آخر تحديث: November 1, 2026

🗺️ خريطة طريق لأربع سنوات · السنة 2, الخريف

عن هذه الدورة

يتضمن هذا المقرر المجاني 8 وحدات و4 مختبرات. هذه الأعداد الحقيقية وليست منهجًا أطول جرى اختصاره.

التحقق هو رقم أو نتيجة برمجية في صفحة مقرر يعيد سكربت حسابها قبل النشر. يجب أن يطابق الرقم المعروض الرقم المعاد حسابه.

هذا مخطط دورة مجانية للتعلّم الذاتي كتبته Saving Planets. وهو ليس مقررًا جامعيًا، ولا يمنح ساعات معتمدة، ولا تشارك فيه أي مؤسسة تعليمية.

يتبع نطاقه الفصل الدراسي الثالث من التفاضل والتكامل الجامعي، على غرار موضوعات وعمق مواد مفتوحة مثل OpenStax Calculus Volume 3 وMIT OpenCourseWare 18.02 Multivariable Calculus، وعلى مناهج مقررات مثل Stanford Math 51/52 وGeorgia Tech MATH 2551. نضع روابط للمواد المجانية في كل أجزاء المقرر. ولا تتبنى أي من تلك المؤسسات هذه الصفحة.

ما نضيفه: كل وحدة ترتبط بمسائل حقيقية عن الرياح والمحيطات والتضاريس والمناخ والأقمار الصناعية مع مصدر عام موثّق، وكل رقم في الصفحة يُعاد حسابه بنص تحقق برمجي قبل النشر، وأربعة مختبرات حاسوبية تطبق الأفكار على حقول الرياح وشبكات الارتفاع وأحجام البحيرات والمدارات.

تابعها بالترتيب. في كل وحدة أهداف وأفكار أساسية ومعادلات وأمثلة خطوة بخطوة وتمارين بإجابات كاملة وأخطاء شائعة وبطاقات تعليمية واختبار قصير. يُحفظ تقدّمك في هذا المتصفح فقط.

كيف تساعد هذه الدورة في إنقاذ الكوكب

الكوكب ثلاثي الأبعاد ودائم الحركة. الرياح والتيارات المحيطية حقول متجهة، والتضاريس ودرجة الحرارة دوال في متغيرين أو ثلاثة، والحرارة والملوثات تعبر الأسطح على شكل تدفق، والأقمار الصناعية التي تقيس كل ذلك تتبع مسارات متجهة في الفضاء.

تنتهي كل وحدة بقسم قصير موثّق بالمصادر يبيّن كيف تساعد أفكارها الناس والطبيعة معًا.

للمعلمين

يمكنك تدريس هذا المقرر، أو أن يتابعه الطالب وحده. إنه مجاني. Saving Planets لا تمنح درجة ولا ساعات معتمدة.

- هذه الصفحة هي المقرر كاملًا: 8 وحدات و4 مختبرات (MATH 210).
- خطّط لخمسة عشر أسبوعًا، نحو 6 إلى 9 ساعات في الأسبوع، بما في ذلك أسابيع المختبر.
- اتبع جدول الخمسة عشر أسبوعًا. اقرأ الوحدة، حلّ التمارين على الورق، ثم افتح الإجابة. في أسبوع المختبر، نفّذ المختبر أو نسخته المنزلية.

- التحقق هو رقم أو نتيجة برمجية في الصفحة يعيد سكربت حسابها قبل النشر. يجب أن يطابق الرقم الظاهر الرقم المعاد حسابه.
- استخدم طباعة هذه الصفحة، أو نزّل دليل الدراسة PDF. ورقة القوانين قرب النهاية.
- اسأل: كيف تساعد هذه الوحدة الناس والكوكب؟ في كل وحدة مربع أخضر فيه حقيقة مع مصدرها.
- انسخ نموذج دليل المعلم واكتب اسم صفك والوقت المتاح والأسئلة التي ستطرحها. افتح نموذج دليل المعلم

قبل أن تبدأ

المتطلبات السابقة

- التفاضل والتكامل I وII: المشتقات، والتكاملات، والتعويض والتكامل بالتجزئة، والمنحنيات الوسيطية والقطبية.
- مبادئ علم المثلثات ومعادلة الدائرة والكرة.
- تساعد الفيزياء I في أمثلة الشغل والتدفق والمدارات لكنها ليست مطلوبة.

كيف تذاكر

- ارسم صورة 3D لكل مسألة: المحاور، والمنطقة، والمتجهات.
- حلّ كل تمرين على الورق قبل فتح الإجابة.
- تحقق من الوحدات والإشارات: يجب أن يكون للتدفق أو الشغل أو الدوران معنى فيزيائي.
- في التكاملات المتعددة، ارسم المنطقة واكتب الحدود قبل أن تكامل أي شيء.
- استخدم أداة رسم 3D (Desmos 3D أو GeoGebra 3D) لرؤية الأسطح والحقول.
- أعد الاختبارات القصيرة بعد بضعة أيام. التدرّب المتباعد أفضل من جلسة طويلة واحدة.

ماذا تحتاج

- حاسوب أو جهاز لوحي مع جدول بيانات.
- أداة رسم 3D مجانية مثل Desmos 3D أو GeoGebra 3D.
- اختياري: بايثون مع NumPy (مجانًا في Google Colab).

جدول مقترح من 15 أسبوعًا

نحو 6 إلى 9 ساعات أسبوعيًا: قراءة وتمارين، وفي أسابيع المختبر، المختبر.

الأسبوع	الوحدة	الموضوعات	القراءة
1	المتجهات وهندسة الفضاء	الإحداثيات 3D، والمتجهات، والضرب القياسي	OpenStax 2.1–2.3
2	المتجهات وهندسة الفضاء	الضرب المتجهي، والمستقيمات والمستويات	OpenStax 2.4–2.5
3	الدوال المتجهة والحركة في الفضاء	الدوال المتجهة، والحركة في الفضاء، والانحناء؛ المختبر D	OpenStax 3.1–3.4
4	المشتقات الجزئية	دوال عدة متغيرات، والنهايات، والمشتقات الجزئية	OpenStax 4.1–4.3

الأسبوع	الوحدة	الموضوعات	القراءة
5	المشتقات الجزئية	المستويات المماسة، والتقريب الخطي، وقاعدة السلسلة	OpenStax 4.4–4.5
6	التدرجات والاستمثال	التدرج، والمشتقات الاتجاهية، والقيم القصوى	OpenStax 4.6–4.7
7	التدرجات والاستمثال	مضاعفات لاغرانج؛ المختبر B؛ تمارين لاختبار منتصف الفصل	OpenStax 4.8
8	التكاملات الثنائية	التكاملات الثنائية على المستطيلات والمناطق العامة	OpenStax 5.1–5.2
9	التكاملات الثنائية	التكاملات الثنائية القطبية؛ المختبر C	OpenStax 5.3
10	التكاملات الثلاثية وتغيير المتغيرات	التكاملات الثلاثية؛ الإحداثيات الأسطوانية والكروية	OpenStax 5.4–5.5
11	التكاملات الثلاثية وتغيير المتغيرات	الكتلة ومركز الكتلة؛ تغيير المتغيرات	OpenStax 5.6–5.7
12	الحقول المتجهة والتكاملات الخطية ومبرهنة غرين	الحقول المتجهة، والتكاملات الخطية، والحقول المحافظة، ومبرهنة غرين	OpenStax 6.1–6.4
13	التكاملات السطحية ومبرهنة ستوكس ومبرهنة التباعد	التباعد والدوران؛ التكاملات السطحية والتدفق	OpenStax 6.5–6.6
14	التكاملات السطحية ومبرهنة ستوكس ومبرهنة التباعد	مبرهنتا ستوكس والتباعد؛ المختبر A	OpenStax 6.7–6.8
15	المراجعة	مراجعة ومجموعة تمارين نهائية	كل الوحدات

تقدّمك

ضع علامة على الوحدات والمختبرات عند إنهائها، وخص الاختبارات. يُحفظ التقدم ونتائج الاختبارات في هذا المتصفح فقط، ولا تُرسل إلينا أبدًا.

الوحدات

المتجهات وهندسة الفضاء

الإحداثيات 3D، والمتجهات، والضربان القياسي والمتجهي، ومعادلات المستقيمات والمستويات.

أهداف التعلّم

في نهاية هذه الوحدة ستستطيع أن:

- اجمع المتجهات في 3D واضربها في عدد وجد طولها.
- استخدم الضرب القياسي للزوايا والإسقاطات.
- استخدم الضرب المتجهي للمتجهات العمودية والمساحات والأحجام.
- اكتب معادلات المستقيمات والمستويات وجد المسافات.

المفاهيم الأساسية

- للمتجه مقدار واتجاه؛ وبالمركبات، v = ⟨v₁, v₂, v₃⟩ و|v| = √(v₁² + v₂² + v₃²).
- الضرب القياسي a · b = |a||b| cos θ يقيس مدى اتجاه متجهين في الاتجاه نفسه. ويساوي صفرًا تمامًا عندما يكونان متعامدين.
- الضرب المتجهي a × b عمودي على كليهما، وطوله يساوي مساحة متوازي الأضلاع الذي يولدانه.
- يتحدد المستوى بنقطة ومتجه عمودي n: n · (r − r₀) = 0. والمستقيم نقطة زائد مضاعفات اتجاه: r = r₀ + t v.

المعادلات الأساسية

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$$

a· b=| a|| b|θ

الضرب القياسي والزاوية

$$\operatorname{proj}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}\mathbf{b}$$

_ b a=(a· b)/(| b|^2) b

الإسقاط

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta$$

| a× b|=| a|| b|θ

طول الضرب المتجهي = مساحة متوازي الأضلاع

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0

مستوى متجهه العمودي ⟨a, b, c⟩

$$D = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

D=|ax_1+by_1+cz_1-d|^2+b^2+c^2

المسافة من نقطة إلى المستوى ax + by + cz = d

أمثلة محلولة خطوة بخطوة

مثال 1.1 إذا كان a = ⟨1, 2, 2⟩ وb = ⟨2, −1, 2⟩، فأوجد |a| وa · b والزاوية بينهما.

1. |a| = √(1 + 4 + 4) = 3، و|b| = 3 أيضًا.
2. a · b = 2 − 2 + 4 = 4.
3. cos θ = 4/9، إذن θ = arccos(0.444).

الإجابة: |a| = 3, a · b = 4, θ ≈ 63.6°.

مثال 1.2 أوجد a × b للمتجهين نفسيهما ومساحة متوازي الأضلاع الذي يولدانه.

1. a × b = ⟨2·2 − (−1)·(−1), 1·(−1) − 2·2, 1·2 − 2·2⟩ = ⟨3, −5, −2⟩.
2. |a × b| = √(9 + 25 + 4) = √38 ≈ 6.16.
3. المساحة = |a × b| = √38.

الإجابة: ⟨3, −5, −2⟩؛ المساحة √38 ≈ 6.16.

مثال 1.3 تهب ريح سرعتها 10 m/s بزاوية 30° على محور دوّار توربين رياح. ما نسبة القدرة المواجهة التي يتلقاها التوربين، إذا كانت القدرة تنمو مع مكعب سرعة الريح على امتداد محوره؟

1. المركبة على امتداد المحور: 10 cos 30° = 8.66 m/s (ضرب قياسي مع متجه وحدة المحور).
2. نسبة القدرة = (cos 30°)³ = 0.65.

الإجابة: نحو 0.65: انحراف قدره 30° يُفقد نحو ثلث القدرة، ولهذا تدور التوربينات لتواجه الريح.

