harás. Abrir la plantilla de guía docente

# Antes de empezar

### Requisitos previos

- Cálculo I y II: derivadas, integrales, sustitución e integración por partes, curvas paramétricas y polares.
- Trigonometría básica y la ecuación de la circunferencia y de la esfera.
- Física I ayuda con los ejemplos de trabajo, flujo y órbitas, pero no es obligatoria.

### Cómo estudiar

- Haz un dibujo en 3D para cada problema: los ejes, la región, los vectores.
- Resuelve cada ejercicio en papel antes de abrir la respuesta.
- Comprueba unidades y signos: un flujo, un trabajo o una circulación deben tener sentido físico.
- En las integrales múltiples, esboza la región y escribe los límites antes de integrar nada.
- Usa un graficador 3D (Desmos 3D o GeoGebra 3D) para ver superficies y campos.
- Repite los cuestionarios unos días después. La práctica espaciada es mejor que una sesión larga.

### Qué necesitas

- Una computadora o tableta con una hoja de cálculo.
- Un graficador 3D gratuito como Desmos 3D o GeoGebra 3D.
- Opcional: Python con NumPy (gratis en Google Colab).

# Calendario sugerido de 15 semanas

Unas 6 a 9 horas por semana: lectura, problemas de práctica y, en las semanas de laboratorio, el laboratorio.

| Semana | Unidad | Temas | Lectura |
|---|---|---|---|
| 1 | Vectores y geometría del espacio | Coordenadas 3D, vectores, producto escalar | OpenStax 2.1–2.3 |
| 2 | Vectores y geometría del espacio | Producto vectorial, rectas y planos | OpenStax 2.4–2.5 |
| 3 | Funciones vectoriales y movimiento en el espacio | Funciones vectoriales, movimiento en el espacio, curvatura; práctica D | OpenStax 3.1–3.4 |
| 4 | Derivadas parciales | Funciones de varias variables, límites, derivadas parciales | OpenStax 4.1–4.3 |
| 5 | Derivadas parciales | Planos tangentes, aproximación lineal, regla de la cadena | OpenStax 4.4–4.5 |
| 6 | Gradientes y optimización | Gradiente, derivadas direccionales, extremos | OpenStax 4.6–4.7 |
| 7 | Gradientes y optimización | Multiplicadores de Lagrange; práctica B; repaso para el parcial | OpenStax 4.8 |
| 8 | Integrales dobles | Integrales dobles sobre rectángulos y regiones generales | OpenStax 5.1–5.2 |
| 9 | Integrales dobles | Integrales dobles en polares; práctica C | OpenStax 5.3 |
| 10 | Integrales triples y cambio de variables | Integrales triples; coordenadas cilíndricas y esféricas | OpenStax 5.4–5.5 |
| 11 | Integrales triples y cambio de variables | Masa y centro de masa; cambio de variables | OpenStax 5.6–5.7 |
| 12 | Campos vectoriales, integrales de línea y teorema de Green | Campos vectoriales, integrales de línea, campos conservativos, teorema de Green | OpenStax 6.1–6.4 |
| 13 | Integrales de superficie, teorema de Stokes y teorema de la divergencia | Divergencia y rotacional; integrales de superficie y flujo | OpenStax 6.5–6.6 |

| Semana | Unidad | Temas | Lectura |
|---|---|---|---|
| 14 | Integrales de superficie, teorema de Stokes y teorema de la divergencia | Teoremas de Stokes y de la divergencia; práctica A | OpenStax 6.7–6.8 |
| 15 | Repaso | Repaso y serie de práctica final | Todas las unidades |

## Tu progreso

Marca las unidades y los laboratorios al terminarlos y haz los cuestionarios. El progreso y las puntuaciones se guardan solo en este navegador y nunca se nos envían.

## Unidades

# Vectores y geometría del espacio

Coordenadas 3D, vectores, productos escalar y vectorial, y ecuaciones de rectas y planos.

## Objetivos de aprendizaje

Al terminar esta unidad podrás:

- Sumar vectores en 3D, multiplicarlos por un escalar y hallar su longitud.
- Usar el producto escalar para ángulos y proyecciones.
- Usar el producto vectorial para normales, áreas y volúmenes.
- Escribir ecuaciones de rectas y planos, y hallar distancias.

## Conceptos clave

- Un vector tiene magnitud y dirección; en componentes, $v = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ y $|v| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$.
- El producto escalar $a \cdot b = |a||b| \cos\theta$ mide cuánto apuntan dos vectores en la misma dirección. Es cero exactamente cuando son perpendiculares.
- El producto vectorial $a \times b$ es perpendicular a ambos, con longitud igual al área del paralelogramo que generan.
- Un plano queda fijado por un punto y un vector normal n: $n \cdot (r - r_0) = 0$. Una recta es un punto más múltiplos de una dirección: $r = r_0 + t\,v$.

## Ecuaciones clave

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos\theta$$

```
a· b=| a|| b|θ
```

Producto escalar y ángulo

$$\text{proj}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}\mathbf{b}$$

```
_ b a=( a· b)/(| b|^2) b
```

Proyección

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin\theta$$

```
| a× b|=| a|| b|θ
```

Longitud del producto vectorial = área del paralelogramo

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

`a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0`

Plano con normal ⟨a, b, c⟩

$$D = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

`D=|ax_1+by_1+cz_1-d|^2+b^2+c^2`

Distancia de un punto al plano ax + by + cz = d

## Ejemplos resueltos paso a paso

**Ejemplo 1.1** Para a = ⟨1, 2, 2⟩ y b = ⟨2, −1, 2⟩, halla |a|, a · b y el ángulo entre ellos.

1. |a| = √(1 + 4 + 4) = 3, y también |b| = 3.
2. a · b = 2 − 2 + 4 = 4.
3. cos θ = 4/9, así que θ = arccos(0.444).

**Respuesta:** |a| = 3, a · b = 4, θ ≈ 63.6°.

**Ejemplo 1.2** Halla a × b para los mismos vectores y el área del paralelogramo que generan.

1. a × b = ⟨2·2 − 2·(−1), 2·2 − 1·2, 1·(−1) − 2·2⟩.
2. = ⟨6, 2, −5⟩. Comprobación: su producto escalar con a y con b es 0.
3. Área = |⟨6, 2, −5⟩| = √65.

**Respuesta:** ⟨6, 2, −5⟩; área √65 ≈ 8.06.

**Ejemplo 1.3** Un viento de 10 m/s sopla a 30° del eje del rotor de un aerogenerador. ¿Qué fracción de la potencia de frente recibe la turbina, si la potencia crece con el cubo de la velocidad del viento a lo largo de su eje?

1. Componente a lo largo del eje: 10 cos 30° = 8.66 m/s (un producto escalar con el vector unitario del eje).
2. Razón de potencias = $(\cos 30°)^3$.

**Respuesta:** Unos 0.65: una desalineación de 30° pierde aproximadamente un tercio de la potencia, por eso las turbinas giran para encarar el viento.

## Problemas de práctica

Resuelve cada uno primero en papel y luego comprueba.

1. Halla el plano que pasa por (1, 0, 0), (0, 2, 0) y (0, 0, 3).

   Forma segmentaria $x/1 + y/2 + z/3 = 1$, es decir, $6x + 3y + 2z = 6$.

2. Halla la distancia del origen a ese plano.

   $|-6|/\sqrt{(36 + 9 + 4)} = 6/7 \approx 0.857$.

3. Halla la proyección de $\langle 3, 4, 0\rangle$ sobre $\langle 1, 0, 0\rangle$.

   $\langle 3, 0, 0\rangle$.

4. Halla el volumen de la caja (paralelepípedo) generada por $\langle 1, 0, 0\rangle$, $\langle 0, 2, 0\rangle$ y $\langle 1, 1, 3\rangle$.

   $|a \cdot (b \times c)| = \det = 1\cdot(2\cdot 3 - 0\cdot 1) = 6$.

5. ¿Son perpendiculares $\langle 1, 2, 3\rangle$ y $\langle 3, 0, -1\rangle$?

   Producto escalar $3 + 0 - 3 = 0$, así que sí.

## Ideas erróneas comunes

**Mito:** $a \times b = b \times a$.
**En realidad:** El producto vectorial es anticonmutativo: $b \times a = -(a \times b)$.

**Mito:** El producto escalar de dos vectores es un vector.
**En realidad:** Es un escalar (un número).

**Mito:** La ecuación de un plano te dice su dirección.
**En realidad:** Sus coeficientes dan la normal, que es perpendicular al plano.

## Tarjetas de estudio

**Producto escalar**

$a \cdot b = |a||b| \cos\theta$; cero cuando son perpendiculares.

**Producto vectorial**

Perpendicular a ambos; longitud = área del paralelogramo.

**Proyección**

$(a \cdot b/|b|^2)\, b$.

**Producto mixto**

$|a \cdot (b \times c)|$ = volumen de la caja.

| Plano | Recta |
| --- | --- |
| $n \cdot (r - r_0) = 0$. | $r = r_0 + t\,v$. |

## Cuestionario de autoevaluación

**1. Si $a \cdot b = 0$ (ambos no nulos), los vectores son…**

paralelos

perpendiculares

iguales

opuestos

perpendiculares. $\cos\theta = 0$, así que $\theta = 90°$.

**2. La longitud de $a \times b$ es igual a…**

el ángulo entre ellos

el área del paralelogramo

$a \cdot b$

$|a| + |b|$

el área del paralelogramo. $|a||b| \sin\theta$.

**3. La normal a $2x - y + 5z = 7$ es…**

$\langle 2, -1, 5 \rangle$

$\langle 7, 0, 0 \rangle$

$\langle 2, 1, 5 \rangle$

$\langle 1, 1, 1 \rangle$

$\langle 2, -1, 5 \rangle$. Lee los coeficientes.

**4. $|\langle 2, 3, 6\rangle| =$**

11

7

√11

49

7. √(4 + 9 + 36) = √49.

**Repetir este cuestionario**

## Cómo ayuda esto a salvar el planeta

El viento es un vector, y las turbinas giran su rotor para encararlo porque la potencia depende del cubo de la componente a lo largo del eje del rotor, un producto escalar disfrazado.

La misma aritmética le dice a un panel solar cuánta luz capta: la parte útil es el producto escalar de la dirección de la luz solar con el vector normal del panel.

En Saving Planets: Física I, unidad 3: energía eólica

Fuentes: DOE de EE. UU.: ¿cómo funcionan los aerogeneradores? (en inglés) (https://www.energy.gov/eere/wind/how-do-wind-turbines-work) · OpenStax Calculus 3, 2.3 The Dot Product (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/2-3-the-dot-product)

## Recursos de aprendizaje gratuitos

- OpenStax Calculus 3, 2.3 The Dot Product (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/2-3-the-dot-product): Ángulos y proyecciones.
- OpenStax Calculus 3, 2.4 The Cross Product (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/2-4-the-cross-product): Normales, áreas y torque.
- OpenStax Calculus 3, 2.5 Equations of Lines and Planes in Space (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/2-5-equations-of-lines-and-planes-in-space): Rectas, planos y distancias.

## Ver la clase

Session 79 Clip: Vector Fields in Space (https://ocw.mit.edu/courses/18-02sc-multivariable-calculus-fall-2010/resources/clip-vector-fields-in-space/) (en inglés)

MIT 18.02SC Multivariable Calculus (Fall 2010), MIT OpenCourseWare. Licencia: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Condiciones de uso (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Enlace solo para estudio

gratuito; Saving Planets no está afiliado a esta universidad ni cuenta con su respaldo.

- [ ] **Terminé esta unidad**

UNIDAD 2 · SEMANA 3

# Funciones vectoriales y movimiento en el espacio

Curvas en el espacio como funciones vectoriales: velocidad, aceleración, longitud de arco, curvatura y el movimiento de los satélites.

## Objetivos de aprendizaje

Al terminar esta unidad podrás:

- Derivar e integrar funciones vectoriales.
- Hallar velocidad, rapidez y aceleración a lo largo de una trayectoria.
- Calcular longitud de arco y curvatura.
- Analizar órbitas circulares con cálculo vectorial.

## Conceptos clave

- Una curva en el espacio es r(t) = ⟨x(t), y(t), z(t)⟩; se deriva componente a componente.
- La velocidad v = r'(t) es tangente a la trayectoria; la rapidez es |v|; la aceleración es a = v'.
- La longitud de arco es la integral de la rapidez: L = ∫|r'(t)| dt.
- En el movimiento circular uniforme la rapidez es constante, pero la aceleración apunta al centro con tamaño v²/r.

## Ecuaciones clave

$$\mathbf{v} = \mathbf{r}'(t),\ \mathbf{a} = \mathbf{r}''(t)$$

`v= r'(t),\ a= r''(t)`

Velocidad y aceleración

$$L = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)|\,dt$$

`L=_a^b| r'(t)| dt`

Longitud de arco

$$\kappa = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}'|^3}$$

`=(| r'× r''|)/(| r'|^3)`

Curvatura

$$v = \sqrt{GM/r},\ T = 2\pi r/v$$

$v = /r,\ T = 2\pi\ r/v$

Velocidad y período de una órbita circular

## Ejemplos resueltos paso a paso

**Ejemplo 2.1** Halla la longitud de una vuelta de la hélice $r(t) = \langle \cos t, \sin t, t \rangle$, $0 \le t \le 2\pi$.

1. $r' = \langle -\sin t, \cos t, 1 \rangle$, rapidez $\sqrt{(\sin^2 t + \cos^2 t + 1)} = \sqrt{2}$.
2. $L = \int_0^{(2\pi)} \sqrt{2}\, dt = 2\pi\sqrt{2}$.

**Respuesta:** $2\pi\sqrt{2} \approx 8.89$.

**Ejemplo 2.2** Landsat 9 orbita a 705 km sobre la Tierra (radio medio 6371 km). Tratando la órbita como un círculo, halla su velocidad, su aceleración y su periodo.

1. $r = 7{,}076$ km $= 7.076 \times 10^6$ m; $GM = 3.986 \times 10^{14}$ m³/s².
2. $v = \sqrt{(GM/r)} = 7{,}505$ m/s.
3. $a = v^2/r = 7.96$ m/s², apuntando al centro de la Tierra.
4. $T = 2\pi r/v = 5{,}924$ s.

**Respuesta:** Unos 7.5 km/s y 98.7 minutos por órbita, en línea con el periodo de 99 minutos que indica la NASA.

**Ejemplo 2.3** Halla la curvatura de una circunferencia de radio 2, $r(t) = \langle 2\cos t, 2\sin t, 0 \rangle$.

1. $r' = \langle -2\sin t, 2\cos t, 0 \rangle$, $|r'| = 2$.
2. $r'' = \langle -2\cos t, -2\sin t, 0 \rangle$; $r' \times r'' = \langle 0, 0, 4 \rangle$.
3. $\kappa = 4/2^3$.

**Respuesta:** $\kappa = 1/2$: la curvatura de una circunferencia es 1/radio.

## Problemas de práctica

Resuelve cada uno primero en papel y luego comprueba.

1. Un proyectil tiene $r(t) = \langle 20t, 20t - 4.9t^2 \rangle$ m. Halla su velocidad y su rapidez en $t = 1$ s.

   $v = \langle 20, 20 - 9.8t \rangle = \langle 20, 10.2 \rangle$; rapidez $\sqrt{(400 + 104.04)} \approx 22.45$ m/s.

2. Halla la aceleración de $r(t) = \langle t^2, 3t, e^t \rangle$.

$\langle 2, 0, e^t \rangle$.

3. Halla la longitud de $r(t) = \langle 3t, 4t, 0 \rangle$ para $0 \le t \le 2$.

   Rapidez 5, así que $L = 10$.

4. Un satélite orbita a 35786 km de altitud. Halla su periodo.

   $r = 42157$ km; $T = 2\pi\sqrt{(r^3/GM)} \approx 86160$ s $\approx 23.93$ h: un día sidéreo, así que es geoestacionario.

## Ideas erróneas comunes

**Mito:** Rapidez constante significa aceleración cero.

**En realidad:** Girar es acelerar: un satélite en órbita circular acelera hacia la Tierra todo el tiempo.

**Mito:** La longitud de arco es $|r(b) - r(a)|$.

**En realidad:** Esa es la distancia en línea recta; la longitud de arco integra la rapidez a lo largo del camino.

**Mito:** Los satélites más altos se mueven más rápido.

**En realidad:** $v = \sqrt{(GM/r)}$ disminuye con la distancia; las órbitas más altas son más lentas y más largas.

## Tarjetas de estudio

**Función vectorial**

$r(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$.

**Velocidad**

$r'(t)$, tangente a la trayectoria.

**La rapidez**

$|r'(t)|$.

**Longitud de arco**

$\int |r'| \, dt$.

**Curvatura**

$|r' \times r''|/|r'|^3$.

**Órbita circular**

$v = \sqrt{(GM/r)}$.

## Cuestionario de autoevaluación

**1. La velocidad es...**

$r(t)$

r'(t)

|r(t)|

∫r dt

r'(t). La derivada de la posición.

**2. La longitud de arco integra...**

posición

la rapidez

aceleración

la curvatura

la rapidez. $L = \int |r'| \, dt$.

**3. La curvatura de una circunferencia de radio 5 es...**

5

1/5

25

0

1/5. $\kappa = 1/R$.

**4. Duplicar el radio de una órbita circular cambia su velocidad por un factor...**

2

$1/\sqrt{2}$

1/2

$\sqrt{2}$

$1/\sqrt{2}$. $v \propto 1/\sqrt{r}$.

Repetir este cuestionario

## Cómo ayuda esto a salvar el planeta

Los satélites de observación de la Tierra como Landsat 9 siguen trayectorias vectoriales elegidas exactamente con estas fórmulas. Su órbita casi polar y heliosíncrona a 705 km le permite fotografiar el mismo lugar cada 16 días a aproximadamente la misma hora local, de modo que los cambios en bosques, glaciares y ciudades destacan.

En Saving Planets: Landsat 9 · Cálculo II, unidad 7: órbitas polares

Fuentes: NASA: Landsat 9 quick facts (https://landsat.gsfc.nasa.gov/satellites/landsat-9/) · Ficha de la NASA sobre la Tierra (en inglés) (https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/earthfact.html)

## Recursos de aprendizaje gratuitos

- OpenStax Calculus 3, 3.2 Calculus of Vector-Valued Functions (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/3-2-calculus-of-vector-valued-functions): Derivadas e integrales.
- OpenStax Calculus 3, 3.4 Motion in Space (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/3-4-motion-in-space): Velocidad, aceleración y leyes de Kepler.

## Ver la clase

Session 79 Clip: Vector Fields in Space (https://ocw.mit.edu/courses/18-02sc-multivariable-calculus-fall-2010/resources/clip-vector-fields-in-space/) (en inglés)

MIT 18.02SC Multivariable Calculus (Fall 2010), MIT OpenCourseWare. Licencia: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Condiciones de uso (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Enlace solo para estudio gratuito; Saving Planets no está afiliado a esta universidad ni cuenta con su respaldo.

☐ **Terminé esta unidad**

# Derivadas parciales

Funciones de varias variables: curvas de nivel, derivadas parciales, planos tangentes, aproximación lineal y regla de la cadena multivariable.

## Objetivos de aprendizaje

Al terminar esta unidad podrás:

- Leer curvas de nivel y mapas topográficos.
- Calcular derivadas parciales e interpretarlas como tasas.
- Hallar planos tangentes y usar la aproximación lineal.
- Aplicar la regla de la cadena multivariable.

## Conceptos clave

- Una función z = f(x, y) es una superficie; sus curvas de nivel f = c forman un mapa de contorno.
- ∂f/∂x es la tasa de cambio en x con y fija.
- Cerca de un punto, una superficie suave se parece a su plano tangente: Δf ≈ $f_x$Δx + f_yΔy.
- Regla de la cadena: si x e y dependen de t, df/dt = $f_x$ dx/dt + f_y dy/dt.