تمارين

حلّ كلًّا منها على الورق أولًا، ثم تحقق.

1. أوجد المستوى المار بالنقاط (1, 0, 0) و(0, 2, 0) و(0, 0, 3).

   الصيغة المقطعية x/1 + y/2 + z/3 = 1، أي 6x + 3y + 2z = 6.

2. أوجد المسافة من نقطة الأصل إلى ذلك المستوى.

$|-6|/\sqrt{(36 + 9 + 4)} = 6/7 \approx 0.857$.

3. أوجد إسقاط $\langle 3, 4, 0 \rangle$ على $\langle 1, 0, 0 \rangle$.

$\langle 3, 0, 0 \rangle$.

4. أوجد حجم متوازي السطوح المولَّد من $\langle 1, 0, 0 \rangle$ و$\langle 0, 2, 0 \rangle$ و$\langle 1, 1, 3 \rangle$.

$|a \cdot (b \times c)| = \det = 1 \cdot (2 \cdot 3 - 0 \cdot 1) = 6$.

5. هل $\langle 1, 2, 3 \rangle$ و$\langle -1, 0, 3 \rangle$ متعامدان؟

الضرب القياسي $-1 + 0 + 3 = 0$، إذن نعم.

مفاهيم خاطئة شائعة

خرافة: $a \times b = b \times a$.
في الحقيقة: الضرب المتجهي غير تبديلي عكسيًا: $a \times b = -(b \times a)$.

خرافة: الضرب القياسي لمتجهين متجه.
في الحقيقة: إنه عدد قياسي (رقم).

خرافة: معادلة المستوى تخبرك باتجاهه.
في الحقيقة: معاملاتها تعطي المتجه العمودي، وهو عمودي على المستوى.

بطاقات تعليمية

الضرب القياسي

$a \cdot b = |a||b| \cos\theta$؛ يساوي صفرًا عند التعامد.

الضرب المتجهي

عمودي على كليهما؛ الطول = مساحة متوازي الأضلاع.

الإسقاط

b $(a \cdot b/|b|^2)$.

الضرب الثلاثي

$|a \cdot (b \times c)|$ = حجم متوازي السطوح.

المستوى

$n \cdot (r - r_0) = 0$.

المستقيم

$r = r_0 + t\,v$.

اختبار ذاتي

1. إذا كان $a \cdot b = 0$ (وكلاهما غير صفري)، فالمتجهان...

متوازيين

متعامدان

متساويان

متعاكسان

متعامدان. cos θ = 0، إذن θ = 90°.

2. طول a × b يساوي...

الزاوية بينهما

مساحة متوازي الأضلاع

a · b

|a| + |b|

مساحة متوازي الأضلاع. |a||b| sin θ|.

3. المتجه العمودي على 2x − y + 5z = 7 هو...

⟨ 2, −1, 5 ⟩

⟨7, 0, 0⟩

⟨2, 1, 5⟩

⟨1, 1, 1⟩

⟨2, −1, 5⟩. اقرأ المعاملات.

4. |⟨2, 3, 6⟩| =

11

7

√11

49

7. √(4 + 9 + 36) = √49.

أعد هذا الاختبار

كيف يساعد هذا في إنقاذ الكوكب

الريح متجه، وتدير التوربينات دوّاراتها لتواجهها لأن القدرة تعتمد على مكعب المركبة على امتداد محور الدوّار، وهو ضرب قياسي متخفٍّ.

الحساب نفسه يخبر اللوح الشمسي بمقدار ضوء الشمس الذي يلتقطه: الجزء المفيد هو الضرب القياسي لاتجاه ضوء الشمس مع المتجه العمودي على اللوح.

على Saving Planets: الفيزياء ١، الوحدة 3: طاقة الرياح

المصادر: وزارة الطاقة الأمريكية: كيف تعمل توربينات الرياح؟ (بالإنجليزية) (https://www.energy.gov/eere/wind/how-do-wind-turbines-work) · OpenStax Calculus 3, 2.3 The Dot Product (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/2-3-the-dot-product)

مصادر تعلّم مجانية

- OpenStax Calculus 3, 2.3 The Dot Product (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/2-3-the-dot-product): الزوايا والإسقاطات.
- OpenStax Calculus 3, 2.4 The Cross Product (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/2-4-the-cross-product): المتجهات العمودية والمساحات والعزم.
- OpenStax Calculus 3, 2.5 Equations of Lines and Planes in Space (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/2-5-equations-of-lines-and-planes-in-space): المستقيمات والمستويات والمسافات.

شاهد المحاضرة

Session 79 Clip: Vector Fields in Space (https://ocw.mit.edu/courses/18-02sc-multivariable-calculus-fall-2010/resources/clip-vector-fields-in-space/) (باللغة الإنجليزية)

MIT 18.02SC Multivariable Calculus (Fall 2010), MIT OpenCourseWare. الترخيص: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · شروط الاستخدام (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). الرابط للدراسة المجانية فقط؛ Saving Planets غير تابع لهذه الجامعة ولا يحظى بتأييدها.

أنهيت هذه الوحدة

الدوال المتجهة والحركة في الفضاء

المنحنيات في الفضاء بوصفها دوال متجهة: السرعة، والتسارع، وطول القوس، والانحناء، وحركة الأقمار الصناعية.

أهداف التعلّم

في نهاية هذه الوحدة ستستطيع أن:

- اشتق الدوال المتجهة وكاملها.
- أوجد متجه السرعة ومقدارها والتسارع على امتداد مسار.
- احسب طول القوس والانحناء.
- حلّل المدارات الدائرية بحساب المتجهات.

المفاهيم الأساسية

- المنحنى في الفضاء هو r(t) = ⟨x(t), y(t), z(t)⟩؛ اشتقه مركبةً مركبة.
- السرعة v = r'(t) مماسة للمسار؛ ومقدارها |v|؛ والتسارع a = v'.
- طول القوس هو تكامل مقدار السرعة: L = ∫|r'(t)| dt.
- في الحركة الدائرية المنتظمة يكون مقدار السرعة ثابتًا، لكن التسارع يتجه نحو المركز بمقدار v²/r.

المعادلات الأساسية

$$\mathbf{v} = \mathbf{r}'(t),\ \mathbf{a} = \mathbf{r}''(t)$$

```
v= r'(t),\ a= r''(t)
```

السرعة والتسارع

$$L = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)|\,dt$$

```
L=_a^b| r'(t)| dt
```

طول القوس

$$\kappa = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}'|^3}$$

```
=(| r'× r''|)/(| r'|^3)
```

الانحناء

$$v = \sqrt{GM/r},\ T = 2\pi r/v$$

```
v=/r,\ T=2π r/v
```

أمثلة محلولة خطوة بخطوة

مثال 2.1 أوجد طول لفة واحدة من اللولب $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \sin t, t \rangle$، $0 \le t \le 2\pi$.

1. $\mathbf{r}' = \langle -\sin t, \cos t, 1 \rangle$، ومقدار السرعة $\sqrt{(\sin^2 t + \cos^2 t + 1)} = \sqrt{2}$.
2. $L = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\, dt = 2\pi\sqrt{2}$.

الإجابة: $2\pi\sqrt{2} \approx 8.89$.

مثال 2.2 يدور Landsat 9 على ارتفاع 705 km فوق الأرض (نصف القطر المتوسط 6371 km). باعتبار المدار دائرة، أوجد سرعته وتسارعه ودوره.

1. $r = 7{,}076 \text{ km} = 7.076 \times 10^6 \text{ m}$; $GM = 3.986 \times 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$.
2. $v = \sqrt{(GM/r)} = 7{,}505 \text{ m/s}$.
3. $a = v^2/r = 7.96 \text{ m/s}^2$، متجهًا نحو مركز الأرض.
4. $T = 2\pi r/v = 5{,}924 \text{ s}$.

الإجابة: نحو 7.5 km/s و98.7 دقيقة لكل دورة، بما يطابق الدور البالغ 99 دقيقة الذي تذكره ناسا.

مثال 2.3 أوجد انحناء دائرة نصف قطرها 2، $\mathbf{r}(t) = \langle 2\cos t, 2\sin t, 0 \rangle$.

1. $\mathbf{r}' = \langle -2\sin t, 2\cos t, 0 \rangle$، $|\mathbf{r}'| = 2$.
2. $\mathbf{r}'' = \langle -2\cos t, -2\sin t, 0 \rangle$؛ $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = \langle 0, 0, 4 \rangle$.
3. $\kappa = 4/2^3$.

الإجابة: $\kappa = 1/2$: انحناء الدائرة يساوي 1/نصف القطر.

تمارين

حلّ كلًّا منها على الورق أولًا، ثم تحقق.

1. لمقذوف $\mathbf{r}(t) = \langle 20t,\ 20t - 4.9t^2 \rangle$ m. أوجد متجه سرعته ومقدارها عند $t = 1$ s.

   $\mathbf{v} = \langle 20,\ 20 - 9.8t \rangle = \langle 20,\ 10.2 \rangle$؛ مقدار السرعة $\sqrt{(400 + 104.04)} \approx 22.45$ m/s.

2. أوجد تسارع $\mathbf{r}(t) = \langle t^2,\ 3t,\ e^t \rangle$.

   $\langle 2,\ 0,\ e^t \rangle$.

3. أوجد طول $\mathbf{r}(t) = \langle 3t,\ 4t,\ 0 \rangle$ عندما $0 \le t \le 2$.

مقدار السرعة 5، إذن L = 10.

4. يدور قمر صناعي على ارتفاع 35786 km. أوجد دوره.

r = 42157 km؛ T = 2π√(r³/GM) ≈ 86160 s ≈ 23.93 h: يوم نجمي واحد، فهو إذن ثابت بالنسبة إلى الأرض.

مفاهيم خاطئة شائعة

خرافة: ثبات مقدار السرعة يعني انعدام التسارع.
في الحقيقة: الانعطاف تسارع: القمر الصناعي في مدار دائري يتسارع نحو الأرض طوال الوقت.

خرافة: طول القوس يساوي |r(b) − r(a)|.
في الحقيقة: تلك هي المسافة في خط مستقيم؛ أما طول القوس فيكامل مقدار السرعة على امتداد المسار.

خرافة: الأقمار الصناعية الأعلى تتحرك أسرع.
في الحقيقة: v = √(GM/r) تتناقص مع المسافة؛ المدارات الأعلى أبطأ وأطول.

بطاقات تعليمية

الدالة المتجهة

r(t) = ⟨x(t), y(t), z(t)⟩.

السرعة

r'(t)، مماس للمسار.

السرعة

|r'(t)|.

طول القوس

∫|r'| dt.

الانحناء

|r' × r''|/|r'|³.

المدار الدائري

v = √(GM/r).

اختبار ذاتي

1. السرعة هي...

r(t)

r'(t)

|r(t)|

∫r dt

r'(t). مشتقة الموضع.

2. طول القوس يكامل...

الموضع

مقدار السرعة

التسارع

الانحناء

مقدار السرعة. L = ∫|r'| dt.

3. انحناء دائرة نصف قطرها 5 هو...

5

1/5

25

0

1/R = κ .1/5.

4. مضاعفة نصف قطر مدار دائري تغيّر سرعته بمعامل...

2

1/√2

1/2

2√

v .1/√2 ∝ 1/√r.