## Ecuaciones clave

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$$

`f_x=( f)/( x)`

Derivada parcial

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

`z-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)`

Plano tangente

$$\frac{df}{dt} = f_x \frac{dx}{dt} + f_y \frac{dy}{dt}$$

`df/dt=f_xdx/dt+f_ydy/dt`

Regla de la cadena

$$f_{xy} = f_{yx}$$

`f_xy=f_yx`

## Ejemplos resueltos paso a paso

**Ejemplo 3.1** Para $f(x, y) = x^2y + y^3$, halla $f_x$ y $f_y$ en (1, 2), y usa el plano tangente para estimar f(1.1, 1.9).

1. $f_x = 2xy = 4$; $f_y = x^2 + 3y^2 = 13$; $f(1, 2) = 10$.
2. $f \approx 10 + 4(0.1) + 13(-0.1) = 9.1$.
3. Valor real: $1.21 \times 1.9 + 6.859 = 9.158$.

**Respuesta:** Estimación 9.1 frente al valor real 9.158.

**Ejemplo 3.2** Para un gas ideal, $P = nRT/V$. Con n = 1 mol, T = 300 K y $V = 0.025\ m^3$, halla P, $\partial P/\partial T$ y $\partial P/\partial V$.

1. $P = 8.314 \times 300/0.025 = 99{,}768$ Pa.
2. $\partial P/\partial T = nR/V = 332.6$ Pa/K.
3. $\partial P/\partial V = -nRT/V^2 = -P/V = -3.99 \times 10^6$ Pa/m³.

**Respuesta:** P ≈ 99.8 kPa; calentar 1 K la sube unos 333 Pa; expandir la baja.

**Ejemplo 3.3** Un dron vuela con $x = 2t$, $y = t^2$. La temperatura que mide es $T = 20 + 0.1x - 0.05y$ (°C, km). Halla dT/dt en t = 1.

1. $T_x = 0.1$, $T_y = -0.05$; $dx/dt = 2$, $dy/dt = 2t = 2$.
2. $dT/dt = 0.1(2) - 0.05(2)$.

**Respuesta:** 0.1 °C por unidad de tiempo.

## Problemas de práctica

Resuelve cada uno primero en papel y luego comprueba.

1. Halla $f_x$ y $f_y$ para $f = e^{(xy)}$.

   $f_x = y\, e^{(xy)}$, $f_y = x\, e^{(xy)}$.

2. Halla $f_{xy}$ para $f = x^3y^2$.

   $f_x = 3x^2y^2$, $f_{xy} = 6x^2y$ (igual que $f_{yx}$).

3. Halla el plano tangente a $z = x^2 + y^2$ en (1, 1, 2).

$z = 2 + 2(x - 1) + 2(y - 1)$, i.e. $z = 2x + 2y - 2$.

4. Estima $\sqrt{(3.02^2 + 3.97^2)}$ por aproximación lineal en (3, 4).

   $f = 5$, $f_x = 3/5$, $f_y = 4/5$: $5 + 0.6(0.02) + 0.8(-0.03) = 4.988$ (valor real 4.9880).

## Ideas erróneas comunes

**Mito:** $\partial f/\partial x$ ignora y.

**En realidad:** Mantiene y fija; y puede seguir apareciendo en la respuesta.

**Mito:** Si existen ambas parciales, f es suave.

**En realidad:** Las parciales pueden existir donde f ni siquiera es continua; la diferenciabilidad requiere más.

**Mito:** La aproximación lineal es buena en cualquier parte.

**En realidad:** Solo cerca del punto base.

## Tarjetas de estudio

**Derivada parcial**

Tasa de cambio en una variable con las demás fijas.

**Curva de nivel**

$f(x, y) = c$; una línea de contorno.

**Plano tangente**

$z = z_0 + f_x\Delta x + f_y\Delta y$.

**Aproximación lineal**

$\Delta f \approx f_x\Delta x + f_y\Delta y$.

**Regla de la cadena**

$df/dt = f_x x' + f_y y'$.

**Clairaut**

$f_{xy} = f_{yx}$ para f suave.

## Cuestionario de autoevaluación

**1. Para $f = x^2y$, $f_x$ =**

2x

2xy

$x^2$

$x^2y$

2xy. Trata y como una constante.

**2. Las curvas de nivel de $f(x, y) = x^2 + y^2$ son...**

rectas

circunferencias

parábolas

puntos

circunferencias. $x^2 + y^2 = c$.

**3. Para f suave, f_xy y f_yx son...**

opuestos

iguales

independientes

cero

iguales. Teorema de Clairaut.

**4. df/dt para f(x(t), y(t)) es...**

$f_x$ + f_y

$f_x$x' + f_yy'

$f_x$f_y

x'y'

$f_x$x' + f_yy'. Regla de la cadena multivariable.

Repetir este cuestionario

## Cómo ayuda esto a salvar el planeta

Los mapas del tiempo son mapas de contorno de funciones de dos variables: las isobaras son curvas de nivel de la presión y las isotermas, de la temperatura. Las derivadas parciales indican a los meteorólogos con qué rapidez cambia la presión o la temperatura hacia el este o el norte, lo que impulsa los vientos.

En Saving Planets: Cálculo I

Fuentes: NOAA/NWS JetStream: Wind (https://www.weather.gov/jetstream/wind) · OpenStax Calculus 3, 4.3 Partial Derivatives (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/4-3-partial-derivatives)

## Recursos de aprendizaje gratuitos

- OpenStax Calculus 3, 4.3 Partial Derivatives (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/4-3-partial-derivatives): Sección de libro de texto gratuita.
- OpenStax Calculus 3, 4.4 Tangent Planes and Linear Approximations (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/4-4-tangent-planes-and-linear-approximations): Planos tangentes.
- OpenStax Calculus 3, 4.5 The Chain Rule (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/4-5-the-chain-rule): Regla de la cadena.

## Ver la clase

Session 26 Clip: Partial Derivatives (https://ocw.mit.edu/courses/18-02sc-multivariable-calculus-fall-2010/resources/clip-partial-derivatives/) (en inglés)

MIT 18.02SC Multivariable Calculus (Fall 2010), MIT OpenCourseWare. Licencia: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Condiciones de uso (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Enlace solo para estudio gratuito; Saving Planets no está afiliado a esta universidad ni cuenta con su respaldo.

☐ **Terminé esta unidad**

# Gradientes y optimización

El vector gradiente, las derivadas direccionales, los puntos críticos y el criterio de la segunda derivada, y la optimización con restricciones mediante multiplicadores de Lagrange.

## Objetivos de aprendizaje

Al terminar esta unidad podrás:

- Calcular el gradiente y las derivadas direccionales.
- Explicar por qué el gradiente apunta cuesta arriba y es perpendicular a las curvas de nivel.
- Clasificar puntos críticos con el criterio de la segunda derivada.
- Resolver problemas con restricciones mediante multiplicadores de Lagrange.

## Conceptos clave

- ∇f = ⟨$f_x$, f_y⟩ apunta en la dirección de crecimiento más rápido, y su longitud es esa tasa máxima.
- La tasa de cambio en la dirección de un vector unitario u es D_u f = ∇f · u.
- El gradiente es perpendicular a las curvas de nivel, así que el agua baja a lo largo de −∇h, cruzando los contornos.
- En un extremo interior ∇f = 0. El criterio D = f_xx f_yy − $f_{xy}^2$ decide: D > 0 y f_xx > 0 es un mínimo; D < 0 es un punto de silla.
- Para optimizar f sujeta a g = c, resuelve ∇f = λ∇g: en el mejor punto la curva de nivel de f apenas toca la restricción.

## Ecuaciones clave

$$\nabla f = \langle f_x, f_y, f_z \rangle$$

```
f= f_x,f_y,f_z
```

Gradiente

$$D_{\mathbf{u}} f = \nabla f \cdot \mathbf{u}$$

```
D_ uf= f· u
```

Derivada direccional

$$D = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2$$

```
D=f_xxf_yy-f_xy^2
```

Criterio de la segunda derivada

$$\nabla f = \lambda \nabla g, \quad g = c$$

`f= g, g=c`

Condición de los multiplicadores de Lagrange

## Ejemplos resueltos paso a paso

**Ejemplo 4.1** Una colina tiene altura h(x, y) = 500 − 0.01x² − 0.02y² (metros, x e y en metros). En (100, 50), halla ∇h, la pendiente máxima y la pendiente en dirección ⟨3, 4⟩/5.

1. ∇h = ⟨−0.02x, −0.04y⟩ = ⟨−2, −2⟩.
2. Tasa máxima de subida |∇h| = 2√2 = 2.83 m por m.
3. D_u h = ⟨−2, −2⟩ · ⟨0.6, 0.8⟩ = −2.8.

**Respuesta:** Subida máxima 2.83 (cuesta arriba hacia ⟨−1, −1⟩); yendo hacia ⟨3, 4⟩ bajas 2.8 m por m. La lluvia escurre a lo largo de −∇h.

**Ejemplo 4.2** Halla y clasifica el punto crítico de f = x² + xy + y² − 3x.

1. $f_x$ = 2x + y − 3 = 0, f_y = x + 2y = 0 dan x = 2, y = −1.
2. f_xx = 2, f_yy = 2, f_xy = 1: D = 3 > 0, f_xx > 0.
3. f(2, −1) = 4 − 2 + 1 − 6 = −3.

**Respuesta:** Un mínimo, f = −3 en (2, −1).

**Ejemplo 4.3** Una lata debe contener 1 litro (1000 cm³). ¿Qué radio y altura usan menos metal (cilindro cerrado)?

1. Minimiza A = 2πr² + 2πrh con g = πr²h = 1000.
2. ∇A = λ∇g da 4πr + 2πh = λ2πrh y 2πr = λπr², así que λ = 2/r y h = 2r.
3. πr²(2r) = 1000 da r = (500/π)^(1/3).

**Respuesta:** r ≈ 5.42 cm, h ≈ 10.84 cm (altura = diámetro), área ≈ 554 cm².

## Problemas de práctica

Resuelve cada uno primero en papel y luego comprueba.

1. Halla ∇f para f = xyz en (1, 2, 3).

$\langle yz, xz, xy \rangle = \langle 6, 3, 2 \rangle$.

2. Halla $D_u f$ para $f = x^2 + y^2$ en $(1, 1)$ hacia $\langle 1, 0 \rangle$.

   $\nabla f = \langle 2, 2 \rangle$; $D_u f = 2$.

3. Clasifica el punto crítico de $f = x^2 - y^2$.

   En $(0, 0)$: $D = (2)(-2) - 0 = -4 < 0$, un punto de silla.

4. Cerca un rectángulo junto a un río recto con 40 m de valla (sin valla del lado del río). Maximiza el área.

   Maximiza $xy$ con $x + 2y = 40$: $y = 10$, $x = 20$, área 200 $m^2$.

5. Maximiza $f = x + y$ sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 2$.

   $\langle 1, 1 \rangle = \lambda \langle 2x, 2y \rangle$ da $x = y = 1$; máximo 2.

## Ideas erróneas comunes

**Mito:** El gradiente apunta a lo largo de la curva de nivel.

**En realidad:** Es perpendicular a la curva de nivel.

**Mito:** $\nabla f = 0$ significa un máximo o un mínimo.

**En realidad:** Puede ser un punto de silla; usa el criterio de D.

**Mito:** $\lambda$ es solo un truco para eliminar.

**En realidad:** $\lambda$ es la tasa a la que cambia el valor óptimo cuando cambia la restricción c, lo que es útil en economía e ingeniería.

## Tarjetas de estudio

**Gradiente**

$\langle f_x, f_y, f_z \rangle$; crecimiento más rápido.

**Derivada direccional**

$\nabla f \cdot u$.

**Punto crítico**

$\nabla f = 0$.

**Punto de silla**

$D < 0$.

**Condición de Lagrange**

$\nabla f = \lambda \nabla g$.

**Descenso más pronunciado**

Moverse a lo largo de $-\nabla f$.

## Cuestionario de autoevaluación

**1. El gradiente apunta...**

a lo largo de las curvas de nivel

en la dirección de crecimiento más rápido

cuesta abajo

hacia el origen

en la dirección de crecimiento más rápido. Su longitud es la tasa máxima.

**2. D < 0 en un punto crítico significa...**

mínimo

máximo

silla

ninguna conclusión

silla. Curvado hacia arriba en un sentido y hacia abajo en otro.

**3. Los multiplicadores de Lagrange resuelven...**

$\nabla f = 0$

$\nabla f = \lambda \nabla g$

$f = g$

$f' = \lambda$

$\nabla f = \lambda \nabla g$. Los gradientes son paralelos en un óptimo con restricción.

**4. $D_u f$ es máxima cuando u es...**

perpendicular a $\nabla f$

paralelo a $\nabla f$

opuesto a $\nabla f$

cualquier dirección

paralelo a $\nabla f$. $\nabla f \cdot u = |\nabla f| \cos \theta$.

**Repetir este cuestionario**

## Cómo ayuda esto a salvar el planeta

El agua baja siguiendo el gradiente del terreno. Los mapas de inundación, los límites de cuencas y los modelos de erosión se construyen calculando $-\nabla h$ a partir de datos de elevación, como los modelos de elevación lidar gratuitos del USGS 3D Elevation Program.

Los multiplicadores de Lagrange minimizan el material para un volumen o resistencia requeridos. Usar menos material para el mismo trabajo recorta directamente la minería, la energía y las emisiones.

En Saving Planets: Página de Ríos · Dibujo técnico / CAD: aligeramiento

Fuentes: USGS 3D Elevation Program (3DEP) (https://www.usgs.gov/3d-elevation-program) · OpenStax Calculus 3, 4.8 Lagrange Multipliers (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/4-8-lagrange-multipliers)

## Recursos de aprendizaje gratuitos

- OpenStax Calculus 3, 4.6 Directional Derivatives and the Gradient (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/4-6-directional-derivatives-and-the-gradient): Gradientes.
- OpenStax Calculus 3, 4.7 Maxima/Minima Problems (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/4-7-maxima-minima-problems): Criterio de la segunda derivada.
- OpenStax Calculus 3, 4.8 Lagrange Multipliers (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/4-8-lagrange-multipliers): Optimización con restricciones.

**Terminé esta unidad**

# Integrales dobles

Integrar sobre regiones del plano: integrales iteradas, teorema de Fubini, regiones generales, coordenadas polares, área, masa y promedios.

## Objetivos de aprendizaje

Al terminar esta unidad podrás:

- Evaluar integrales dobles como integrales iteradas.
- Plantear límites para regiones generales e invertir el orden.
- Pasar a coordenadas polares con dA = r dr dθ.
- Usar integrales dobles para áreas, masas, promedios y totales sobre un mapa.

## Conceptos clave

- ∬_R f dA suma f por áreas diminutas. Sobre un rectángulo, Fubini dice que se integra una variable y luego la otra, en cualquier orden.
- Para una región general, los límites interiores son curvas; esboza la región para leerlos.
- Las regiones redondas son más fáciles en coordenadas polares, donde el elemento de área es r dr dθ (no dr dθ).
- El promedio de f sobre R es ∬f dA dividido entre el área de R.

## Ecuaciones clave

$$\iint_R f\,dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$$

```
_Rf dA=_a^b\!_c^df(x,y) dy dx
```

Teorema de Fubini

$$dA = r\,dr\,d\theta$$

```
dA=r dr dθ
```

Elemento de área en polares

$$\bar{f} = \frac{1}{\text{Area}(R)} \iint_R f\,dA$$

```
f=1Area(R)_Rf dA
```

Valor promedio

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

_-∞^∞e^-x^2dx=π

Integral de Gauss (mediante coordenadas polares)

## Ejemplos resueltos paso a paso

**Ejemplo 5.1** Evalúa ∬_R xy dA sobre R = [0, 2] × [0, 3].

1. $\int_0^2 x\,dx = 2$ y $\int_0^3 y\,dy = 4.5$.
2. La integral se separa: 2 × 4.5.

**Respuesta:** 9.

**Ejemplo 5.2** Llueve sobre una cuenca de 10 km × 5 km con una lámina d(x, y) = 20 + 2x mm (x en km, a lo largo del lado de 10 km). ¿Cuánta agua cayó?

1. Total = $\int_0^{10}\int_0^5 (20 + 2x)\,dy\,dx = 5\int_0^{10} (20 + 2x)\,dx$.
2. = 5(200 + 100) = 1,500 mm·km².
3. 1 mm sobre 1 km² son 1000 m³.

**Respuesta:** 1.5 × 10⁶ m³ (lámina media de 30 mm). Así es como los pluviómetros y el radar se convierten en pronósticos de caudal de los ríos.

**Ejemplo 5.3** Evalúa ∬ e^(−(x² + y²)) dA sobre el disco unidad y luego sobre todo el plano.

1. En polares: $\int_0^{(2\pi)}\int_0^1 e^{(-r^2)}\,r\,dr\,d\theta = 2\pi \times \tfrac{1}{2}(1 - e^{(-1)})$.
2. Sobre el plano, la integral en r llega hasta ∞ y da ½.

**Respuesta:** π(1 − 1/e) ≈ 1.986 en el disco; π sobre el plano, lo que demuestra $\int e^{(-x^2)}\,dx = \sqrt{\pi}$.

## Problemas de práctica

Resuelve cada uno primero en papel y luego comprueba.

1. $\int_0^1\int_0^x x\,dy\,dx$

   $\int_0^1 x^2\,dx = 1/3$.

2. Invierte el orden de $\int_0^1\int_y^1 f\,dx\,dy$.

$\int_0^1 \int_0^x f \, dy \, dx$.

3. Halla el área de un círculo de radio a en coordenadas polares.

   $\int_0^{(2\pi)} \int_0^a r \, dr \, d\theta = \pi a^2$.

4. Halla el volumen bajo $z = 4 - x^2 - y^2$ sobre el disco $x^2 + y^2 \le 4$.

   $\int_0^{(2\pi)} \int_0^2 (4 - r^2) \, r \, dr \, d\theta = 2\pi(8 - 4) = 8\pi \approx 25.1$.

5. Promedio de $f = x + y$ sobre $[0, 1] \times [0, 1]$.

   $\iint (x + y) \, dA = 1$, área 1, promedio 1.

## Ideas erróneas comunes

**Mito:** En polares, $dA = dr \, d\theta$.

**En realidad:** $dA = r \, dr \, d\theta$; olvidar la r es el error más común.

**Mito:** Los límites interiores deben ser números.

**En realidad:** Para una región general, los límites interiores son funciones de la variable exterior.

**Mito:** El orden nunca importa.

**En realidad:** El valor no cambia, pero los límites sí, y a menudo un orden es mucho más fácil.

## Tarjetas de estudio

**Integral doble**

$\iint_R f \, dA$.

**Fubini**

Iterar en cualquier orden sobre un rectángulo.

**Región de tipo I**

$a \le x \le b$, $g_1(x) \le y \le g_2(x)$.

**dA en polares**

$r \, dr \, d\theta$.

**Valor promedio**

$\iint f \, dA$ / área.

**Integral de Gauss**

$\int e^{(-x^2)} \, dx = \sqrt{\pi}$.

## Cuestionario de autoevaluación

**1. Elemento de área en polares:**

dr dθ

r dr dθ

$r^2$ dr dθ

dθ/r

r dr dθ. Un trozo polar mide r dθ por dr.

**2. $\iint_R 1\, dA$ es igual a...**

0

el área de R

el perímetro

1

el área de R. Suma el área.

**3. $\int_0^1 \int_0^2 3\, dy\, dx =$**

3

5

6

2

6. 3 × área 2.

**4. El teorema de Fubini permite...**

omitir los límites

integrar una variable a la vez

derivar

usar siempre polares

integrar una variable a la vez. Integrales iteradas.

**Repetir este cuestionario**

## Cómo ayuda esto a salvar el planeta

Los totales sobre un mapa son integrales dobles: la lluvia sobre una cuenca, el carbono almacenado en un bosque o la cosecha de un campo. Los hidrólogos convierten así los mapas de lluvia en volúmenes para predecir inundaciones y planificar el abastecimiento de agua.