أعد هذا الاختبار

كيف يساعد هذا في إنقاذ الكوكب

تتبع أقمار رصد الأرض مثل Landsat 9 مسارات متجهة اختيرت بهذه الصيغ تمامًا. فمداره شبه القطبي والمتزامن مع الشمس على ارتفاع 705 km يتيح له تصوير المكان نفسه كل 16 يومًا في الوقت المحلي نفسه تقريبًا، فتبرز التغيرات في الغابات والأنهار الجليدية والمدن.

على Saving Planets: Landsat 9 · التفاضل والتكامل II، الوحدة 7: المدارات القطبية

المصادر: NASA: Landsat 9 quick facts (https://landsat.gsfc.nasa.gov/satellites/landsat-9/) · صحيفة بيانات الأرض من NASA (بالإنجليزية) (https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/earthfact.html)

مصادر تعلّم مجانية

- OpenStax Calculus 3, 3.2 Calculus of Vector-Valued Functions (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/3-2-calculus-of-vector-valued-functions): المشتقات والتكاملات.
- OpenStax Calculus 3, 3.4 Motion in Space (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/3-4-motion-in-space): السرعة والتسارع وقوانين كبلر.

شاهد المحاضرة

Session 79 Clip: Vector Fields in Space (https://ocw.mit.edu/courses/18-02sc-multivariable-calculus-fall-2010/resources/clip-vector-fields-in-space/) (باللغة الإنجليزية)

MIT 18.02SC Multivariable Calculus (Fall 2010), MIT OpenCourseWare. الترخيص: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · شروط الاستخدام (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). الرابط للدراسة المجانية فقط؛ Saving Planets غير تابع لهذه الجامعة ولا يحظى بتأييدها.

☐ **أنهيت هذه الوحدة**

المشتقات الجزئية

دوال عدة متغيرات: منحنيات المستوى، والمشتقات الجزئية، والمستويات المماسة، والتقريب الخطي، وقاعدة السلسلة متعددة المتغيرات.

أهداف التعلّم

في نهاية هذه الوحدة ستستطيع أن:

- اقرأ منحنيات المستوى وخرائط الكنتور.
- احسب المشتقات الجزئية وفسّرها بوصفها معدلات.
- أوجد المستويات المماسة واستخدم التقريب الخطي.
- طبّق قاعدة السلسلة متعددة المتغيرات.

المفاهيم الأساسية

- الدالة z = f(x, y) سطح؛ ومنحنيات مستواها f = c خريطة كنتورية.
- ∂f/∂x هو معدل التغير في x مع تثبيت y.
- قرب نقطة ما، يشبه السطح الأملس مستواه المماس: Δf ≈ f_xΔx + f_yΔy.
- قاعدة السلسلة: إذا كان x وy يعتمدان على t، فإن df/dt = f_x dx/dt + f_y dy/dt.

المعادلات الأساسية

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$$

```
f_x=( f)/( x)
```

المشتقة الجزئية

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

```
z-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)
```

المستوى المماس

$$\frac{df}{dt} = f_x \frac{dx}{dt} + f_y \frac{dy}{dt}$$

```
df/dt=f_xdx/dt+f_ydy/dt
```

قاعدة السلسلة

$$f_{xy} = f_{yx}$$

```
f_xy=f_yx
```

أمثلة محلولة خطوة بخطوة

مثال 3.1 للدالة $f(x, y) = x^2y + y^3$، أوجد f_x وf_y عند $(1, 2)$، واستخدم المستوى المماس لتقدير $f(1.1, 1.9)$.

1. $f(1, 2) = 10$; $f_x = 2xy = 4$; $f_y = x^2 + 3y^2 = 13$.
2. $f \approx 10 + 4(0.1) + 13(-0.1) = 9.1$.
3. القيمة الحقيقية: $1.21 \times 1.9 + 6.859 = 9.158$.

الإجابة: التقدير 9.1 مقابل القيمة الحقيقية 9.158.

مثال 3.2 للغاز المثالي، $P = nRT/V$. مع $n = 1$ mol و$T = 300$ K و$V = 0.025$ m³، أوجد P و$\partial P/\partial T$ و$\partial P/\partial V$.

1. $P = 8.314 \times 300/0.025 = 99{,}768$ Pa.
2. $\partial P/\partial T = nR/V = 332.6$ Pa/K.
3. $\partial P/\partial V = -nRT/V^2 = -P/V = -3.99 \times 10^6$ Pa/m³.

الإجابة: $P \approx 99.8$ kPa؛ التسخين بمقدار 1 K يرفعه نحو 333 Pa؛ والتمدد يخفضه.

مثال 3.3 تطير طائرة مسيّرة وفق $x = 2t$ و$y = t^2$. ودرجة الحرارة التي تقيسها $T = 20 + 0.1x - 0.05y$ (°C، km). أوجد dT/dt عند $t = 1$.

1. $T_x = 0.1$, $T_y = -0.05$; $dx/dt = 2$, $dy/dt = 2t = 2$.
2. $dT/dt = 0.1(2) - 0.05(2)$.

الإجابة: 0.1 °C لكل وحدة زمن.

تمارين

حلّ كلًّا منها على الورق أولًا، ثم تحقق.

1. أوجد f_x وf_y للدالة $f = e^{\wedge}(xy)$.

   $f_x = y\, e^{\wedge}(xy)$, $f_y = x\, e^{\wedge}(xy)$.

2. أوجد f_{xy} للدالة $f = x^3y^2$.

   $f_x = 3x^2y^2$، $f_{xy} = 6x^2y$ (مثل f_{yx}).

3. أوجد المستوى المماس لـ $z = x^2 + y^2$ عند $(1, 1, 2)$.

$z = 2 + 2(x - 1) + 2(y - 1)$, i.e. $z = 2x + 2y - 2$.

4. قدّر $\sqrt{(3.02^2 + 3.97^2)}$ بالتقريب الخطي عند $(3, 4)$.

$f = 5$، $f_x = 3/5$، $f_y = 4/5$: $5 + 0.6(0.02) + 0.8(-0.03) = 4.988$ (القيمة الحقيقية 4.9880).

مفاهيم خاطئة شائعة

خرافة: $\partial f/\partial x$ تتجاهل y.
في الحقيقة: إنها تثبّت y؛ وقد يظل y ظاهرًا في الإجابة.

خرافة: إذا وُجدت المشتقتان الجزئيتان كلتاهما، فإن f ملساء.
في الحقيقة: قد توجد المشتقات الجزئية حيث لا تكون f متصلة أصلًا؛ والقابلية للاشتقاق تحتاج إلى أكثر من ذلك.

خرافة: التقريب الخطي جيد في كل مكان.
في الحقيقة: قرب نقطة الأساس فقط.

بطاقات تعليمية

المشتقة الجزئية

معدل التغير في متغير واحد مع تثبيت البقية.

منحنى المستوى

$f(x, y) = c$؛ خط كنتور.

المستوى المماس

$z = z_0 + f_x\Delta x + f_y\Delta y$.

التقريب الخطي

$\Delta f \approx f_x\Delta x + f_y\Delta y$.

قاعدة السلسلة

$df/dt = f_x x' + f_y y'$.

كليرو

$f_{xy} = f_{yx}$ للدالة الملساء f.

اختبار ذاتي

1. إذا كانت $f = x^2y$ فإن $f_x =$

- $2x$
- $2xy$
- x^2

x^2y

$2xy$. عامل y كثابت.

2. منحنيات مستوى $f(x, y) = x^2 + y^2$ هي...

مستقيمات

دوائر

قطوع مكافئة

نقاط

دوائر. $x^2 + y^2 = c$.

3. للدالة الملساء f، تكون f_{xy} وf_{yx}...

متعاكسان

متساويان

غير مرتبطين

صفر

متساويان. مبرهنة كليرو.

4. df/dt للدالة $f(x(t), y(t))$ هي...

$f_x + f_y$

$f_x x' + f_y y'$

$f_x f_y$

$x'y'$

$f_x x' + f_y y'$. قاعدة السلسلة متعددة المتغيرات.

أعد هذا الاختبار

كيف يساعد هذا في إنقاذ الكوكب

خرائط الطقس خرائط كنتورية لدوال في متغيرين: خطوط الضغط المتساوي منحنيات مستوى للضغط، وخطوط الحرارة المتساوية لدرجة الحرارة. وتخبر المشتقات الجزئية المتنبئين بسرعة تغير الضغط أو درجة الحرارة باتجاه الشرق أو الشمال، وهو ما يحرك الرياح.

على Saving Planets: التفاضل والتكامل 1

المصادر: NOAA/NWS JetStream: Wind (https://www.weather.gov/jetstream/wind) · OpenStax Calculus 3, 4.3 Partial Derivatives (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/4-3-partial-derivatives)

مصادر تعلّم مجانية

- OpenStax Calculus 3, 4.3 Partial Derivatives (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/4-3-partial-derivatives): قسم من كتاب مدرسي مجاني.
- OpenStax Calculus 3, 4.4 Tangent Planes and Linear Approximations (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/4-4-tangent-planes-and-linear-approximations): المستويات المماسة.
- OpenStax Calculus 3, 4.5 The Chain Rule (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/4-5-the-chain-rule): قاعدة السلسلة.

شاهد المحاضرة

Session 26 Clip: Partial Derivatives (https://ocw.mit.edu/courses/18-02sc-multivariable-calculus-fall-2010/resources/clip-partial-derivatives/) (باللغة الإنجليزية)

MIT 18.02SC Multivariable Calculus (Fall 2010), MIT OpenCourseWare. الترخيص: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · شروط الاستخدام (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). الرابط للدراسة المجانية فقط؛ Saving Planets غير تابع لهذه الجامعة ولا يحظى بتأييدها.

☐ **أنهيت هذه الوحدة**

التدرجات والاستمثال

متجه التدرج، والمشتقات الاتجاهية، والنقاط الحرجة واختبار المشتقة الثانية، والاستمثال المقيّد بمضاعفات لاغرانج.

أهداف التعلّم

في نهاية هذه الوحدة ستستطيع أن:

- احسب التدرج والمشتقات الاتجاهية.
- اشرح لماذا يشير التدرج إلى أعلى المنحدر ويكون عموديًا على منحنيات المستوى.
- صنّف النقاط الحرجة باختبار المشتقة الثانية.
- حل المسائل المقيدة بمضاعفات لاغرانج.

المفاهيم الأساسية

- ∇f = ⟨f_x, f_y⟩ يشير إلى اتجاه أسرع تزايد، وطوله هو ذلك المعدل الأسرع.
- معدل التغير في اتجاه متجه وحدة u هو D_u f = ∇f · u.
- التدرج عمودي على منحنيات المستوى، لذا يجري الماء نزولًا على امتداد −∇h، عابرًا الكنتورات.
- عند قيمة قصوى داخلية يكون ∇f = 0. ويحسم الاختبار D = f_xx f_yy − f_xy²: D > 0 مع f_xx > 0 قيمة صغرى؛ و D < 0 نقطة سرج.
- لاستمثال f بشرط g = c، حل ∇f = λ∇g: عند أفضل نقطة يلامس منحنى مستوى f القيد بالكاد.

المعادلات الأساسية

$$\nabla f = \langle f_x, f_y, f_z \rangle$$

```
f= f_x,f_y,f_z
```

التدرج

$$D_{\mathbf{u}} f = \nabla f \cdot \mathbf{u}$$

```
D_ uf= f· u
```

المشتقة الاتجاهية

$$D = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2$$

```
D=f_xxf_yy-f_xy^2
```

اختبار المشتقة الثانية

$$\nabla f = \lambda \nabla g, \quad g = c$$

```
f= g, g=c
```

أمثلة محلولة خطوة بخطوة

مثال 4.1 تل ارتفاعه $h(x, y) = 500 - 0.01x^2 - 0.02y^2$ (بالأمتار، وx وy بالأمتار). عند $(100, 50)$، أوجد ∇h وأشد ميل والميل باتجاه $\langle 3, 4\rangle/5$.