En Saving Planets: Página de Ríos · Especial sobre deforestación

Fuentes: USGS Water Science School: Precipitation and the water cycle (https://www.usgs.gov/special-topics/water-science-school/science/precipitation-and-water-cycle) · OpenStax Calculus 3, 5.2 Double Integrals over General Regions (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/5-2-double-integrals-over-general-regions)

## Recursos de aprendizaje gratuitos

- OpenStax Calculus 3, 5.1 Double Integrals over Rectangular Regions (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/5-1-double-integrals-over-rectangular-regions): Fubini.
- OpenStax Calculus 3, 5.2 Double Integrals over General Regions (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/5-2-double-integrals-over-general-regions): Regiones generales.
- OpenStax Calculus 3, 5.3 Double Integrals in Polar Coordinates (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/5-3-double-integrals-in-polar-coordinates): Polares.

## Ver la clase

Session 47 Clip: Definition of Double Integration (https://ocw.mit.edu/courses/18-02sc-multivariable-calculus-fall-2010/resources/clip-definition-of-double-integration/) (en inglés)

MIT 18.02SC Multivariable Calculus (Fall 2010), MIT OpenCourseWare. Licencia: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Condiciones de uso (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Enlace solo para estudio gratuito; Saving Planets no está afiliado a esta universidad ni cuenta con su respaldo.

☐ **Terminé esta unidad**

# Integrales triples y cambio de variables

Integrar sobre sólidos en coordenadas rectangulares, cilíndricas y esféricas, y el jacobiano para cambios de variables generales.

## Objetivos de aprendizaje

Al terminar esta unidad podrás:

- Plantear y evaluar integrales triples.
- Usar coordenadas cilíndricas (r dz dr dθ) y esféricas (ρ² sin φ dρ dφ dθ).
- Calcular el jacobiano de un cambio de variables.
- Hallar volúmenes, masas y centros de masa de sólidos.

## Conceptos clave

- ∭_E f dV suma f sobre cajas diminutas; con f = densidad da la masa.
- Las coordenadas cilíndricas sirven para tuberías, tanques y conos: dV = r dz dr dθ.
- Las coordenadas esféricas sirven para bolas y planetas: dV = ρ² sin φ dρ dφ dθ.
- Toda sustitución x = x(u, v) estira el área según el jacobiano |∂(x, y)/∂(u, v)|.

## Ecuaciones clave

$$dV = r\,dz\,dr\,d\theta$$

`dV=r dz dr dθ`

Elemento de volumen en cilíndricas

$$dV = \rho^2 \sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$$

`dV=ρ^2 dρ d dθ`

Elemento de volumen en esféricas

$$J = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = |x_u y_v - x_v y_u|$$

`J=|((x,y))/((u,v))|=|x_uy_v-x_vy_u|`

Jacobiano

$$\iint_R f\,dx\,dy = \iint_S f\,|J|\,du\,dv$$

`_Rf dx dy=_Sf |J| du dv`

## Ejemplos resueltos paso a paso

**Ejemplo 6.1** Usa coordenadas esféricas para hallar el volumen de una bola de radio R.

1. $V = \int_0^{(2\pi)}\int_0^{\pi}\int_0^R \rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$.
2. $= (R^3/3)(2)(2\pi)$.

**Respuesta:** $4\pi R^3/3$.

**Ejemplo 6.2** Estima la masa de la atmósfera terrestre: el peso del aire sobre cada metro cuadrado es la presión en superficie, así que $M = \iint p/g \, dA$ sobre la esfera.

1. La integral de superficie de una constante es p/g por el área $4\pi R^2$.
2. $4\pi(6.371 \times 10^6)^2 = 5.10 \times 10^{14}$ m².
3. $M = 101{,}400 \times 5.10 \times 10^{14} / 9.81$.

**Respuesta:** Unos $5.3 \times 10^{18}$ kg, cerca de los $5.1 \times 10^{18}$ kg de la NASA (la tierra sobre el nivel del mar sostiene menos aire).

**Ejemplo 6.3** Halla el área de la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 \le 1$ con $x = au$, $y = bv$.

1. La elipse se convierte en el disco unidad $u^2 + v^2 \le 1$.
2. $J = ab$.
3. Área $= ab \times \pi$.

**Respuesta:** $\pi ab$.

## Problemas de práctica

Resuelve cada uno primero en papel y luego comprueba.

1. Halla el volumen del cono $0 \le z \le 1 - r$ (radio 1, altura 1) en coordenadas cilíndricas.

   $\int_0^{(2\pi)}\int_0^1 (1 - r)\, r \, dr \, d\theta = 2\pi(1/2 - 1/3) = \pi/3$.

2. Evalúa $\iiint 1 \, dV$ sobre la caja $[0, 1] \times [0, 2] \times [0, 3]$.

   6.

3. Halla el jacobiano de las coordenadas polares.

$x_r y_\theta - x_\theta y_r = \cos\theta\,(r\cos\theta) + r\sin\theta\,(\sin\theta) = r$.

4. Un cilindro de radio 1 m y altura 2 m tiene densidad $1000(1 - z/4)$ kg/m³. Halla su masa.

$\pi \int_0^2 1{,}000(1 - z/4)\,dz = \pi \times 1{,}000 \times 1.5 = 1{,}500\pi \approx 4{,}712$ kg.

## Ideas erróneas comunes

**Mito:** En coordenadas esféricas $dV = d\rho\, d\varphi\, d\theta$.

**En realidad:** $dV = \rho^2 \sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$.

**Mito:** $\varphi$ va de 0 a $2\pi$.

**En realidad:** $\varphi$ (desde el polo norte) va de 0 a $\pi$; $\theta$ va de 0 a $2\pi$.

**Mito:** El jacobiano puede ser negativo dentro de la integral.

**En realidad:** Usa su valor absoluto.

## Tarjetas de estudio

**Integral triple**

$\iiint_E f\,dV$.

**Cilíndricas**

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z$; $dV = r\,dz\,dr\,d\theta$.

**Esféricas**

$dV = \rho^2 \sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$.

**Jacobiano**

Factor de estiramiento de área o volumen de una sustitución.

**Masa**

$\iiint$ densidad $dV$.

**Centro de masa**

$\iiint x\,\rho\,dV$ / masa.

## Cuestionario de autoevaluación

**1. El elemento de volumen en esféricas es...**

$d\rho\, d\varphi\, d\theta$

$\rho^2 \sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$

$\rho\, d\rho\, d\theta$

r dz dr dθ

$\rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$. Una caja esférica de lados $d\rho$, $\rho \, d\varphi$, $\rho \sin\varphi \, d\theta$.

**2. Las coordenadas cilíndricas son mejores para...**

cubos

tuberías y tanques

pirámides

planos

tuberías y tanques. Secciones transversales circulares.

**3. El jacobiano de x = 2u, y = 3v es...**

5

6

1

2/3

6. 2 × 3.

**4. Volumen de una bola de radio 3:**

$36\pi$

$27\pi$

$12\pi$

$9\pi$

$36\pi$. $4\pi(27)/3$.

**Repetir este cuestionario**

### Cómo ayuda esto a salvar el planeta

Los científicos del clima suman magnitudes a través del volumen del océano y la atmósfera exactamente con estas integrales. El contenido de calor del océano, el calor almacenado en los 2000 m superiores del mar, es una integral triple del cambio de temperatura por la densidad y la capacidad calorífica, y es uno de los registros más claros del calentamiento global.

En Saving Planets: Centro de Océanos

Fuentes: NOAA NCEI: Global ocean heat content (https://www.ncei.noaa.gov/access/global-ocean-heat-content/) · Ficha de la NASA sobre la Tierra (en inglés) (https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/earthfact.html)

## Recursos de aprendizaje gratuitos

- OpenStax Calculus 3, 5.4 Triple Integrals (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/5-4-triple-integrals): Sección de libro de texto gratuita.
- OpenStax Calculus 3, 5.5 Triple Integrals in Cylindrical and Spherical Coordinates (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/5-5-triple-integrals-in-cylindrical-and-spherical-coordinates): Cilíndricas y esféricas.
- OpenStax Calculus 3, 5.7 Change of Variables in Multiple Integrals (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/5-7-change-of-variables-in-multiple-integrals): Jacobianos.

## Ver la clase

Session 53 Clip: Change of Variables (https://ocw.mit.edu/courses/18-02sc-multivariable-calculus-fall-2010/resources/clip-change-of-variables/) (en inglés)

MIT 18.02SC Multivariable Calculus (Fall 2010), MIT OpenCourseWare. Licencia: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Condiciones de uso (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Enlace solo para estudio gratuito; Saving Planets no está afiliado a esta universidad ni cuenta con su respaldo.

☐ **Terminé esta unidad**

# Campos vectoriales, integrales de línea y teorema de Green

Campos vectoriales como vientos y corrientes, trabajo y circulación a lo largo de curvas, campos conservativos y potenciales, y el teorema de Green en el plano.

## Objetivos de aprendizaje

Al terminar esta unidad podrás:

- Esbozar e interpretar campos vectoriales.
- Evaluar integrales de línea de funciones escalares y de campos vectoriales (trabajo).
- Comprobar si un campo es conservativo y hallar un potencial.
- Aplicar el teorema de Green a la circulación y el flujo en el plano.

## Conceptos clave

- Un campo vectorial asigna un vector a cada punto, como un mapa de vientos o corrientes.
- El trabajo a lo largo de un camino es ∫_C F · dr; para un lazo cerrado se llama circulación.
- Un campo conservativo es un gradiente, F = ∇φ; su trabajo depende solo de los extremos y su circulación es cero.
- Teorema de Green: la circulación alrededor de una curva cerrada es igual a la integral del rotacional (Q_x − P_y) sobre la región interior.

## Ecuaciones clave

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$$

```
_C F· d r=_a^b F( r(t))· r'(t) dt
```

Integral de línea (trabajo)

$$\int_C \nabla\varphi \cdot d\mathbf{r} = \varphi(B) - \varphi(A)$$

```
_C· d r=(B)-(A)
```

Teorema fundamental de las integrales de línea

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D (Q_x - P_y)\,dA$$

```
_CP dx+Q dy=_D(Q_x-P_y) dA
```

Teorema de Green

$$\text{Area} = \tfrac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx$$

```
Area=12_Cx dy-y dx
```

Área a partir de la frontera

## Ejemplos resueltos paso a paso

**Ejemplo 7.1** F = ⟨y, x⟩. Halla el trabajo de (0, 0) a (2, 3) por cualquier camino.

1. P_y = 1 = Q_x, así que F es conservativo.
2. φ = xy cumple ∇φ = ⟨y, x⟩.
3. Trabajo = φ(2, 3) − φ(0, 0).

**Respuesta:** 6, por cualquier camino.

**Ejemplo 7.2** Una corriente tipo giro F = ⟨−y, x⟩ rodea el origen. Halla su circulación alrededor de la circunferencia unidad directamente y con el teorema de Green.

1. r = ⟨cos t, sin t⟩, F · r' = sin²t + cos²t = 1, así que ∮ = 2π.
2. Green: Q_x − P_y = 1 − (−1) = 2; ∬2 dA = 2 × π.

**Respuesta:** 2π ≈ 6.28 de ambas formas.

**Ejemplo 7.3** Usa ½∮(x dy − y dx) para hallar el área dentro de x = 3 cos t, y = 2 sin t.

1. x dy − y dx = (3 cos t)(2 cos t) + (2 sin t)(3 sin t) = 6 dt.
2. ½ ∫₀^(2π) 6 dt.

**Respuesta:** 6π ≈ 18.85 (πab con a = 3, b = 2).

## Problemas de práctica

Resuelve cada uno primero en papel y luego comprueba.

1. ¿Es conservativo F = ⟨2xy, x² + 1⟩? Halla φ.

   P_y = 2x = Q_x; φ = x²y + y.

2. Halla ∫_C F · dr para F = ⟨x, y⟩ a lo largo de y = x² de (0, 0) a (1, 1).

Conservativo, $\varphi = (x^2 + y^2)/2$: trabajo 1.

3. Halla $\oint(x^2\,dx + xy\,dy)$ alrededor del cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$, en sentido antihorario.

   Green: $\iint y\,dA = 1/2$.

4. Halla la circulación de $F = \langle -y, x\rangle$ alrededor de una circunferencia de radio 3.

   $2 \times$ área $= 18\pi \approx 56.5$.

## Ideas erróneas comunes

**Mito:** Todo campo con rotacional cero es conservativo.

**En realidad:** Solo es cierto en regiones simplemente conexas (sin agujeros).

**Mito:** El trabajo a lo largo de un camino cerrado siempre es cero.

**En realidad:** Solo para campos conservativos; un giro circula.

**Mito:** El teorema de Green funciona con cualquier orientación.

**En realidad:** Supone sentido antihorario; el horario cambia el signo.

## Tarjetas de estudio

**Campo vectorial**

Un vector en cada punto.

**Integral de línea**

$\int F \cdot dr$, trabajo a lo largo de una curva.

**Circulación**

Integral de línea alrededor de una curva cerrada.

**Conservativo**

$F = \nabla\varphi$; independiente del camino.

**Potencial**

$\varphi$ con $\nabla\varphi = F$.

**Teorema de Green**

$\oint P\,dx + Q\,dy = \iint (Q_x - P_y)\,dA$.

## Cuestionario de autoevaluación

**1. $F = \nabla\varphi$ significa que F es...**

rotacional

conservativo

cero

constante

conservativo. Un campo gradiente.

**2. Trabajo de un campo conservativo alrededor de un lazo cerrado:**

2π

0

su área

indefinido

0. φ(A) − φ(A).

**3. El teorema de Green relaciona una integral de línea con...**

una derivada

una integral doble

una integral triple

una serie

una integral doble. Frontera ↔ interior.

**4. Q_x − P_y para F = ⟨−y, x⟩ es...**

0

1

2

−2

2. 1 − (−1).

Repetir este cuestionario

## Cómo ayuda esto a salvar el planeta

Los giros oceánicos son enormes sistemas de corrientes que rotan: hay cinco principales, y cada uno acumula los desechos flotantes hacia su centro, formando las islas de basura. La circulación de un campo de corrientes es una integral de línea, y el teorema de Green la vincula con la rotación (rotacional) en su interior.

Los vientos y corrientes en mapas como earth.nullschool.net, que muestra datos públicos de pronóstico de la NOAA, son campos vectoriales que puedes leer con esta unidad.

En Saving Planets: Centro de Océanos

Fuentes: NOAA Marine Debris Program: Garbage patches (https://marinedebris.noaa.gov/discover-marine-debris/garbage-patches) · NOAA Ocean Service: Ocean currents tutorial (gyres) (https://oceanservice.noaa.gov/education/tutorial_currents/04currents4.html) · earth.nullschool.net: live global wind and ocean-current map (from NOAA GFS and other public data) (https://earth.nullschool.net/)

## Recursos de aprendizaje gratuitos

- OpenStax Calculus 3, 6.1 Vector Fields (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/6-1-vector-fields): Campos.
- OpenStax Calculus 3, 6.2 Line Integrals (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/6-2-line-integrals): Trabajo y circulación.
- OpenStax Calculus 3, 6.3 Conservative Vector Fields (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/6-3-conservative-vector-fields): Potenciales.
- OpenStax Calculus 3, 6.4 Green's Theorem (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/6-4-greens-theorem): Teorema de Green.

## Ver la clase

Session 56 Clip: Vector Fields (https://ocw.mit.edu/courses/18-02sc-multivariable-calculus-fall-2010/resources/clip-vector-fields/) (en inglés)

MIT 18.02SC Multivariable Calculus (Fall 2010), MIT OpenCourseWare. Licencia: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Condiciones de uso (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Enlace solo para estudio gratuito; Saving Planets no está afiliado a esta universidad ni cuenta con su respaldo.

☐ **Terminé esta unidad**

UNIDAD 8 · SEMANAS 13–14

# Integrales de superficie, teorema de Stokes y teorema de la divergencia

Divergencia y rotacional, superficies parametrizadas, flujo a través de una superficie, y los dos grandes teoremas que vinculan fronteras e interiores en 3D.

## Objetivos de aprendizaje

Al terminar esta unidad podrás:

- Calcular divergencia y rotacional e interpretarlos como intensidad de fuente y rotación.
- Parametrizar superficies y calcular área de superficie y flujo.
- Aplicar el teorema de Stokes.
- Aplicar el teorema de la divergencia (Gauss) al flujo neto hacia afuera.

## Conceptos clave

- div F = ∇ · F mide la salida por unidad de volumen; rot F = ∇ × F mide la rotación.
- El flujo ∬_S F · n dS es cuánto del campo atraviesa una superficie por unidad de tiempo.
- Stokes: la circulación alrededor del borde de una superficie es igual al flujo de rot F a través de la superficie.
- Teorema de la divergencia: el flujo neto hacia afuera a través de una superficie cerrada es igual a la divergencia total en su interior.

## Ecuaciones clave

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = P_x + Q_y + R_z$$

· F=P_x+Q_y+R_z

Divergencia

$$\nabla \times \mathbf{F} = \langle R_y - Q_z,\ P_z - R_x,\ Q_x - P_y \rangle$$

× F= R_y-Q_z,\ P_z-R_x,\ Q_x-P_y

Rotacional

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS$$

_ S F· d r=_S(× F)· n dS

Teorema de Stokes

$$\oiint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_E \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV$$

_S F· n dS=_E· F dV

Teorema de la divergencia

## Ejemplos resueltos paso a paso

**Ejemplo 8.1** Halla el flujo hacia afuera de F = ⟨x, y, z⟩ a través de la esfera de radio R.

1. div F = 3.
2. Teorema de la divergencia: 3 × (4πR³/3).
3. Comprobación directa: sobre la esfera F · n = R, así que el flujo es R × 4πR².

**Respuesta:** 4πR³ de ambas formas.

**Ejemplo 8.2** Llega a la Tierra (radio 6371 km) luz solar de 1361 W/m². ¿Qué potencia total intercepta la Tierra y cuál es el promedio por metro cuadrado de su superficie?

1. El flujo a través del disco de sombra de la Tierra es 1361 × πR² = 1.735 × $10^{17}$ W.
2. Repartido sobre toda la esfera (área 4πR²) es 1361/4.

**Respuesta:** 1.74 × $10^{17}$ W, o 340 W/m² en promedio, la cifra en la parte superior del diagrama del balance energético de la NASA.

**Ejemplo 8.3** Verifica el teorema de Stokes para F = ⟨−y, x, 0⟩ sobre la mitad superior de la esfera unidad.

1. rot F = ⟨0, 0, 2⟩.
2. El flujo del rotacional a través del hemisferio es igual al del disco unidad plano (mismo borde): 2 × π.
3. La circulación en el borde es 2π (unidad 7).

**Respuesta:** 2π de ambas formas.

## Problemas de práctica

Resuelve cada uno primero en papel y luego comprueba.

1. Halla div y rot de F = ⟨x², yz, xy⟩.

div = 2x + z; rot = ⟨x − y, −y, 0⟩.

2. Flujo de F = ⟨0, 0, 5⟩ hacia arriba a través del cuadrado unidad en el plano z = 1.

   5 × 1 = 5.

3. Usa el teorema de la divergencia: flujo de F = ⟨x, y, z⟩ hacia afuera del cubo unidad $[0, 1]^3$.

   div = 3; flujo 3.

4. Halla el área de una esfera de radio 2 integrando $dS = 4 \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta$.

   $4 \times 2 \times 2\pi = 16\pi \approx 50.3$.

5. ¿Puede el rotacional de un campo gradiente ser distinto de cero?

   No: $\nabla \times \nabla\varphi = 0$ para $\varphi$ suave.

## Ideas erróneas comunes

**Mito:** El flujo es lo mismo que la circulación.
**En realidad:** El flujo atraviesa una superficie; la circulación recorre una curva.

**Mito:** Sin divergencia significa que nada se mueve.
**En realidad:** Significa que no hay fuente neta: todo lo que entra, sale.

**Mito:** El teorema de la divergencia funciona en superficies abiertas.
**En realidad:** Necesita una superficie cerrada; Stokes se ocupa de superficies con borde.

## Tarjetas de estudio

**Divergencia**

$\nabla \cdot F$; intensidad de fuente.

**Rotacional**

$\nabla \times F$; rotación.

**Flujo**

$\iint F \cdot n \, dS$.

**Teorema de Stokes**

Circulación en el borde = flujo del rotacional.

**Teorema de la divergencia**

Flujo hacia afuera = $\iiint$ div F dV.