1. $\nabla h = \langle -0.02x, -0.04y\rangle = \langle -2, -2\rangle$.
2. أشد معدل صعود $|\nabla h| = 2\sqrt{2} = 2.83$ m لكل m.
3. $D_{u} h = \langle -2, -2\rangle \cdot \langle 0.6, 0.8\rangle = -2.8$.

الإجابة: أشد صعود 2.83 (صعودًا باتجاه $\langle -1, -1\rangle$)؛ وباتجاه $\langle 3, 4\rangle$ تنزل 2.8 m لكل m. ويجري المطر على امتداد $-\nabla h$.

مثال 4.2 أوجد النقطة الحرجة للدالة $f = x^2 + xy + y^2 - 3x$ وصنّفها.

1. $f_x = 2x + y - 3 = 0$ و$f_y = x + 2y = 0$ تعطيان $x = 2$ و$y = -1$.
2. $D = 3 > 0$, $f_{xx} > 0$: $f_{xx} = 2$, $f_{yy} = 2$, $f_{xy} = 1$.
3. $f(2, -1) = 4 - 2 + 1 - 6 = -3$.

الإجابة: قيمة صغرى، $f = -3$ عند $(2, -1)$.

مثال 4.3 يجب أن تسع علبة 1 لتر ($1000\ \text{cm}^3$). ما نصف القطر والارتفاع اللذان يستهلكان أقل معدن (أسطوانة مغلقة)؟

1. صغّر $A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$ بشرط $g = \pi r^2 h = 1000$.
2. $\nabla A = \lambda \nabla g$ تعطي $4\pi r + 2\pi h = \lambda 2\pi r h$ و$2\pi r = \lambda \pi r^2$، إذن $\lambda = 2/r$ و$h = 2r$.
3. $\pi r^2 (2r) = 1000$ تعطي $r = (500/\pi)^{\wedge}(1/3)$.

الإجابة: $r \approx 5.42$ cm، $h \approx 10.84$ cm (الارتفاع = القطر)، المساحة $\approx 554\ \text{cm}^2$.

تمارين

حلّ كلًّا منها على الورق أولًا، ثم تحقق.

1. أوجد ∇f للدالة $f = xyz$ عند $(1, 2, 3)$.

   $\langle yz, xz, xy\rangle = \langle 6, 3, 2\rangle$.

2. أوجد $D_{u} f$ للدالة $f = x^2 + y^2$ عند $(1, 1)$ باتجاه $\langle 1, 0\rangle$.

   $\nabla f = \langle 2, 2\rangle$؛ $D_{u} f = 2$.

3. صنّف النقطة الحرجة للدالة $f = x^2 - y^2$.

عند (0, 0): D = (2)(−2) − 0 = −4 < 0، نقطة سرج.

4. سيّج مستطيلًا بمحاذاة نهر مستقيم بـ 40 m من السياج (دون سياج على جهة النهر). اجعل المساحة أكبر ما يمكن.

كبّر xy بشرط x + 2y = 40: y = 10، x = 20، المساحة 200 m².

5. كبّر f = x + y على الدائرة x² + y² = 2.

λ⟨1, 1⟩ = ⟨2x, 2y⟩ تعطي x = y = 1؛ القيمة العظمى 2.

مفاهيم خاطئة شائعة

خرافة: يشير التدرج على امتداد منحنى المستوى.
في الحقيقة: إنه عمودي على منحنى المستوى.

خرافة: ∇f = 0 يعني قيمة عظمى أو صغرى.
في الحقيقة: قد تكون نقطة سرج؛ استخدم اختبار D.

خرافة: λ مجرد حيلة للحذف.
في الحقيقة: λ هو معدل تغير أفضل قيمة عند تغير القيد c، وهو مفيد في الاقتصاد والهندسة.

بطاقات تعليمية

التدرج

⟨f_x, f_y, f_z⟩؛ أسرع تزايد.

المشتقة الاتجاهية

∇f · u.

نقطة حرجة

∇f = 0.

نقطة السرج

D < 0.

شرط لاغرانج

∇f = λ∇g.

أشد انحدار

تحرك على امتداد −∇f.

اختبار ذاتي

1. يشير التدرج...

على امتداد منحنيات المستوى

في اتجاه أسرع تزايد

نزولًا

نحو نقطة الأصل

في اتجاه أسرع تزايد. طوله هو المعدل الأقصى.

2. D < 0 عند نقطة حرجة يعني...

قيمة صغرى

أقصى ما يمكن

سرجًا

لا استنتاج

سرجًا. تقعر للأعلى في اتجاه، وللأسفل في آخر.

3. مضاعفات لاغرانج تحل...

∇ f = 0

∇ f = λ ∇ g

f = g

f' = λ

∇f = λ∇g. تتوازى التدرجات عند القيمة المثلى المقيدة.

4. تكون D_u f أكبر ما يمكن عندما يكون u...

عموديًا على ∇f

موازيًا لـ ∇f

معاكسًا لـ ∇f

في أي اتجاه

موازيًا لـ ∇f. D_u f = |∇f| cos θ.

أعد هذا الاختبار

كيف يساعد هذا في إنقاذ الكوكب

يجري الماء نزولًا مع تدرج التضاريس. وتُبنى خرائط الفيضانات وحدود مستجمعات المياه ونماذج التعرية بحساب $-h\nabla$ من بيانات الارتفاع، مثل نماذج الارتفاع المجانية بتقنية الليدار من USGS 3D Elevation Program.

تقلل مضاعفات لاغرانج المادة اللازمة لحجم أو متانة مطلوبين. واستخدام مادة أقل للمهمة نفسها خفض مباشر في التعدين والطاقة والانبعاثات.

على Saving Planets: صفحة الأنهار · الرسم الهندسي CAD /: تخفيف الوزن

المصادر: USGS 3D Elevation Program (3DEP) (https://www.usgs.gov/3d-elevation-program) · OpenStax Calculus 3, 4.8 Lagrange Multipliers (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/4-8-lagrange-multipliers)

مصادر تعلّم مجانية

- OpenStax Calculus 3, 4.6 Directional Derivatives and the Gradient (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/4-6-directional-derivatives-and-the-gradient): التدرجات.
- OpenStax Calculus 3, 4.7 Maxima/Minima Problems (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/4-7-maxima-minima-problems): اختبار المشتقة الثانية.
- OpenStax Calculus 3, 4.8 Lagrange Multipliers (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/4-8-lagrange-multipliers): الاستمثال المقيد.

أنهيت هذه الوحدة

التكاملات الثنائية

التكامل على مناطق في المستوى: التكاملات المتكررة، ومبرهنة فوبيني، والمناطق العامة، والإحداثيات القطبية، والمساحة، والكتلة، والمتوسطات.

أهداف التعلّم

في نهاية هذه الوحدة ستستطيع أن:

- احسب التكاملات الثنائية بوصفها تكاملات متكررة.
- ضع الحدود للمناطق العامة واعكس الترتيب.
- حوّل إلى الإحداثيات القطبية مع dA = r dr dθ.
- استخدم التكاملات الثنائية للمساحة والكتلة والمتوسطات والمجاميع على خريطة.

المفاهيم الأساسية

- ∬_R f dA يجمع f مضروبة في مساحات ضئيلة. وعلى مستطيل، تنص مبرهنة فوبيني على تكامل متغير ثم الآخر، بأي ترتيب.
- في المنطقة العامة تكون الحدود الداخلية منحنيات؛ ارسم المنطقة لقراءتها.
- المناطق المستديرة أسهل في الإحداثيات القطبية، حيث عنصر المساحة r dr dθ (وليس dr dθ).
- متوسط f على R هو ∬f dA مقسومًا على مساحة R.

المعادلات الأساسية

$$\iint_R f\,dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$$

_Rf dA=_a^b\!_c^df(x,y) dy dx

مبرهنة فوبيني

$$dA = r\,dr\,d\theta$$

dA=r dr dθ

عنصر المساحة القطبي

$$\bar{f} = \frac{1}{\text{Area}(R)} \iint_R f\,dA$$

f=1Area(R)_Rf dA

القيمة المتوسطة

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

أمثلة محلولة خطوة بخطوة

مثال 5.1 احسب $\iint_R xy\,dA$ على $R = [0,2] \times [0,3]$.

1. $\int_0^2 x\,dx = 2$ و$\int_0^3 y\,dy = 4.5$.
2. ينفصل التكامل: 4.5×2.

الإجابة: 9.

مثال 5.2 يهطل المطر على مستجمع مساحته $5\text{ km} \times 10\text{ km}$ بعمق $d(x,y) = 20 + 2x$ mm (x بالكيلومترات، على امتداد الضلع البالغ 10 km). ما كمية الماء التي هطلت؟

1. المجموع $= \int_0^{10}\int_0^{5} (20 + 2x)\,dy\,dx = 5\int_0^{10}(20+2x)\,dx$.
2. $= 5(200 + 100) = 1{,}500$ mm·km².
3. 1 mm على 1 km² يساوي 1000 m³.

الإجابة: 1.5×10^6 m³ (متوسط العمق 30 mm). هكذا تتحول مقاييس المطر والرادار إلى تنبؤات بتدفق الأنهار.

مثال 5.3 احسب $\iint e^{-(x^2+y^2)}\,dA$ على قرص الوحدة، ثم على المستوى كله.

1. قطبيًا: $\int_0^{2\pi}\int_0^1 e^{-r^2}\,r\,dr\,d\theta = 2\pi \times \tfrac{1}{2}(1 - e^{-1})$.
2. على المستوى كله يمتد تكامل r إلى ∞ ويعطي $\tfrac{1}{2}$.

الإجابة: $\pi(1 - 1/e) \approx 1.986$ على القرص؛ وπ على المستوى، وهذا يثبت $\int e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$.

تمارين

حلّ كلًّا منها على الورق أولًا، ثم تحقق.

1. $\int_0^1\int_0^{x} x\,dy\,dx$

   $\int_0^1 x^2\,dx = 1/3$.

2. اعكس ترتيب $\int_0^1\int_{y}^{1} f\,dx\,dy$.

   $\int_0^1\int_0^{x} f\,dy\,dx$.

3. أوجد مساحة دائرة نصف قطرها a بالإحداثيات القطبية.

$\int_0^{2\pi}\int_0^a r\,dr\,d\theta = \pi a^2$.

4. أوجد الحجم تحت $z = 4 - x^2 - y^2$ فوق القرص $x^2 + y^2 \le 4$.

$\int_0^{2\pi}\int_0^2 (4 - r^2)\,r\,dr\,d\theta = 2\pi(8 - 4) = 8\pi \approx 25.1$.

5. متوسط $f = x + y$ على $[0, 1] \times [0, 1]$.

$\iint_1 (x + y)\,dA = 1$، المساحة 1، المتوسط 1.

مفاهيم خاطئة شائعة

خرافة: في القطبية، $dA = dr\,d\theta$.
في الحقيقة: $dA = r\,dr\,d\theta$؛ ونسيان r هو الخطأ الأكثر شيوعًا.

خرافة: يجب أن تكون الحدود الداخلية أعدادًا.
في الحقيقة: في المنطقة العامة تكون الحدود الداخلية دوال في المتغير الخارجي.

خرافة: الترتيب لا يهم أبدًا.
في الحقيقة: القيمة لا تتغير، لكن الحدود تتغير، وكثيرًا ما يكون أحد الترتيبين أسهل بكثير.