**Superficie cerrada**

Encierra un sólido; sin borde.

## Cuestionario de autoevaluación

**1. div ⟨x, y, z⟩ =**

0

1

3

x + y + z

3. 1 + 1 + 1.

**2. El teorema de Stokes relaciona la circulación en el borde con...**

el flujo de F

el flujo de rot F

div F

el volumen

el flujo de rot F. $\iint (\nabla \times F) \cdot n \, dS$.

**3. El teorema de la divergencia necesita...**

una superficie cerrada

una curva

una región plana

un campo conservativo

una superficie cerrada. Encierra un sólido.

**4. La luz solar media por metro cuadrado en el tope de la atmósfera terrestre es de aproximadamente...**

1,361 $W/m^2$

680 $W/m^2$

340 W/m²

100 W/m²

340 W/m². Área del disco πR² sobre área de la esfera 4πR²: un cuarto.

**Repetir este cuestionario**

## Cómo ayuda esto a salvar el planeta

El clima de la Tierra es un balance de flujos: la luz solar atraviesa el tope de la atmósfera a unos 340 W/m² en promedio, y la Tierra debe devolver la misma energía al espacio. Cuando los gases de efecto invernadero atrapan parte del calor saliente, el desequilibrio es un flujo neto hacia el planeta, almacenado sobre todo en el océano.

El transporte de contaminantes es la misma matemática: el teorema de la divergencia dice que el contaminante que sale de un lago o de una cuenca atmosférica por su frontera es igual a lo que liberan sus fuentes internas, menos lo que se elimina.

En Saving Planets: Centro de Observación de la Tierra

Fuentes: NASA Earth Observatory: Climate and Earth's Energy Budget (https://earthobservatory.nasa.gov/features/EnergyBalance) · Ficha de la NASA sobre la Tierra (en inglés) (https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/earthfact.html)

## Recursos de aprendizaje gratuitos

- OpenStax Calculus 3, 6.5 Divergence and Curl (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/6-5-divergence-and-curl): Divergencia y rotacional.
- OpenStax Calculus 3, 6.6 Surface Integrals (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/6-6-surface-integrals): Flujo.
- OpenStax Calculus 3, 6.7 Stokes' Theorem (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/6-7-stokes-theorem): Stokes.
- OpenStax Calculus 3, 6.8 The Divergence Theorem (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/6-8-the-divergence-theorem): Gauss.

## Ver la clase

Session 95 Clip: Stokes' Theorem and Surface Independence (https://ocw.mit.edu/courses/18-02sc-multivariable-calculus-fall-2010/resources/clip-stokes-theorem-and-surface-independence/) (en inglés)

MIT 18.02SC Multivariable Calculus (Fall 2010), MIT OpenCourseWare. Licencia: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · Condiciones de uso (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). Enlace solo para estudio gratuito; Saving Planets no está afiliado a esta universidad ni cuenta con su respaldo.

☐ **Terminé esta unidad**

# Problemas

Estos problemas están dentro de cada unidad. Hazlos en papel y luego abre la respuesta.

1. Vectores y geometría del espacio
   5 problemas
2. Funciones vectoriales y movimiento en el espacio
   4 problemas
3. Derivadas parciales
   4 problemas
4. Gradientes y optimización
   5 problemas
5. Integrales dobles
   5 problemas
6. Integrales triples y cambio de variables
   4 problemas
7. Campos vectoriales, integrales de línea y teorema de Green
   4 problemas
8. Integrales de superficie, teorema de Stokes y teorema de la divergencia
   5 problemas

# Laboratorios de computadora

Cuatro prácticas de computadora aplican las unidades: divergencia y rotacional de un campo de viento a partir de datos de estaciones, pendiente y dirección del flujo de agua a partir de una malla de elevación, el volumen de un lago mediante una integral doble en polares, y la órbita de un satélite avanzada paso a paso en el tiempo.

Los datos de ejemplo están marcados como tales; cada práctica enlaza a la fuente de datos pública para probar después.

Referencia de seguridad: OpenStax Calculus Volume 3 (libro de texto gratuito) (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/1-introduction)

## Práctica A: divergencia y rotacional de un campo de viento

SEMANA 14

**Objetivo:** Estima la divergencia y el rotacional del viento en un punto a partir de cuatro estaciones cercanas, e interprétalos como aire ascendente y rotación de tormentas.

$$\nabla \cdot \mathbf{v} \approx \frac{u_E - u_W}{2\Delta} + \frac{v_N - v_S}{2\Delta}, \quad (\nabla \times \mathbf{v})_z \approx \frac{v_E - v_W}{2\Delta} - \frac{u_N - u_S}{2\Delta}$$

Diferencias centradas

**Procedimiento**

1. Introduce el viento hacia el este (u) y hacia el norte (v) en estaciones situadas 100 km al este, oeste, norte y sur de un centro (Δ = 100 km = $10^5$ m).
2. Calcula la divergencia y el rotacional vertical (vorticidad).
3. Interpreta los signos y repite con vientos reales leídos en earth.nullschool.net o en datos de pronóstico de la NOAA.

**Tabla de datos**

| Estación | u (m/s, este) | v (m/s, norte) |
|---|---|---|
| Este | 4 | 8 |
| Oeste | 6 | −6 |
| Norte | −5 | −3 |
| Sur | 7 | −1 |

*Valores de ejemplo para practicar, no un mapa del tiempo real.*

**Cálculo de ejemplo**

1. Divergencia = (4 − 6)/(2 × $10^5$) + (−3 − (−1))/(2 × $10^5$) = −2 × $10^{-5}$ $s^{-1}$: el aire converge, así que debe ascender, lo que favorece nubes y lluvia.
2. Vorticidad = (8 − (−6))/(2 × $10^5$) − (−5 − 7)/(2 × $10^5$) = 1.3 × $10^{-4}$ $s^{-1}$: positiva, antihoraria, como una baja del hemisferio norte.

> **Seguridad**
>
> - Ninguna más allá del uso normal de una computadora.

**Alternativa en casa o virtual**

- Basta con una hoja de cálculo.

earth.nullschool.net: live global wind and ocean-current map (from NOAA GFS and other public data) (https://earth.nullschool.net/) · NOAA NCEI: Global Forecast System (GFS) (https://www.ncei.noaa.gov/products/weather-climate-models/global-forecast)

**Vínculo con el planeta:** La convergencia y la vorticidad son lo que siguen los meteorólogos para avisar de lluvias intensas y tormentas. NOAA/NWS JetStream: Wind (https://www.weather.gov/jetstream/wind)

- [ ] **Completé este laboratorio (real o virtual)**

## Práctica B: pendiente y flujo de agua a partir de una malla de elevación

SEMANA 7

**Objetivo:** Estima el gradiente del terreno a partir de una malla de elevaciones y halla hacia dónde corre el agua de lluvia.

$$\nabla h \approx \left\langle \frac{h_E - h_W}{2\Delta}, \frac{h_N - h_S}{2\Delta} \right\rangle$$

Gradiente por diferencias centradas

**Procedimiento**

1. Usa elevaciones 100 m al este, oeste, norte y sur de un punto (Δ = 100 m).
2. Calcula ∇h, su tamaño (pendiente) y el ángulo de pendiente arctan|∇h|.
3. La dirección del flujo es −∇h. Después descarga un mosaico de elevación USGS 3DEP gratuito y repite para una ladera cercana.

**Tabla de datos**

| Vecino | Elevación (m) |
|---|---|
| Centro | 250 |
| Este | 262 |
| Oeste | 240 |
| Norte | 256 |
| Sur | 246 |

*Valores de ejemplo para practicar.*

**Cálculo de ejemplo**

1. ∇h ≈ ⟨(262 − 240)/200, (256 − 246)/200⟩ = ⟨0.11, 0.05⟩.
2. |∇h| = 0.121, un ángulo de pendiente de unos 6.9°.
3. El agua corre a lo largo de −∇h, hacia el oeste-suroeste; trazar estas direcciones sobre una malla delimita una cuenca.

> **Seguridad**
>
> - Ninguna más allá del uso normal de una computadora.

**Alternativa en casa o virtual**

- Basta una hoja de cálculo; el software SIG es opcional.

USGS 3D Elevation Program (3DEP) (https://www.usgs.gov/3d-elevation-program)

**Vínculo con el planeta:** Las direcciones de flujo a partir de mallas de elevación son la base de los mapas de inundación y erosión. USGS 3D Elevation Program (3DEP) (https://www.usgs.gov/3d-elevation-program)

- [ ] **Completé este laboratorio (real o virtual)**

## Práctica C: el volumen de un lago mediante una integral doble en polares

SEMANA 9

**Objetivo:** Calcula el volumen de un lago en forma de cuenco de forma exacta y con una suma numérica, y observa cómo se reduce el error.

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{R} D\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) r \, dr \, d\theta = \frac{\pi R^2 D}{2}$$

```
V=_0^2π\!\!_0^RD(1-(r^2)/(R^2))r dr dθ=(π R^2D)/(2)
```

Lago con cuenca paraboloide

**Procedimiento**

1. Toma R = 1000 m y profundidad máxima D = 20 m.
2. Calcula el volumen exacto.
3. Divide el lago en n anillos, evalúa la profundidad en el radio medio de cada anillo y suma profundidad × área del anillo. Prueba n = 5 y n = 10.

**Tabla de datos**

| Método | Volumen ($m^3$) |
|---|---|
| Exacta | $3.14 \times 10^7$ |
| Punto medio, 5 anillos | $3.20 \times 10^7$ |
| Punto medio, 10 anillos | $3.16 \times 10^7$ |

*Valores calculados para un lago modelo.*

**Cálculo de ejemplo**

1. Exacto: $\pi(1000)^2(20)/2 = 3.14 \times 10^7$ $m^3$ (31.4 millones de metros cúbicos).
2. La suma de 5 anillos queda un 2.0 % alta y la de 10 anillos un 0.5 % alta: duplicar n reduce el error unas cuatro veces.

> **Seguridad**
>
> - Ninguna más allá del uso normal de una computadora.

**Alternativa en casa o virtual**

- Una hoja de cálculo o Python.