بطاقات تعليمية

التكامل الثنائي

$\iint_R f\,dA$.

فوبيني

كامل بأي ترتيب على مستطيل.

منطقة من النوع I

$a \le x \le b,\ g_1(x) \le y \le g_2(x)$.

dA القطبي

$r\,dr\,d\theta$.

القيمة المتوسطة

$\iint f\,dA$ / المساحة.

تكامل غاوس

$\int e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$.

اختبار ذاتي

1. عنصر المساحة القطبي:

$dr\,d\theta$

$r\,dr\,d\theta$

$r^2\ dr\ d\theta$

$d\theta/r$

$r\ dr\ d\theta$. القطعة القطبية أبعادها $r\ d\theta$ في dr.

2. $\iint_R 1\ dA$ يساوي...

0

مساحة R

المحيط

1

مساحة R. يجمع المساحة.

3. $\int_0^1 \int_0^2 3\ dy\ dx =$

3

5

6

2

3×2. المساحة 6.

4. مبرهنة فوبيني تتيح لك...

تخطي الحدود

التكامل في متغير واحد في كل مرة

الاشتقاق

استخدام القطبية دائمًا

التكامل في متغير واحد في كل مرة. التكاملات المتكررة.

أعد هذا الاختبار

كيف يساعد هذا في إنقاذ الكوكب

المجاميع على خريطة تكاملات ثنائية: المطر على مستجمع مائي، والكربون المخزن في غابة، أو المحصول المحصود من حقل. وبهذه الطريقة يحوّل علماء الهيدرولوجيا خرائط الأمطار إلى أحجام للتنبؤ بالفيضانات وتخطيط إمدادات المياه.

على Saving Planets: صفحة الأنهار · ملف إزالة الغابات

المصادر: USGS Water Science School: Precipitation and the water cycle (https://www.usgs.gov/special-topics/water-science-school/science/precipitation-and-water-cycle) · OpenStax Calculus 3, 5.2 Double Integrals over General Regions (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/5-2-double-integrals-over-general-regions)

مصادر تعلّم مجانية

- OpenStax Calculus 3, 5.1 Double Integrals over Rectangular Regions (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/5-1-double-integrals-over-rectangular-regions): فوبيني.
- OpenStax Calculus 3, 5.2 Double Integrals over General Regions (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/5-2-double-integrals-over-general-regions): المناطق العامة.
- OpenStax Calculus 3, 5.3 Double Integrals in Polar Coordinates (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/5-3-double-integrals-in-polar-coordinates): القطبية.

شاهد المحاضرة

Session 47 Clip: Definition of Double Integration (https://ocw.mit.edu/courses/18-02sc-multivariable-calculus-fall-2010/resources/clip-definition-of-double-integration/) (باللغة الإنجليزية)

MIT 18.02SC Multivariable Calculus (Fall 2010), MIT OpenCourseWare. الترخيص: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · شروط الاستخدام (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). الرابط للدراسة المجانية فقط؛ Saving Planets غير تابع لهذه الجامعة ولا يحظى بتأييدها.

أنهيت هذه الوحدة

التكاملات الثلاثية وتغيير المتغيرات

التكامل على المجسمات بالإحداثيات الديكارتية والأسطوانية والكروية، والمحدد اليعقوبي لتغييرات المتغيرات العامة.

أهداف التعلّم

في نهاية هذه الوحدة ستستطيع أن:

- ضع التكاملات الثلاثية واحسبها.
- استخدم الإحداثيات الأسطوانية (r dz dr dθ) والكروية (ρ² sin ϕ dρ dϕ dθ).
- احسب المحدد اليعقوبي لتغيير المتغيرات.
- أوجد أحجام المجسمات وكتلها ومراكز كتلها.

المفاهيم الأساسية

- ∭_E f dV يجمع f على صناديق ضئيلة؛ ومع f = الكثافة يعطي الكتلة.
- تناسب الإحداثيات الأسطوانية الأنابيب والخزانات والمخاريط: dV = r dz dr dθ.
- تناسب الإحداثيات الكروية الكرات والكواكب: dV = ρ² sin ϕ dρ dϕ dθ.
- أي تعويض x = x(u, v) يمدّ المساحة بمقدار المحدد اليعقوبي |∂(x, y)/∂(u, v)|.

المعادلات الأساسية

$$dV = r\,dz\,dr\,d\theta$$

```
dV=r dz dr dθ
```

عنصر الحجم الأسطواني

$$dV = \rho^2 \sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$$

```
dV=ρ^2 dρ d dθ
```

عنصر الحجم الكروي

$$J = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = |x_u y_v - x_v y_u|$$

```
J=|((x,y))/((u,v))|=|x_uy_v-x_vy_u|
```

مصفوفة جاكوبي

$$\iint_R f\,dx\,dy = \iint_S f\,|J|\,du\,dv$$

```
_Rf dx dy=_Sf |J| du dv
```

أمثلة محلولة خطوة بخطوة

مثال 6.1 استخدم الإحداثيات الكروية لإيجاد حجم كرة نصف قطرها R.

1. $V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$.
2. $= (R^3/3)(2)(2\pi)$.

الإجابة: $4\pi R^3/3$.

مثال 6.2 قدّر كتلة الغلاف الجوي للأرض: وزن الهواء فوق كل متر مربع هو الضغط السطحي، إذن $M = \iint p/g \, dA$ على الكرة.

1. التكامل السطحي لثابت يساوي p/g مضروبًا في المساحة $4\pi R^2$.
2. $4\pi(6.371 \times 10^{6})^2 = 5.10 \times 10^{14}\ m^2$.
3. $M = 101{,}400 / 9.81 \times 5.10 \times 10^{14}$.

الإجابة: نحو $5.3 \times 10^{18}\ kg$، قريبًا من $5.1 \times 10^{18}\ kg$ لدى ناسا (اليابسة فوق مستوى سطح البحر تحمل هواءً أقل).

مثال 6.3 أوجد مساحة القطع الناقص $x^2/a^2 + y^2/b^2 \le 1$ مع $x = au$ و$y = bv$.

1. يصبح القطع الناقص قرص الوحدة $u^2 + v^2 \le 1$.
2. $J = ab$.
3. المساحة $= \pi \times ab$.

الإجابة: πab.

تمارين

حلّ كلًّا منها على الورق أولًا، ثم تحقق.

1. أوجد حجم المخروط $0 \le z \le 1 - r$ (نصف القطر 1، الارتفاع 1) بالإحداثيات الأسطوانية.

   $\int_0^{2\pi}\int_0^{1} (1 - r)\, r \, dr \, d\theta = 2\pi(1/2 - 1/3) = \pi/3$.

2. احسب $\iiint 1 \, dV$ على الصندوق $[0, 3] \times [0, 2] \times [0, 1]$.

   .6

3. أوجد المحدد اليعقوبي للإحداثيات القطبية.

   $x_r\, y_\theta - x_\theta\, y_r = \cos\theta\,(r\cos\theta) + r\sin\theta\,(\sin\theta) = r$.

4. أسطوانة نصف قطرها 1 m وارتفاعها 2 m كثافتها $1000(1 - z/4)\ \text{kg/m}^3$. أوجد كتلتها.

$\pi \int_0^2 1{,}000(1 - z/4)\, dz = \pi \times 1{,}000 \times 1.5 = 1{,}500\pi \approx 4{,}712\ \text{kg}$.

مفاهيم خاطئة شائعة

خرافة: في الإحداثيات الكروية $dV = d\rho\, d\phi\, d\theta$.
في الحقيقة: $dV = \rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$.

خرافة: ϕ تمتد من 0 إلى 2π.
في الحقيقة: ϕ (من القطب الشمالي) تمتد من 0 إلى π؛ وθ من 0 إلى 2π.

خرافة: يمكن أن يكون المحدد اليعقوبي سالبًا داخل التكامل.
في الحقيقة: استخدم قيمته المطلقة.

بطاقات تعليمية

التكامل الثلاثي

$\iiint_E f\, dV$.

الأسطوانية

$x = r\cos\theta$، $y = r\sin\theta$، z؛ $dV = r\, dz\, dr\, d\theta$.

الكروية

$dV = \rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$.

مصفوفة جاكوبي

معامل تمدد المساحة أو الحجم في تعويض ما.

الكتلة

$\iiint$ الكثافة dV.

مركز الكتلة

$\iiint x\, \rho\, dV$ / الكتلة.

اختبار ذاتي

1. عنصر الحجم الكروي هو...

$d\rho\, d\phi\, d\theta$

$\rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$

$\rho\, d\rho\, d\theta$

$r\, dz\, dr\, d\theta$

ρ² sin φ dρ dφ dθ. صندوق كروي أضلاعه dρ وdφ ρ وdθ ρ sin φ.

2. الإحداثيات الأسطوانية هي الأنسب لـ...

المكعبات

الأنابيب والخزانات

الأهرامات

المستويات

الأنابيب والخزانات. مقاطع عرضية دائرية.

3. المحدد اليعقوبي لـ x = 2u وy = 3v هو...

5

6

1

2/3

6. 2 × 3.

4. حجم كرة نصف قطرها 3:

36π

27π

12π

9π

4π(27)/3. 36π.

أعد هذا الاختبار

كيف يساعد هذا في إنقاذ الكوكب

يجمع علماء المناخ الكميات عبر حجم المحيط والغلاف الجوي بهذه التكاملات تحديدًا. فالمحتوى الحراري للمحيط، أي الحرارة المخزنة في أعلى 2000 m من البحر، تكامل ثلاثي لتغير درجة الحرارة مضروبًا في الكثافة والسعة الحرارية، وهو من أوضح سجلات الاحترار العالمي.

على Saving Planets: محور المحيطات

المصادر: NOAA NCEI: Global ocean heat content (https://www.ncei.noaa.gov/access/global-ocean-heat-content/) · صحيفة بيانات الأرض من NASA (بالإنجليزية) (https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/earthfact.html)

مصادر تعلّم مجانية

- OpenStax Calculus 3, 5.4 Triple Integrals (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/5-4-triple-integrals): قسم من كتاب مدرسي مجاني.
- OpenStax Calculus 3, 5.5 Triple Integrals in Cylindrical and Spherical Coordinates (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/5-5-triple-integrals-in-cylindrical-and-spherical-coordinates): الأسطوانية والكروية.
- OpenStax Calculus 3, 5.7 Change of Variables in Multiple Integrals (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/5-7-change-of-variables-in-multiple-integrals): المحددات اليعقوبية.

شاهد المحاضرة

Session 53 Clip: Change of Variables (https://ocw.mit.edu/courses/18-02sc-multivariable-calculus-fall-2010/resources/clip-change-of-variables/) (باللغة الإنجليزية)

MIT 18.02SC Multivariable Calculus (Fall 2010), MIT OpenCourseWare. الترخيص: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · شروط الاستخدام (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). الرابط للدراسة المجانية فقط؛ Saving Planets غير تابع لهذه الجامعة ولا يحظى بتأييدها.

أنهيت هذه الوحدة

الحقول المتجهة والتكاملات الخطية ومبرهنة غرين

الحقول المتجهة مثل الرياح والتيارات، والشغل والدوران على امتداد المنحنيات، والحقول المحافظة والجهود، ومبرهنة غرين في المستوى.

أهداف التعلّم

في نهاية هذه الوحدة ستستطيع أن:

- ارسم الحقول المتجهة وفسّرها.
- احسب التكاملات الخطية للدوال القياسية وللحقول المتجهة (الشغل).
- اختبر ما إذا كان الحقل محافظًا وأوجد جهدًا له.
- طبّق مبرهنة غرين على الدوران والتدفق في المستوى.

المفاهيم الأساسية

- يُسند الحقل المتجه متجهًا إلى كل نقطة، مثل خريطة للرياح أو التيارات.
- الشغل على امتداد مسار هو ∫_C F · dr؛ ولحلقة مغلقة يسمى الدوران.
- الحقل المحافظ تدرج، F = ∇ϕ؛ وشغله يعتمد على نقطتي الطرفين فقط، ودورانه صفر.
- مبرهنة غرين: الدوران حول منحنى مغلق يساوي تكامل الدوّار (Q_x − P_y) على المنطقة الداخلية.

المعادلات الأساسية

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$$

_C F· d r=_a^b F(r(t))· r'(t) dt

التكامل الخطي (الشغل)

$$\int_C \nabla \varphi \cdot d\mathbf{r} = \varphi(B) - \varphi(A)$$

_C· d r=(B)-(A)

المبرهنة الأساسية للتكاملات الخطية

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D (Q_x - P_y)\,dA$$

_CP dx+Q dy=_D(Q_x-P_y) dA

مبرهنة غرين

$$\text{Area} = \tfrac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx$$

```
Area=12_Cx dy-y dx
```

المساحة من الحدود

أمثلة محلولة خطوة بخطوة

مثال 7.1 ⟨y, x⟩ = F. أوجد الشغل من (0, 0) إلى (2, 3) على امتداد أي مسار.

1. P_y = 1 = Q_x، إذن F محافظ.
2. ϕ = xy تحقق ∇ϕ = ⟨y, x⟩.
3. الشغل = ϕ(2, 3) − ϕ(0, 0).

الإجابة: 6، على كل مسار.

مثال 7.2 تيار شبيه بالدوامة المحيطية F = ⟨−y, x⟩ يدور حول نقطة الأصل. أوجد دورانه حول دائرة الوحدة مباشرة وبمبرهنة غرين.

1. r = ⟨cos t, sin t⟩، إذن F · r' = sin²t + cos²t = 1، إذن ∮ = 2π.
2. غرين: Q_x − P_y = 1 − (−1) = 2؛ ∬ 2 × π = 2 dA.

الإجابة: 2π ≈ 6.28 بالطريقتين.

مثال 7.3 استخدم ½∮(x dy − y dx) لإيجاد المساحة داخل x = 3 cos t وy = 2 sin t.

1. x dy − y dx = (3 cos t)(2 cos t) + (2 sin t)(3 sin t) = 6 dt.
2. ½ ∫₀^(2π) 6 dt.

الإجابة: 6π ≈ 18.85 (πab مع a = 3 وb = 2).

تمارين

حلّ كلًّا منها على الورق أولًا، ثم تحقق.

1. هل F = ⟨2xy, x² + 1⟩ محافظ؟ أوجد ϕ.

   P_y = 2x = Q_x; ϕ = x²y + y.

2. أوجد ∫_C F · dr للحقل F = ⟨x, y⟩ على امتداد y = x² من (0, 0) إلى (1, 1).

   محافظ، ϕ = (x² + y²)/2: الشغل 1.

3. أوجد ∮(x² dx + xy dy) حول المربع [0, 1] × [0, 1]، عكس اتجاه عقارب الساعة.

   غرين: ∬ y dA = 1/2.

4. أوجد دوران $F = \langle -y, x \rangle$ حول دائرة نصف قطرها 3.

× 2 المساحة $56.5 \approx 18\pi$ =.

مفاهيم خاطئة شائعة

خرافة: كل حقل دوّاره صفر محافظ.

في الحقيقة: صحيح فقط في المناطق البسيطة الترابط (دون ثقوب).

خرافة: الشغل على امتداد مسار مغلق صفر دائمًا.

في الحقيقة: فقط للحقول المحافظة؛ أما الدوامة فتدور.

خرافة: مبرهنة غرين تصح لأي اتجاه.

في الحقيقة: تفترض الاتجاه عكس عقارب الساعة؛ واتجاه عقارب الساعة يقلب الإشارة.

بطاقات تعليمية

الحقل المتجه

متجه عند كل نقطة.

التكامل الخطي

$\int F \cdot dr$، الشغل على امتداد منحنى.

الدوران

تكامل خطي حول منحنى مغلق.

المحافظ

$\nabla \times F = 0$؛ مستقل عن المسار.

الجهد

ϕ بحيث $F = \nabla \phi$.

مبرهنة غرين

$\oint P\,dx + Q\,dy = \iint (Q_x - P_y)\,dA$.

اختبار ذاتي

1. $F = \nabla \phi$ يعني أن F...

دوراني

محافظ

صفر

ثابت

محافظ. حقل تدرج.

2. شغل حقل محافظ حول حلقة مغلقة:

2π

0

مساحته

غير معرّفة

.0 .$\phi(A) - \phi(A)$

3. تربط مبرهنة غرين التكامل الخطي بـ...

مشتقة

تكامل ثنائي

تكامل ثلاثي

متسلسلة

تكامل ثنائي. الحدود ↔ الداخل.

4. $Q_x - P_y$ للحقل $F = \langle -y, x \rangle$ يساوي...

0

1

2

−2

.2 .$1 - (-1)$

أعد هذا الاختبار

كيف يساعد هذا في إنقاذ الكوكب

الدوامات المحيطية أنظمة تيارات دوّارة هائلة: هناك خمس رئيسية، وكل منها يجمع الحطام الطافي نحو مركزه، فتتكون رقع القمامة. ودوران حقل التيارات تكامل خطي، ومبرهنة غرين تربطه بالدوران (الدوّار) في الداخل.

الرياح والتيارات على خرائط مثل earth.nullschool.net، الذي يعرض بيانات تنبؤ عامة من NOAA، حقول متجهة يمكنك قراءتها بهذه الوحدة.

على Saving Planets: محور المحيطات

المصادر: NOAA Marine Debris Program: Garbage patches (https://marinedebris.noaa.gov/discover-marine-debris/garbage-patches) · NOAA Ocean Service: Ocean currents tutorial (gyres) (https://oceanservice.noaa.gov/education/tutorial_currents/04currents4.html) · earth.nullschool.net: live global wind and ocean-current map (from NOAA GFS and other public data) (https://earth.nullschool.net/)

مصادر تعلّم مجانية

- OpenStax Calculus 3, 6.1 Vector Fields (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/6-1-vector-fields): الحقول.
- OpenStax Calculus 3, 6.2 Line Integrals (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/6-2-line-integrals): الشغل والدوران.
- OpenStax Calculus 3, 6.3 Conservative Vector Fields (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/6-3-conservative-vector-fields): الجهود.
- OpenStax Calculus 3, 6.4 Green’s Theorem (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/6-4-greens-theorem): مبرهنة غرين.

شاهد المحاضرة

Session 56 Clip: Vector Fields (https://ocw.mit.edu/courses/18-02sc-multivariable-calculus-fall-2010/resources/clip-vector-field/) (باللغة الإنجليزية)

MIT 18.02SC Multivariable Calculus (Fall 2010), MIT OpenCourseWare. الترخيص: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · شروط الاستخدام (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). الرابط للدراسة المجانية فقط؛ Saving Planets غير تابع لهذه الجامعة ولا يحظى بتأييدها.

أنهيت هذه الوحدة

التكاملات السطحية ومبرهنة ستوكس ومبرهنة التباعد

التباعد والدوّار، والأسطح الوسيطية، والتدفق عبر سطح، والمبرهنتان العظيمتان اللتان تربطان الحدود بالداخل في 3D.

أهداف التعلّم

في نهاية هذه الوحدة ستستطيع أن:

- احسب التباعد والدوّار وفسّرهما بوصفهما شدة المنبع والدوران.
- عبّر عن الأسطح وسيطيًا واحسب المساحة السطحية والتدفق.
- طبّق مبرهنة ستوكس.
- طبّق مبرهنة التباعد (غاوس) على صافي التدفق إلى الخارج.

المفاهيم الأساسية

- div F = ∇ · F يقيس التدفق الخارج لكل وحدة حجم؛ و curl F = ∇ × F يقيس الدوران.
- التدفق ∬_S F · n dS هو مقدار ما يعبر سطحًا من الحقل في وحدة الزمن.
- ستوكس: الدوران حول حافة سطح يساوي تدفق curl F عبر السطح.
- مبرهنة التباعد: صافي التدفق إلى الخارج عبر سطح مغلق يساوي التباعد الكلي في الداخل.

المعادلات الأساسية

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = P_x + Q_y + R_z$$

· F=P_x+Q_y+R_z

التباعد

$$\nabla \times \mathbf{F} = \langle R_y - Q_z,\ P_z - R_x,\ Q_x - P_y \rangle$$

× F= R_y-Q_z,\ P_z-R_x,\ Q_x-P_y

الدوّار

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS$$

_ S F· d r=_S(× F)· n dS

مبرهنة ستوكس

$$\oiint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_E \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV$$

_S F· n dS=_E· F dV

أمثلة محلولة خطوة بخطوة

مثال 8.1 أوجد التدفق الخارج لـ $F = \langle x, y, z \rangle$ عبر كرة نصف قطرها R.

1. $\operatorname{div} F = 3$.
2. مبرهنة التباعد: $3 \times (4\pi R^3/3)$.
3. تحقق مباشرة: على الكرة $F \cdot n = R$، إذن التدفق $R \times 4\pi R^2$.

الإجابة: $4\pi R^3$ بالطريقتين.

مثال 8.2 يسقط ضوء الشمس بشدة $1361\ \text{W/m}^2$ على الأرض (نصف قطرها $6371\ \text{km}$). ما القدرة الكلية التي تعترضها الأرض، وما المتوسط لكل متر مربع من سطحها؟

1. التدفق عبر قرص ظل الأرض هو $\pi R^2 \times 1361 = 1.735 \times 10^{17}\ \text{W}$.
2. وبتوزيعه على الكرة كلها (المساحة $4\pi R^2$) يصبح $1361/4$.

الإجابة: $1.74 \times 10^{17}\ \text{W}$، أو $340\ \text{W/m}^2$ في المتوسط، وهو الرقم أعلى مخطط ميزانية الطاقة لدى ناسا.

مثال 8.3 تحقق من مبرهنة ستوكس للحقل $F = \langle -y, x, 0 \rangle$ على النصف العلوي من كرة الوحدة.

1. $\operatorname{curl} F = \langle 0, 0, 2 \rangle$.
2. تدفق الدوّار عبر نصف الكرة يساوي تدفقه عبر قرص الوحدة المستوي (الحافة نفسها): $2 \times \pi$.
3. الدوران على الحافة 2π (الوحدة 7).

الإجابة: 2π بالطريقتين.

تمارين

حلّ كلًّا منها على الورق أولًا، ثم تحقق.

1. أوجد div وcurl للحقل $F = \langle x^2, yz, xy \rangle$.

   $\operatorname{div} = 2x + z$؛ $\operatorname{curl} = \langle x - y, -y, 0 \rangle$.

2. تدفق $F = \langle 0, 0, 5 \rangle$ إلى الأعلى عبر مربع الوحدة في المستوى $z = 1$.

   $5 \times 1 = 5$.

3. استخدم مبرهنة التباعد: تدفق $F = \langle x, y, z \rangle$ خارجًا من مكعب الوحدة $[0, 1]^3$.

div = 3؛ التدفق 3.

4. أوجد مساحة سطح كرة نصف قطرها 2 بتكامل dS = 4 sin ϕ dϕ dθ.