OpenStax Calculus 3, 5.3 Double Integrals in Polar Coordinates (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/5-3-double-integrals-in-polar-coordinates)

**Vínculo con el planeta:** Los volúmenes de lagos y embalses obtenidos de levantamientos de profundidad indican a los gestores del agua cuánto pueden almacenar y liberar. NASA: misión SWOT (https://swot.jpl.nasa.gov/)

- [ ] **Completé este laboratorio (real o virtual)**

## Práctica D: avanzar paso a paso la órbita de un satélite

SEMANA 3

**Objetivo:** Integra numéricamente r'' = −GM r/|r|³ para una órbita tipo Landsat y compara dos métodos de paso.

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n - \frac{GM\,\mathbf{r}_n}{|\mathbf{r}_n|^3}\Delta t, \quad \mathbf{r}_{n+1} = \mathbf{r}_n + \mathbf{v}_{n+1}\Delta t$$

```
v_n+1= v_n-(GM r_n)/(| r_n|^3)Δ t, r_n+1= r_n+ v_n+1Δ t
```

Euler semiimplícito (simpléctico)

**Procedimiento**

1. Empieza en r = ⟨7076 km, 0⟩ con v = ⟨0, 7505 m/s⟩ (unidad 2).
2. Da 592 pasos con Δt = 10 s (un periodo), primero con Euler simple (actualiza r con la v antigua) y luego con la versión semiimplícita de arriba.
3. Compara el radio final con el inicial.

**Tabla de datos**

| Método (Δt = 10 s) | Cambio de radio tras una órbita |
|---|---|
| Euler simple | +908 km |
| Euler semiimplícito | +0.16 km |

*Valores calculados; GM = 3.986 × 10¹⁴ m³/s².*

**Cálculo de ejemplo**

1. Euler simple se abre en espiral unos 908 km por órbita, un pronóstico inútil; incluso Δt = 1 s sigue derivando unos 94 km.
2. La actualización semiimplícita cambia una línea de código y mantiene la órbita dentro de unos 0.16 km.

> **Seguridad**
>
> - Ninguna más allá del uso normal de una computadora.

**Alternativa en casa o virtual**

- Sirve una hoja de cálculo; Python en Colab es más fácil.

Google Colab (notebooks gratuitos) (https://colab.research.google.com/) · NASA: Landsat 9 quick facts (https://landsat.gsfc.nasa.gov/satellites/landsat-9/)

**Vínculo con el planeta:** Una propagación orbital precisa mantiene a los satélites de observación de la Tierra en sus trazas repetidas. NASA: Landsat 9 quick facts (https://landsat.gsfc.nasa.gov/satellites/landsat-9/)

- [ ] **Completé este laboratorio (real o virtual)**

# Series de práctica para exámenes

Cronométrate: unos 10 minutos por problema. Luego compara con las soluciones completas.

## Ejercicios de práctica para el parcial (unidades 1–4)

1. Halla el ángulo entre $\langle 1, 1, 0\rangle$ y $\langle 0, 1, 1\rangle$.

    1. Producto escalar 1; ambas longitudes $\sqrt{2}$.
    2. $\cos\theta = 1/2$.

    **Respuesta:** 60°.

2. Halla el plano que pasa por $(1, 1, 1)$ con normal $\langle 2, -1, 3\rangle$.

    1. $2(x - 1) - (y - 1) + 3(z - 1) = 0$.

    **Respuesta:** $2x - y + 3z = 4$.

3. Un satélite orbita a un radio de 6771 km (400 km de altitud). Halla su periodo.

    1. $T = 2\pi\sqrt{(r^3/GM)}$.

    **Respuesta:** ≈ 5544 s ≈ 92.4 min.

4. Maximiza $f = xy$ sujeta a $x + y = 10$.

    1. $\langle y, x\rangle = \lambda\langle 1, 1\rangle$ da $x = y = 5$.

    **Respuesta:** 25 en $(5, 5)$.

## Serie de práctica final (todas las unidades)

1. Evalúa $\int_0^{(2\pi)}\int_0^3 r\, dr\, d\theta$.

    1. $4.5 \times 2\pi$.

    **Respuesta:** $9\pi \approx 28.3$ (área de un disco de radio 3).

2. Halla el volumen de una semiesfera de radio 2 con coordenadas esféricas.

    1. $\int_0^{(2\pi)}\int_0^{(\pi/2)}\int_0^2 \rho^2 \sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta = (8/3)(1)(2\pi)$.

**Respuesta:** 16π/3 ≈ 16.76.

3. Halla ∮ F · dr para F = ⟨−y, x⟩ alrededor del cuadrado [0, 2] × [0, 2], en sentido antihorario.

    1. Green: ∬2 dA = 2 × 4.

    **Respuesta:** 8.

4. Halla el flujo hacia afuera de F = ⟨2x, 0, 0⟩ a través de la esfera de radio 1.

    1. div F = 2; flujo = 2 × 4π/3.

    **Respuesta:** 8π/3 ≈ 8.38.

# Hoja de fórmulas

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos\theta$$

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin\theta$$

$$n \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$$

$$L = \int |\mathbf{r}'(t)|\, dt$$

$$\kappa = |\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''| / |\mathbf{r}'|^3$$

$$v = \sqrt{GM/r}$$

$$\Delta f \approx f_x \Delta x + f_y \Delta y$$

$$D_{\mathbf{u}} f = \nabla f \cdot \mathbf{u}$$

$$D = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2$$

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

$$dA = r\, dr\, d\theta$$

$$dV = r\, dz\, dr\, d\theta$$

$$dV = \rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$$

$$\int_C \nabla\varphi \cdot d\mathbf{r} = \varphi(B) - \varphi(A)$$

$$\oint P\,dx + Q\,dy = \iint (Q_x - P_y)\, dA$$

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS$$

$$\oiint \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV$$

### Constantes

| Constante | Valor |
|---|---|
| GM de la Tierra | $3.986 \times 10^{14}$ $m^3/s^2$ |
| Radio medio de la Tierra | 6,371 km |
| Irradiancia solar en la Tierra | 1,361 $W/m^2$ |
| Presión media en superficie | 1,014 mb = 101,400 Pa |
| Altura de escala atmosférica | 8.5 km |
| Gravedad estándar | 9.81 $m/s^2$ |

Fuente: Ficha de la NASA sobre la Tierra (en inglés) (https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/earthfact.html)

## Herramientas de gráficas y datos

Usa estas herramientas y datos gratuitos junto con el curso.

- Calculadora Desmos 3D (https://www.desmos.com/3d): Grafica superficies, vectores y curvas paramétricas en 3D.
- GeoGebra 3D (https://www.geogebra.org/3d): Otro graficador 3D gratuito.
- PhET: Vector Addition (https://phet.colorado.edu/en/simulations/vector-addition): Desarrolla la intuición sobre componentes y sumas.
- MIT OpenCourseWare 18.02SC (https://ocw.mit.edu/courses/18-02sc-multivariable-calculus-fall-2010/): Clases, sesiones de ejercicios y problemas del MIT, gratis.
- earth.nullschool.net: live global wind and ocean-current map (from NOAA GFS and other public data) (https://earth.nullschool.net/): Mira campos vectoriales reales de viento y corrientes en todo el mundo.
- USGS 3D Elevation Program (3DEP) (https://www.usgs.gov/3d-elevation-program): Datos de elevación gratuitos de EE. UU. para trabajar con gradientes y pendientes.

## Glosario

**Circulación**
Integral de línea de un campo alrededor de una curva cerrada.

**Campo conservativo**
Un campo gradiente; el trabajo no depende del camino.

**Producto vectorial**
Vector perpendicular a dos vectores.

**Rotacional**
$\nabla \times F$; rotación local de un campo.

**Curvatura**

Cuánto se dobla una curva; 1/R para una circunferencia.

**Derivada direccional**
Tasa de cambio en una dirección dada, $\nabla f \cdot u$.

**Divergencia**
$\nabla \cdot F$; salida neta por unidad de volumen.

**Teorema de la divergencia**
El flujo hacia afuera a través de una superficie cerrada es igual a la integral de la divergencia en su interior.

**Producto escalar**
$a \cdot b = |a||b| \cos \theta$.

**Flujo**
Cantidad de un campo que atraviesa una superficie.

**Gradiente**
Vector de derivadas parciales; apunta cuesta arriba.

**Teorema de Green**
La circulación alrededor de una curva plana es igual a la integral de $Q_x - P_y$ en su interior.

**Jacobiano**
Factor de estiramiento de un cambio de variables.

**Multiplicador de Lagrange**
$\lambda$ en $\nabla f = \lambda \nabla g$ para la optimización con restricciones.

**Curva de nivel**
Curva donde $f(x, y)$ es constante.

**Integral de línea**
Integral a lo largo de una curva.

**Derivada parcial**
Derivada en una variable con las demás fijas.

**Punto de silla**
Punto crítico que no es ni máximo ni mínimo.

**Teorema de Stokes**
La circulación en el borde es igual al flujo del rotacional.

**Campo vectorial**
Asignación de un vector a cada punto.

# Rúbrica de autoevaluación

No se otorga nota ni crédito. Úsala para valorar con honestidad dónde estás en cada unidad.

| Nivel | Cómo se ve |
|---|---|
| 4 · Dominio | Plantea integrales y campos a partir de un dibujo sin ayuda, elige buenas coordenadas y comprueba las respuestas con un segundo método o un teorema. |
| 3 · Competente | Resuelve los problemas de práctica con algún error ocasional. |
| 2 · En desarrollo | Sigue los ejemplos resueltos, pero le cuesta plantear límites o elegir coordenadas. |
| 1 · Inicial | Aplica fórmulas sin dibujar ni comprobar; necesita repasar la unidad. |

### Ponderación sugerida si quieres una nota

| Parte | Peso |
|---|---|
| Problemas de práctica | 30% |
| Laboratorios de computadora | 15% |
| Serie de práctica de mitad de curso | 25% |
| Serie de práctica final | 30% |

Apunta al nivel 3 o superior en cada unidad antes de pasar al siguiente curso.

## Cursos relacionados

- Introducción a la programación ENGR 130
- Ecuaciones diferenciales MATH 220
- Física II PHYS 210 + PHYS 210L
- Todos los cursos