4 × 2 × 2π = 16π ≈ 50.3.

5. هل يمكن أن يكون دوّار حقل تدرج غير صفري؟

لا: ∇ × ∇ϕ = 0 للدالة الملساء ϕ.

مفاهيم خاطئة شائعة

خرافة: التدفق هو نفسه الدوران.

في الحقيقة: التدفق يعبر سطحًا؛ والدوران يجري على امتداد منحنى.

خرافة: انعدام التباعد يعني أن لا شيء يتحرك.

في الحقيقة: يعني عدم وجود منبع صافٍ: ما يدخل يخرج.

خرافة: مبرهنة التباعد تصح على الأسطح المفتوحة.

في الحقيقة: تحتاج إلى سطح مغلق؛ أما ستوكس فتتعامل مع الأسطح ذات الحافة.

بطاقات تعليمية

التباعد

∇ · F؛ شدة المنبع.

الدوّار

∇ × F؛ الدوران.

التدفق

∬F · n dS.

مبرهنة ستوكس

الدوران على الحافة = تدفق الدوّار.

مبرهنة التباعد

التدفق إلى الخارج = ∭ div F dV.

السطح المغلق

يحيط بمجسم؛ دون حافة.

اختبار ذاتي

1. div ⟨x, y, z⟩ =

0

1

3

x + y + z

1 + 1 + 1 .3.

2. تربط مبرهنة ستوكس الدوران على الحافة بـ...

تدفق F

تدفق curl F

div F

الحجم

تدفق curl F. ∬(∇ × F) n dS .٠

3. تحتاج مبرهنة التباعد إلى...

سطح مغلق

منحنى

منطقة مستوية

حقل محافظ

سطح مغلق. إنه يحيط بمجسم.

4. متوسط ضوء الشمس لكل متر مربع عند قمة الغلاف الجوي للأرض نحو...

1,361 W/m²

680 W/m²

340 W/m²

100 W/m²

340 W/m². مساحة القرص πR² على مساحة الكرة 4πR²: الربع.

أعد هذا الاختبار

كيف يساعد هذا في إنقاذ الكوكب

مناخ الأرض توازن تدفقات: يعبر ضوء الشمس قمة الغلاف الجوي بنحو 340 W/m² في المتوسط، ويجب أن تعيد الأرض الطاقة نفسها إلى الفضاء. وعندما تحبس غازات الدفيئة بعض الحرارة الخارجة، يصبح الاختلال تدفقًا صافيًا إلى الكوكب يُخزن معظمه في المحيط.

انتقال الملوثات هو الرياضيات نفسها: تنص مبرهنة التباعد على أن الملوث الذي يغادر بحيرة أو حوضًا هوائيًا عبر حدوده يساوي ما تطلقه مصادره في الداخل، مطروحًا منه ما يُزال.

على Saving Planets: محور رصد الأرض

المصادر: NASA Earth Observatory: Climate and Earth's Energy Budget (https://earthobservatory.nasa.gov/features/EnergyBalance) · صحيفة بيانات الأرض من NASA (بالإنجليزية) (https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/earthfact.html)

مصادر تعلّم مجانية

- OpenStax Calculus 3, 6.5 Divergence and Curl (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/6-5-divergence-and-curl): التباعد والدوّار.
- OpenStax Calculus 3, 6.6 Surface Integrals (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/6-6-surface-integrals): التدفق.
- OpenStax Calculus 3, 6.7 Stokes' Theorem (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/6-7-stokes-theorem): ستوكس.
- OpenStax Calculus 3, 6.8 The Divergence Theorem (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/6-8-the-divergence-theorem): غاوس.

شاهد المحاضرة

Session 95 Clip: Stokes' Theorem and Surface Independence (https://ocw.mit.edu/courses/18-02sc-multivariable-calculus-fall-2010/resources/clip-stokes-theorem-and-surface-independence/) (باللغة الإنجليزية)

MIT 18.02SC Multivariable Calculus (Fall 2010), MIT OpenCourseWare. الترخيص: CC BY-NC-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) · شروط الاستخدام (https://ocw.mit.edu/pages/privacy-and-terms-of-use/). الرابط للدراسة المجانية فقط؛ Saving Planets غير تابع لهذه الجامعة ولا يحظى بتأييدها.

أنهيت هذه الوحدة

مجموعات المسائل

هذه التمارين داخل كل وحدة. حلّها على الورق أولًا، ثم افتح الإجابة.

1. المتجهات وهندسة الفضاء
   5 مسائل

2. الدوال المتجهة والحركة في الفضاء
   4 مسائل
3. المشتقات الجزئية
   4 مسائل
4. التدرجات والاستمثال
   5 مسائل
5. التكاملات الثنائية
   5 مسائل
6. التكاملات الثلاثية وتغيير المتغيرات
   4 مسائل
7. الحقول المتجهة والتكاملات الخطية ومبرهنة غرين
   4 مسائل
8. التكاملات السطحية ومبرهنة ستوكس ومبرهنة التباعد
   5 مسائل

المختبرات الحاسوبية

تطبق أربعة مختبرات حاسوبية الوحدات: تباعد حقل رياح ودوّاره من بيانات المحطات، والميل واتجاه جريان الماء من شبكة ارتفاعات، وحجم بحيرة بتكامل ثنائي قطبي، ومدار قمر صناعي يُحسب خطوة بخطوة عبر الزمن.

البيانات النموذجية موسومة بذلك؛ وكل مختبر يربط بمصدر البيانات العامة لتجربته بعد ذلك.

مرجع السلامة: OpenStax Calculus Volume 3 (كتاب مجاني) (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/1-introduction)

المختبر A: تباعد حقل رياح ودوّاره

الأسبوع 14

الهدف: قدّر تباعد الرياح ودوّارها عند نقطة من أربع محطات محيطة، وفسّرهما بوصفهما صعودًا للهواء ودورانًا للعاصفة.

$$\nabla \cdot \mathbf{v} \approx \frac{u_E - u_W}{2\Delta} + \frac{v_N - v_S}{2\Delta}, \quad (\nabla \times \mathbf{v})_z \approx \frac{v_E - v_W}{2\Delta} - \frac{u_N - u_S}{2\Delta}$$

الفروق المركزية

الإجراء

1. أدخل الريح باتجاه الشرق (u) وباتجاه الشمال (v) عند محطات تبعد 100 km شرق مركز وغربه وشماله وجنوبه (Δ = 100 km = 10^5 m).
2. احسب التباعد والدوّار الرأسي (الدوامية).
3. فسّر الإشارات، ثم كرر مع رياح حقيقية مقروءة من earth.nullschool.net أو بيانات تنبؤ NOAA.

جدول البيانات

المحطة	u (m/s، شرقًا)	v (m/s، شمالًا)
الشرق	4	8
الغرب	6	−6
الشمال	−5	−3
الجنوب	7	−1

قيم نموذجية للتدريب، وليست خريطة طقس حقيقية.

مثال حسابي

1. التباعد $= (4 - 6)/(2 \times 10^5) + (-3 - (-1))/(2 \times 10^5) = -2 \times 10^{-5}\ s^{-1}$: الهواء يتقارب، فلا بد أن يصعد، وهذا يساعد على تكوّن السحب والمطر.
2. الدوامية $= (8 - (-6))/(2 \times 10^5) - (-5 - 7)/(2 \times 10^5) = 1.3 \times 10^{-4}\ s^{-1}$: موجبة، عكس عقارب الساعة، مثل منخفض في نصف الكرة الشمالي.

السلامة

- لا شيء يتجاوز الاستخدام العادي للحاسوب.

بديل منزلي أو افتراضي

- يكفي جدول بيانات.

earth.nullschool.net: live global wind and ocean-current map (from NOAA GFS and other public data) (https://earth.nullschool.net/) · NOAA NCEI: Global Forecast System (GFS) (https://www.ncei.noaa.gov/products/weather-climate-models/global-forecast)

الصلة بالكوكب: التقارب والدوامية هما ما يتتبعه المتنبئون للتحذير من الأمطار الغزيرة والعواصف. NOAA/NWS JetStream: Wind (https://www.weather.gov/jetstream/wind)

☐ **أكملت هذا المختبر (عمليًا أو افتراضيًا)**

المختبر B: الميل وجريان الماء من شبكة ارتفاعات

الأسبوع 7

الهدف: قدّر تدرج التضاريس من شبكة ارتفاعات وأوجد الاتجاه الذي يجري فيه ماء المطر.

$$\nabla h \approx \left\langle \frac{h_E - h_W}{2\Delta}, \frac{h_N - h_S}{2\Delta} \right\rangle$$

التدرج بالفروق المركزية

الإجراء

1. استخدم الارتفاعات على بعد 100 m شرق نقطة وغربها وشمالها وجنوبها (Δ = 100 m).
2. احسب ∇h ومقداره (الميل) وزاوية الميل arctan|∇h|.
3. اتجاه الجريان هو −∇h. ثم نزّل بلاطة ارتفاعات مجانية من USGS 3DEP وكرر لسفح تل قريب منك.

جدول البيانات

المجاور	الارتفاع (m)
المركز	250
الشرق	262
الغرب	240
الشمال	256
الجنوب	246

قيم نموذجية للتدريب.

مثال حسابي

1. ∇h ≈ ⟨(262 − 240)/200, (256 − 246)/200⟩ = ⟨0.11, 0.05⟩.
2. |∇h| = 0.121، أي زاوية ميل نحو 6.9°.
3. يجري الماء على امتداد −∇h، نحو الغرب-الجنوب الغربي؛ وتتبّع هذه الاتجاهات على شبكة يرسم حدود مستجمع مائي.

السلامة

- لا شيء يتجاوز الاستخدام العادي للحاسوب.

بديل منزلي أو افتراضي

- يكفي جدول بيانات؛ وبرامج نظم المعلومات الجغرافية اختيارية.

USGS 3D Elevation Program (3DEP) (https://www.usgs.gov/3d-elevation-program)

الصلة بالكوكب: اتجاهات الجريان المستخرجة من شبكات الارتفاع هي أساس خرائط الفيضانات والتعرية. USGS 3D Elevation Program (3DEP) (https://www.usgs.gov/3d-elevation-program)

- [ ] **أكملت هذا المختبر (عمليًا أو افتراضيًا)**

المختبر C: حجم بحيرة بتكامل ثنائي قطبي

الأسبوع 9

الهدف: احسب حجم بحيرة على شكل وعاء بدقة وبمجموع عددي، وانظر كيف يتناقص الخطأ.

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{R} D\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) r\,dr\,d\theta = \frac{\pi R^2 D}{2}$$

V=_0^2π\!\!_0^RD(1-(r^2)/(R^2))r dr dθ=(π R^2D)/(2)

بحيرة ذات حوض على شكل مجسم قطع مكافئ

الإجراء

1. خذ R = 1000 m وأقصى عمق D = 20 m.
2. احسب الحجم الدقيق.
3. قسّم البحيرة إلى n حلقة، واحسب العمق عند نصف القطر الأوسط لكل حلقة، واجمع العمق × مساحة الحلقة. جرّب n = 5 وn = 10.

جدول البيانات

الطريقة	الحجم (m³)
التامة	3.14×10^{7}
نقطة المنتصف، 5 حلقات	3.20×10^{7}
نقطة المنتصف، 10 حلقات	3.16×10^{7}

قيم محسوبة لبحيرة نموذجية.

مثال حسابي

1. الدقيق: 3.14×10^{7} m³ (π(1000)²(20)/2 = 31.4 مليون متر مكعب).
2. مجموع الـ 5 حلقات أعلى بنسبة 2.0% ومجموع الـ 10 حلقات أعلى بنسبة 0.5%: مضاعفة n تقلل الخطأ نحو أربع مرات.

السلامة

- لا شيء يتجاوز الاستخدام العادي للحاسوب.

بديل منزلي أو افتراضي

- جدول بيانات أو بايثون.

OpenStax Calculus 3, 5.3 Double Integrals in Polar Coordinates (https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/5-3-double-integrals-in-polar-coordinates)

الصلة بالكوكب: أحجام البحيرات والخزانات المستخرجة من مسوح الأعماق تخبر مديري المياه بكمية ما يمكنهم تخزينه وإطلاقه.
ناسا: مهمة SWOT (https://swot.jpl.nasa.gov/)

☐ **أكملت هذا المختبر (عمليًا أو افتراضيًا)**

المختبر D: حساب مدار قمر صناعي خطوة بخطوة عبر الزمن

الأسبوع 3

الهدف: كامل r'' = −GM r/|r|³ عدديًا لمدار شبيه بمدار Landsat وقارن بين طريقتين للخطوات.

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n - \frac{GM\,\mathbf{r}_n}{|\mathbf{r}_n|^3}\Delta t, \quad \mathbf{r}_{n+1} = \mathbf{r}_n + \mathbf{v}_{n+1}\Delta t$$

```
v_n+1= v_n-(GM r_n)/(| r_n|^3)Δ t, r_n+1= r_n+ v_n+1Δ t
```

طريقة أويلر شبه الضمنية (السمبلكتية)

الإجراء

1. ابدأ عند r = ⟨7076 km, 0⟩ مع v = ⟨0, 7505 m/s⟩ (الوحدة 2).
2. نفّذ 592 خطوة مع Δt = 10 s (دورة واحدة)، أولًا بطريقة أويلر البسيطة (حدّث r بالسرعة v القديمة)، ثم بالصيغة شبه الضمنية أعلاه.
3. قارن نصف القطر النهائي بنصف القطر الابتدائي.

جدول البيانات

الطريقة (Δt = 10 s)	تغير نصف القطر بعد دورة واحدة
أويلر البسيطة	+908 km
أويلر شبه الضمنية	+0.16 km

قيم محسوبة؛ GM = 3.986 × 10¹⁴ m³⁄s².

مثال حسابي

1. طريقة أويلر البسيطة تلتف حلزونيًا إلى الخارج بنحو 908 km في كل دورة، وهو تنبؤ عديم الفائدة؛ وحتى مع Δt = 1 s يبقى الانحراف نحو 94 km.
2. التحديث شبه الضمني يغيّر سطرًا واحدًا من الشيفرة ويبقي المدار في حدود نحو 0.16 km.

السلامة

- لا شيء يتجاوز الاستخدام العادي للحاسوب.

بديل منزلي أو افتراضي

- يصلح جدول بيانات؛ وبايثون في Colab أسهل.

Google Colab (دفاتر مجانية) (/https://colab.research.google.com) · NASA: Landsat 9 quick facts (https://landsat.gsf/c.nasa.gov/satellites/landsat-9/)

الصلة بالكوكب: يُبقي الحساب الدقيق للمدارات أقمار رصد الأرض على مساراتها المتكررة. NASA: Landsat 9 quick facts (https://landsat.gsfc.nasa.gov/satellites/landsat-9/)

☐ **أكملت هذا المختبر (عمليًا أو افتراضيًا)**

مجموعات تدريب للامتحان

وقّت نفسك: نحو 10 دقائق لكل مسألة. ثم قارن بالحلول الكاملة.

مجموعة تدريب لامتحان منتصف الفصل (الوحدات 4–1)

1. أوجد الزاوية بين ⟨1, 1, 0⟩ و⟨0, 1, 1⟩.

   1. الضرب القياسي 1؛ وطول كل منهما √2.
   2. $\cos\theta = 1/2$.

   الإجابة: $60°$.

2. أوجد المستوى المار بالنقطة (1, 1, 1) ومتجهه العمودي ⟨3, −1, 2⟩.

   1. $3(x-1) - (y-1) + 2(z-1) = 0$.

   الإجابة: $3x - y + 2z = 4$.

3. يدور قمر صناعي على نصف قطر 6771 km (ارتفاع 400 km). أوجد دوره.

   1. $T = 2\pi\sqrt{(r^3/GM)}$.

   الإجابة: $T \approx 5544\text{ s} \approx 92.4\text{ min}$.

4. كبّر $f = xy$ بشرط $x + y = 10$.

   1. $\nabla f = \lambda\langle 1, 1\rangle = \langle y, x\rangle$ تعطي $x = y = 5$.

   الإجابة: 25 عند (5, 5).

مجموعة التدريب النهائية (كل الوحدات)

1. احسب $\int_0^{2\pi}\int_0^{3} r\,dr\,d\theta$.

   1. $2\pi \times 4.5$.

   الإجابة: $9\pi \approx 28.3$ (مساحة قرص نصف قطره 3).

2. أوجد حجم نصف كرة نصف قطرها 2 بالإحداثيات الكروية.

   1. $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^{2} \rho^2 \sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta = (8/3)(1)(2\pi)$.

الإجابة: 16.76 ≈ 16π/3.

3. أوجد $\oint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ للحقل $\mathbf{F} = \langle -y, x\rangle$ حول المربع $[0,2]\times[0,2]$، عكس اتجاه عقارب الساعة.

   1. غرين: $\iint 4 \times 2 = 2\,dA$.

الإجابة: 8.

4. أوجد التدفق الخارج لـ $\mathbf{F} = \langle 2x, 0, 0\rangle$ عبر كرة نصف قطرها 1.

   1. $\operatorname{div}\mathbf{F} = 2$؛ التدفق $= 2 \times 4\pi/3 =$.

الإجابة: 8.38 ≈ 8π/3.

ورقة الصيغ

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$$

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta$$

$$n\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)=0$$

$$L=\int |\mathbf{r}'(t)|\,dt$$

$$\kappa = |\mathbf{r}'\times\mathbf{r}''|/|\mathbf{r}'|^3$$

$$v=\sqrt{GM/r}$$

$$\Delta f \approx f_x\Delta x + f_y\Delta y$$

$$D_{\mathbf{u}}f=\nabla f\cdot\mathbf{u}$$

$$D = f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2$$

$$\nabla f=\lambda\nabla g$$

$$dA = r\,dr\,d\theta$$

$$dV = r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$dV=\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$$

$$\int_C \nabla\varphi\cdot d\mathbf{r}=\varphi(B)-\varphi(A)$$

$$\oint P\,dx+Q\,dy=\iint(Q_x-P_y)\,dA$$

$$\oint\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\iint(\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,dS$$

$$\oiint\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS=\iiint\nabla\cdot\mathbf{F}\,dV$$

الثوابت

الثابت	القيمة
GM للأرض	$3.986 \times 10^{14}\ m^3/s^2$
متوسط نصف قطر الأرض	6,371 km
الإشعاع الشمسي عند الأرض	$1{,}361\ W/m^2$
متوسط الضغط السطحي	1,014 mb = 101,400 Pa
الارتفاع المميز للغلاف الجوي	8.5 km
الجاذبية المعيارية	$9.81\ m/s^2$

المصدر: صحيفة بيانات الأرض من NASA (بالإنجليزية) (https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/earthfact.html)

أدوات الرسم البياني والبيانات

استخدم هذه الأدوات والبيانات المجانية إلى جانب المقرر.

- حاسبة Desmos 3D (https://www.desmos.com/3d): ارسم الأسطح والمتجهات والمنحنيات الوسيطية في 3D.
- GeoGebra 3D (https://www.geogebra.org/3d): أداة رسم 3D مجانية أخرى.
- PhET: Vector Addition (https://phet.colorado.edu/en/simulations/vector-addition): نمِّ حدسك بالمركبات والمجاميع.
- MIT OpenCourseWare 18.02SC (https://ocw.mit.edu/courses/18-02sc-multivariable-calculus-fall-2010/): محاضرات MIT وحصص التمارين ومجموعات المسائل، مجانًا.
- earth.nullschool.net: live global wind and ocean-current map (from NOAA GFS and other public data) (https://earth.nullschool.net/): شاهد حقولًا متجهة حقيقية للرياح والتيارات في أنحاء العالم.
- USGS 3D Elevation Program (3DEP) (https://www.usgs.gov/3d-elevation-program): بيانات ارتفاع مجانية للولايات المتحدة للعمل على التدرج والميل.

مسرد المصطلحات

الدوران
التكامل الخطي لحقل حول منحنى مغلق.

الحقل المحافظ
حقل تدرج؛ الشغل مستقل عن المسار.

الضرب المتجهي
متجه عمودي على متجهين.

الدوّار
$\nabla \times F$؛ الدوران الموضعي لحقل.

الانحناء
مدى حدة انحناء المنحنى؛ $1/R$ للدائرة.

المشتقة الاتجاهية
معدل التغير في اتجاه معين، $\nabla f \cdot u$.

التباعد
∇ · F؛ صافي التدفق الخارج لكل وحدة حجم.

مبرهنة التباعد
التدفق الخارج عبر سطح مغلق يساوي تكامل التباعد في الداخل.

الضرب القياسي
a · b = |a||b| cos θ.

التدفق
مقدار ما يعبر سطحًا من حقل.

التدرج
متجه المشتقات الجزئية؛ يشير إلى أعلى المنحدر.

مبرهنة غرين
الدوران حول منحنى مستوٍ يساوي تكامل Q_x − P_y في الداخل.

مصفوفة جاكوبي
معامل التمدد لتغيير المتغيرات.

مضاعف لاغرانج
λ في ∇g∇f = λ للاستمثال المقيد.

منحنى المستوى
منحنى تكون عليه f(x, y) ثابتة.

التكامل الخطي
تكامل على امتداد منحنى.

المشتقة الجزئية
المشتقة في متغير واحد مع تثبيت البقية.

نقطة السرج
نقطة حرجة ليست قيمة عظمى ولا صغرى.

مبرهنة ستوكس
الدوران على الحافة يساوي تدفق الدوّار.

الحقل المتجه
إسناد متجه إلى كل نقطة.

معايير التقييم الذاتي

لا تُمنح درجة ولا ساعات معتمدة. استخدم هذا لتقيّم بصدق أين أنت في كل وحدة.

المستوى	كيف يبدو
4 · إتقان	يضع التكاملات والحقول من رسم دون توجيه، ويختار إحداثيات مناسبة، ويتحقق من الإجابات بطريقة ثانية أو بمبرهنة.
3 · متمكن	يحل مسائل التدريب مع أخطاء عرضية.
2 · قيد التطور	يتبع الأمثلة المحلولة لكنه يجد صعوبة في وضع الحدود أو اختيار الإحداثيات.

المستوى	كيف يبدو
١ · مبتدئ	يطبق الصيغ دون رسم أو تحقق؛ يحتاج إلى مراجعة الوحدة.

الأوزان المقترحة إذا أردت درجة

الجزء	الوزن
تمارين	30%
المختبرات الحاسوبية	15%
مجموعة تدريب منتصف الفصل	25%
مجموعة التدريب النهائية	30%

استهدف المستوى 3 أو أعلى في كل وحدة قبل الانتقال إلى الدورة التالية.

دورات ذات صلة

- مقدمة في البرمجة ENGR 130
- المعادلات التفاضلية MATH 220
- الفيزياء 2 PHYS 210 + PHYS 210L
- كل الدورات